Villamosmérnök A3 (2013 ősz) — 1. vizsgazh ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. $\int_K \frac{\operatorname{ch} e^z}{z^2-4z+3}\, dz = ?$ ha K az a pozitívan irányított négyzet, melynek csúcsai 2, 4 és $3 \pm i$.

2. Adja meg az $f(z) = \frac{1}{z+i}$ komplex függvény azon i körüli Laurent-sorát, ami előállítja f-et 2-ben. Milyen halmazon állítja elő ez a sor f-et?

3. Számítsa ki a $v(r) = r \times \mathbf{k}$ vektorfüggvény vonalintegrálját az $[x, y]$-síkbeli, origó középpontú, R sugarú, pozitívan irányított körvonalon!

4. Számítsa ki a $v(x, y) = (x^2y, -y^2)$ vektorfüggvény felületi integrálját az $F : r(t) = R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$ félkörvonalon, mint $\mathbb{R}^2$-beli valódi felületen!

5. (a) Legyen $n > 1$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deriválhatóak.
(a1) Kifejezhető-e u, v, $\operatorname{div} v$ és $\operatorname{grad} u$ segítségével $\operatorname{div} uv$, és ha igen, hogyan?
(a2) Kifejezhető-e u, v, $\operatorname{div} v$ és $\operatorname{grad} u$ segítségével $\operatorname{grad} uv$, és ha igen, hogyan?
Igazak-e az alábbi állítások?
(b) Ha az f komplex függvény reguláris a pozitívan irányított, az a pontot megkerülő zárt, egyszerű G görbén és az általa határolt halmazon, akkor $f''(a) = \frac{1}{\pi i} \int_G \frac{f(z)}{(z-a)^3}\, dz$
(c) Ha az f komplex függvény deriválható a D nyílt, összefüggő halmazon, és G D-ben haladó zárt görbe, akkor $\int_G f(z)\, dz = 0$
(d) Ha az f valós értékű komplex függvény deriválható a D nyílt, összefüggő halmazon, akkor f konstans D-n.

Villamosmérnök A3 (2013 ősz) — 1. vizsgazh ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. $\int_K \frac{\operatorname{ch} e^z}{z^2-4z+3}\,dz = ?$ ha K az a pozitívan irányított négyzet, melynek csúcsai 2, 4 és $3 \pm i$.

Megoldás. Mivel $\frac{\operatorname{ch} e^z}{z-1}$ reguláris pl. a 3 középpontú, 3/2 sugarú körlapon, és az tartalmazza K-t a belsejével együtt, utóbbi pedig 3-at,

$$\int_K \frac{\operatorname{ch} e^z}{z^2-4z+3}\,dz = \int_K \frac{\frac{\operatorname{ch} e^z}{z-1}}{z-3}\,dz = 2\pi i \frac{\operatorname{ch} e^z}{z-1}\bigg|_{z=3} = \pi i \operatorname{ch} e^3$$

a Cauchy integrálformula miatt.

2. Adja meg az $f(z) = \frac{1}{z+i}$ komplex függvény azon i körüli Laurent-sorát, ami előállítja f-et 2-ben. Milyen halmazon állítja elő ez a sor f-et?

Megoldás. A $|z-i| > 2$ halmazon, és itt a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2i}{(z-i)^n}$ mértani sor konvergens. Ezért

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} = \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2i)^{n-1}}{(z-i)^n}.$$

3. Számítsa ki a $v(r) = r \times \mathbf{k}$ vektorfüggvény vonalintegrálját az $[x,y]$-síkbeli, origó középpontú, R sugarú, pozitívan irányított körvonalon!

Megoldás. Legyen K a körvonal; akkor

$$\int_K v\,dr = \int_K v_e\,|dr| = \int_K -R\,|dr| = -R\int_K 1\,|dr| = -2R^2\pi.$$

VAGY közvetlenül a definícióból: $r(t) = R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\dot r(t) = R(-\sin t, \cos t)$, tehát

$$\int v\,dr = \int_0^{2\pi} v(r(t))\dot r(t)\,dt = \int_0^{2\pi} R^2(\sin t, -\cos t)(-\sin t, \cos t)\,dt = -R^2\int_0^{2\pi} 1\,dt = -2R^2\pi.$$

4. Számítsa ki a $v(x,y) = (x^2y, -y^2)$ vektorfüggvény felületi integrálját az $F : r(t) = R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$ félkörvonalon, mint $\mathbb{R}^2$-beli valódi felületen!

