2023 Jan18 vizsgamo

2023. január 22., vasárnap 22:13

1) A biciklisek átlagosan napi 2 míg az autósok átlagosan 5 balesetet okoznak Budapesten. (Az autósok és a biciklisek száma független egymástól.) Mi a valószínűsége, hogy

a 3 óra alatt több, mint 2 baleset történik? (3p)

$X \sim \text{Poisson}(2+5)$ $\quad t = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

$P(X>2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - e^{-\frac{7}{8}}\left(1 + \frac{7}{8} + \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^2}{2!}\right) \approx 0{,}059$

b az első és a második autóbaleset között több, mint 4 óra telik el?(3p)

$Y \sim \text{EXP}(5)$

$P(Y > \frac{1}{6}) = 1 - (1 - e^{-5/6}) = e^{-\frac{5}{6}} \approx 0{,}4346$

c a nap 3. biciklis balesete 8 óra után történik? (3p)

$Z \sim \text{Poisson}(2)$ $\quad t = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

$P(Z \le 2) = e^{-\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2!}\right) \approx 0{,}9698$

VAGY

$T \sim \text{Erlang}(n=3, \lambda=2)$

$P(T>8) = 1 - \left(1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^i}{i!} e^{-\frac{1}{3}}\right)$

d ha összesen 6 baleset történt ma, abból 4-et okozott autó? (3p)

$W \sim \text{Poisson}(5)$

FÜGGETLENSÉG

$P(W=4 \mid X=6) = \frac{P(Z=2)\cdot P(W=4)}{P(X=6)} = \frac{\cancel{e^{-2}}\frac{2^2}{2!}\cdot \cancel{e^{-5}}\frac{5^4}{4!}}{\cancel{e^{-7}}\frac{7^6}{6!}} = \binom{6}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^4 \approx 0{,}3187$

2) Az decemberben született kiskutyák mostani tömege Uni(2,4) eloszlású, míg a januárban születetteké Uni(1,2).

a Mi lesz egy decemberi és egy januári kiskutya együttes tömegének a sűrűségfüggvénye? (6p)

$X \sim \text{Uni}(2,4)$ $\quad Y \sim \text{Uni}(1,2)$

$f_{X+Y}(s) = \int^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(s-x)\,dx$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{2}$ $\quad 3 < s < 6$

$f_Y(y) = 1$

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty} f_X(x) \cdot f_Y(s-x)\, dx$$

f_X ...

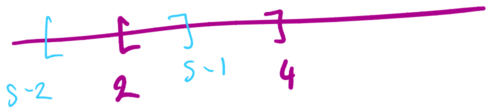
$f_Y(y) = 1$

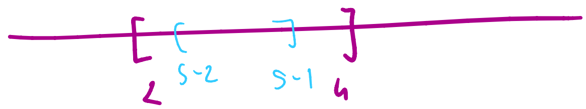
$2 < x < 4$

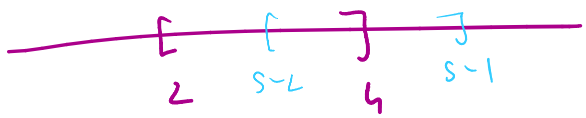
$1 < y < 2$

$1 < s-x < 2$

$s-2 < x < s-1$





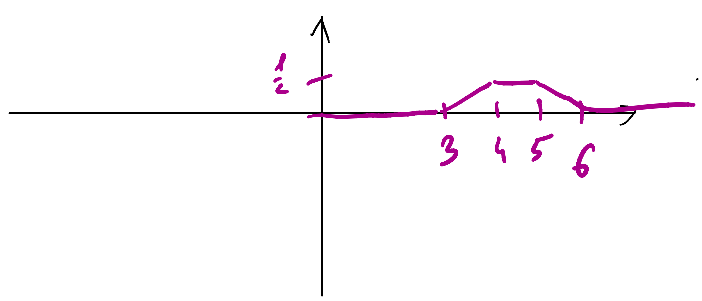


$$\int_2^{s-1} \frac{1}{2}\, dx = \frac{s-1-2}{2} = \frac{s-3}{2}$$

$$\int_{s-2}^{s-1} \frac{1}{2}\, dx = \frac{s-1-(s-2)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{s-2}^{4} \frac{1}{2}\, dx = \frac{4-(s-2)}{2} = \frac{6-s}{2}$$

$$f_{X+Y}(s) = \begin{cases} \frac{s-3}{2} & 3 < s < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 < s < 5 \\ \frac{6-s}{2} & 5 < s < 6 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



b Becsüld meg, hogy hány decemberi kiskutyának az együttes tömege fogja meghaladni a 70 kg-ot 80%-os valószínűséggel? (5p)

