KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN: NÉHÁNY FELADAT MEGOLDÁSA

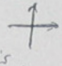
(4.) $w = \bar{z} z^2 = \bar{z} z \cdot z = |z|^2 z = (x^2+y^2)(x+jy) = x^3+xy^2+j(x^2y+y^3)$

$\left.\begin{array}{l} u = x^3+xy^2 \\ v = x^2y+y^3 \end{array}\right\}$ tot. deriválható, mert a parciális deriváltak mindenütt léteznek és folytonosak

$u'_x = 3x^2+y^2 \qquad v'_y = x^2+3y^2$

$u'_y = 2xy \qquad v'_x = 2xy$

C-R: $u'_x = v'_y \qquad 3x^2+y^2 = x^2+3y^2 \to x^2 = y^2 \to y = \pm x$ 

$u'_y = -v'_x \qquad 2xy = -2xy \to xy = 0 \to x = 0 \vee y = 0$ 

Tehát a $0+j0$ pontban deriválható és sehol sem reguláris.

(7.) Reguláris $f(z)$ valós és képzetes része harmonikus. Tehát $\Delta v \equiv 0$-nak kell teljesülnie.

$v'_x = M(2xy+y) \qquad v'_y = M(x^2+x)-12y^2$

$v''_{xx} = M2y \qquad v''_{yy} = -24y$

$\Delta v = v''_{xx}+v''_{yy} = M\cdot 2y - 24y = 0 \longrightarrow M = 12$

Tehát $v(x,y) = 12(x^2y+xy)-4y^3-3$

$f'(z)$ meghatározható u meghatározása nélkül is.

$f'(z) = u'_x + jv'_x = v'_y + jv'_x \;:\; f'(1+2j) = v'_y(1,2)+jv'_x(1,2) = -24+j72$

C-R: $u'_x = v'_y$

(9/c) $u'_x = 3x^2-3y^2+6x \qquad u'_y = -6xy-6y$

$u''_{xx} = 6x+6 \qquad u''_{yy} = -6x-6$

$\Delta u = u''_{xx}+u''_{yy} = 6x+6-6x-6 \equiv 0$, tehát valóban harmonikus.

C-R: $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$

Tehát olyan $v(x,y)$ függvényt keresünk, melyre

$v'_y = 3x^2-3y^2+6x \quad (1)$

$v'_x = 6xy+6y \quad (2)$

(2)-ből: $v(x,y) = \int(6xy+6y)\,dx = 3x^2y+6xy+C(y)$

(1): $3x^2+6x+C'(y) = 3x^2-3y^2+6x \to C'(y) = -3y^2 \to C(y) = -y^3+K,\; K\in\mathbb{R}$

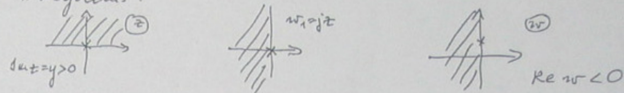
$w = x^3-3xy^2+3x^2-3y^2+1+j(3x^2y+6xy-y^3+K)$

Most ilyen példa nem lesz

(11) $w = jz+j = 1\, e^{j\frac{\pi}{2}} z + j$ ← forgatás, ← eltolás

nyújtás-zsugorítás (most nincs)

1. megoldás:



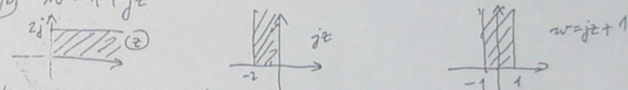
2. megoldás

$w = u+jv = j(x+jy)+j = -y+j(x+1) \qquad u = -y < 0 \quad (y>0)$

$v = x+1 \in \mathbb{R}$, mert $x\in\mathbb{R}$

Tehát $u = \mathrm{Re}\, w < 0$ félsíkot kapunk.

(12/b) $w = 1+jz$



Vagy: $w = u+jv = 1+j(x+jy) \to u = 1-y,\; v = x$ és $0<y<2,\; x>0$

$0<y<2 \to -2<-y<0 \to -1<u=1-y<1,\; v=x>0$

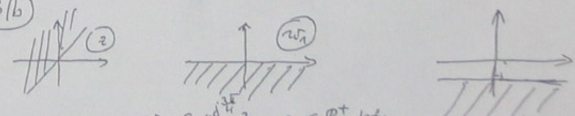
Tehát $-1 < \mathrm{Re}\, w = u < 1$ és $\mathrm{Im}\, w = v > 0$ tartományt kapunk.

(12/c) $w = -jz-1 \longrightarrow z = \dfrac{w+1}{-j}$ így $|z|<1$ miatt:

$\dfrac{|w+1|}{|-j|} = |w+1| < 1$

Tehát a képtartomány $|w-(-1)|<1$: -1 középpontú 1 sugarú kör belseje.

(13/b)



$w_1 = \rho_0 e^{j\frac{3\pi}{4}} z \quad \rho_0 \in \mathbb{R}^+$ tetsz. $\qquad w = w_1 - j + \alpha \quad \alpha\in\mathbb{R}$

Nem kell: 14 – 22. feladatok!

