

1	2	3	4	5	6	7	Σ

1. Adja meg a következő mátrix szinguláris felbontását, ennek redukált alakját, és ennek segítségével a mátrix pszeudoinverzét: (7 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. A Gersgorin-körök segítségével mutassuk meg, hogy az alábbi mátrix diagonalizálható: (4 pont)

$$\begin{bmatrix} -40 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & -20 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 20 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

3. Az $\mathbf{A}_{11 \times 11}$ mátrixnak két sajátértéke van, 1 és -1 . Az $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 7, 6, 6. Az $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 9, 7, 6, 5, 5. Írjuk fel az \mathbf{A} mátrix \mathbf{J} Jordan-féle normálalakját, minimálpolinomját, és adjuk meg a $\sin(\pi\mathbf{J})$ mátrixot! (7 pont)

4. Adjuk meg az \mathbf{A} mátrix Frobenius-, 1-, 2- és ∞ -normáját, valamint az \mathbf{A}^{-1} mátrix 2-normáját, ahol (6 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mennyi az $r = \rho(\mathbf{A})$ spektrálsugár értéke? Létezik-e a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} \mathbf{A}^n$$

határérték (a választ indokoljuk), és ha igen, akkor mennyi az értéke? (6 pont)

6. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

- Hogy szól az Eckart–Young-tétel? (2 pont)
- Hogy szól a Frobenius–Kőnig-tétel? (2 pont)

7. Hogyan állítható elő szinguláris érték szerinti felbontásából a polárfelbontása? Igazoljuk, hogy a felbontásbeli mátrixok teljesítik a polárfelbontásnál előírt feltételeket! (6 pont)