A rádiócsatorna

1. Rádióösszeköttetés jel/zaj viszonya

1. Feladat

Határozzuk meg a levezető kábelből és egy előerősítőből álló rendszer zajtényezőjét mindkét sorrendű összekapcsolás esetén. Adatok: kábel hossza 15 m, fajlagos csillapítása 1 dB/m, hőmérséklete 290 K, erősítő zajtényezője 3 dB, erősítése 20 dB.

Megoldás:

A 15 m hosszúságú kábel

L=15 m 1 dB/m=15 dB

csillapítást okoz. Az erősítő zajtényezője viszonyszámban:

$F_a=3\text{ dB}=10^{0.3}=1.995$

A kábel zajtényezője megegyezik annak csillapításával (mivel hőmérséklete 290 K), továbbá dB-ben kifejezett erősítése megegyezik a dB-ben megadott csillapításának -1 szeresével.

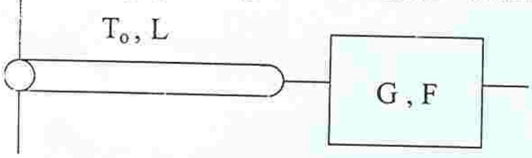
$F_c=L=15\text{ dB}=31.62$

$$G_c=\frac{1}{L}=\frac{1}{31.62}.$$

A láncba kapcsolt erősítők eredő zajtényezője:

$$F=F_1+\frac{F_2-1}{G_1},$$

Most vizsgáljuk meg először a kábel + erősítő együttest



Behelyettesítve a kábel paramétereit (zajtényező=L, erősítés=1/L)

$$F_{c\to a}=F_c+\frac{F_a-1}{G_c}=LF_a$$

összefüggés adódik. Az eredő zajtényező:

15+3=18 dB

(Általános szabály: ha egy csillapító kapcsolódik egy átviteli elem elé, akkor az eredő zajtényező a csillapítással növekszik (a csillapító hőmérséklete 290 K)).

A másik sorrendű összekapcsolásnál:

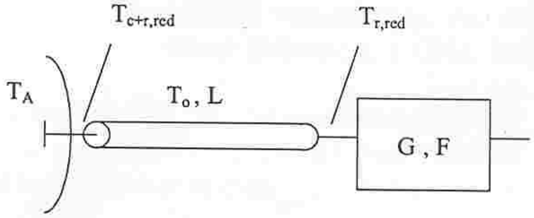
$$F_{a\to c}=F_a+\frac{F_c-1}{G_a}=1.995+\frac{31.62-1}{100}=2.301=3.6\text{ dB}$$

Következtetés: a kábel csillapítása által okozott zajtényező növekedést már nem lehet kiszajú erősítővel sem kompenzálni.

2. Feladat

Mekkora romlást okoz az eredő zajhőmérsékletben az antennát és az előerősítőt összekötő 1 dB csillapítású, 290 K hőmérsékletű kábel, ha az antenna saját zajhőmérséklete 20 K? Az előerősítő bemenetétől mérve a vevő zajtényezője 0.5 dB. Adjuk meg a romlást dB-ben.

Megoldás:



A vevő zajtényezője
$F_r=10^{0.05}=1.122$
Az összekötő kábel nélküli eset:
$T_{r,red}=T_0(F_r-1)=290(1.122-1)=35.39$ K
A vevő bemenetére redukált zajhőmérséklete összeadódik az antenna zajhőméréskletével:
$T_1=T_a+T_{r,red}=20+35.39=55.39$ K
A kábel beiktatásakor:
Az előző példa alapján a rendszer zajtényezője a csillapítással romlik, 1.5 dB-lel növekszik.
$F_{c+r}=10^{0.15}=1.413$
Az előzőekhez hasonlóan:
$T_{c+r,red}=T_0(F_{c+r}-1)=290(1.413-1)=119.8$ K
$T_2=T_a+T_{c+r,red}=20+119.8=139.3$ K
A kábel beiktatása miatti romlás így:

$$10\log\frac{T_2}{T_1}=10\log\frac{139.8}{55.39}=4\text{ dB}$$

és a feltételezés azzal adódna igaz, ha a $T_a = T_c$

3. Feladat

Egy rádióösszeköttetés szükséges adóteljesítményét kell meghatározni.
vevő bemenetén
A jel/zaj viszony 30 dB, a terjedésből adódó fading tartalékra 40 dB-t tervezünk.
A további adatok: üzemi frekvencia 10 GHz, szakasztávolság 30 km, az adó- és vevőantenna nyeresége egyaránt 40 dB, a vevőantenna zajhőmérséklete 290 K, a sávszélesség 20 MHz, a vevő zajtényezője 3 dB.
Megoldás:
A szabadtéri csillapítás

$$a_0=20\log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)-(G_a+G_v)$$

Ezt a fading tartalékkal kell növelnünk

$$a_{sz}=a_0+40dB=61.98+40=102dB$$

A rendszer zajhőméréskléte:
$T_e=T_A+(F_v-1)T_0=F_vT_0$
A zajteljesítmény a vevő bemenetén:
$P_z=kBT_e=-204+10\log B+10\log(T_e/T_0)=-204+73+3=-128$dBW
A szükséges adóteljesítmény így:
$P_A=(S/N)+a_{sz}+P_z=30+102+(-128)=4$ dBW$=2.5$ W

4. Feladat

4, feladat → előbb elmélet

Egy rádióösszeköttetés kétutas terjedéssel valósul meg. Az adó – és vevőantenna magasságok 10-10 méteresek, az üzemi frekvencia 1 GHz. Mindkét antenna 3 dB nyereségű.

a. Mekkora a szakaszcsillapítás d= 5 km szakasztávolság mellett?

b. Ha a talajreflexiós tényező értéke -1 helyett 0-ra változna (a reflexió helyén egyenetlen száraz talaj lenne) , akkor ez mennyiben befolyásolná eredményeinket?

Megoldás

a. Az interferencia zóna távolságának meghatározása:

$$d_{int} = \frac{4h_A h_V}{\lambda}$$

d_{int}=4*10*10/0.3=1333 m

A vizsgált szakasztávolság ennél nagyobb, így

$$a = 10\log\left(\frac{d^4}{h_A^2 h_V^2}\right) - (G_A + G_V) = 10\log\left(\frac{5000^4}{10^2 10^2}\right) - 3 - 3 = 108 - 6 = 102dB$$

b. Ez megfelelne a szabadtéri terjedésnek, várhatóan kisebb csillapítást kapunk:

$$a = 20\log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) - (G_A + G_V) = 106.4 - 6 = 100.4dB$$

Ilyen kis ~~Ekkora~~ szakasztávolság mellett lényegében nem különbözik a két terjedési mód szakaszcsillapítása.

2. Kétutas terjedés - szelektív fading

A kétutas terjedés hatása és a frekvenciaszelektív fading hatásának bemutatása (szellemkép…):

A rádiócsatorna feszültség átviteli függvénye az előadáson bemutatott mechanizmus következtében a következő lesz:

$$H(\omega) = 1 + a \cdot e^{j\omega\Delta T}$$

ahol

a a reflektált hullám relatív amplitudója a közvetlen hullámhoz képest (előadáson a=-1)

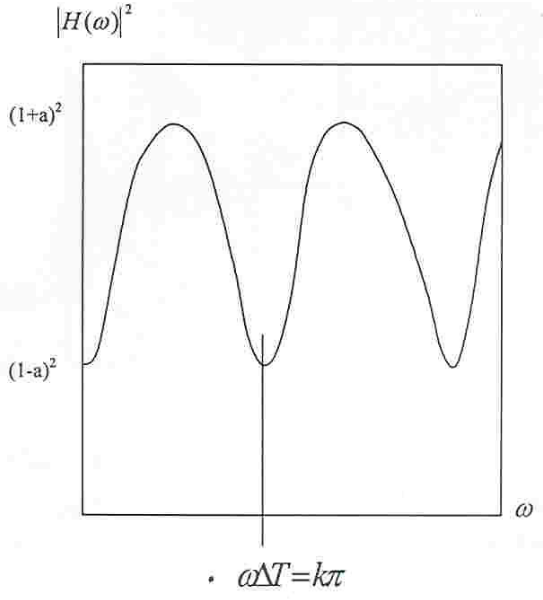
ΔT a reflektált hullám beérkezési késleltetése

$$|H(\omega)|^2 = 1 + a^2 + 2a \cdot \cos\omega\Delta T$$

kétutas terj. térerőssége:

$$|E_v| = 2E_0 \left| \sin\left(\beta \frac{h_A \cdot h_V}{R}\right) \right|$$

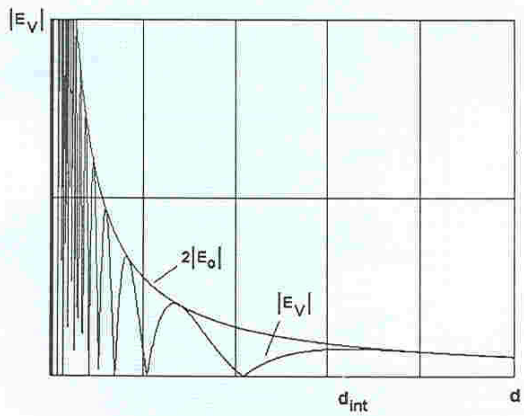
$h_A, h_V << R$



Melléklet (előadáson volt)

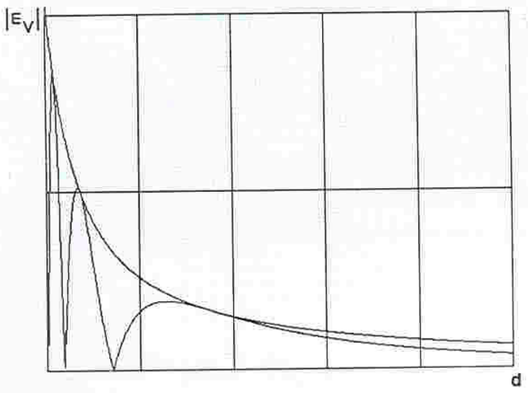
1. Mozgó rádióösszeköttetés térerőssége

Az $|E_V|$ térerősséget ábrázoljuk a d szakasztávolság függvényében.