Megoldás. Lezárva a felületet a x tengely $[-R, R]$ szakaszával egy zárt felületet kapunk, amire ezért alkalmazhatjuk a Gauss-Osztogradszkij tételt. Ezen a szakaszon az integrandus, és így az integrál 0, tehát, mivel a zárt felület befelé irányított, $\int_G \operatorname{div} v\,dV = -\int_F v\,df$, ahol G a felület által határolt félkörlap.

$$\int_G 2y(x-1)\,dV = \int_{-R}^{R}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} 2y(x-1)\,dy\,dx = \int_{-R}^{R}(x-1)(R^2-x^2)\,dx$$
$$= R^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - R^2x\bigg|_{-R}^{R} = -\frac{4}{3}R^3.$$

(Vagy: $$\int_G 2y(x-1)\,dV = \int_0^R\int_0^{\pi} 2r^2\sin\varphi(\cos\varphi - 1)\,d\varphi\,dr$$
$$= \int_0^R\left[r^3\sin^2\varphi - 2r^2\cos\varphi\right]_0^{\pi} dr = -4\int_0^R r^2 = -\frac{4}{3}R^3.)$$

Tehát $\int_F v \, df = \frac{4}{3} R^3$.

VAGY közvetlenül a definícióból:

$$r_t(t) = R(-\sin t, \cos t) \rightsquigarrow \mathbf{CROSS}\, r_t(t) = -R(\cos t, \sin t)$$

$$\rightsquigarrow \int_F v \, df = \int_0^\pi (R^3 \cos^2 t \sin t, -R^2 \sin^2 t) \cdot -R(\cos t, \sin t) \, dt = R^3 \int_0^\pi -R \cos^3 t \sin t + \sin^3 t \, dt$$

$$= R^3 \left(\frac{1}{4} R \Big[\cos^4 t\Big]_0^\pi - \frac{1}{3} \Big[\sin^2 t \cos t + 2 \cos t\Big]_0^\pi \right) = R^3 \left(0 - \frac{2}{3} \Big[\cos t\Big]_0^\pi \right) = \frac{4}{3} R^3.$$

5. (a) Legyen $n > 1$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deriválhatóak.

(a1) Kifejezhető-e u, v, $\operatorname{div} v$ és $\operatorname{grad} u$ segítségével $\operatorname{div} uv$, és ha igen, hogyan?

(a2) Kifejezhető-e u, v, $\operatorname{div} v$ és $\operatorname{grad} u$ segítségével $\operatorname{grad} uv$, és ha igen, hogyan?

Igazak-e az alábbi állítások?

(b) Ha az f komplex függvény reguláris a pozitívan irányított, az a pontot megkerülő zárt, egyszerű G görbén és az általa határolt halmazon, akkor $f''(a) = \frac{1}{\pi i} \int_G \frac{f(z)}{(z-a)^3} \, dz$

(c) Ha az f komplex függvény deriválható a D nyílt, összefüggő halmazon, és G D-ben haladó zárt görbe, akkor $\int_G f(z) \, dz = 0$

(d) Ha az f valós értékű komplex függvény deriválható a D nyílt, összefüggő halmazon, akkor f konstans D-n.

Megoldás. (a1) Igen, $\operatorname{div}(uv) = u \operatorname{div} v + v \operatorname{grad} u$

(a2) Nem, $\operatorname{grad} uv$, $\operatorname{div} u$ és $\operatorname{grad} v$ egyikének sincs értelme.

(b) Igen, ez az egyik differenciálhányadosokra vonatkozó Cauchy-féle integrálképlet.

(c) Nem, pl. ha $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, G tetszőleges 0-t megkerülő görbe, akkor $\int_G f(z) \, dz = 2\pi i$.

(d) Igen: $f = u + iv$ ahol $v \equiv 0$, következésképp v és így a Cauchy-Riemann egyenletek miatt u parciális deriváltjai 0-k.