ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

2. Aláíráspótló zárthelyi

2009.12.17.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

a) Hogyan határozhatjuk meg egy hatványsor konvergenciasugarát? (Ismertessen egyet a tanult tételek közül.)

b) Határozza meg a következő hatványsor konvergenciasugarát!

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8n^2+2n+3}{(2n+3)^2}\right)^n x^{2n}$$

2. feladat (10 pont)
Határozza meg az $f(x)=e^{5x}$ függvény 0 valamint 2 bázispont körüli Taylor-sorát!

3. feladat (17 pont)

a) Adja meg az $f(x)=\frac{1}{2+3x}$ függvény $x_0=0$ bázispont körüli Taylor-sorát, és határozza meg a Taylor-sor konvergenciasugarát!

b) Az előző eredmény felhasználásával határozza meg a $g(x)=\ln(2+3x)$ függvény $x_0=0$ bázispontú Taylor-sorát, és határozza meg a Taylor-sor konvergenciasugarát!

4. feladat (15 pont)
Határozza meg az

$$f(x)=\sqrt[3]{\left(8-2x^3\right)^2}$$

függvény $x_0=0$ bázispontú Taylor-sorát! Mennyi a sor konvergenciasugara? A Taylor-sor segítségével adja meg (elemi műveletekkel kifejezve) az $f^{(9)}(0)$ és $f^{(10)}(0)$ deriváltak értékét!

5. feladat (13 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2+6y^2+xy}{x^2+2y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0);\\ 3, & \text{ha } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Létezik-e f határértéke az origóban? Ha igen, adja meg értékét! Hol nem folytonos az f függvény?

6. feladat (18 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?

b) Határozza meg $f(x,y)$ parciális deriváltjait! (Az origóban a definícióval dolgozzon!)

c) Mely pontokban létezik és hol nem létezik f totális deriváltja? (Válaszát indokolja.)

7. feladat (14 pont)
A $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kétszer deriválható függvény változójának helyére írjuk a $\frac{2x}{1+y^2}$ kifejezést, és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x,y)$-nal. Tehát $f(x,y)=g\left(\frac{2x}{1+y^2}\right)$. Határozzuk meg f első és másodrendű parciális deriváltjait!

Pótfeladatok. A következő feladatokat csak az elégséges szint (40%) eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (10 pont)
Írja föl a következő függvények $x_0=0$ bázispontú Taylor-sorát!

$$f(x)=\sin(2x), \qquad g(x)=\sqrt{e^{x+2}} \qquad h(x)=\operatorname{sh}(x)$$

9. feladat (10 pont)
Adja meg az $f(x,y)=2+3x^2y-xy^2$ függvény $(x_0,y_0)=(1,2)$ pontban vett, $\mathbf{v}=(3,-4)$ vektorral párhuzamos iránymenti deriváltját!