(28) a.) $e^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$

$e^{-1-2j} = e^{-1}(\cos(-2)+j\sin(-2)) = \frac{1}{e}(\cos 2 - j\sin 2)$

b.) $\cos(2-j\pi) = \cos 2 \cos j\pi + \sin 2 \sin j\pi = \cos 2\, \mathrm{ch}\pi + j \sin 2\, \mathrm{sh}\pi$

c) $\ln(-6) = \ln 6 + j(-\pi)$

$\mathrm{Ln}(-6) = \ln 6 + j(-\pi + 2k\pi)$

$\mathrm{Ln}(3j) = \ln 3 + j(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

d) $j^{2j} = e^{2j\,\mathrm{Ln}\, j} = e^{2j(\ln 1 + j(\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = e^{-2(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

$(1+j)^{1-j} = e^{(1-j)\,\mathrm{Ln}(1+j)} = e^{(1-j)(\ln\sqrt{2} + j(\frac{\pi}{4}+2k\pi))} = \ldots$

(31) f mindenütt reguláris. Ezért konform, ha $f'(z) \neq 0$.
Tehát

$2z3\sin z + (z^2-2)3\cos z - (3z^2-6)\cos z + (z^3-6z+8)\sin z = 0$

$\to \sin z\,(z^3+8) = 0 \to z = k\pi$

$z = 2,\ 2e^{j\frac{2\pi}{3}},\ 2e^{j\frac{4\pi}{3}}$ } pontok kivételével konform

(35) a.) $f(z) = \overline{\sin 3z} = \overline{\sin(3x+j3y)} = \overline{\sin 3x \cos j3y + \cos 3x \sin j3y} =$

$= \overline{\sin 3x\, \mathrm{ch}3y + j\cos 3x\, \mathrm{sh}3y} = \sin 3x\, \mathrm{ch}3y - j\cos 3x\, \mathrm{sh}3y$

$u = \sin 3x\, \mathrm{ch}3y$
$v = -\cos 3x\, \mathrm{sh}3y$ } mindenütt tot. deriválható, mert …

$u'_x = 3\cos 3x\, \mathrm{ch}3y \qquad v'_y = -3\cos 3x\, \mathrm{ch}3y$

$u'_y = 3\sin 3x\, \mathrm{sh}3y \qquad v'_x = 3\sin 3x\, \mathrm{sh}3y$

C-R: $u'_x = v'_y$: $\cos 3x\, \mathrm{ch}3y = 0$ (1)

$u'_y = -v'_x$: $\sin 3x\, \mathrm{sh}3y = 0$ (2)

(1)-ből, mivel $\mathrm{ch}3y \neq 0$: $\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, vagyis $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

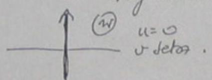
$\sin 3x \neq 0$ miatt (2)-ből $\mathrm{sh}\,3y = 0 \to y = 0$

Tehát a $z = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} + j0$ pontokban deriválható és sehol sem reguláris.

b.) α) $\mathrm{Re}\, z = x = \frac{\pi}{3}$

$u(\frac{\pi}{3}, y) = \sin\pi\, \mathrm{ch}3y = 0$

$v(\frac{\pi}{3}, y) = -\cos\pi\, \mathrm{sh}3y = \mathrm{sh}3y$



β.) Ez nem kell.

(37/a.) $\cos jz = 2j \sin jz$

$\mathrm{ch}\, z = 2jj\, \mathrm{sh}\, z \to \mathrm{ch}\, z = -2\,\mathrm{sh}\, z$

$\frac{e^z+e^{-z}}{2} = -2\,\frac{e^z-e^{-z}}{2} \to 3e^z - e^{-z} = 0 \to 3e^{2z} - 1 = 0$

$\to e^{2z} = \frac{1}{3} \to 2z = \mathrm{Ln}\frac{1}{3}$

$2z = \ln\frac{1}{3} + j2k\pi$

$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} + jk\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

(37/c) $\sin 3z + 2 = 0$

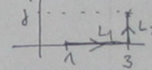
$\frac{e^{j3z} - e^{-j3z}}{2j} + 2 = 0 \to e^{j3z} - e^{-j3z} + 4j = 0$

$u := e^{j3z}$: $u^2 + 4ju - 1 = 0 \quad u_{1,2} = \frac{-4j + \sqrt{-12}}{2} = j(-2 \pm \sqrt{3})$

$e^{j3z} = j(-2\pm\sqrt{3}) \to j3z = \mathrm{Ln}\, j\underbrace{(-2\pm\sqrt{3})}_{<0}$

$j3z = \ln(2\mp\sqrt{3}) + j(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \to z = -j\frac{1}{3}\ln(2\mp\sqrt{3}) + \frac{1}{3}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

(38/c) $\int_L \ldots = \int_{L_1} \ldots + \int_{L_2} \ldots$



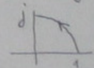
L_1: $z(t) = t + j0$; $z'(t) = 1$, $1 \le t \le 3$

$\int_{L_1} e^{2(x-jy)}\,dz = \int_1^3 e^{2t}\,dt = \frac{e^{2t}}{2}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(e^6 - e^2)$