2.5. ábra Kétutas rádióösszeköttetés térerôssége

A rádiósszakasznak az állandóhelyû antenna és d_{int} távolság közötti részét interferencia zónának nevezzük, ahol mint az a 2.5. ábrán jól látható, a térerősség minimum és maximumhelyei váltva követik egymást. Az interferencia zónán kívül a térerősség $1/d^2$-tel arányos, szemben a szabadtéri rádióösszeköttetés $1/d$-vel arányos térerôsségével.
Ennek láthatóvá tételére nagyítsuk ki a 2.5. ábra jobb oldali tartományát. (2.6. ábra)



2.6. ábra Kétutas rádióösszeköttetés térerôssége

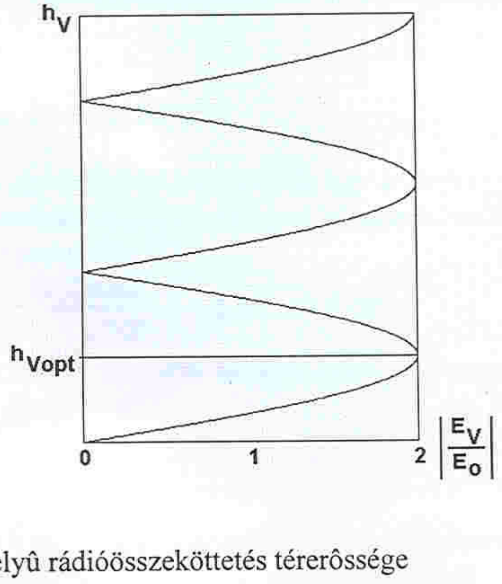
Az interferencia zóna határának kiszámításához vizsgáljuk meg a (2.20) kifejezés szinusz függvényének argumentumát. Az interferencia zóna határát az adja, ahol az argumentum π/2-vel egyenlô.

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{h_A h_V}{d_{\text{int}}} = \frac{\pi}{2} \tag{2.21}$$

$$d_{\text{int}} = \frac{4h_A h_V}{\lambda} \tag{2.22}$$

2. Állandóhelyű rádióösszeköttetés

Állandóhelyû rádióösszeköttetéseknél a cél az optimális vevôantenna magasság meghatározása.



2.7. ábra Állandóhelyû rádióösszeköttetés térerôssége

Az optimális vevôantenna magasságot ugyancsak a (2.22) összefüggésből kapjuk, innen

$$h_{Vopt} = \frac{\lambda d}{4h_A} \tag{2.23}$$

$\frac{2\cancel{\pi}}{\boxed{\lambda}}\frac{\boxed{h_A} h_V}{\boxed{d}} = k\cdot\frac{\cancel{\pi}}{2}$

↳ k legyen 1

$h_{V_{opt}} = \frac{\lambda d}{4h_A}$

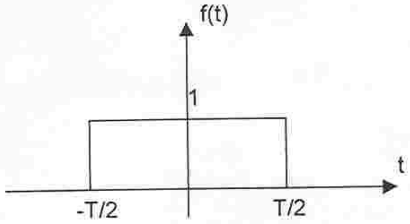
MA

V2 – 706

Csüt 14^{15}

1. példa

Határozza meg az f(t) jel amplitúdó sűrűség spektrumát!



Fourier transzformált: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

(Az f(t) függvény neve impulzus fv., jelölése $p_a(t)$)

$$F(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2} 1\cdot e^{-j\omega t}dt=-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\int_{-T/2}^{T/2}1=\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{j\omega}=\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}=T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}=T\mathrm{sinc}(\omega T/2)$$

(összefoglalás)

704 – CS. M.

~~704 – 70~~

$\boxed{705}$

706 – VE

Udvary – (Marosi – Zólomy)

Csörgei

Seller

Nagy

Farkas

Balázs

707

J.B.

---

1) Végrehajtásos log

↳ név + kód

fel kell mindenkinek

iratkozni ahol

sole akarjá jönni

2db NagyZH + vizsga ↓

Neptun mindegy

A vizsgázhat ahol

ahol feliratkozott.

2. példa

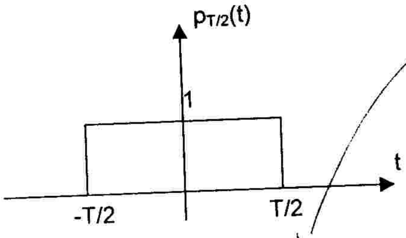
Adott az alábbi hálózatunk a súlyfüggvényével, és a bemeneti gerjesztéssel.

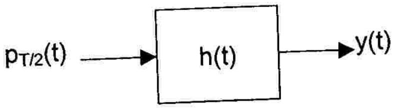
a) y(t)=?

b) Y(ω)=?

c) kauzális-e a rendszer?

~~y(t) = p(~~

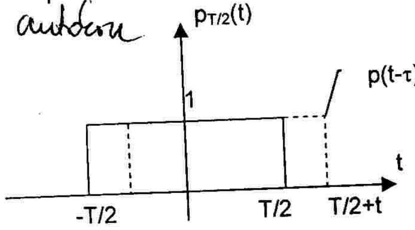


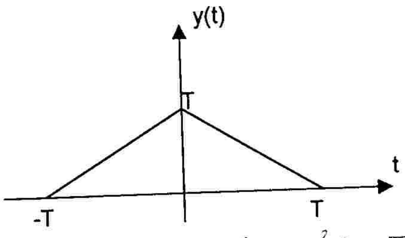


, $h(t) \overset{!}{=} p_{T/2}(t)$

a) $y(t) = p_{T/2}(t) * p_{T/2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau)p(\tau)d\tau$ $\quad R(t) = p(t) * p^*(-t)$

autokonv





b) $Y(\omega)=F(\omega)F(\omega)=T^2\mathrm{sinc}^2(\omega T/2)$ $\rightarrow T^2 \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2}$

c) NEM kauzális, $h(t)=p_{T/2}(t-T/2)$ viszont igen.

súlyfg. negy. tart.

$R(0) = E$

NEM

5. ~~példa~~

Gauss impulzust Gauss aluláteresztővel szűrünk. Vizsgáljuk meg a szűrés eredményét!

A Gauss aluláteresztő átviteli függvénye:

$$H(f) = e^{\left(-\frac{f^2}{2B_H^2}\right)}.$$

A szűrő kimenő jelének Fourier transzformáltja:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = x_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}B} e^{\left(-\frac{f^2}{2B^2}\right)} \cdot e^{\left(-\frac{f^2}{2B_H^2}\right)}.$$

A két exponenciális függvény szorzata is exponenciális:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = x_0 \frac{B_e}{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}B_e} e^{\left(-\frac{f^2}{2B_e^2}\right)},$$

ahol a B_e eredő sávszélesség az

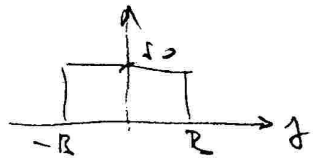
$$\frac{1}{B_e^2} = \frac{1}{B_H^2} + \frac{1}{B^2}$$

összegzési szabállyal számolandó. Tanulság tehát, hogy a kimenő jel is Gauss impulzus, csak a sávszélessége és a nagysága változik.

Megjegyzés: Gyakori probléma, mit mondhatunk arról az impulzusról, amelyet egymás után több, nem túl jól specifikált szűrő hatás ér. Kézenfekvő modell ilyen esetekben a Gauss impulzus, illetve a Gauss aluláteresztő. Az, hogy e modellek tűrhetően működnek a gyakorlatban, összefügg e függvény (itt nem tárgyalt) bizonyos szélsőérték-tulajdonságával.

1.3. Példa: a sávhatárolt fehér zaj

Egy jel (legyen pl. ξ) spektrális sûrûségfüggvénye



$$s_\xi(f)=\begin{cases} s_0, ha\,|f|\le B \\ 0, egyébként \end{cases}.$$

Az ilyen jel *sávhatárolt* (hiszen B-nél nagyobb frekvenciájú összetevõi nincsenek), és *fehér* (a nemzérus intenzitású jelösszetevõk azonos erõsségûek, s a fehér fény összetevõi is ilyenek). Határozzuk meg e jel autokorrelációs függvényét!

<u>Megoldás:</u>

Az autokorrelációs függvény a spektrális sûrûségfüggvény inverz Fourier transzformáltja:

$$R_\xi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(f)\cdot e^{j2\pi f\tau}df.$$

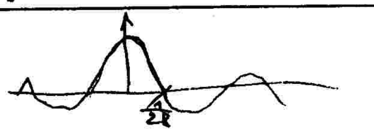
Most

$$R_\xi(\tau)=\int_{-B}^{B} s_0\cdot e^{j2\pi f\tau}df=s_0\cdot\left.\frac{e^{j2\pi f\tau}}{j2\pi\tau}\right|_{-B}^{B}=s_0\cdot\frac{e^{j2\pi B\tau}-e^{-j2\pi B\tau}}{j2\pi\tau}.$$

Felismerve a szinuszfüggvény Euler-féle alakját, írhatjuk, hogy

$$R_\xi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(f)\,e^{+j2\pi f\tau}df=s_0\int_{-B}^{B} e^{j2\pi f\tau}df=s_0\left.\frac{e^{j2\pi f\tau}}{j2\pi\tau}\right|_{-B}^{B}=s_0\,\frac{e^{j2\pi B\tau}-e^{-j2\pi B\tau}}{j2\pi\tau B}$$

$=2s_0B\,\mathrm{sinc}(2\pi B\tau)$



$2\pi B\tau=k\pi$

$2B\tau=1$

$\frac{1}{2B}$

$$R_\xi(\tau)=2Bs_0\cdot\frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}.$$

Ez a függvény számos híradástechnikai modellben felbukkan. Lényeges tulajdonságai:

1/ Argumentumának növekedõ (abszolut) értékeire annak reciprokával majorálhatóan tûnik el (tart a zérushoz). Ez azt jelenti, hogy a jel távoli mintái között is van számottevõ kapcsolat.

2/ Zérus értéket vesz fel, valahányszor $\tau=k/(2B)$, ahol k egész, de nem zérus.

3/ A függvény globális maximuma $\tau=0$-ban van. $R(0)=2Bs_0$

4/ Szépen látható, hogy páros függvény, de nem mindenütt pozitív függvény (~~viszont pozitív definit függvény, de ez más kérdés~~).

átalakítani

1.5. Példa: Visszhang hatása stacionárius jelre

Az η folyamat a zérus várható értékû, $R_\xi(\tau) = R_0 \cdot e^{-\Omega|\tau|}$ autokorrelációs függvényû, ξ stacionárius folyamat lineáris transzformáltja: $\eta_t = \xi_t - \xi_{t-T}$.

