INFO AN1. 2.PZH. MINTAMEGOLDÁS „β" ⌊-1-⌋ 2016. XII. 1.

1, i, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln^3(2-x)}\right) = \frac{\frac{4x}{1+4x^4}\ln^3(2-x) - \operatorname{arctg}(2x^2)\cdot 3\ln^2(2-x)\cdot\frac{-1}{2-x}}{\ln^6(2-x)}$ 9

$\boxed{17}$

ii, $\frac{d}{dx}\left(2^{\operatorname{tg}x}\cdot\sqrt{3x-1}\right) = \ln 2\cdot 2^{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{3x-1} + 2^{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ 8

— o —

2, $f(x) := \ln\left(\frac{x^2+1}{e}\right) = \ln(x^2+1) - 1$; $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 4

$\boxed{26}$

$\boxed{8}$ $f'(x_1) = -1$ 1 $\Rightarrow \frac{2x_1}{x_1^2+1} = -1 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 + 1 = (x_1+1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$ 4

$\underline{y_1 = f(x_1) = \ln 2 - 1}$ 1

Így az (x_1, y_1) ponton átmenő érintő: $\boxed{y - \ln 2 + 1 = -(x+1) \quad (1)}$ 2

$\boxed{7}$ $f'(x_2) = 0$ 1 $\Rightarrow \frac{2x_2}{x_2^2+1} = 0 \Rightarrow \underline{x_2 = 0}$ 3, $\underline{y_2 = f(x_2) = -1}$ 1, és az (x_2, y_2)

ponton átmenő érintő: $\boxed{y + 1 = 0 \quad (2)}$ 2

$\boxed{7}$ Az (1)-(2) egyenletrendszer megoldása adja a kérdéses külső pont koordinátáit: $y = -1$, $x = \ln 2 - 1$, $\underline{\underline{(\ln 2 - 1, -1)}}$

— o —

3, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

$\boxed{27}$

Lehetséges szélsőérték-helyek: $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4) = 0$ 3 3

$x_1 = 2$, $f(x_1) = 8 - 36 + 48 = 20 =: y_1$ 3

$x_2 = 4$, $f(x_2) = 64 - 144 + 96 = 16 =: y_2$ 3

$x_1, x_2 \in [0, \frac{9}{2}]$

A két végpontban a függvényértékek: $f(0) = 0 = y_0$ 3

$f(\frac{9}{2}) = \frac{729}{8} - 9\,\frac{81}{4} + 24\,\frac{9}{2} = -\frac{729}{8} + 108 = \frac{864-729}{8} = \frac{135}{8} = 16 + \frac{7}{8}$ 3

Így $\operatorname{Sup}\{f(x) \mid x \in [0, \frac{9}{2}]\} = \max\{y_0, y_1, y_2, y_3\} = \underline{\underline{20}}$. 3

$\operatorname{Inf}\{f(x) \mid x \in [0, \frac{9}{2}]\} = \min\{y_0, y_1, y_2, y_3\} = \underline{\underline{0}}$ 3

③ Indoklás: f folytonos, így Weierstrass II. tételének értelmében korlátos (zárt) intervallumon felveszi szélsőértékeit.
f deriválható, ezért a lokális szélsőérték-helyeken $f' = 0$.

— o —

4, $\boxed{30}$ $f(x) = -(x-5)^2\sqrt{x}$ $\quad D_f = [0, \infty)$ ②

$\boxed{10}$

$$f'(x) = -2(x-5)\sqrt{x} - \frac{(x-5)^2}{2\sqrt{x}} \text{ ③ } = -\frac{4x(x-5)+(x-5)^2}{2\sqrt{x}} = -\frac{5\overbrace{(x-1)(x-5)}^{x^2-6x+5}}{2\sqrt{x}} \text{ ③}$$

x	$0 \le x < 1$	1	$1 < x < 5$	5	$5 < x$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	l. min	$\nearrow$	l. max.	$\searrow$

④

$$f''(x) = (-5)\,\frac{(2x-6)2\sqrt{x} - (x^2-6x+5)\frac{2}{2\sqrt{x}}}{4x} \text{ ③ } = \frac{-5}{4x\sqrt{x}}\left(\underbrace{\overbrace{2x(2x-6)}^{4x^2-12x} - (x^2-6x+5)}_{3x^2-6x-5}\right) =$$

$\boxed{13}$

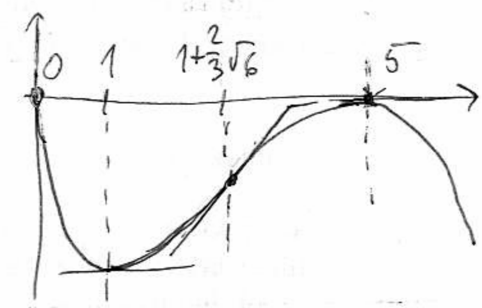
$$= \underbrace{\frac{-5}{4x\sqrt{x}}}_{<0,\ \text{ha } x>0}(3x^2-6x-5) \text{ ③}$$

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+60}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{24}}{3} = \begin{cases} 1+\frac{2}{3}\sqrt{6} \in (2;3) \\ 1-\frac{2}{3}\sqrt{6} < 0 \end{cases} \text{ ③}$$

x	$0 \le x < 1+\frac{2}{3}\sqrt{6}$	$1+\frac{2}{3}\sqrt{6}$	$1+\frac{2}{3}\sqrt{6} < x$
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	infl. p.	$\cap$

④

Grafikon: ⑤



— o —

5, $\boxed{\text{IMSC}}$ $\boxed{7}$

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)} \underset{\uparrow}{=} e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x))} \text{ ③}$$

$x \mapsto e^x$ folytonos

A kitevő határértéke:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left((-1)\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\sin x} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\cos x}\right) = 0 \text{ ④}$$

Így $A = e^0 = \underline{\underline{1}}$