sztochasztika

2010. dec. 20.

Mozgó-átlag ($MA(q)$) folyamat:

1. · adott ξ_n ($n \in \mathbb{Z}$) fehérzaj, σ^2 szórásnégyzettel, μ várható értékkel. $X_n = b_0 \cdot \xi_n + b_1 \cdot \xi_{n-1} + \ldots + b_q \cdot \xi_{n-q}$
ahol $b_i \in \mathbb{R}$ súlyozótényezők.

Autoregresszív ($AR(p)$) folyamat:

· adott ξ_n fehérzaj, és $a_1 \ldots a_p \in \mathbb{R}$. Ha X_n kielégíti az $X_n = a_1 \cdot X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \ldots a_p \cdot X_{n-p}$ egyenletet, akkor X autoregr. foly. Egy AR foly. stacionárius, ha nincs gyöke az egységkörön.

2.
$$\left.\begin{array}{l} p_s = 0{,}1 \\ p_b = 0{,}2 \\ p_n = 0{,}7 \end{array}\right\} n = 200 \qquad r = 3 \qquad \begin{array}{l} \nu_s = 34 \\ \nu_b = 36 \\ \nu_n = 130 \end{array}$$

illeszkedésvizsgálat:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = \frac{(34 - 200 \cdot 0{,}1)^2}{200 \cdot 0{,}1} + \frac{(36 - 200 \cdot 0{,}2)^2}{200 \cdot 0{,}2} +$$

$$+ \frac{(130 - 200 \cdot 0{,}7)^2}{200 \cdot 0{,}7} = \frac{14^2}{20} + \frac{4^2}{40} + \frac{10^2}{140} = 10{,}914$$

ezt kell összehasonlítani a χ^2_{r-1} eloszlás $(1-\varepsilon)$ kvantilisével,

azaz $\chi^2_{3-1}(0{,}05)$-tel

$\chi^2_2(0{,}05) = 5{,}991 < 10{,}914$, tehát elutasítjuk az állítást.

3.
$$\left.\begin{array}{l} \sigma \text{ szórás} \\ m \text{ várható érték} \end{array}\right\} \text{normális eloszlás} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$
(sűrűségfv.)

n napon keresztül mértünk $x_1 \ldots x_n$ eredménnyel

Adjunk max. likelihood-becslést σ-ra!

· mivel $f(x)$ folytonos, a likelihood-függvénye $L_\sigma(x_1 \ldots x_n) =$

$$= \prod_{i=1}^{n} f_\sigma(x_i)$$

~~deriválva~~: logaritmizáljuk (így könnyebb deriválni)

$$l_\sigma(x_1 \ldots x_n) = \ln L_\sigma(x_1 \ldots x_n) = \ln(f_\sigma(x_1)) + \ldots + \ln(f_\sigma(x_n)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln(f_\sigma(x_i))$$

· deriváljuk σ szerint:

$$\frac{d\, l_\sigma(x_1 \ldots x_n)}{d\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\sigma}\left(\ln\left(f_\sigma(x_i)\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\sigma}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\sigma}\left(\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} + \ln e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d\left(\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)}{d\sigma} + \frac{d\left(-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{d\sigma}\right] = n \cdot \frac{d\left(\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)}{d\sigma} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{d\left(-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{d\sigma} = n \cdot \frac{d\left(\ln \sqrt{2\pi}\cdot\sigma\right)^{-1}}{d\sigma} + \sum_{i=1}^{n} -\frac{(x_i-m)^2}{2} \cdot \frac{d\left(\sigma^{-2}\right)}{d\sigma} =$$

$$= -n \cdot \frac{d\left(\ln\left(\sqrt{2\pi}\cdot\sigma\right)\right)}{d\sigma} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 (-2)\cdot\sigma^{-3} =$$

$$= -n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \sqrt{2\pi} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2$$

· hol maximális l_σ?

$$\frac{d\, l_\sigma}{d\sigma} = 0 \rightarrow -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 = 0 \quad / \cdot \sigma^3$$

$$-n\cdot\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 = 0$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}$$