Határozzuk meg az η folyamat autokorrelációs függvényét, továbbá a ξ és az η folyamatok spektrális sûrûségfüggvényeinek hányadosát a frekvencia függvényében!

$M\{\xi_t, \xi_{t+\tau}\} = R(\tau)$ $|H(\omega)|^2 = ?$

$f(t) e^{j\omega_0 t} \to F(\omega - \omega_0)$

Megoldás:

Az autokorrelációs függvény:

$$L_\eta(t_1,t_2) = M\{(\xi_{t_1} - \xi_{t_1-T})(\xi_{t_2} - \xi_{t_2-T})\} =$$
$$R_\xi(t_2-t_1) - R_\xi(t_2-t_1+T) - R_\xi(t_2-t_1-T) + R_\xi(t_2-t_1) =$$
$$2R_\xi(t_2-t_1) - R_\xi(t_2-t_1+T) - R_\xi(t_2-t_1-T) = 2R_\xi(\tau) - R_\xi(\tau-T) - R_\xi(\tau+T)$$

Az autokorrelációs függvény csak az idõkoordináták különbségétõl függ, így a kimenõ folyamat stacionárius. A kimenõ jel autokorrelációs függvényének Fourier transzformáltja, azaz spektrális sûrûségfüggvénye:

$$s_\eta(f) = 2s_\xi(f) - s_\xi(f)\cdot e^{j2\pi fT} - s_\xi(f)\cdot e^{-j2\pi fT} =$$
$$s_\xi(f)\left(2 - 2\cos(2\pi fT)\right) = 4\cdot s_\xi(f)\cdot \sin^2(\pi fT)$$

A keresett hányados tehát:

$$4\cdot \cancel{s_\xi(f)}\cdot \sin^2(\pi fT). = |H(\omega)|$$

$$\frac{e^{j\omega t} - e^{j\omega(t-T)}}{e^{j\omega t}} = 1 - e^{j\omega T}$$

Ki tudta volna ezt elõre megmondani (és milyen megfontolással)?

determinisztikus jelre is igaz

1.4. Példa: Exponenciálisan lecsengõ autokorrelációs függvényû folyamat

~ nem mutatj.

Egy jel (legyen pl. ξ) autokorrelációs függvénye

$$R_\xi(\tau) = R_0 \cdot e^{-|\tau|/T}.$$

Határozzuk meg a jel spektrális sûrûségfüggvényét!

Megoldás:

A megadott autokorrelációs függvény Fourier transzformáltját kell képezni:

$$s_\xi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \qquad S_\xi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Most az autokorrelációs függvény szakaszonként eltérõ képlettel írható le, ezért

$$s_\xi(f) = \int_{-\infty}^{0} R_0 \cdot e^{\tau/T - j2\pi f\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} R_0 \cdot e^{-\tau/T - j2\pi f\tau} d\tau. \qquad R_0 \int_{-\infty}^{0} e^{(\tau/T - j2\pi f\tau)} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T} - j2\pi f\tau} d\tau$$

Az exponensben szereplõ független változót kiemelve, az integrálásokat elvégezve:

$$s_\xi(f) = R_0 \left. \frac{e^{(1/T - j2\pi f)\tau}}{1/T - j2\pi f} \right|_{-\infty}^{0} + R_0 \left. \frac{e^{(-1/T - j2\pi f)\tau}}{-1/T - j2\pi f} \right|_{0}^{\infty}.$$

A behelyettesítés után:

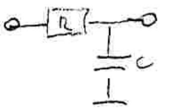
$$s_\xi(f) = R_0 \frac{1}{1/T - j2\pi f} + R_0 \frac{1}{1/T + j2\pi f}.$$

Elvégezve a kijelölt mûveletet:

$$s_\xi(f) = R_0 \frac{2/T}{(1/T)^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2TR_0}{1 + (2\pi f T)^2}.$$

Figyelemreméltó, hogy ez a spektrális sûrûségfüggvénye az elsõfokú aluláteresztõvel megszûrt szélessávú fehér zajnak, ha a szûrõ határfrekvenciája

$$f_0 = \frac{1}{\text{[redacted]}T}.$$



olt $\xi_t = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ sztochasztikus folyamat.

- A_0, ω_0 konstans
- φ v.v. egyenletes eloszlással $[-\pi, \pi]$ intervallumon

Gyengén stacionárius-e ξ_t folyamat?

$m = ?$, $R(\tau) = ?$

Ha $m(t) = m =$ konst. és $M\{\xi_t \xi_{t+\tau}\} = R(\tau)$

$[\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta]$

$$m = M\{\xi_t\} = M\{A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)\} = A_0 M\{\cos(\omega_0 t + \varphi)\} =$$

$$= A_0 [M\{\cos(\omega_0 t)\cos\varphi\} + M\{\sin\omega_0 t \sin\varphi\}] =$$

$$= A_0 [\underbrace{M\{\cos\varphi\}}_{\emptyset} \cdot \cos\omega_0 t + \underbrace{M\{\sin\varphi\}}_{\emptyset} \cdot \sin\omega_0 t]$$

$\emptyset \rightarrow$ ~~ez nem lesz!~~ (miért?)

$$m = \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi = 0, \quad f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\boxed{m = \emptyset}$$

$[\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]]$

$$R(\tau) = M\{\xi_t \xi_{t+\tau}\} = A_0^2 M\{\cos(\omega_0 t + \varphi)\cos(\omega_0 t + \varphi + \omega_0 \tau)\} =$$

$$= \frac{A_0^2}{2} M\{\cos(2\omega_0 t + 2\varphi + \omega\tau) + \cos\omega\tau\}$$

$$M\{\cos(2\omega_0 t + \omega\tau + 2\varphi)\} = M\{\cos(2\omega_0 t + \omega\tau)\cos 2\varphi\} - \sin(2\omega_0 t + \omega\tau)\sin 2\varphi\}$$

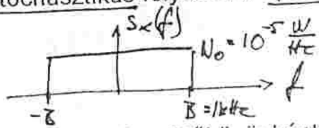
$$= \cos(2\omega_0 t + \omega\tau) \underbrace{M\{\cos 2\varphi\}}_{\emptyset} - \sin(2\omega_0 t + \omega\tau) \underbrace{M\{\sin 2\varphi\}}_{\emptyset} = \emptyset$$

$$\boxed{R(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \cos\omega\tau}$$

1) Predikcós példa

Adott egy *x(t)* gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat a spektrális sûrûségfüggvényével:

$$s_x(f)=\begin{cases}N_0, & \text{ha } |f|\le B\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$



$T = 250\,\mu s$

ahol $N_0=10^{-5}$ W/Hz, B=1 kHz. A folyamatot T=250 μs időközönként mintavételezzük.

a. Mekkora diszkrét (mintavételi) időbeli távolságról mondható el, hogy az ennél távolabbi minták közötti korreláció abszolút értéke kisebb, mint 1.06*10-3 ? $R(\tau_1) < 1.06\cdot 10^{-3}$, $\tau_1 = ?$

b. Jelölje x_k az eredeti *x(t)* folyamatból *T* közönként mintavett sorozatot. Határozza meg az x_k folyamathoz az

$$\hat{x}_k = a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2}$$

$\left.\begin{matrix} a_1 = ?\\ a_2 = ?\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

összefüggéssel definiált másodrendû lineáris prediktor négyzetes közép értelemben vett (AR MS) optimális együtthatóit.

MEGOLDÁS

a. Először meg kell határozni a folyamat korrelációs függvényét, ami a PSD inverz Fourier transzformáltja:

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s_x(f)e^{j2\pi f\tau}df=\int_{-B}^{B}N_0e^{j2\pi f\tau}df=N_0\left.\frac{e^{j2\pi f\tau}df}{j2\pi\tau}\right|_{-B}^{B}=2N_0B\frac{sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}$$

Ez felülről becsülhető a burkolójával:

$$2N_0B\frac{sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}\le\frac{2N_0B}{2\pi B\tau}=\frac{N_0}{\pi\tau}\le 1.06*10^{-3}$$

ebből

$$\tau=3*10^{-3}s=12T$$

Tehát legalább 12 minta távolság biztosítja a feladatban kitûzött célt.

b. b) Ismert, hogy a megoldást az alábbi egyenlet szolgáltatja:

$$\boxed{\mathbf{a}^{opt}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}}$$

ahol

$$R_{ij}=E(x_{n-i}x_{n-j})$$

$$b_i=E(x_{n-i}x_n)$$

$$R_{11}=R_{22}=R_x(0)=2N_0B=0.02$$

$$R_{12}=R_{21}=R_x(T)=0.01273$$

$$b_1=R_x(T)=0.01273$$

$$b_2=R_x(2T)=0$$

Behelyettesítve:

a_1=1.064

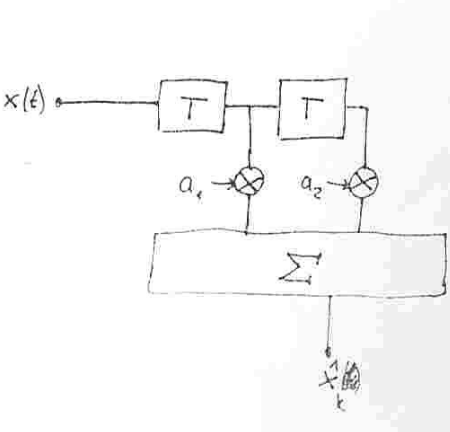
a_2=-0.676

adódik.

