ANALÍZIS(1) — II. ZÁRTHELYI — 2002. nov. 7.

Műszaki Informatika szak — A kurzus — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (9 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{2^{n+1}\cdot 125}$$

Mutassa meg, hogy a sor konvergens!
Igaz-e, hogy az s_3 részletösszeg az s összeget 1/100 -nál kisebb hibával közelíti?

2. feladat (8 pont)
Abszolut konvergens-e illetve konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2}$$

3. feladat (13 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy f határértéke $-\infty$-ben ∞?

b) Mikor mondjuk, hogy f jobb oldali határértéke létezik az értelmezési tartomány x_0 belső pontjában? Mikor mondjuk, hogy f folytonos ebben az x_0 pontban?

c) Mutassa meg, hogy az

$$f(x) = \sin(\pi x) + \arcsin\left(\frac{|x|-2}{2}\right)$$

függvény értelmezett a $[-1,3]$ intervallumon!
Van-e megoldása az $f(x) = 0$ egyenletnek a $[-1,3]$ intervallumon? (A felhasznált tételt írja le!)

4. feladat (15 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3\pi x)}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}, & \text{ha } x<0 \\ e^{-2/x^2}, & \text{ha } x>0 \end{cases}$$

a) Milyen típusú szakadása van f-nek az $x=0$ pontban?

b) Hol differenciálható az f függvény? Írja fel a deriváltfüggvényt, ahol az létezik!

c) Írja fel az $x_0=-1$ pontbeli érintő egyenes egyenletét!

5. feladat (15 pont)

$$f(x) = 4\pi - 3\arccos(2x-1)$$

a) $D_f = ?$, $R_f = ?$, $f'(x) = ?$, $D_{f'} = ?$

b) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az inverze és határozza meg!
$f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

6. feladat (12 pont)

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ch} 5x\right)^{\frac{3}{x^2}} = ?$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{3x}+e^{5x}}{3e^{5x}+2e^{3x}} = ?$

7. feladat (8 pont)
Az $y(x)$ függvény kétszer differenciálható, átmegy az $x_0=0$, $y_0=1$ ponton és kielégíti az

$$y + y^3 + \sqrt{y^3 - x^2} = 3$$

implicit egyenletet. Van-e lokális szélsőértéke az $y(x)$ függvénynek $x_0 = 0$- ban?

8. feladat (20 pont)

$$f(x) = x^3 - \frac{48}{x^2}$$

a) Végezzen függvényvizsgálatot és vázlatosan ábrázolja a függvényt!

b) Beszélhetünk-e a függvény maximumáról illetve minimumáról a $[-3,-1]$ intervallumon? Ha igen, akkor mennyi ezek értéke?

Pótfeladat (csak az elégségeshez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

a) Írja le a derivált definícióját, majd ennek alapján számolja ki az $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$ függvény $x_0 = 1$ pontbeli deriváltját!

b) Határozza meg a és b értékét úgy, hogy az

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3x-2}, & \text{ha } x \ge 1 \\ ax+b, & \text{ha } x<1 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen az $x_0 = 1$ pontban!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{2^{n+1} \cdot 125}$$

Mutassa meg, hogy a sor konvergens!
Igaz-e, hogy az s_3 részletösszeg az s összeget $1/100$-nál kisebb hibával közelíti?

Leibnitz kritériumok teljesülnek-e? Igen => konvergens 2p

- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{n+1}\cdot 125} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{n}{2^n}}^{\to 0}}{\underbrace{2\cdot 125}_{\to c}} = 0$ ✓ 1p

- $|a_{n+1}| < |a_n|$ ✓ 3p $\Leftarrow \frac{n+1}{2^{n+2}\cdot 125} < \frac{n}{2^{n+1}\cdot 125}$ => Monoton csökken, szigorúan

$$\Uparrow$$

$$\frac{n+1}{2} < n$$

$$\Uparrow$$

$$1 < n$$

- $|a_n|$ együtthatója $+1, -1$ váltakozva,

$H = |s - s_3| \underset{1p}{\le} |a_4| = \underset{1p}{\frac{4}{2^5\cdot 125}} = \frac{1}{10^3} \underset{1p}{<} \frac{1}{100}$

Tehát igaz, s_3 részletösszeg a sor összegét $\frac{1}{100}$-nál kisebb hibával közelíti.