L_2: $z(t) = 3 + jt$; $z'(t) = j$, $0 \le t \le 1$

$\int_{L} e^{2(x-jy)}\,dz = \int_0^1 e^{2(3-jt)}\,j\,dt = je^6 \frac{e^{-j2t}}{-j2}\Big|_0^1 = -\frac{e^6}{2}(\underbrace{e^{-j2}}_{\cos 2 - j\sin 2} - 1) = \ldots$

(38/g) $\underbrace{\int_L \bar{z}\,dz}_{\text{paraméterezéssel}} + \underbrace{\int_L (\mathrm{sh}2z + \cos^2 z)\,dz}_{\text{prim. függvénnyel}} = I_1 + I_2$



I_1: $z(t) = 1\cdot\cos t + j1\sin t = e^{jt}$; $z'(t) = je^{jt}$ $\quad t: 0 \to \frac{\pi}{2}$

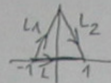
$I_1 = \int_0^{\pi/2} e^{-jt}\, j e^{jt}\,dt = j\int_0^{\pi/2} dt = j\frac{\pi}{2}$

$I_2 = \int_L \left(\mathrm{sh}2z + \frac{1+\cos 2z}{2}\right)dz = \frac{\mathrm{ch}2z}{2} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin 2z\Big|_1^j =$

$= \frac{\operatorname{ch} 2j}{2} + \frac{1}{2} j + \frac{1}{4} \sin 2j - \left(\frac{\operatorname{ch} 2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\right) =$

$= \frac{\cos 2}{2} - \frac{\operatorname{ch} 2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin 2 + j\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2\right)$

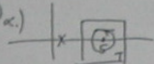
38/i f reguláris, ezért az integrálás független az úttól.



$\int_{L_1 \cup L_2} f(z)\,dz = \int_L f(z)\,dz = \int_{-1}^{1} (t+2)\, e^{-t}\, dt = \ldots$ parc. integrálással

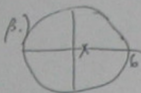
$z(t) = t$
$z'(t) = 1$
$-1 \le t \le 1$

39/a α.)



g reg. T-n $\Rightarrow \oint_{|z-5|=1} \underbrace{\frac{e^z}{z-1}}_{g(z)} dz = 0$ (Cauchy-féle alaptétel)

β.)



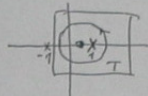
$\oint_{|z|=6} \frac{(e^z)^{\text{reg.}}}{z-1} dz = 2\pi j\, e^z \Big|_{z=1} = j 2\pi e$

$z_0 = 1$

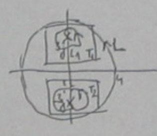
39/d

$\oint_L \frac{\left(\frac{e^{z^2}}{z+1}\right) f \text{ reg } T\text{-n}}{z-1} dz = 2\pi j \frac{e^{z^2}}{z+1}\Big|_{z=1} = j 2\pi \frac{e}{2}$

$z_0 = 1$



39/h $\oint_L \ldots = \oint_{L_1} \ldots + \oint_{L_2} \ldots$

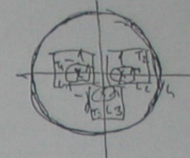


$= \oint_{L_1} \frac{\left(\frac{\sin z}{(z+3j)^2}\right) \text{reg } T_1\text{-en}}{(z-3j)^2} dz + \oint_{L_2} \frac{\left(\frac{\sin z}{(z-3j)^2}\right) \text{reg. } T_2\text{-n}}{(z+3j)^2} dz =$

$z_0 = 3j$, $n+1 = 2 \to n = 1$ $\qquad$ $z_0 = -3j$, $n = 1$

$= \frac{2\pi j}{1!} \left(\frac{\sin z}{(z+3j)^2}\right)'\Big|_{z=3j} + \frac{2\pi j}{1!} \left(\frac{\sin z}{(z-3j)^2}\right)'\Big|_{z=-3j} = \ldots$

39/i $\oint_L \ldots = \oint_{L_1} \ldots + \oint_{L_2} \ldots + \oint_{L_3} \ldots =$



$= \oint_{L_1} \frac{\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) f}{(z+1)^2} dz + \oint_{L_2} \frac{\left(\frac{z}{(z+1)^2}\right) f}{(z-1)^2} dz + \oint_{L_3} \frac{(\operatorname{sh} z)\, f}{z+j} dz$

A kiadódó f reguláris a bejelölt megfelelő T_i tartományon, alkalmazhatók a Cauchy-féle integrálformulák.