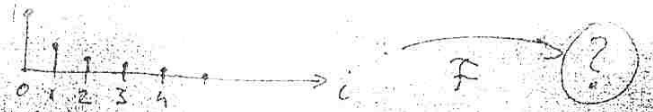
$$\underline{\underline{R}}=\begin{bmatrix}E(x_{n-1}x_{n-1}) & E(x_{n-2}x_{n-1})\\ E(x_{n-1}x_{n-2}) & E(x_{n-2}x_{n-2})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}02 & 0{,}01273\\ 0{,}01273 & 0{,}02\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b}}=\begin{bmatrix}E(x_{n-1}x_n)\\ E(x_{n-2}x_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}01273\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{a}}=\begin{bmatrix}1{,}064\\ -0{,}676\end{bmatrix}$$



2)



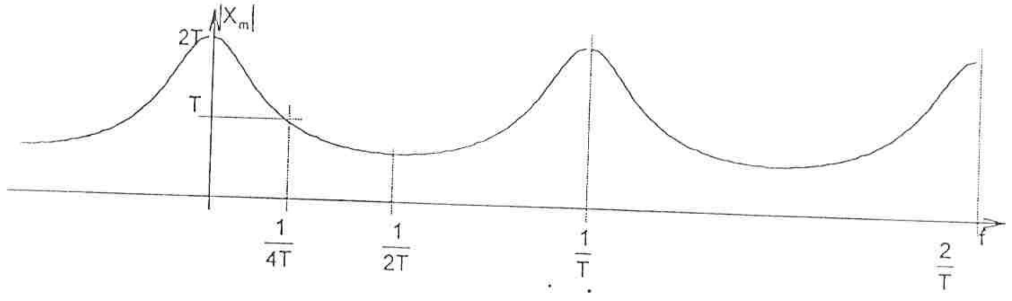
5. *Példa:* Határozza meg az $x_i=2^{-i}$, i=0,1,.. mintasorozat spektrumát!
Megoldás:

$x(t) = 2^{-\frac{t}{T}}$ —[DAC T]— $x(iT)=x[i]$

A mintasorozat spektruma alatt (3.3) szerint az $X_m(f) = T\sum_i x_i e^{-j2\pi f iT}$ függvényt értjük, ahol T a DAC működtetésének ütemideje.

Most: $X_m(f) = T\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} e^{-j2\pi f iT} = T\sum_{i=0}^{\infty} \left(2^{-1} e^{-j2\pi fT}\right)^i$.

Ez egy végtelen mértani sor összege, melynek képlete $S = \frac{a_0}{1-q}$, ahol $a_0=1$, $q=0.5e^{-j2\pi fT}$, tehát $X_m(f) = T\frac{1}{1-0.5e^{-j2\pi fT}}$. A mintavétel miatt (Shannon!) ~~azon-ban~~ $X_M(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m\left(f - \frac{n}{T}\right)$ ~~lesz~~ (1. ábra; $f_s = \frac{1}{T}$).



3/

3. Feladat: Egy f_s=12 *kHz* mintavételi frekvenciával működő rendszert az analóg interfészek között mérve azt tapasztaljuk, hogy 2 *V* amplitúdójú, 2.5 *kHz*-s mérőjel hatására a kimenő jel 2.5 *kHz*-s komponense ugyancsak 2 *V*, míg 9.5 *kHz* frekvenciájú komponense csak 20 *mV* amplitúdójú.

a) 2 *V* amplitúdójú, 9.5 *kHz*-es mérőjelre a kimenő jel 2.5 *kHz*-s összetevője 40 *mV* amplitúdójú. Mekkora a kimenő jel 9.5 *kHz*-es komponense? (*10 pont*)

b) A rendszer melyik elemét érdemes változtatni ahhoz, hogy 2 *V* amplitúdójú, 9.5 *kHz*-es mérőjelet alkalmazva a kimenő jel 2.5 *kHz*-s összetevője lecsökkenjen? (*10 pont*)

3.a) A bemenõ szûrõ átviteli függvénye legyen H_I, a kimenõ szûrõé pedig H_O!

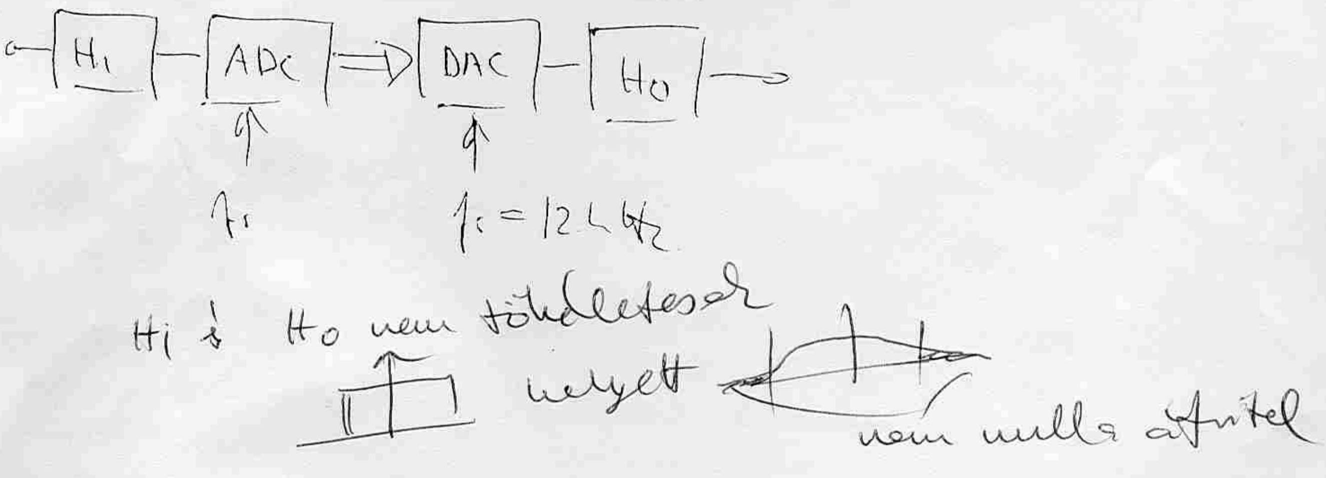
$$H_I(2.5)\cdot H_O(2.5)=1.0$$

Tudjuk, hogy: $H_I(2.5)\cdot H_O(9.5)=0.01$, és tudni akarjuk $H_I(9.5)\cdot H_O(9.5)$ -t.

$$H_I(9.5)\cdot H_O(2.5)=0.02$$

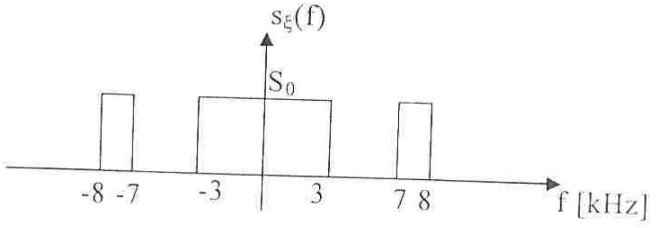
A két utolsó sort összeszorozva éppen ez adódik, tehát a 9.5 kHz-s komponens 0.4 millivoltos.

3.b) A kimenû szûrû csillapítását 2.5 kHz-n nem szabad növelni, marad a bemenõ szûrõ zárósávjának javítása.



4) Egy valós értékű, stacionárius sztochasztikus folyamat spektrális sűrűségfüggvénye (a pozitív frekvenciák tartományában) általában zérus, kivéve a 0-3 *kHz* és a 7-8 *kHz* sávot, ahol értéke ugyanaz az állandó.

a) Hogyan viselkedik a folyamat spektrális sűrűségfüggvénye a negatív frekvenciákon? (*2 pont*)



b) Határozza meg a folyamat spektrális sűrűségét (azokon a frekvenciákon, ahol nem zérus), ha tudja, hogy a jel teljesítménye 0.2 *mW*! (*8 pont*)

$$\overline{P_\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(f)df = 0.2mW$$

$$S_0 = 0.2mW/(1+6+1)kHz = 0.025\frac{mW}{kHz}$$

c) Milyen frekvenciával kell ebből a jelből mintákat venni ahhoz, hogy a mintákból jel tökéletesen visszaállítható legyen? Határozza meg az összes szóbajövő frekvenciát! (*10 pont*)

Az $f_s > 16kHz$ és a $11kHz < f_s < 14kHz$ tartományok.

Szivárgás és aliasing

A minták véges pontosságú ábrázolása a forrása az ún. kvantálási zajnak (lásd az elõadás, könyv anyagát).

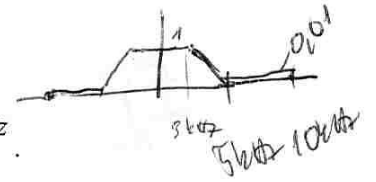
A mintasorozat spektrumának átlapolásmentességét biztosítandó a mintavételezésnek kitett jelet eleve szûrik. Ha ennek az ún. antialiasing (bemenõ) szûrõnek nem elég nagy a zárósávi csillapítása, akkor a visszaállítás során - a szorosan vett átviteli sávon kívüli esetleges jelösszetevõk következtében - ún. *alias* (ál) jelek keletkezhetnek.

A visszaállító szûrõ zárósávi viselkedése lehet a felelõs a rekonstruált jelben megjelenõ, az eredeti jel sávján kívüli, *szivárgó* jelösszetevõk megjelenéséért.

A bemenõ és a kimenõ szûrõ áteresztõsávja egyaránt lineáris torzítást okoz a visszaállított jelben.

Egy *8 kHz* mintavételi frekvenciával dolgozó mintavételezõ rendszer bemenõ és kimenõ szûrõje azonos:

$$H_t(f) = H_0(f) = \begin{cases} 1, ha\,|f| \le 3kHz \\ 2.5 - |f/2|, ha\,3kHz < |f| \le 5kHz \\ 0.01, ha\,5kHz < |f| \le 10kHz \\ 0, egyébként \end{cases}.$$



A rendszer a $2V$ amplitúdójú, 1 *kHz* frekvenciájú szinuszos jelösszetevõt - szivárgó komponensektõl eltekintve - amplitúdóhelyesen viszi át. Határozzuk meg a szivárgó jelösszetevõk amplitúdóját és frekvenciáját! Milyen jel keletkezik, ha a bemenõ jel 2 *V* amplitúdójú, 4.5 *kHz* frekvenciájú szinuszos jel?

Megoldás:

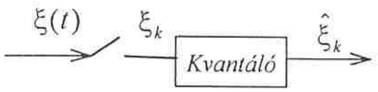
Az eredeti jel spektruma - még ha olyan elfajuló is, mint esetünkben - a mintavételi frekvencia harmonikusaival eltolódva hozza létre a mintasorozat spektrumát. Így a mintasorozat spektruma az $\pm n \cdot 8 \pm 1$ *kHz* frekvenciájú harmonikus összetevõket tartalmazza. E komponensek amplitúdója a kimenõ szûrõ elõtti ponton azonos. A szûrõ megritkítja ezeket a jelösszetevõket: eliminálja mindazokat, amelyeknek a frekvenciája 10 *kHz*-nél nagyobb (illetve -10 *kHz*-nél kisebb). Így csak a ± 1 *kHz* és a $\pm 8 \pm 1$ *kHz* frekvenciájú harmonikus összetevõk maradnak meg, az elõbbiek csillapítatlanul, az utóbbiak $H(\pm 8 \pm 1)$ értékének megfelelõen csillapítva. Végül is tehát elmondható, hogy a visszaállított jelben 1 *kHz*, 7 *kHz* és 9 *kHz* frekvenciájú szinuszos összetevõk lesznek jelen, ha az elsõ amplitúdója 2 *V*, akkor a többieké 0.02 *V*.