(2)

Abszolút konvergens-e illetve konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2} \cdot n(-1)^n$ sor?

8

---

gyök krit. (1)

$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1-\frac{3}{n}\right)^n \underset{(1)}{\sqrt[n]{n}} \to \underset{(2)}{\frac{1}{e^3}\cdot 1} < \underset{(1)}{1} =>$

$\sum^{\infty} |a_n|$ konv. (1) $=> \sum^{\infty} a_n$ abs. konv. (1)

$=> \sum^{\infty} a_n$ konv. (1)

3. feladat (13 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy f határértéke $-\infty$-ben ∞?

b) Mikor mondjuk, hogy f jobb oldali határértéke létezik az értelmezési tartomány x_0 belső pontjában? Mikor mondjuk, hogy f folytonos ebben az x_0 pontban?

c) Mutassa meg, hogy az

$$f(x) = \sin(\pi x) + \arcsin\left(\frac{|x|-2}{2}\right)$$

függvény értelmezett a $[-1,3]$ intervallumon!

Van-e megoldása az $f(x) = 0$ egyenletnek a $[-1,3]$ intervallumon? (A felhasznált tételt írja le!)

3

13

a) $\forall\, \Omega\ \exists\, -P < 0$ hogy $f(x) > \Omega$, ha $x < -P$ 1

b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, ha

$0 < |x - x_0| < \delta$ és $x > x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \ell$ 2

f folyt., ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 1

c) $-1 \le x \le 3 \Rightarrow 0 \le |x| \le 3 \Rightarrow -2 \le |x| - 2 \le 1$

$-1 \le \frac{|x|-2}{2} \le \frac{1}{2}$ 2

$[-1, \frac{1}{2}] \subset [-1, 1]$ 1

$f(-1) = \sin(-\pi) + \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$ 1

$f(3) = \sin 3\pi + \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ 1

f folyt $[-1,3]$-ban 1 ezért minden közbülső értéket

felvesz pl. $c = 0 \in -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ 1

Bolzano: Ha f folyt $[a,b]$-ben és $f(a) < c < f(b)$

akkor $\exists\, \xi \in [a,b]$, hogy $f(\xi) = c$. 2

4

15 + ...

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(3\pi x)}{x}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}, & \text{ha } x<0\\ e^{-\frac{2}{x^2}}, & \text{ha } x>0.\end{cases}$$

a) Milyen típusú szakadása van f-nek a 0-ban

b) Hol differenciálható f és mennyi a deriváltja

c) Írja fel az $x_0=-1$-hez tartozó érintőegyenes egyenletét!

---

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3\pi x)}{3\pi x}\cdot 3\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}=3\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (1) (1)

5

(jobbról – balról kell nézni (1))

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{2}{x^2}}=0$ (1) ugrás (1)

b) 0-ban nem folyt. $\Rightarrow$ nem diff.ható (2)

(nincs értelmezve)

10

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3\pi\cos(3\pi x)-\sin 3\pi x}{x^2}\ (2)+\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{-2}{x^3}\ (2), & \text{ha } x\\ e^{-\frac{2}{x^2}}\cdot(-2)(-2)x^{-3}, & \text{ha } x>0 \quad (1)\end{cases}$$

$f'(-1)=3\pi\cos(-3\pi)-\sin(-3\pi)+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2}{(-1)^3}=-3\pi+$

$f(-1)=-\sin(-3\pi)+\operatorname{arctg} 1=\dfrac{\pi}{4}$ (1)

$y-\dfrac{\pi}{4}=(-3\pi+1)(x+1)$ (1)

5

15

Határozza meg az $f(x) = 4\pi - 3\arccos(2x-1)$ értelmezési tartományát és értékkészletét! Hol differenciálható f és $f'(x) = ?$