$= \frac{2\pi j}{1!} \left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)'\Big|_{z=-1} + \frac{2\pi j}{1!} \left(\frac{z}{(z+1)^2}\right)'\Big|_{z=1} + 2\pi j\, \underbrace{\operatorname{sh}(-j)}_{-j \sin 1} = \ldots$

39/n $I = \oint_{L_1} \frac{\frac{\sin z}{(z-j)^2}}{z-0} dz + \oint_{L_2} \frac{\frac{\sin z}{z}}{(z-j)^2} dz =$

$= \underbrace{2\pi j \frac{\sin 0}{(0-j)^2}}_{=0} + 2\pi j \left(\frac{\sin z}{z}\right)'\Big|_{z=j} = \ldots$

44/b $\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z\, 2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ $\qquad$ KT.: $|z| > 0$

($z = 0$: harmadrendű pólus)

Pl. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz = 2\pi j \underbrace{\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{z^3}}_{=\frac{1}{2}} = j\pi$

45/b $\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots$

$f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2\, 2!} + \frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} + \ldots$ $\qquad$ KT: $|z| > 0$

($z = 0$: negyedrendű pólus)

Pl. $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4} = 0$

45/c $\operatorname{ch} u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots$ $\qquad$ $\forall\, u$-ra

$\operatorname{ch} z^2 = 1 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} + \ldots$ $\qquad$ $\forall\, z$-re

$$f(z)=\frac{1}{z\,2!}+\frac{z^3}{4!}+\cdots \qquad KT: |z|>0$$

$z=0$: elsőrendű pólus ; $\underset{z=0}{\operatorname{res}} \frac{\operatorname{ch} z^2-1}{z^5}=\frac{1}{2}$

45/d Szinguláris pontok: $z=1$ ill. $z=-2$

Mindkét esetben $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

$z=1$ elsőrendű pólus, mert

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z-1}\underbrace{\frac{\sin(z-1)}{z-1}}_{1}\frac{1}{(z+2)^2}=\frac{1}{9}\neq 0 \qquad \left(\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1\right)$$

$z=-2$ másodrendű pólus:

$$\lim_{z\to -2}(z+2)^2\frac{1}{(z+2)^2}\frac{\sin(z-1)}{(z-1)^2}=\frac{\sin(-3)}{9}\neq 0$$

45/f Sorfejtéssel:

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots \qquad \forall u\text{-ra}$$

$$e^{\frac{1}{z^2}}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4\,2!}+\frac{1}{z^6\cdot 3!}+\cdots \qquad |z|>0$$

∞ sok negatív kitevőjű tag $\Rightarrow$ $z=0$ lényeges szingularitás

46.

Sorfejtéssel oldható meg: a.), b), c), h.)

8.2.b vagy 8.2.c (27. old a segédletben) használható: d.) e) f) g) -nél

Pl. **46/f** $z=3j$ elsőrendű pólus, mert

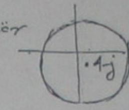
$$\lim_{z\to 3j}(z-3j)\frac{\ln z}{(z-3j)(z+3j)}=\underbrace{\frac{\ln 3j}{6j}}\neq 0$$

Ez egyben a reziduum értéke.

$$\underset{z=3j}{\operatorname{res}} f(z)=\frac{\ln 3+j\frac{\pi}{2}}{6j}=\frac{\pi}{12}-j\frac{\ln 3}{6}$$

Megjegyzés: a szingularitások jellegét most nem vettük, tehát csak a sorfejtések fontosak.

47/d $|z-(1-j)|=5$: $1-j$ középpontú, 5 sugarú kör



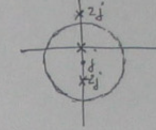
$$\oint_L \frac{\operatorname{sh} z-z}{z^6}dz=2\pi j\,\underset{z=0}{\operatorname{res}}\frac{\operatorname{sh} z-z}{z^6}=2\pi j\frac{1}{5!}\text{, mert}$$

$$\operatorname{sh} z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

$$\frac{\operatorname{sh} z-z}{z^6}=\frac{1}{z^3\,3!}+\frac{1}{z\,5!}+\frac{z}{7!} \qquad |z|>0$$

47/g

$$\oint_{|z-(-j)|=2}\underbrace{\frac{(z+j)(z+2j)}{z\,(z+2j)(z-2j)}}_{f(z)}dz=I$$



f szinguláris pontjai:

$z=0$ elsőrendű pólus

$z=2j$ —— || ——, de kívül esik

$z=-2j$ megszüntethető szingularitás

$$I=2\pi j\left(\underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z)+\underbrace{\underset{z=-2j}{\operatorname{res}} f(z)}_{=0}\right)=2\pi j\cdot\left(-\frac{1}{2}+0\right)$$

(mivel megszüntethető sz.)

$$\underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z)=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\frac{j}{-2j}=-\frac{1}{2}$$

(A feladat a Cauchy-féle integrálformulával is megoldható lenne.)

48 a) $e^z=e^{z-2}e^2=e^2\sum\limits_0^\infty\frac{(z-2)^n}{n!} \qquad \forall z\text{-re}$

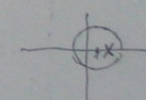
$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^3}e^2\sum_0^\infty\frac{(z-2)^n}{n!}=e^2\sum_{n=0}^\infty\frac{(z-2)^{n-3}}{n!}=e^2\left(\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{(z-2)\,2!}+\cdots\right)$$

kr. $|z-2|>0$

$z=2$: harmadrendű pólus

$$\underset{z=2}{\operatorname{res}} f(z)=e^2\frac{1}{2!}=\frac{e^2}{2}$$

b) $\oint\limits_{|z-1|=2} f(z)dz=2\pi j\,\underset{z=2}{\operatorname{res}} f(z)=2\pi j\frac{e^2}{2}=j\pi e^2$

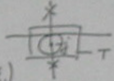


Korábbi vizsgapéldák

Pl. a) $\oint\limits_{|z+j|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2+9}\, dz = ?$

b.) $\int\limits_L \bar{z} z\, dz = ?$ L: $y = 2x$ egyenes $1 \le x \le 3$ része, irányítás x növekvő értékeinek megfelelően.

