

1. feladat (15 pont)

$$y \cdot y' = \sqrt[5]{1+2x} \cdot e^{-4y}$$

Határozza meg a differenciálegyenlet általános megoldását az $x > 0$, $y > 0$ tartományon!
(Elég az implicit alak.)

2. feladat (20 pont)

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = 4x^3, \quad y(1) = 2$$

Határozza meg a fenti kezdetiérték-probléma megoldását!

3. feladat (15 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + 6y' + 9y = 5e^{-3x}$$

4. feladat (4+10=14 pont)

- Hogyan értelmezzük a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor összegét? (Mondja ki a definíciót!)
- Milyen kapcsolat van egy numerikus sor konvergenciája és a tagokból alkotott sorozat határértéke között? Mondja ki és *igazolja* a tanult tételt!

5. feladat (7+7+7=21 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3n+2)^{-\frac{7}{5}}; \quad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-3}{n^2}; \quad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\sqrt{(2n)!}}$$

6. feladat (15 pont)¹ *Készítsen táblázatot, amiben egyértelműen jelöli válaszait!*

- Az $x_{n+1} = -4x_n + 5x_{n-1}$ lineáris rekurzióknak van-e nem konstans nulla, nullához konvergáló megoldása?
- Igaz-e, hogy ha egy alternáló sor konvergens, akkor a tagjainak abszolútértéke monoton csökken?
- Igaz-e, hogy ha egy alternáló sor tagjai nullához tartanak, akkor a sor konvergens?
- Van-e olyan homogén lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet, aminek megoldása a $\sin(x^2)$ függvény?
- Van-e olyan homogén lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet, aminek megoldása a $\sin^2(x)$ függvény?

IMSC feladat (8+7=15 IMSC pont)

Egy csúcsával lefelé fordított kúp alakú edényben (ideális) folyadék van, ami a kúp alján levő lukon át kifolyik. Kezdetben a folyadékszint magassága H , és tudjuk, hogy a folyadék kifolyási sebessége (időegység alatt kifolyt térfogat) a pillanatnyi $h(t)$ magasság négyzetgyökével arányos.

- Hogyan csökken a h folyadékszint az idő függvényében? (Adja meg a $h(t)$ függvény alakját!)
- Jelölje T_1 azt az időt, ami alatt a folyadékszint a felére csökken, és T_2 a teljes kifolyás idejét! Határozza meg a T_2/T_1 hányadost!

¹Csak a végső *igen* vagy *nem* választ értékeljük. Minden helyes válasz 3 pont, helytelen -3 pont.