Indokolja meg, hogy f-nek létezik az inverze és határozza meg ($f^{-1}(x) = ?$ $D_{f^{-1}} = ?$ $R_{f^{-1}} = ?$

$$-1 \le 2x-1 \le 1 \quad 2$$

$$0 \le 2x \le 2$$

$$0 \le x \le 1$$

$$D_f = [0,1] \quad 1$$

$$0 \le \arccos(2x-1) \le \pi \quad ($$

$$0 \ge -3\arccos(\quad) \ge -3\pi$$

$$4\pi \ge f(x) \ge \pi$$

$$R_f = [\pi, 4\pi] \quad 1$$

$$D_{f'} = (0,1) \quad 1$$

$$f'(x) = \frac{-1\,(-3)\cdot 2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \quad 2$$

$$\Rightarrow f' > 0 \Rightarrow f \text{ szig mon nő} \Rightarrow \exists f^{-1} \quad 2$$

$$x = 4\pi - 3\arccos(2y-1) \quad 1$$

$$\arccos(2y-1) = \frac{4\pi - x}{3}$$

$$2y - 1 = \cos\frac{4\pi - x}{3} \quad 1$$

$$y = \frac{1 + \cos\frac{4\pi - x}{3}}{2} = f^{-1}(x)$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [\pi, 4\pi] \quad \tfrac{1}{2}$$

$$R_{f^{-1}} = D_f = [0,1] \quad \tfrac{1}{2}$$

6

12

a) $\lim_{x\to 0} \left(\mathrm{ch}\, 5x\right)^{\frac{3}{x^2}} = ?$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{3x}+e^{5x}}{3e^{5x}+2e^{3x}} = ?$

---

a) $\left(\mathrm{ch}\, 5x\right)^{3/x^2} = e^{\ln(\mathrm{ch}\, 5x)^{3/x^2}} \to e^{75/2}$ 1

8

1

$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2}\ln(\mathrm{ch}\, 5x) = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln \mathrm{ch}\, 5x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{\mathrm{ch}5x}\cdot 5\,\mathrm{sh}\ldots}{2x}$

$\frac{0}{0}$ 1

$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{\mathrm{ch}\, 5x}\cdot\frac{5}{2}\,\underbrace{\frac{\mathrm{sh}\, 5x}{5x}}_{\to 1}\cdot 5 = \frac{75}{2}$

2

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{3x}+e^{5x}}{3e^{5x}+2e^{3x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{3x}\left(1+e^{2x}\right)}{e^{3x}\left(3\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}+2\right)} =$

4

0 1

hiemelés 2p

7

8

Az $y = f(x)$ kétszer diffható, átmegy az $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ ponton és kielégíti az y: $y^3 + \sqrt{y^3} - x^2 = 3$ egyenletet.

Van-e lok. szélsőértéke a 0-ban?

$$3y^2y' + \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}} \cdot y' - 2x = 0$$

(1) (1)

y': $3y'(0) + \frac{3}{2}y'(0) - 0 = 0 \Rightarrow y'(0) = 0$ (1)

y'': $\underbrace{6yy'y' + 3y^2y''}_{(1)} + \underbrace{\frac{3}{4}y^{-\frac{1}{2}}y'y' + \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}y''}_{(1)} - 2 = 0$

$y''(0)$: $3y''(0) + 0 + \frac{3}{2}y''(0) = 2$

$$y''(0) = \frac{4}{9} \quad (1)$$

$\Rightarrow y'(0) = 0$ és $y''(0) > 0 \Rightarrow$ lok min

(2)

8. feladat (20 pont)

$$f(x) = x^3 - \frac{48}{x^2}$$

a) Végezzen függvényvizsgálatot és vázlatosan ábrázolja a függvényt!