A második kérdés megválaszolásához figyelembe kell vennünk, hogy ezt a jelet (e jel mindkét harmonikus komponensét) a bemenõ szûrõ csillapítja (egy 0.25 értékû faktorral). A mintasorozat spektruma most $\pm n \cdot 8 \pm 4.5$ *kHz* frekvenciájú összetevõket tartalmaz, amelyek közül a kimenõ szûrõ véges csillapítással csak a $\pm$ 4.5 *kHz és a* $\pm(8\text{-}4.5)=\pm 3.5$ *kHz* frekvenciájúakat engedi át. Az elõbbi összetevõkön az erõsítés 0.25, az utóbbiakon 0.75-szeres. Tehát az eredõ jelnek két szinuszos komponense lesz, a 3.5 *kHz* frekvenciájú alias jel amplitúdója 0.375 *V*, míg a valódi bemeneti jelnek megfelelõ összetevõ amplitúdója csak 0.125 *V*.

6/

2.4. Példa: mintavételezés és kvantálás

Egy zérus várható értékû, stacionárius és ergodikus jelet mintavételezünk, majd a mintákat a (-1*V*,1*V*) intervallumban egyenletes lépésközzel kvantáljuk egy 4 bites kvantálóval.



A folyamat spektrális sûrûségfüggvénye a következõ

$$s_\xi(f) = \begin{cases} 10^{-5}\,[V^2/Hz], & ha \quad |f| \le 10kHz \\ 0, & egyébként \end{cases}$$

a) Mekkora a korreláció az egymás után kèttõvel következõ minták között, ha a mintavételi idõ $T = 10^{-5}$sec?

b) Hogyan kell megválasztani a mintavételi idõt, hogy esetleg független mintákat kapjunk?

c) Milyen ismeretekre volna még szüksége ahhoz, hogy megítélhesse: milyen valószínûséggel lesz kvantáló szolgáltatta kódszó éppen 1101 értékû?

<u>Megoldás:</u>

a) A korrelációs fv. a spektrális sûrûségfüggvénybõl

$$R_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(f) e^{-j2\pi f t} df = 2 s_0 B \frac{\sin(2\pi B t)}{2\pi B t}$$

Ha T=10^{-5} és kettõvel egymás utáni minták korrelációját kell számolni akkor

$$E\big(\xi(t)\xi(t+2T)\big) = R_\xi(2T) = 0.2\frac{\sin(0.4\pi)}{0.4\pi} \quad = 0{,}1514$$

b) A minták függetlenségének szükséges kelléke, hogy korrelálatlanok legyenek, azaz $R_\xi(kT_0) = 0 \;\Rightarrow\; \sin(2\pi B k T_0) = 0 \;\Rightarrow\; T_0 = 50 \cdot 10^{-6}\,s$

c) Ismernünk kellene a kódolási szabályt - az intervallumok és a kódszavak összerendelését -, és a minták (egydimenziós) valószínüségeloszlását

7

2.5. Példa: kvantálási zaj, jel-zaj viszony

Becsüljük meg azoknak a jeleknek a teljesítményét és a minták ábrázolásához szükséges kódszavak méretét, ha követelmény, hogy a mintánként kvantálásból származó kvantálási zaj σ^2-nél kisebb, a jel-zaj viszony pedig ρ-nál nagyobb legyen!

Megoldás:

A jel és a zaj teljesítményének hányadosa: ? ez most jó?

$$\frac{M(\xi^2)}{M(\varepsilon^2)} \geq \rho \approx \frac{3}{2} 2^{2n},$$

tehát körülbelül $n = \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(\rho \frac{2}{3}\right)$ méretű kódszavakra van szükség (plusz 1..4 bitre, a ? nagyobb csúcstényező miatt). Az átalakítandó jel nagysága közvetlenül nem befolyásolja a kvantálási zaj teljesítményét, a túl nagy jel azonban túlvezérlést okoz. A legnagyobb jel teljesítménye tehát $\rho \cdot \sigma^2$ nagyságrendjébe esik.

nem értem a legkisebb jel aránya ha σ^2 adott

Sin esetén
$$SNR = \frac{3}{2} 2^{2n} = 1{,}76 + 6n$$

Digitális csatorna, BSC

η – kife
ξ – nű

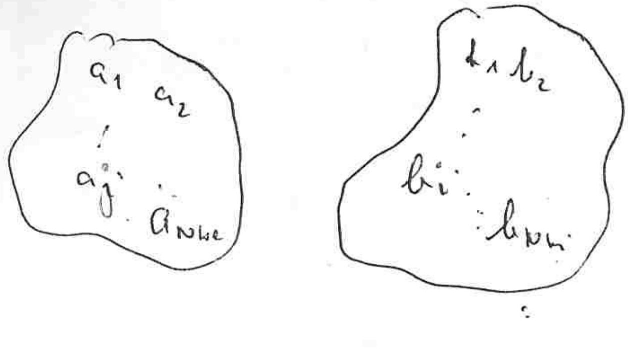
①

$\xi \xrightarrow{\text{in}} \boxed{\text{digit cs.}} \xrightarrow{\text{out}} \eta$

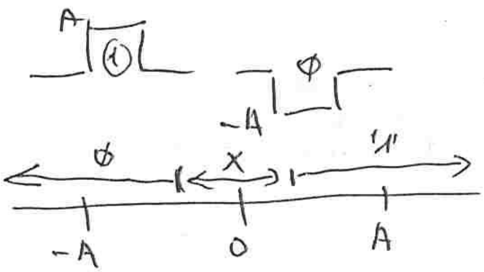
DÖNTÉS – BECSLÉS

bemeneti szimbólumok

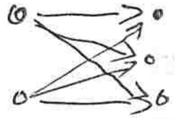
kimeneti szimbólumok



$N_{be}=2$ $N_{ki}=3$



Jelzési vagy szimbólum sebesség (diszkrét eset)



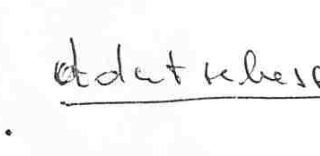
v_{jel} [baud] $= \dfrac{\text{szimbólum szám}}{\text{idő}}$

Adatsebesség

BSC esetén $N=2 \Rightarrow v_{jel} = v_{bit} \equiv v_{adat}$

$$v_{adat} = v_{jel} \cdot \mathrm{ld}\, N_{be} = \frac{\text{bitszám}}{\text{idő}} \left[\frac{\text{bit}}{\text{sec}}\right]$$

Emlékezetmentes, stacioner csatorna



Átmeneti valószínűség $P_{ij} = P(\eta = b_i \mid \xi = a_j)$

$i = 1..N_{ki}$ $j = 1..N_{be}$

P átviteli mátrix

hibázások

hibamentes eset

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

hiba valósz.: $P_e = \sum_{i=1}^{N} p_i P(\eta \neq b_i \mid \xi = a_i)$ → félredöntés

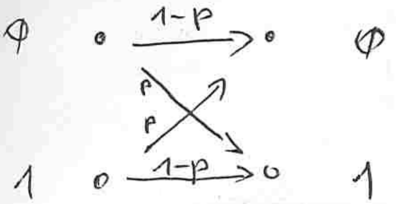
Σ oszlop $= 1$

$= \sum_{i=1}^{N} p_i (1 - P_{ii})$

BSC

$N_{be} = N_{ki} = 2$ $\{0,1\}$ bináris

$P_{01} = P_{10} = p$ szimmetrikus



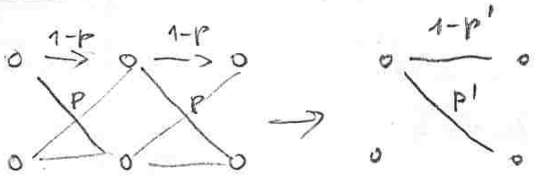
$$P = \begin{bmatrix} (1-p) & p \\ p & (1-p) \end{bmatrix}$$

Hibavalószínűség

$$P_e = P(\eta \neq \xi) = p_1 P_{01} + p_0 P_{10} \underset{\text{mert szimm.}}{=} (p_1 + p_0)\, p = p$$

$\Rightarrow \boxed{P_e = p}$ A hiba csak a csatornától függ (BSC).

Pl.

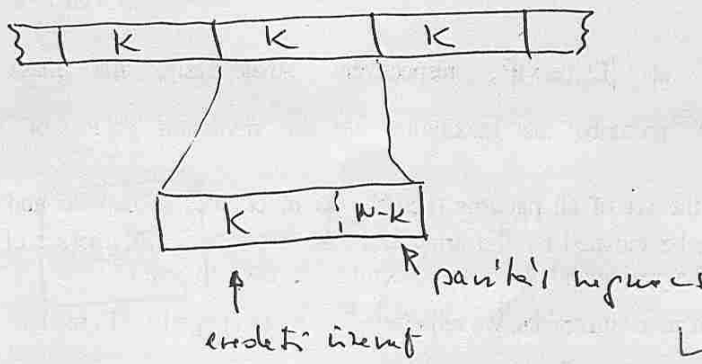


$$\left.\begin{aligned} p' &= (1-p)p + p(1-p) = 2p(1-p) = 2p - 2p^2 \\ (1-p') &= (1-p)^2 + p^2 = 1 - 2p + p^2 \cdot 2 \end{aligned}\right\} \Sigma = 1$$

$p = 0{,}1 \Rightarrow p' = 0{,}2 - 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}18$

~~Hibax~~ Hiba felismerése, javítása

üzenet



→ pl ismételjük a jelet

redundancia feladatai: – hibajelzés
– javítás

/Ha marad idő elmondani az én előadásomon/

Hatékonyság: $\frac{K}{N}$

Csatornakapacitás

Maximális információ átviteli képesség

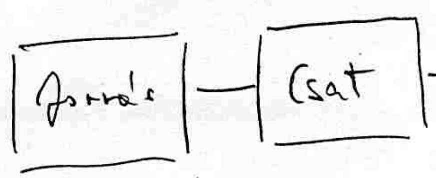
$C = \left[\frac{bit}{T}\right]$?

