1. feladat (4+9=13 pont)
a) Ismertesse az algebra alaptételét! (Komplex polinomokra.)
b) Számolja ki a $z^4 - (3+4i)z^3 + 12iz^2 = 0$ egyenlet megoldásait!

Mo. *a*) Minden legalább elsőfokú komplex (egyváltozós) polinomnak van (komplex) gyöke. **(4p)** (Vagy: Minden legalább elsőfokú komplex polinom felírható elsőfokú gyöktényezők szorzataként **(4p)** , és a gyöktényezők száma (multiplicitással számolva) megegyezik a polinom fokával.)
b) $z^4 - (3+4i)z^3 + 12iz^2 = z^2(z^2 - (3+4i)z + 12i) = 0$ **(2p)** , ha $z = 0$ **(1p)** , vagy $z = \dfrac{3+4i+\sqrt{(3+4i)^2 - 48i}}{2} = \dfrac{3+4i+\sqrt{(3-4i)^2}}{2} = \dfrac{3+4i \pm (3-4i)}{2}$ **(4p)** , tehát ha $z = 3$ vagy $z = 4i$ **(2p)** .

---

2. feladat (4+10=14 pont)
a) Mi a (sorozatokra vonatkozó) rendőrelv? (Bizonyítás nélkül mondja ki a tételt!)
b) Határozza meg az $a_n = \left(\dfrac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{n+2}$ sorozat határértékét!

Mo. *a*) Ha $\forall n \geq N$ esetén $a_n \leq c_n \leq b_n$, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$. **(4p)**
b) $a_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{n^2}} \left(\dfrac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^2$ **(1p)** . Itt a második tényező 1-hez tart **(1p)** , az elsőhöz pedig tudjuk, hogy $\left(\dfrac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^{n^2} = \dfrac{\left(1 - \frac{2}{3n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{n^2}} \to \dfrac{e^{-2/3}}{e^{1/3}} = e^{-1}$ **(3p)**
így elég nagy n, és $0 < \varepsilon < e^{-1}$ esetén

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{e^{-1} - \varepsilon} \leq \left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1}\right)^n \leq \sqrt[n]{e^{-1} + \varepsilon} \to 1, \qquad \textbf{(3p)}$$

így a rendőrelv miatt $a_n \to 1$ **(2p)**

---

3. feladat (8+10=18 pont)
a) Mondja ki és bizonyítsa be a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabályt!
b) Adja meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (3x-5)e^{x^2-7x+5}$ függvény monoton! Milyen lokális szélsőértékhelyei vannak a függvénynek?

Mo. *a*) $(fg)' = f'g + fg'$ **(2p)** (Ahol f és g deriválható.)

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = && \textbf{(2p)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = && \textbf{(3p)}\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Az első határérték számításánál felhasználtuk, hogy ha g deriválható egy pontban, akkor ott folytonos is. **(1p)**

b) $f'(x) = 3e^{x^2-7x+5} + (3x-5)(2x-7)e^{x^2-7x+5} = (6x^2-31x+38)e^{x^2-7x+5} = 0$, ha **(3p)** , ha $x = \frac{31\pm 7}{12}$ **(2p)** , így a függvény monoton növő a $(-\infty, 2]$ és $\left[\frac{19}{6}, \infty\right)$ intervallumon, és monoton csökkenő a $\left[2, \frac{19}{6}\right]$ intervallumon. **(3p)** . Az $x = 2$ pontban lokális maximum, az $x = \frac{19}{6}$ pontban lokális minimum van **(2p)** .

---

4. feladat (4+11=15 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy intervallumon differenciálható függvény invertálható legyen! (Bizonyítás nélkül.)
b) $f(x) = 4 - \arccos\left(\frac{5}{x^2}\right)$
Adja meg f értelmezési tartományát és deriváltját! Határozza meg a legbővebb -3 pontot tartalmazó nyílt intervallumot, amelyen a függvény invertálható, és adja meg itt a függvény inverzét!