9:15 - 10:45 Hép. Iván 45/a 3 4s ~ 1 perc

Sztochasztika

M/M/1/B

véges puffe poisson beérk. param. = 1

csomag méretét $Exp\left(\frac{1}{2}\right)$ $E = 2 \sim X_1$

puffer-be 10 fér

(a) ha c a kap. akkor 1 cs. kiadg. ideje milyen eloszlású

$$X_c = \frac{X_1}{c} \quad F_{X_c} = P\left(\frac{X_1}{c} < x\right) = P(X_1 < xc) = 1 - e^{-\frac{1}{2}xc}$$

exp(- eloszl. fv.

$$\Rightarrow X_c \sim \underline{\underline{Exp\left(\frac{c}{2}\right)}} \qquad = 1 - e^{-\frac{c}{2}x}$$

(b)

X(t) t időben bentlévő cs. sz.

X(t) állapottere $\{0, 1, \ldots 10\}$

ráta mátrix

$$\Lambda = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots\ 10 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & \frac{c}{2} & 0 & \lambda & & \\ 2 & & \frac{c}{2} & 0 & \lambda & \ldots \\ \cancel{9} & & & & & 0\ \cancel{\lambda} \\ 10 & & & & & \frac{c}{2}\ 0 \end{array}$$

c) Beágyazott markov átm. valósz. mátr.

tartási idő paramétereknek

$\lambda(0)=\lambda$

$\lambda(i)=\lambda+\frac{c}{2}$ K $\quad 1 \leq i \leq 9$

$\lambda(10)=\frac{c}{2}$

$$Q_{ij}=\frac{\Lambda_{ij}}{\sum_{k \in S} \Lambda_{ik}} \text{ alapján}$$

$Q_{01}=1$

$Q_{i,i+1}=\frac{\lambda}{\frac{c}{2}+\lambda} \quad 1 \leq i \leq 9$

$Q_{i,i-1}=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}+\lambda}$

$Q_{10,9}=1$

$(X(t), t \in [0,\infty), P(t)=e^{At})$

$X_n, \; n=0,1,2 \ldots \; Q$

$[P(t)]_{ij}=P(X(t)=j \mid X(0)=i)$

d) stac. eloszl.

A gen. mtx

$\pi=[\pi_0 \; \pi_1 \; \ldots \; \pi_{10}]$ = stac. eloszl.

$$\left.\begin{array}{l} \pi A=0 \\ [\pi_0+\pi_1 \ldots \pi_{10}]=1 \end{array}\right\} \text{-mo.}$$

$A = ?$ $A_{ij} = \Lambda_{ij}$ $A_{ii} = -\sum_{j \in S} \Lambda_{ij}$ "- sorösszeg"

$-\lambda \pi_0 + \frac{c}{2} \pi_1 = 0$ $\pi_1 = \frac{2\lambda}{c} \pi_0$

$\lambda \pi_0 - \left(\frac{c}{2} + \lambda\right) \pi_1 + \frac{c}{2} \pi_2 = 0$

$\lambda \pi_0 - \left(\frac{c}{2} + \lambda\right) \frac{2\lambda}{c} \pi_0 + \frac{c}{2} \pi_2 = 0$

$\lambda \pi_0 - 2\pi_0 + \frac{2\lambda^2}{c} \pi_0 + \frac{c}{2} \pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_2 = \frac{(2\lambda)^2}{c^2} \pi_0$

$\pi_i = \left(\frac{2\lambda}{c}\right)^i \pi_0$

rekurzióval $i = 1, \dots 10$

2. ba $\pi_0 + \frac{2\lambda}{c} \pi_0 + \dots + \left(\frac{2\lambda}{c}\right)^{10} \pi_0 = 1$

hányad részét utasítja vissza

ez π_{10}

$\pi_0 \frac{\left(\frac{2\lambda}{c}\right)^{11} - 1}{\frac{2\lambda}{c} - 1} = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{\frac{2\lambda}{c} - 1}{\left(\frac{2\lambda}{c}\right)^{11} - 1}$

$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0$