Megoldás

1. feladat — 24 pont

(a) Adja meg

$$z = \frac{(3-4\imath)-(2+\imath)}{1-\imath}, \qquad \text{és} \qquad w = \left(1+\sqrt{3}\imath\right)^{2022}$$

valós és képzetes részét!

(b) Adja meg a $z^3 + \imath z^2 + 2z$ polinom komplex gyökeit!

Megoldás:

(a) $z = \dfrac{1-5\imath}{1-\imath} = \dfrac{(1-5\imath)(1+\imath)}{(1-\imath)(1+\imath)} = \dfrac{1-5\imath+\imath-5\imath^2}{1-\imath^2} = \dfrac{6-4\imath}{1+1}$,

$\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -2$ $\boxed{\textbf{8p.}}$

$|1+\sqrt{3}\imath| = \sqrt{1+3} = 2$, és mivel $\operatorname{Im}(1+\sqrt{3}\imath) = \sqrt{3} > 0$, ezért $\arg w = \arccos\left(\dfrac{\operatorname{Re}(1+\sqrt{3}\imath)}{|1+\sqrt{3}\imath|}\right) = 60°$. Így $|w| = 2^{2022}$ és $\arg w = 0°$, mert 2022 osztható 6-tal. Tehát $\operatorname{Re} w = 2^{2022}$ és $\operatorname{Im} w = 0$ $\boxed{\textbf{8p.}}$

(b) $z^3+\imath z^2+2z = z\,(z^2+\imath z+2)$ gyökei $z_1 = 0$ és $z_{2,3} = \dfrac{-\imath+\sqrt{-1-4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \dfrac{-\imath \pm 3\imath}{2}$ tehát $z_2 = \imath$ és $z_3 = -2\imath$. $\boxed{\textbf{8p.}}$

2. feladat — 26 pont

Határozza meg az

- $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$;
- $b_n = \sqrt[n]{n^2+n} - \sqrt[n]{n^2-n}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás:

- $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = \dfrac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})\cdot(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \dfrac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \to 1$ $\boxed{\textbf{13p.}}$
- Ha $n \geq 2$, akkor $0 \leq b_n \leq \sqrt[n]{2n^2} - 1 = \sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 - 1 \to 1 - 1 = 0$, így a rendőrelv miatt $b_n \to 0$ $\boxed{\textbf{13p.}}$

3. feladat **26 pont**

Határozza meg a

- $c_n = \dfrac{(-1)^n(-n)^5 + 7n^4 + 10n^2 + 6}{3n^6 + 9n^3 - 8n}$;
- $d_n = \left(\dfrac{n-3}{n+3}\right)^{2n+1}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás:

- $c_n = \dfrac{-\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{7}{n^2} + \dfrac{10}{n^4} + \dfrac{6}{n^6}}{3 + \dfrac{9}{n^3} - \dfrac{8}{n^5}} \to 0;$ $\boxed{\textbf{13p.}}$
- $d_n = \left(\dfrac{n-3}{n+3}\right)^{2n+1} = \left(\dfrac{\left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^n}{\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n}\right)^2 \cdot \dfrac{1 - \dfrac{3}{n}}{1 + \dfrac{3}{n}} \to \left(\dfrac{\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^3}\right)^2 \cdot 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{12}};$ $\boxed{\textbf{13p.}}$

4. feladat **24 pont**

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{x^{2022} - x^{2021}}{|x^{2022} + x^{2021}|}$$

függvény alábbi határértékeit, ha léteznek!

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

Megoldás:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{|x|}\right)^{2022} \cdot \dfrac{1 - \dfrac{1}{x}}{\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|} = 1;$ $\boxed{\textbf{7p.}}$
- $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm} \left(\dfrac{x}{|x|}\right)^{2021} \cdot \dfrac{x-1}{|x+1|} = \pm 1 \cdot (-1) = \mp 1$, így $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x).$ $\boxed{\textbf{13p.}}$
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ $\boxed{\textbf{4p.}}$