M.: a) Szinguláris pontok: $z = \pm 3j$



f reg z.ö.f. T-n $\Rightarrow$

$$\oint\limits_{|z+j|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2+9}\, dz = 0 \quad \text{(Cauchy-féle alapt.)}$$

b) $z(t) = t + j2t$ $\quad z'(t) = 1 + j2$ $\quad 1 \le t \le 3$

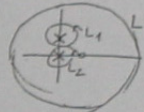
$$\int \underbrace{\bar{z} z}_{x^2+y^2}\, dz = \int_1^3 \underbrace{(t^2 + (2t)^2)}_{5t^2}(1+j2)\, dt = 5(1+j2)\int_1^3 t^2\, dt =$$

$$= 5(1+j2)\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^3 = \frac{5}{3}(1+j2)(3^3-1) = \frac{130}{3}(1+j2)$$

Pl.

$$\oint\limits_{|z-1|=3} \underbrace{\frac{e^{\pi z}-1}{(z-i)z}}_{:= g(z)}\, dz = ?$$

M.: $\oint\limits_L g(z)\, dz = \oint\limits_{L_1} g(z)\, dz + \oint\limits_{L_2} g(z)\, dz$



L: $|z-1| = 3$

Alkalmazom a Cauchy-féle integrálformulát:

$$\oint\limits_{L_1} g(z)\, dz = \oint\limits_{L_1} \frac{\frac{e^{\pi z}-1}{z}}{z-i}\, dz = 2\pi i \left.\frac{e^{\pi z}-1}{z}\right|_{z=i} = 2\pi i\, \frac{e^{\pi i}-1}{i} =$$

$$= 2\pi(\cos\pi + i\sin\pi - 1) = -4\pi$$

$$\oint\limits_{L_2} g(z)\, dz = \oint\limits_{L_2} \frac{\frac{e^{\pi z}-1}{z-i}}{z}\, dz = 2\pi i \left.\frac{e^{\pi z}-1}{z-i}\right|_{z=0} = 0, \text{ ami}$$

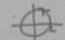
nem meglepő, mert $z=0$ megszüntethető szingularitás (ezt is megmutathattuk volna).

$$\oint\limits_L g(z)\, dz = -4\pi$$

(Residuum tétellel is dolgozhatunk volna.)

Pl. $\oint\limits_{|z|=2} \left(\frac{1}{z} + z\cos z^2\right) dz = ?$

M.: $I = \oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z}\, dz + \underbrace{\oint\limits_{|z|=2} \overbrace{z\cos z^2}^{\text{reg. mindenütt}}\, dz}_{= 0 \text{ (Cauchy-féle alaptétel)}} = \oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z}\, dz$



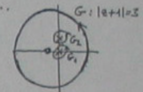
$z(t) = 2e^{jt}$

$\dot{z}(t) = 2je^{jt}$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{jt}}\, 2j e^{jt}\, dt = j\int_0^{2\pi} e^{j2t}\, dt = j\left.\frac{e^{j2t}}{j2}\right|_0^{2\pi} = \ldots = 0$$

Pl. $\oint\limits_{|z+1|=3} \frac{\sin z}{z(z-j)^2}\, dz = \quad$ Re I = ?, Im I = ?

M.o.: $I = \oint\limits_G \ldots = \oint\limits_{G_1} \frac{\overbrace{\frac{\sin z}{(z-j)^2}}^{\text{reg...}}}{z}\, dz + \oint\limits_{G_2} \frac{\overbrace{\frac{\sin z}{z}}^{\text{reg....}}}{(z-j)^2}\, dz$



$$= 2\pi j \underbrace{\left.\frac{\sin z}{(z-j)^2}\right|_{z=0}}_{=0} + 2\pi j \left.\left(\frac{\sin z}{z}\right)'\right|_{z=j} =$$

($\frac{\sin z}{z}$-nek $z=0$ megszüntethető szingularitás, ezzel is lehetne indokolni.)

$$= 2\pi j \left.\frac{z\cdot\cos z - \sin z}{z^2}\right|_{z=j} = 2\pi j\, \frac{j\cos j - \sin j}{-1} =$$

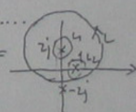
$$= -2\pi j\,(j\,\mathrm{ch}1 - j\,\mathrm{sh}1) = 2\pi(\mathrm{ch}1 - \mathrm{sh}1)$$

Re I = $2\pi(\mathrm{ch}1 - \mathrm{sh}1)$ $\quad$ Im I = 0

Pl. $\oint\limits_{|z-2j|=3} \frac{\sin jz}{(z-1)(z^2+4)}\, dz = I$

Re I = ? $\quad$ Im I = ?

