BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Serény György

FORMÁLIS ÉS SZEMLÉLETES VEKTORANALÍZIS

Műegyetemi Kiadó, 2002.

Szerző:
Dr. Serény György

(Második utánnyomás)

Azonosító: **10042**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Hajdu István
Terjedelem: 11,25 (A/5) ív
Nyomta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Felelős vezető: Frigy Ottó

Munkaszám: 0154-02

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak

Ebben az előkészítő fejezetben a vektorfüggvények, (azaz $\mathbf{R}^n$ valamely részhalmazából $\mathbf{R}^m$–be képező függvények) integráljának (pontosabban több különböző integráljának) fogalmát definiáljuk a többváltozás függvények integrálfogalmának általánosításával. Először azonban az általános definícióhoz szükséges alapfogalmakat vezetjük be. Az első paragrafusban az "irányított nagyság" fogalmát definiáljuk, míg a másodikban megadjuk azokat a speciális alakzatokat, melyeken integrálni fogunk.

1.1 Vektoriális szorzat általánosítása

A többváltozós függvények integrálfogalmát úgy szeretnénk általánosítani, hogy az integrál az integrálási tartomány térbeli elhelyezkedésére is érzékeny legyen. Ehhez a tartományt irányított elemekre kell felosztanunk, tehát szükségünk lesz egy "irányított nagyság (terület, térfogat stb.)" fogalomra, melyet a vektoriális szorzatból fogunk származtatni. Mivel egy olyan integrálfogalmat akarunk kapni, mely nem csak háromdimenziós térre alkalmazható (hanem – többek között – a síkra is), a vektoriális szorzat fogalmát *minden* egynél nagyobb véges dimenzióra általánosítjuk. Emlékeztetünk arra, hogy a háromdimenziós a és b vektorok vektoriális szorzata az c vektor, mely merőleges mind a–ra mind b–re, hossza az a és b által kifeszített paralelogramma területe és iránya olyan, hogy a, b és c jobbrendszert alkot. Az ebben a definícióban szereplő fogalmak kiterjesztése tetszőleges egynél nagyobb véges dimenzióra közvetlenül fogja szolgáltatni a vektoriális szorzatnak megfelelő általános fogalmat. Ennek definíciója után kiszámításának módszerével foglalkozunk (külön kitérve a két– és háromdimenziós esetre) és megadjuk legfontosabb tulajdonságait.

A paralelogramma területének általánositása n–dimenziós térben tetszőleges n darab vektor által kifeszített paralelotop térfogata, melyet a vektorok által meghatározott determináns abszolút értéke ad meg. Ennek a fogalomnak módosításával juthatunk az n–dimenziós térben valamely $1 \le k \le n$ darab vektor által kifeszített paralelotop térfogatának fogalmához.

1.1 Definíció (Paralelepipedon térfogatának általánosítása)

Legyen $n, k \in \mathbf{N}$, $1 \le k \le n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in \mathbf{R}^n$ minden $1 \le i \le n - re$. Legyen $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ $\mathbf{R}^n$ olyan orthonormált bázisa, melyre fennáll, hogy a elemei benne vannak az $e' = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ által kifeszített altérben. Az a által kifeszített paraleletop **k–dimenziós térfogatán**, melyet $V(a)$ –val jelölünk, azon mátrix determinánsának abszolút értékét értjük, mely a elemeinek e'–beli oszlopvektoraiból áll.

1.2 Megjegyzések

(1) A fenti definíció értelmes, mindig van a feltételeknek megfelelő e bázis.

(2) A determináns tulajdonságaiból következően:

(a) a fent definiált k–dimenziós térfogat csak a–tól függ, a választott e bázistól nem.

(b) a paralelotop k–dimenziós térfogatának fogalma a szakasz hosszának, a paralelogramma területének és a paralelepipedon térfogatának általánosítása.