Mo. *a*) Ha az I intervallum minden x pontjában $f'(x) > 0$ (vagy $\forall x \in I : f'(x) < 0$), akkor f invertálható I-n. **(4p)**

b) $D_f = (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty)$ **(2p)** . $f'(x) = \dfrac{-\frac{10}{x^3}}{\sqrt{1-\frac{25}{x^4}}}$ **(3p)** . $f'(x) > 0$, ha $x \in (-\infty, -\sqrt{5})$ **(1p)** , tehát f invertálható ezen az intervallumon **(1p)** , és itt inverze $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{5}{\cos(4-x)}}$ **(4p)** .

---

5. feladat (4+11=15 pont)*
a) Ismertesse a helyettesítéses integrálás módszerét határozatlan integrálra!
b) Megfelelő helyettesítéssel adja meg az $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{x-6}$ függvény határozatlan integrálját!

Mo. *a*) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big)\dot\varphi(t)\,\mathrm{d}t|_{t=\varphi^{-1}(x)}$ **(3p)** Feltételek: egy I intervallumon φ invertálható és differenciálható **(1p)** , f-nek létezik primitív függvénye I-n.

b) $t = \sqrt{2x+4}$ **(1p)** behelyettesítéssel $x = \dfrac{t^2-4}{2} = \varphi(t)$, így $\varphi'(t) = t$ **(2p)**, tehát

$$\int \frac{\sqrt{2x+4}-2}{x-6}\,dx = \int \frac{t-2}{\frac{t^2-4}{2}-6}\cdot t\,dt = 2\int 1 + \frac{16-2t}{t^2-16}\,dt \qquad \textbf{(3p)}$$

Itt $\dfrac{16-2t}{t^2-16} = \dfrac{A}{t-4} + \dfrac{B}{t+4}$ **(1p)**, ahol $A+B=-2$ és $4(A-B)=16$ **(1p)**, így $A=1$, $B=-3$ **(1p)**, így

$$\int \frac{\sqrt{2x+4}-2}{x-6}\,dx = 2\sqrt{2x+4} + 2\ln|\sqrt{2x+4}-4| - 6\ln(\sqrt{2x+4}+4) + c \qquad \textbf{(2p)}$$

---

6. feladat (12 pont)*
Számolja ki a $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} |\sin^4 x\cos^3 x|\,dx$ integrált!

Mo. $f(x) := \sin^4 x\cos^3 x > 0$, ha $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, és $f(x) < 0$, ha $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ **(2p)**, így

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} |f(x)|\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \big(-f(x)\big)\,dx. \qquad \textbf{(2p)}.$$

$\sin^4 x\cos^3 x = \sin^4 x(1-\sin^2 x)\cos x = \sin^4 x\cos x - \sin^6 x\cos x$ **(2p)**, így

$$\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c \quad \textbf{(3p)},$$

és

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} |\sin^4 x\cos^3 x|\,dx = \left[\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \qquad \textbf{(2p)}$$
$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{7} - \frac{(1/2)^5}{5} + \frac{(1/2)^7}{7} \qquad \textbf{(1p)}.$$

---

7. feladat (6+7=13 pont)*
a) Milyen α esetén konvergens az $\dfrac{1}{x^\alpha}$ függvény improprius integrálja a $(0,1)$, és az $(1,\infty)$ intervallumon? (A tanult állításokat mondja ki bizonyítás nélkül!)
b) Számolja ki az $\displaystyle\int_0^\infty \frac{3}{4+9x^2}\,dx$ integrált!

Mo. *a*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$. **(3p)**

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ pontosan akkor konvergens, ha $\alpha < 1$. **(3p)**

b) $\displaystyle\int \frac{3}{4+9x^2}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2} + c$ **(4p)**

így $\displaystyle\int_0^\infty \frac{3}{4+9x^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3\omega}{2} = \frac{\pi}{4}$ **(3p)**

IMSC feladat (14 IMSC pont)

Hány valós zérushelye van az $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \operatorname{sh}(t^3)\,dt$ függvénynek?

Mo. $F(-1) = 0$ **(2p)** . Mivel $F'(x) = \operatorname{sh}(x^3)$ **(2p)** egyetlen zérushelye 0 **(2p)** , így legfeljebb egy pozitív és egy negatív zérushelye lehet a függvénynek **(2p)** . Mivel $F(0) < 0$ **(2p)** , és $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$ **(2p)** , így van egy pozitív zérushelye is a függvénynek **(2p)** .