$$\oint\limits_L \ldots dz = \oint\limits_{L_1} \frac{\overbrace{\frac{\sin jz}{(z-1)(z+2j)}}^{\text{reg...}}}{z-2j}\, dz + \oint \frac{\overbrace{\frac{\sin jz}{z^2+4}}^{\text{reg....}}}{z-1}\, dz =$$



$$= 2\pi j\left(\left.\frac{\sin jz}{(z-1)(z+2j)}\right|_{z=2j} + \left.\frac{\sin jz}{z^2+4}\right|_{z=1}\right) =$$

$$= 2\pi j\left(\frac{\sin(-2)}{4j(-1+2j)}\, \frac{-1-2j}{-1-2j} + \frac{\sin j}{5}\right) = 2\pi j\left(\frac{\sin 2}{2} - j\,\frac{\sin 2}{4} + \frac{j\,\mathrm{sh}1}{5}\right)$$

$$-j(-\sin 2)\,\frac{1}{4}\, \frac{-1-2j}{\sqrt{5}}$$

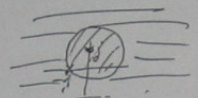
Re I = $2\pi\left(\frac{\sin 2}{4} - \frac{\mathrm{sh}1}{5}\right)$ $\quad$ Im I = $2\pi\,\frac{\sin 2}{2}$

(Pl.) Adja meg az

$$f(z)=\frac{1}{z+1}$$

függvény $z_0=j$ bázispontú összes lehetséges Laurent sorfejtését!

M.o: Két lehetséges tartomány van.



$$f(z)=\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-j)+1+j}$$

1. eset: $f(z)=\frac{1}{1+j}\frac{1}{1-\frac{-(z-j)}{1+j}}=\frac{1}{1+j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+j)^k}(z-j)^k$

KT: $|q|=\left|\frac{-(z-j)}{1+j}\right|=\frac{|z-j|}{\sqrt{2}}<1 \Rightarrow |z-j|<\sqrt{2}$

(Taylor sort kaptunk.)

2. eset: $f(z)=\frac{1}{z-j}\frac{1}{1-\frac{-(1+j)}{z-j}}=\frac{1}{z-j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(1+j)^k}{(z-j)^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(1+j)^k}{(z-j)^{k+1}}$

KT: $|q|=\left|\frac{-(1+j)}{z-j}\right|=\frac{\sqrt{2}}{|z-j|}<1 \rightarrow |z-j|>\sqrt{2}$

(Pl.) Adja meg a

$$g(z)=\frac{1}{(z+1)(z-j)}=\frac{1}{z-j}\cdot\frac{1}{(z+1)}$$

függvény $z_0=j$ bázispontú összes lehetséges Laurent sorfejtését!

1. mo: $g(z)=\frac{1}{z-j}f(z)$ -be beírni az előző 2 sorfejtést

$g(z)=\frac{1}{1+j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+j)^k}(z-j)^{k-1}$ KT: $0<|z-j|<\sqrt{2}$

ill. $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(1+j)^k}{(z-j)^{k+2}}$, ha $|z-j|>\sqrt{2}$

Vagy: $g(z)=\frac{A}{z+1}+\underbrace{\frac{B}{z-j}}_{\text{Ez kész}}$ (A, B meghatározható;

↑ ide beírni az előző példa megoldását!

(Pl.)

$$f(z)=e^z+\frac{1}{z}$$

függvény $z_0=2$ körüli Laurent sorfejtését minden lehetséges tartományon!

(α) $e^z=e^{z-2+2}=e^2e^{z-2}=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{n!}$ $z\in\mathbb{R}$

(β) $\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{-(z-2)}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-2)^n$

KT: $\left|\frac{-(z-2)}{2}\right|<1$: $|z-2|<2$

(γ) $\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2}\frac{1}{1-\frac{-2}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-2)^n}$ KT: $|z-2|>2$

Így $|z-2|<2$-ön érvényes sorfejtés: (α) + (β)

$|z-2|>2$-ön —"— : (α) + (γ)

(Pl.)

$$f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^3}$$

a.) Írja fel a függvény $z_0=-1$ körüli Laurent sorfejtését! Vizsgálja meg a szingularitás jellegét és adja meg a függvény reziduumát a szinguláris pontban!

b.) $\oint\limits_{|z+2|=2} f(z)\,dz=?$ $\oint\limits_{|z+5|=1} f(z)\,dz=?$

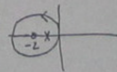
a.) $f(z)=\frac{1}{(z+1)^3}e^{z+1-1}=e^{-1}\frac{1}{(z+1)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-3}}{n!}=$

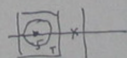
$=\frac{1}{e}\left(\frac{1}{(z+1)^3}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{3!\,(z+1)}+\dots\right)$

KT: $0<|z+1|$

$z=-1$ harmadrendű pólus

$\operatorname*{res}\limits_{z=-1} f(z)=\frac{1}{e}\frac{1}{3!} \rightarrow \frac{1}{e}\frac{1}{2!}$

b.)  $\oint\limits_{|z+2|=2} f(z)\,dz=2\pi j\operatorname*{res}\limits_{z=-1} f(z)=2\pi j\,\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{3!}$

 f reg T-n $\Rightarrow \oint\limits_{|z+5|=1} f(z)\,dz=0$ (Cauchy-féle alaptétel)