$C = 1 - H(p)$

csatorna

atorna kapacitás (BSC)

Maximális információ átviteli sebesség. $C = \left[\frac{\text{bit}}{T}\right]$



$I = I_{max} - \Delta I$

$C = I_{max} - \Delta I$

$I_{max} = H(P)_{max}$

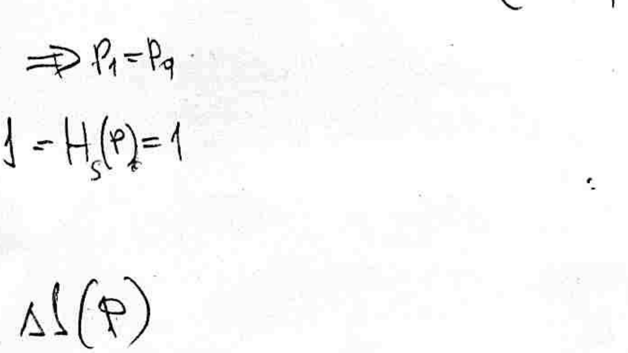
$C = 1 - \Delta I$

$\Rightarrow P_1 = P_0$

$I = H_S(P) = 1$

$\Delta I(P)$

modell



$\mathrm{Max}\{H_S(P)\} = 1$

$C = 1 - H(P)$

	hiba gen	adott	
$(1-p)$	0	0	0
	0	1	1
p	1	0	1
	1	1	0

SC kapacitás

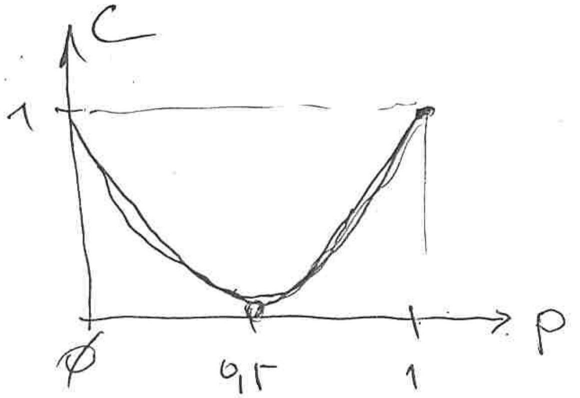
$$\begin{bmatrix} 1-p_1 & p_2 \\ p_1 & 1-p_2 \end{bmatrix} \qquad p^+ = 1 - \frac{p_1+p_2}{2} \qquad p^- = \frac{p_1+p_2}{2} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \quad p = \frac{p_1+p_2}{2}$$

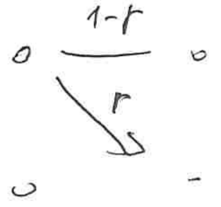
$\Sigma 1 \qquad \Sigma 1$

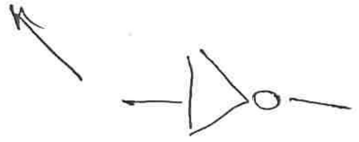
$$C = 1 - H(P)$$

Sol.

$p: 0 \ldots 1 \quad H(p)$







Adott az F forrás a P forráseloszlásával:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.25	0.125	0.125	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625

Adott továbbá a következő C kód:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0000	0001	0010	0011	0100	0101	1111	1110	1101	1100	1011

2 egy... hatv...

a) Teljesül-e az egyértelmű dekódolhatóság kritériuma C kódra? (*5 pont*)
b) Határozza meg az F forrás entrópiáját és C kód átlagos kódszóhosszát! (*5 pont*)
c) Végezze el az optimális forrás-kód hozzárendeléseket! (*5 pont*)
d) Ezen optimális kód C kód hány százalékára tömörít? (*5 pont*)

Megoldás

$\sum_i 2^{-l_i} \le 1$

a) Teljesül-e az egyértelmű dekódolhatóság kritériuma C kódra?
Igen. A Kraft egyenlőtlenség teljesül és a kódszavak eltérőek.
b) Határozza meg az F forrás entrópiáját és C kód átlagos kódszóhosszát!

$$H(P) = \sum_i p_i \cdot ld\left(\frac{1}{p_i}\right) = 3.25$$

$$\lambda = \frac{1}{N} \cdot \sum_i p_i \cdot l_i = 4$$

c) Végezze el az optimális forrás-kód hozzárendeléseket!

Huffman az opt. de ha 2 negatív hatvány akkor Shannon is opt.

Mivel a valószínűségek felírhatók 2^{-l_i} alakban, ezért a Shannon kódolás is optimális.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11	101	100	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001	0000
2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4

d) Ezen optimális kód C kód hány százalékára tömörít?
L_1=3.634
L_1/L= 90.91%

$2^{-l_i} \le P_i < 2^{-(l_i-1)}$

1–0,5] → 1
(0,5–0,25] → 2
(0,25–0,125] → 3
(0,125–0,0625] → 4

2 egész számú hatv. esetén
$2^{-l_i} = P_i$

mert:
$H(P) = \lambda$
$\sum p_i \, ld \frac{1}{p_i} = \sum p_i l_i$
⇓
$p_i = 2^{-l_i}$

Adott az F forrás a P forráseloszlásával:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
0.3	0.2	0.15	0.15	0.1	0.06	0.04

Végezze el ezen forrásra a
a) Shannon
b) Fano
c) Huffmann
kódolást.

...tematikus kódolások

Shannon kódolás

$$\lambda = \sum p_i l_i \qquad H(P) = \sum p_i \,\mathrm{ld}\, \frac{1}{p_i}$$

Shannon I.

$H(P) \le \lambda < H(P)+1$

ha 2 egész hatvány

$H(P) = \lambda$

$\sum p_i \,\mathrm{ld}\, \frac{1}{p_i} = \sum p_i l_i$

$\Downarrow$

$p_i = 2^{-l_i}$

abs. optimum

$$\boxed{l_i = \mathrm{ld}\, \frac{1}{p_i}}$$

pl. $P = \left\{ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8} \right\}$

$2^{l_i} = \frac{1}{p_i}$

$2^{-l_i} = p_i$

$$2^{-l_i} \le p_i < 2^{-(l_i-1)}$$

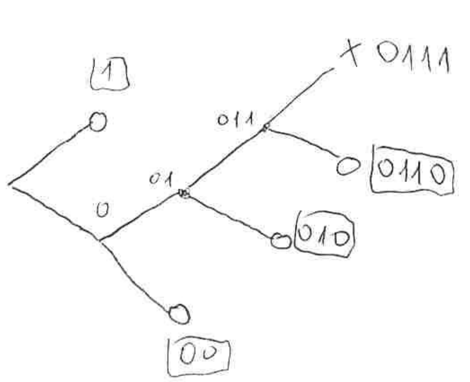
pld. $p_i = 0,2$ $\quad 0,125 < 0,2 < 0,25$

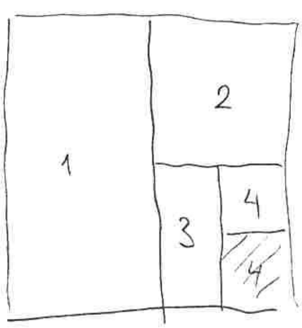
$\qquad\qquad\qquad 3 \qquad\qquad 2$

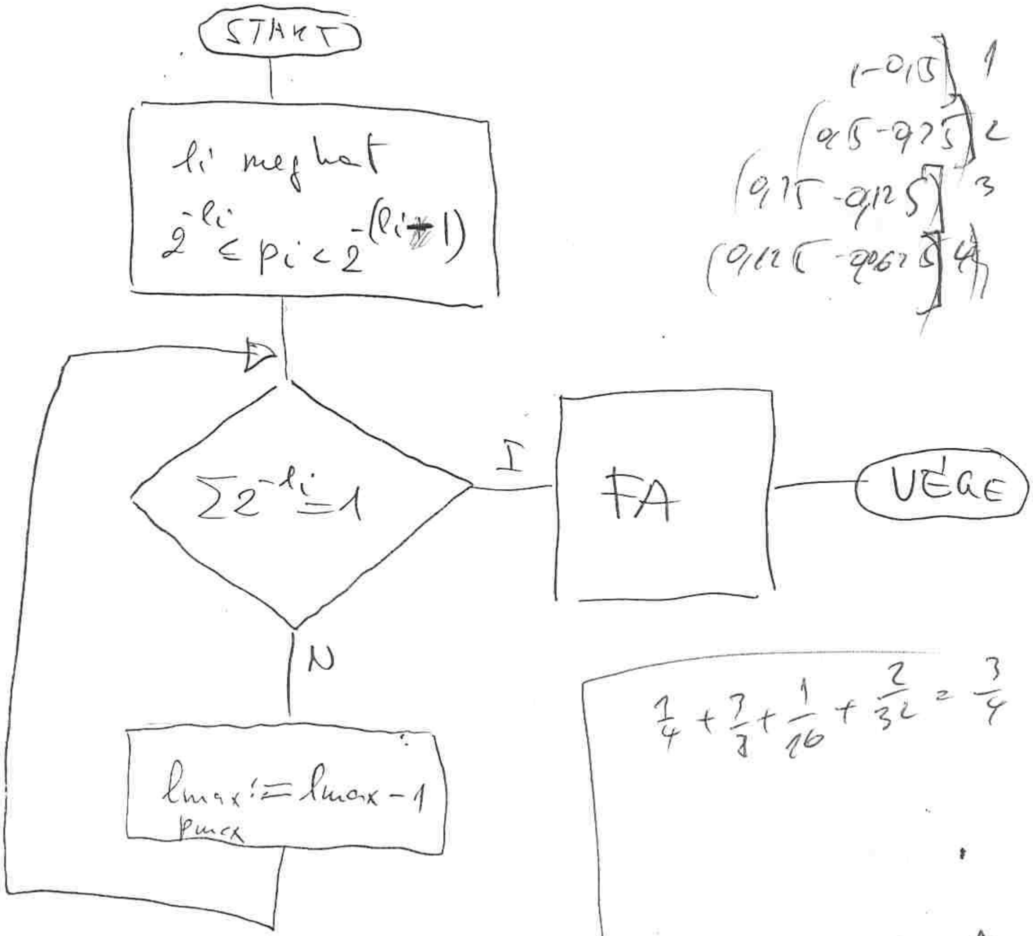
Kraft $\sum_{i=1}^{N} 2^{-l_i} \le 1$

Ha $\sum 2^{-l_i} = 1 \Rightarrow$ nincs lehetőség rövidítésre

$\sum 2^{-l_i} < 1 \Rightarrow \sum 2^{-l_i} \le 1 - 2^{-l_{max}}$







$[1-0,5]$ 1
$[0,5-0,25]$ 2
$[0,25-0,125]$ 3
$[0,125-0,0625]$ 4

$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{2}{32}=\frac{3}{4} \to \frac{1}{4}$ maradt

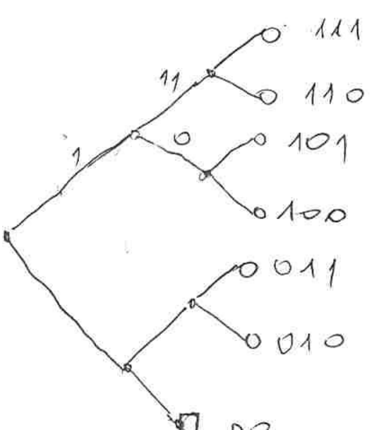
dönteni kell lenne 5-ről

Pld

P	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,06	0,04
	2	3	3	3	4	5	5
						4	4
					3	3	3
	2	3	3	3	3	3	3

ez az?