$E(X) = \frac{2+4}{2} = 3$ $\qquad D(X) = \frac{4-2}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$P(S_n > 70) = 0{,}8$ $\qquad S_n \sim N\left(n \cdot 3, \sqrt{\frac{n}{3}}\right)$

$$\Downarrow$$

$$P\left(Z > \underbrace{\frac{70-n\cdot 3}{\sqrt{\frac{n}{3}}}}_{-0{,}846}\right) = 0{,}8$$

$$\frac{70-n\cdot 3}{\sqrt{\frac{n}{3}}} = -0{,}846$$

$$3n - \frac{0{,}846}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{n} - 70 = 0$$

$$\sqrt{n} \approx 4{,}91$$

$$\underline{\underline{n \geq 25}}$$

c Tegyük fel, hogy n darab decemberi kiskutya közül mindegyik egymástól függetlenül, ugyanakkora valószínűséggel talál gazdára. Mi a valószínűsége, hogy több, mint 3 kiskutya lesz gazdis, ha korábbi statisztikákból tudjuk, hogy várhatóan összesen 20-nak lesz gazdája, és a gazdis kutyusok számának szórása pedig 4? (5p)

$X \sim BINOM(n, p)$

$$\left.\begin{aligned} E(X) &= 20 = n\cdot p \\ D(X) &= 4 = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \\ 16 &= n\cdot p(1-p) \end{aligned}\right] \quad \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 1-p \Rightarrow p = \frac{1}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$n = 100$$

$$P(X>3) = 1 - \sum_{k=0}^{3}\binom{100}{k}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^k\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{100-k}$$

NORMÁLIS KÖZELÍTÉSSEL

$$\approx \quad \Phi\left(\frac{17}{4}\right) = 1$$

3) Legyen X valószínűségi változó, $E(X) = D(X) = 2$. Mennyi $P(X > 1)$, ha

a X normális eloszlású? (3p)

b X exponenciális? (3p)

c X egyenletes? (4p)

$X \sim NORM$

$$P(X>1) = P\left(Z > \frac{1-2}{2}\right)$$

$$\ldots = 1 - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$X \sim EXP$

$$P(X>1) = 1-\left(1-e^{-1/2}\right) \approx 0{,}606$$

EGYENL.

$$\frac{a+b}{2} = 2 \Rightarrow a = 4-b$$

$$\frac{b-a}{\ldots} = 2$$

$P(X>1) = P\left(Z > \frac{1-2}{2}\right)$

$= 1 - P(Z < -\frac{1}{2}) = 1 - \Phi(-\frac{1}{2})$

$= \Phi(\frac{1}{2}) = 0{,}6915$

$\frac{b-a}{\sqrt{12}} = 2$

$b - (4-b) = 2 \cdot \sqrt{12}$

$b \approx 5{,}464$

$a \approx -1{,}464$

$P(X>1) = \frac{5{,}464-1}{5{,}464+1{,}464} = 0{,}6443$

4) A BME vezetősége állítja, hogy a VIK-re bekerült diákok átlagpontszáma 427 pont volt. Nekünk 20 diáknak az adatai állnak rendelkezésünkre: (390,400,410,395,480,485,450,430,400,410,370,435,441,402,490,398,403,404,405,495). Vizsgáld meg ezt a hipotézist 5% szignifikanciaszinten, amennyiben az adatok normális eloszlásúnak tekinthetők, 5 pont szórással! Add meg a konfidenciaintervallumot és a p-értéket is! (8p)

$\bar{X} = 424{,}65 \quad \alpha = 0{,}05 \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \quad \sigma = 5 \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$\left(\bar{X} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\underbrace{424{,}65 - \frac{1{,}96 \cdot 5}{\sqrt{20}}}_{422{,}46},\ \underbrace{424{,}65 + \frac{1{,}96 \cdot 5}{\sqrt{20}}}_{426{,}84}\right)$$

$H_0: \mu = 427$

$$\frac{|427 - 424{,}65| \cdot \sqrt{20}}{5} = 2{,}1$$

$$\Phi(2{,}625) = 0{,}9821$$

$2(1 - \Phi(2{,}625)) = p = 0{,}036 < 0{,}05$ elvetjük a H_0-t

5) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = c \cdot xy$ a $0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}$ tartományon (és nulla egyébként).

a Számold ki c-t! (3p)

b Számold ki a peremsűrűségeket! (4p)

c Számold ki a feltételes sűrűségeket! (2p)

d Számold ki $E(X)$-et és $E(Y)$-t! (4p)

e Független-e X és Y? (Indokolj!) (1p)

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} cxy \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{cxy^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 c\frac{(x^2 - x^5)}{2} dx = \frac{c}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{c}{12} = 1$$

a.) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} cxy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{cxy^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 c\,\frac{(x^2-x^5)}{2}\,dx = \frac{c}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{c}{12} = 1$

$\underline{c = 12}$

b.) $\displaystyle f_1(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 12xy\,dy = 6\left(x^2-x^4\right)$

$\displaystyle f_2(y) = \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 12xy\,dx = 6\left(y^2-y^4\right)$

c.) $\displaystyle f_{1|2}(x|y) = \frac{12xy}{6(y^2-y^4)} = \frac{2x}{y-y^3}$

$\displaystyle f_{2|1}(y|x) = \frac{12xy}{6(x^2-x^4)} = \frac{2y}{x-x^3}$

d.) $\displaystyle E(X) = \int_0^1 6\left(x^3-x^5\right)dx = \left[6\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right)\right]_0^1 = \frac{18}{28}$

$\displaystyle E(Y) = \frac{18}{28}$ (szimmetria)

e.) $f_1(x)\cdot f_2(y) \neq f(x,y)$ NEM független