Pl. $$f(z)=\frac{1}{(z+j)(z-1)^4}$$

(a.) Hol és milyen szingularitása van f-nek?)

b.) Írja fel az f függvény $z_0=1$ bázispontú azon Laurent sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens! Adja meg a sor konvergencia gyűrűjét!

c) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=?$, $\operatorname*{res}_{z=-j} f(z)=?$

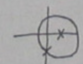
d.) $\oint_{|z|=3} f(z)\,dz=?$

---

a.) $z=-j$ elsőrendű pólus, mert
$$\lim_{z\to -j}(z+j)\frac{1}{(z+j)(z-1)^4}=\frac{1}{(-j-1)^4}\neq 0$$

$z=1$ negyedrendű pólus, mert
$$\lim_{z\to 1}(z-1)^4\frac{1}{(z+j)(z-1)^4}=\frac{1}{1+j}\neq 0$$

b.) $$\frac{1}{z+j}=\frac{1}{(z-1)+1+j}=\frac{1}{1+j}\,\frac{1}{1-\frac{-(z-1)}{1+j}}=$$



$$=\frac{1}{1+j}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{(1+j)^k}\qquad \text{KT: } \left|-\frac{(z-1)}{1+j}\right|=\frac{|z-1|}{\sqrt{2}}<1$$

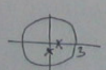
$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^4}\,\frac{1}{z+j}=\frac{1}{1+j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+j)^k}(z-1)^{k-4}$$

konv. gyűrű: $0<|z-1|<\sqrt{2}$

c.) $$\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=c_{-1}=\frac{1}{1+j}\,\frac{(-1)^3}{(1+j)^3}=\frac{-1}{(1+j)^4}=\frac{-1}{(\sqrt{2}e^{j\pi/4})^4}=\frac{-1}{4e^{j\pi}}=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname*{res}_{z=-j} f(z)=\lim_{z\to -j}(z+j)f(z)=\lim_{z\to -j}\frac{1}{(z-1)^4}=\frac{1}{(-j-1)^4}=\frac{1}{(1+j)^4}=-\frac{1}{4}$$

(Mivel elsőrendű pólus.)

d.) 

$$\oint_{|z|=3} f(z)\,dz=2\pi j\left(\operatorname*{res}_{z=1} f(z)+\operatorname*{res}_{z=-j} f(z)\right)=2\pi j\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=0$$

KM/13

Pl. $$f(z)=\frac{\operatorname{sh} z^2-z^2}{4z^7}$$

a) Írja fel a függvény $z_0=0$ pontra támaszkodó Laurent sorát! Adja meg a sor konvergencia gyűrűjét!

b.) Hol és milyen szingularitása van f-nek? Adja meg a szinguláris pontokban a residuumot!

c.) $\oint_{|z|=2} f(z)\,dz=?$ $\qquad\oint_{|z-3|=2} f(z)\,dz=?$

Mo.:

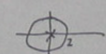
$\boxed{15}$ a.) $\operatorname{sh} u=u+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+\dots \qquad u\in\mathbb{C}$

$$\operatorname{sh} z^2=z^2+\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}\qquad z\in\mathbb{C}$$

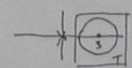
$$\frac{\operatorname{sh} z^2-z^2}{4z^7}=\frac{1}{4\cdot 3!}\,\frac{1}{z}+\frac{1}{4\cdot 5!}z^3+\frac{1}{4\cdot 7!}z^7+\dots\qquad 0<|z| \text{ a KT.}$$

b.) Csak $z=0$-ban van szingularitása. A sorfejtés alapján elsőrendű pólusa van itt.

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{4\cdot 3!}$$

c.) 

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz=2\pi j\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=2\pi j\cdot\frac{1}{4\cdot 3!}=j\frac{\pi}{12}$$



$$\oint_{|z-3|=2} f(z)\,dz=0$$ Cauchy-féle alaptétel

Hasonló példa:

$$f(z)=\frac{\operatorname{ch} z^3-1}{7z^9}$$

Szöveg hasonló.

KM/14

1.) $f(z) = 1/(z\cdot(z-2)^4)$

a) Irja fel az f függvény $z_0 = 2$ bázispontú azon Laurent sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens!
Adja meg a sor konvergencia ~~tartományát~~ gyűrűjét!

b) $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = ?$ $\qquad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = ?$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4}$$

a.) $$\frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{1}{(z-2)^4}\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-2)^4}\frac{1}{(z-2)+2} = \frac{1}{(z-2)^4}\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{-(z-2)}{2}} =$$

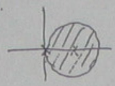
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(z-2)^4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-(z-2)}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-2)^4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k (z-2)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(z-2)^{k-4} = \sum_{k=-4}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+5}(z-2)^k$$

KT: $|q| = \left|-\frac{z-2}{2}\right| = \frac{|z-2|}{2} < 1 \Rightarrow |z-2|<2$

és $|z-2|>0$ $\left(\frac{1}{(z-2)^4}\text{ miatt}\right)$.

Vagyis $0<|z-2|<2$



b.) $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = c_{-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^4 = -\frac{1}{16}$ (Éppen a res leolvasásához megfelelő sort állítottuk elő.)