$\to \sum 2^{-l_i} = 1$



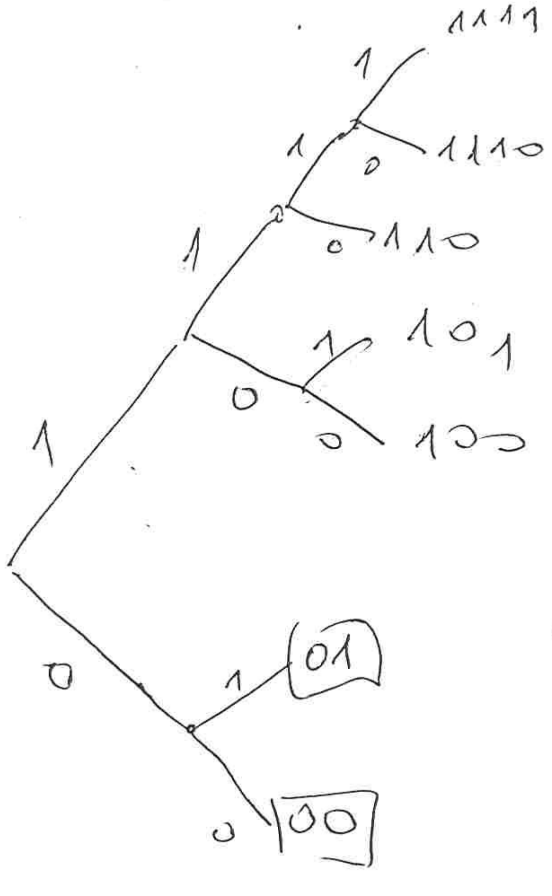
Kraft-egyenlőtlenség „=" akkor felhasználva fa

átlagos hosszúság:

$\bar{l} = \sum_i p_i l_i = 0,3 \cdot 2 + (1-0,3) \cdot 3 = 2,7$

+ (egyenlőtlen...) intervallum felezéses
ahol intervallum valsége kettő
különbség a legkisebb legyen

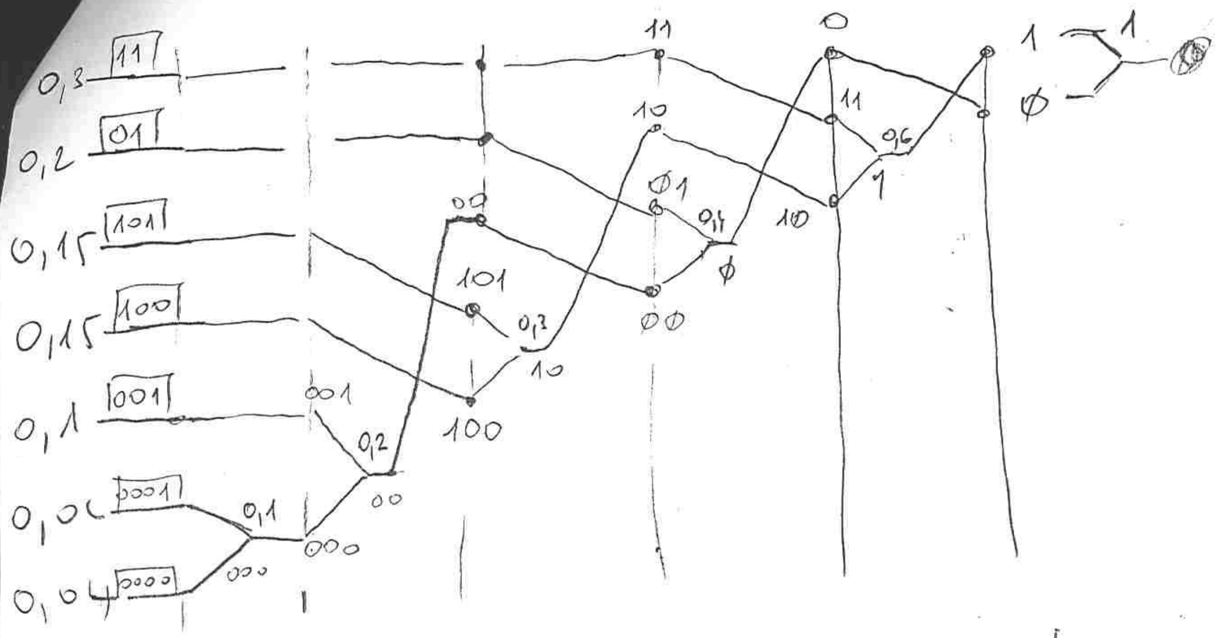
0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,06	0,04
0		1				
00	01	10		11		
		100	101	110	111	
					1110	1111
00	01	100	101	110	1110	1111
2	2	3	3	3	4	4



+ Átlagos kódszóhossz
/kombinálni/

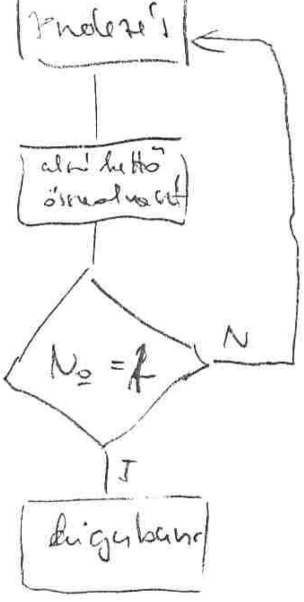
$l = \sum_i l_i p_i = 2,6$

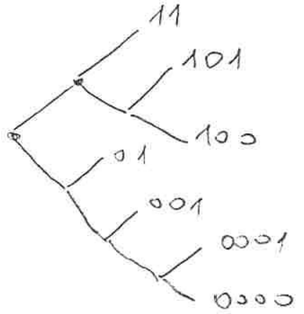
Huffman (optimális) /ő nevezzük a legjobbat/



kigubancolva a fa
+ egyforma valószínűséggel

$\bar{\lambda} = 2,6$ (ua. mint a Fano...)





(ez volt a feladat)

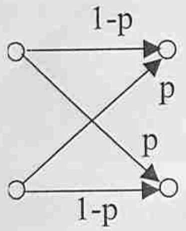
Adott $P = \{0,3 \quad 0,2 \quad 0,15 \quad 0,15 \quad 0,1 \quad 0,06 \quad 0,04\}$

Végezze el a : - Shannon
- FANO
- Huffmann

kódolást!

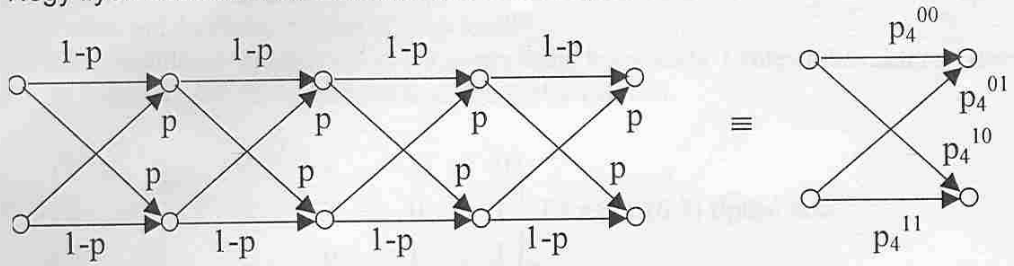
Inb. ... 14^{00} V2-619.

Adott egy bináris szimmetrikus csatorna állapot átmeneti valószínűségeivel.



ahol p=0.1

Négy ilyen csatornát kaszkád módon összekapcsolunk.



a) Az ilymódon keletkező eredő csatorna BSC-e? (*6 pont*)
b) Határozza meg az eredő csatorna állapot átmeneti valószínűségeit. (*10 pont*)
c) Határozza meg a C_1 és C_4 csatorna kapacitásokat az eredeti ill. az eredő csatornára. (*7 pont*)
d) Határozza meg a C_4 és C_8 közötti relációt. (*4 pont*)

---

a. Az alap csatorna BSC. Mivel nem alkalmaztunk aszimmetrikus műveletet, az eredő csatorna is BSC lesz.

b. Az összes lehetséges tévesztési utakat megvizsgálva a 0-1 hibázás valószínűsége:

$$p_4^{01} = 4p(1-p)^3 + 4p^3(1-p) = 0{,}2952$$

ugyanekkora az 1-0 tévesztés vsz-e.