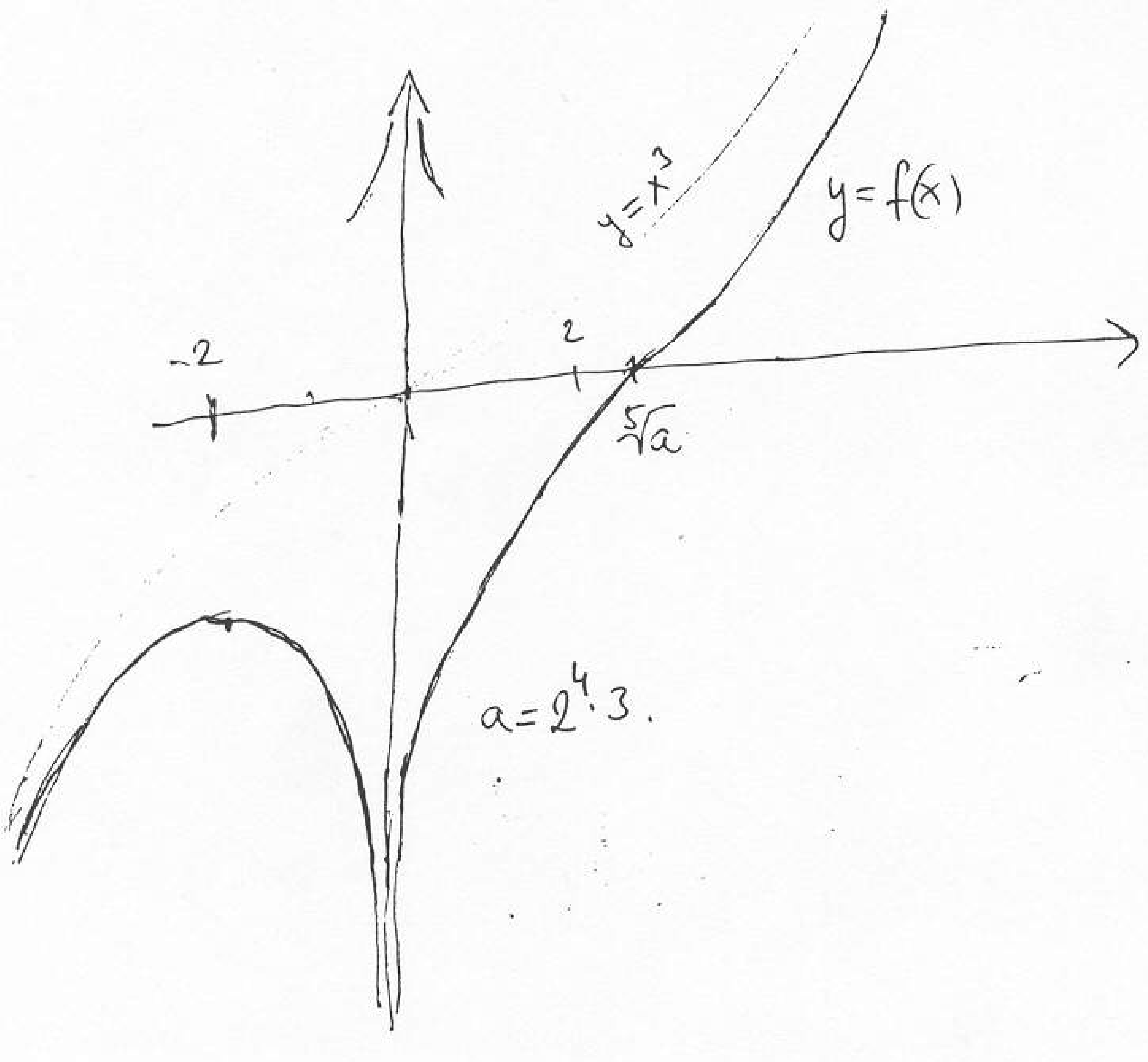
b) Beszélhetünk-e a függvény maximumáról illetve minimumáról a $[-3, -1]$ intervallumon? Ha igen, akkor mennyi ezek értéke?

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (1/2) $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (1/2) $\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ (1)

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (1/2) $\quad R_f = \mathbb{R}$ (1/2) $\quad$ gyök: $x^5 = 48 \quad x = \sqrt[5]{4}$

$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 48\, x^{-3}$ (1) $\quad$ gyöke $x = -2$. (1) $\quad$ előjele (1) monotonitás (1) szélsőérték. (1)

$f''(x) = 6x - 3 \cdot 2 \cdot 48\, x^{-4}$. (1) $\quad$ gyöke $x = \sqrt[5]{48}$ (1) $\quad$ előjele (1) konvexitás (1). inflexió (1).



rajz (2p).

W II. tétele szerint létezik (2)

$f(-3) = -27 - \frac{48}{9} = -27 - 5,2.. = -21,...$

$f(-1) = -1 - 48 = -49$. abs. min (1)

$f(-2) = -8 - \frac{48}{4} = -20$ abs. max (1)