$\left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}\right.$

$\left.(z=0 \text{ elsőrendű pólus.})\right)$ Ez most nem kell

Pl. $$f(z) = \frac{1}{(z+2j)^2(z-2j)}$$

a.) Adja meg azokat a maximális konvergenciagyűrűket, melyeken f $z_0=-2j$ bázispontú konvergens Laurent sorba fejthető!

b.) Ezen sorfejtések közül írja fel azt, amely a $z=0$ pontban konvergens!

c.) $\operatorname{res}_{z=-2j} f(z) = ?$, $\oint_{|z+3j|=4} f(z)\,dz = ?$

a.) $0<|z+2j|<4$ ill. $|z+2j|>4$

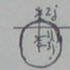
b.) $0<|z+2j|<4$-ben kell felírni.

$$g(z) := \frac{1}{z-2j} = \frac{1}{(z+2j)-4j} = \frac{-1}{4j}\frac{1}{1-\frac{z+2j}{4j}} = \frac{j}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2j}{4j}\right)^n$$

KT: $\left|\frac{z+2j}{4j}\right| = \frac{|z+2j|}{4} < 1 \to |z+2j|<4$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2j)^2}g(z) = \frac{j}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2j)^{n-2}}{(4j)^n}$$ KT: $0<|z+2j|<4$

c.) $\operatorname{res}_{z=-2j} f(z) = c_{-1} = \frac{j}{4}\frac{1}{4j} = \frac{1}{16}$ $\left(\frac{1}{z+2j}\text{ együtthatója}\right)$



$$\oint_{|z+3j|=4} f(z)\,dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z=-2j} f(z) = 2\pi j\cdot\frac{1}{16} = j\frac{\pi}{8}$$

Pl. a) Vizsgálja meg, hogy milyen szingularitása van $z=0$-ban az alábbi függvényeknek! (Lehetőleg sorfejtés segítségével.)

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} z - 1}{z^2} \qquad g(z) = \frac{\operatorname{sh} z - z}{z^6}$$

b.) $\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = ?$ $\qquad \oint_{|z|=2} g(z)\,dz = ?$

a) $\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \qquad z\in\mathbb{C}$

$\frac{\operatorname{ch} z - 1}{z^2} = \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots$ megszüntethető szingularitás

$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$

$\frac{\operatorname{sh} z - z}{z^6} = \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z} + \frac{z}{7!} + \dots$

$z=0$ g-nek harmadrendű pólusa.

$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = 0$, mert $z=0$ megszüntethető szingularitás (Egyéb szingularitása nincs.)

$$\oint_{|z|=2} g(z)\,dz = 2\pi j \underbrace{\operatorname{res}_{z=0} g(z)}_{=c_{-1}=\frac{1}{5!}} = 2\pi j\,\frac{1}{5!}$$

Pl.)

Határozza meg az $f(z) = \frac{1}{\sin z + j}$ szinguláris pontjait!

$\sin z = -j = \frac{1}{2j}\left(e^{jz} - e^{-jz}\right)$, $e^{jz} = u$, $2 = u - \frac{1}{u}$,

$u^2 - 2u - 1 = 0 \qquad u_{12} = 1 \pm \sqrt{2}$

$e^{jz} = 1+\sqrt{2}$

$jz = \ln(1+\sqrt{2}) + 2k\pi j$

$z_k = -\ln(1+\sqrt{2})j + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$e^{jz} = 1-\sqrt{2}$

$jz = \ln(\sqrt{2}-1) + (\pi + 2k\pi)j$

$z_k = -\ln(\sqrt{2}-1)j + (\pi + 2k\pi)$

$k \in \mathbb{Z}$

Pl.

Legyen

$$f(z) = -\sin(2z)\,, \qquad g(z) = \frac{f(z) + 2z}{z^4}\,, \qquad h(z) = \frac{f(z) + \beta z}{z^4}$$

a) Írja fel az f és a g függvények $z_0 = 0$ bázispontú Laurent sorfejtéseit!

b)

$$\operatorname*{Res}_{z=0} g(z) = ?$$

c) A β paraméter különböző értékei esetén milyen típusú szingularitása van az origóban a h függvénynek?

a.) $f(z) = -\left(2z - \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^5}{5!} - \ldots\right) =$

$= -2z + \frac{2^3 z^3}{3!} - \frac{2^5 z^5}{5!} + \ldots \qquad z \in \mathbb{C}$

$g(z) = (\quad \text{—} \quad \| \quad \text{—} \quad + 2z) \cdot \frac{1}{z^4} =$

$= \frac{2^3}{3!}\frac{1}{z} - \frac{2^5}{5!} z + \ldots \qquad z \neq 0$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{(2k+\ldots)!} z^{k-1}$

b.) $\operatorname*{Res}_{z=0} g(z) = \frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3}$

c.) $h(z) = (-2+\beta)\frac{1}{z^3} + \frac{2^3}{3!}\frac{1}{z} - \frac{2^5}{5!} z + \ldots$

$\beta = 2$-nél: elsőrendű pólus

$\beta \neq 2$: harmadrendű pólus