Ezután

$$p_4^{00} = p_4^{11} = 1 - p_4^{01} = 1 - (4p(1-p)^3 + 4p^3(1-p)) \approx 0{,}4048$$

c. $p_4^{01} = 0.4 \cdot 0.9^3 + 0.004 \cdot 0.9 = 0.2952$ $\qquad H(p) = \sum_i p_i ld \frac{1}{p_i}$

$1 - p_4^{01} = 0.7048$

$H_1(p) = 0.1ld10 + 0.9ld\frac{1}{0.9} = 0.47 \qquad C_1 = 0.53$

$H_4(p) = 0.2952ld(1/0.2952) + 0.7048ld(1/0.7048) = 0.87 \qquad C_4 = 0.13$

d. $C_8 < C_4$, mert $p_8 > p_4$

$\underline{G} = [\underline{I}_{k\times k} \mid \underline{B}_{k\times(n-k)}]$

$\underline{H} = [-\underline{B}^T \mid \underline{I}_{(n-k)\times(n-k)}]$

$-1 = +1 \pmod 2$

$\underline{H}\,\underline{c}^T = \underline{0} \to$ ha $\underline{e}^T = \underline{0}$

$= \underline{s}^T \quad \underline{s} = \underline{e}\,\underline{H}^T$

Egy lineáris kód paritásmátrixa:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Számítsuk ki a kód generátormátrixát.
b) Szisztematikus-e ez a kód? Miért?
c) Számítsuk ki a kódszavakat.
d) Hány hibát tud érzékelni és javítani ez a kód?
e)A szindrómatáblázat felírása nélkül határozza meg, hogy mely 1 bites hibavektorok tartoznak a csak 1 db 1-est tartalmazó szindrómákhoz. Indokolja válaszát.

a) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ez egy C(6,3) típusú kód.

b) Igen, mert a generátormátrix első almátrixa a 3. rendű egységmátrix, mellyel az információbiteket megszorozva olyan kódszavakhoz jutunk, amelyeknek első bitjei megegyeznek az információs bitekkel.

c)

c_0	=	0	0	0	0	0	0
c_1	=	0	0	1	0	1	1
c_2	=	0	1	0	1	0	1
c_3	=	0	1	1	1	1	0
c_4	=	1	0	0	1	1	0
c_5	=	1	0	1	1	0	1
c_6	=	1	1	0	0	1	1
c_7	=	1	1	1	0	0	0

d)Kódszavak közti Hamming távolságok:

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
c_0	0	3	3	4	3	3	4	3
c_1		0	4	3	4	3	3	4
c_2			0	3	4	3	3	4
c_3				0	3	4	4	3
c_4					0	3	3	4
c_5						0	4	3
c_6							0	3
c_7								0

$d_{min}=3$, vagyis $d_{min}-1=2$ hibát érzékel, $(d_{min}-1)$ div 2 = 1 hibát javít.

e)A szindrómák 3 bitesek. Az 1 db 1-est tartalmazó szindrómák rendre a (1 0 0), (0 1 0) és a (0 0 1). Ezekhez a (0 0 0 1 0 0), (0 0 0 0 1 0) és a (0 0 0 0 0 1) 1 hibás hibavektorok tartoznak. Ez annak a következménye, hogy a kód szisztematikus, tehát a szindrómák kiszámításakor a H^T mátrix alsó részmátrixa az egységmátrix, vagyis a szindróma akkor tartalmaz 1 db 1-est, ha a hibavektor utolsó n-k bitjéből valamelyik hibásodik meg (ezek szorzódnak az egységmátrix oszlopaival).

Egy (7,3) szisztematikus lináris kód lineárisan független kódszavai

$\mathbf{c}_1 = (0010111)$, $\mathbf{c}_2 = (1100101)$, $\mathbf{c}_3 = (1011100)$.

a) Határozza meg a kód generátormátrixát! (*5 pont*)

b) Határozza meg a kód paritásellenörző mátrixát! (*5 pont*)

c) Hány hiba javítására és hány hiba jelzésére alkalmas ez a kód? (*5 pont*)

d) A vevő dekódolójába a $v = (1111001)$ vektor érkezett. Határozza meg a szindrómát és ennek alapján döntse el, hogy mi volt az eredeti üzenet! (*5 pont*)

a) A generátormátrix sorai rendre a $\mathbf{v}_1=\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_1$, $\mathbf{v}_2=\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3$, $\mathbf{v}_3=\mathbf{c}_1$ kódszavak lesznek:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) A kód paritásellenörző mátrixa:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ($\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ is elfogadható)

c) Az érvényes kódszavak:

$\mathbf{c}_0=(0000000)$, $w=0$;	$\mathbf{c}_4=(1001011)$, $w=4$;
$\mathbf{c}_1=(0010111)$, $w=4$;	$\mathbf{c}_5=(1011100)$, $w=4$;
$\mathbf{c}_2=(0101110)$, $w=4$;	$\mathbf{c}_6=(1100101)$, $w=4$;
$\mathbf{c}_3=(0111001)$, $w=4$;	$\mathbf{c}_7=(1110010)$, $w=4$;

$d_{\min}=w_{\min}=4$, $\Rightarrow$ 1 hiba javítható és 3 hiba jelezhető.

d) $v = (1111001) \rightarrow \mathbf{s} = v\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = (1011)$, ami éppen **H** első oszlopával egyezik meg, vagyis a vett kódszó első bitje hibásodott meg. Így az eredeti üzenet: $\mathbf{t}=(011)$.

MODULÁCIÓ

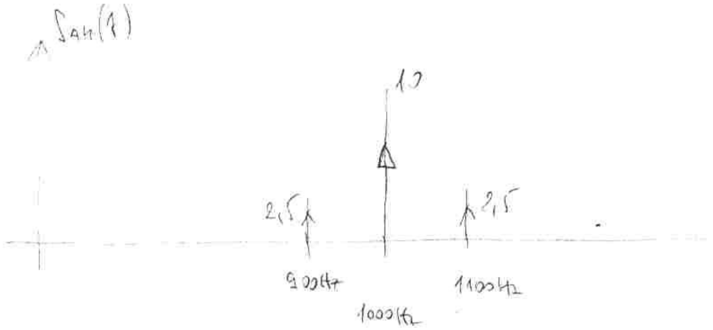
1. AM modulátor kimenő jele:

900Hz 1000Hz 1100Hz

$$s_{AM}(t) = 5\cos(1800\pi t) + 20\cos(2000\pi t) + 5\cos(2200\pi t)$$

Határozza meg

a. Melyik típusú AM, AM-DSB
b. $s_m(t)$ moduláló jelet,
c. f_v vivőfrekvenciát, $f_v = 1\,kHz$
d. $s_{AM}(t)$ maximális és minimális értékét, $U_{max} = 30$ $U_{min} = 10$
e. modulációs mélységet, $m = 1/2$
f. a modulált jel spektrumát,
g. a vivőfrekvenciás komponensben és az összes oldalsávokban lévő teljesítmények arányát. 12,5 %



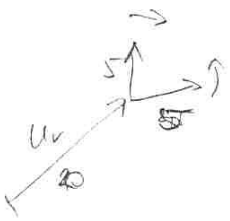
$$\frac{2\,(2{,}5)^2}{10^2} = 12{,}5\,\%$$

$> f$

$s_m(t) = ?$

$a(t) = U_v + s_m(t) = 20 + 10\cos 200\pi t$

$s_m(t) = 10\cos 200\pi t$



$$m_{AM} = \frac{U_m}{U_v} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

2. *feladat*: Mekkora az FM jel sávszélessége m_f=15 esetén, egyetlen szinuszos moduláló jellel (f_v=10 MHz, f_m=20 kHz)?

Egy szinuszos moduláló jel esetén az FM jel spektruma leírható az alábbi Fourier-sorral:

$$U_{FM}(t) = U_v\Bigg[J_0(m_f)\cos\omega_v t + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m_f)\{\cos(\omega_v + 2n\omega_m)t + \cos(\omega_v - 2n\omega_m)t\} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(m_f)\{\cos(\omega_v + (2n-1)\omega_m)t + \cos(\omega_v - (2n-1)\omega_m)t\}\Bigg]$$

Megegyezés szerint az FM jel elvileg végtelen spektrumából csak azt a szeletet vesszük figyelembe, amelynek koefficiensei a vivőnek legalább egy százalékát elérik (ezek számát α jelöli).
Így a sávszélesség: $f_B=2\alpha f_m$

α FM tényező

Ez a könyv (11.32) egyenlete szerint α=15, m_f=15 esetén, amiből a kívánt sávszélesség 600 kHz.

$\alpha \cong 1,$ ha $m_f < 0{,}1$
$\alpha \cong m_f,$ ha $m_f > 10$
$\alpha \cong 1 + m_f + \sqrt{m_f}\,,$ egyébként

$m_f = \frac{k_{FM} U_M}{f_m} = \frac{10^6}{f_m}$ 15kHz

Comment: Egyéb szükséges képletek és definíciók a 133. oldalon.

Narrow Band FM	(NBFM):	$f_B=2f_m$,	$m_f<0.1$
Wide Band FM	(WBFM):	$f_B=2f_D$,	$m_f>10$

Carson formula: $B_{RF}=2(\Delta F+f_{mod})=2(m_f f_{mod}+f_{mod})=2(15*20+20)=640$ kHz

$f_p = k_{FM}\, s_m(t) + f_v$; $s_{FM}(t) = U_v \cos(2\omega_p t)$; $s_m(t) = U_m \cos \omega_m t$

$s_{FM}(t) = U_v \cos\left(\omega_v t \pm \frac{k_{FM} U_m}{f_m} \sin \omega_m t\right)$

10 MHz 20 kHz

3. feladat: Ha egy $s_v(t)=U_v\cos\omega_v t$ vivőt egy $s_m(t)=U_m\cos\omega_m t$ függvénnyel fázismodulálunk, mekkora lesz a maximális fázislöket, és m_p értéke?
$U_v=1$ V, $\omega_v=2\pi*10^6$ rad/sec, $c=0.1$ rad/V, $U_m=1$ V, $\omega_m=2\pi*10^3$ rad/sec.
k_{PM}

Megoldás: Mivel a fázismodulált jel időfüggvénye:

$$s_{PM}(t)=U_v\cos(\omega_v t+cU_m\cos\omega_m t)$$

alakú, ezért m_p értékét a következőek alapján számolhatjuk ki:

$$m_p=c*U_m=0.1*1=0.1 \text{ rad}$$

k_{PM}

A modulált jel pillanatnyi fázisingadozása $cU_m\cos\omega_m t$, amelynek maximális értéke szintén $c*U_m$. Ezért a maximális fázislöket szintén 0.1 rad értékű.

Commentek:

Ha $s(t)=A\cos[\omega_c t+\varphi+\beta(t)]$,
a jel fázisa: $\omega_c t+\varphi+\underline{\beta(t)}$ ha az utolsó tag a moduláló jellel arányos, akkor beszélünk fázismodulációról;
a jel pillanatnyi frekvenciája: $\frac{1}{2\pi}\left(\omega_c+\frac{d\beta}{dt}\right)$ ha az utolsó tag a moduláló jellel arányos, akkor beszélünk frekvenciamodulációról.
PM: $\beta(t)=\Delta\Phi*s_m(t)$, ahol $\Delta\phi$ a fázislöket
FM: $\beta(t)=\Delta\Omega\int_{\text{hat.lan}}^{t}s_m(t)dt$, itt $\Delta F=\frac{\Delta\Omega}{2\pi}$ a frekvencialöket.

$s_{PM}(t)=U_v\cos\left(\omega_v t+k_{PM}\,s_m(t)\right)$ $\quad m_p=k_{PM}\cdot U_m$