1.3 Példa

Legyen $n = 3$, $k = 2$, $a = (a_1, a_2)$, ahol $a_1 = (2, 0, 0)$, $a_2 = (1, 3, 0)$. Ha $e = (i, j, k)$ $\mathbf{R}^3$ szokásos bázisa, azaz $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ és $k = (0, 0, 1)$, akkor $e' = (i, j)$. Így

$$V(a) = \begin{vmatrix} a_1(1) & a_1(2) \\ a_2(1) & a_2(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

1.4 Definíció (Jobbcsavar szabály általánosítása)

Legyen e $\mathbf{R}^n$ szokásos bázisa és legyen f tetszőleges n elemű lineárisan független vektorrendszere $\mathbf{R}^n$-nek. f **jobbsodrású** vektorrendszer, ha $\det \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ef} > 0$. ($\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ef}$ az e–ről az f–re való áttérés mátrixa.)

1.5 Definíció (Vektoriális szorzat általánosítása)

Legyen $n \in \mathbf{N}, n > 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}^n$.

CROSS$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ az az egyértelműen meghatározott $\mathbf{R}^n$–beli vektor, mely

(1) merőleges az $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ altérre

(2) hossza az $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ által kifeszített paraleletop $n-1$ dimenziós térfogata

(3) iránya olyan, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, CROSS$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ vektorrendszer jobbsodrású.

1.6 Állítás (Vektoriális szorzat kiszámításának általánosítása)

Legyen $n \in N$, $n > 1$ és legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, tetszőleges $\mathbf{R}^n$-beli vektorok. Legyen $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ $\mathbf{R}^n$ valamely jobbsodrású orthonormált bázisa. Ekkor

$$\mathrm{CROSS}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = (-1)^{n-1} \cdot (e_1 A_1 + e_2 A_2 + \ldots + e_n A_n)$$

ahol A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bármely olyan $n \times n$ -es mátrix első sorának i.-edik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsa, melynek j. sora $(j = 2, \ldots, n)$ a_{j-1} e–beli sorvektora.

1.7 Megjegyzés

Mivel a fenti állítás miatt CROSS kiszámítása analóg egy determinánsnak első sora szerinti kifejtésével, gyakran fogjuk használni az alábbi mnemotechnikailag hasznos jelölést :

$$\mathrm{CROSS}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = (-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_{n-1} & e_n \\ a_1(1) & a_1(2) & \ldots & a_1(n-1) & a_1(n) \\ a_2(1) & a_2(2) & \ldots & a_2(n-1) & a_2(n) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}(1) & a_{n-1}(2) & \ldots & a_{n-1}(n-1) & a_{n-1}(n) \end{vmatrix},$$

ahol persze a i. sor $(i = 2, \ldots, n)$ a_{i-1} e–beli sorvektora.

Speciálisan

(1) ha $n = 2$, akkor $v = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$, $i = (1,0)$, $j = (0,1)$ jelölésekkel :

$$\mathrm{CROSS}(v) = -\begin{vmatrix} i & j \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = (-v_2 i + v_1 j) = (-v_2, v_1)$$

vagyis CROSS(v) v–nek $+\pi/2$–el való elforgatottja. Ebből nyilván

$$\mathrm{CROSS}(\mathrm{CROSS}(v)) = -v$$

(2) ha $n = 3$, akkor a $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{R}^3$, $i = (1,0.0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$ jelöléseket használva :

$$\mathrm{CROSS}(v, w) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = v \times w$$

1.8 Állítás (CROSS örökli a vektoriális szorzat tulajdonságait)

(1) CROSS$(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_{n-1}) = -$CROSS$(a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1})$

(2) CROSS$(a_1, a_2, \ldots, b, \ldots, b, \ldots, a_{n-1}) = 0$

(3) $\mathrm{CROSS}(a_1+b, a_2, \ldots, a_{n-1}) = \mathrm{CROSS}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + \mathrm{CROSS}(b, a_2, \ldots, a_{n-1})$

(4) $\mathrm{CROSS}(\lambda \cdot a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = \lambda \cdot \mathrm{CROSS}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \quad (\lambda \in \mathbf{R})$

1.2 Görbék és felületek véges dimenziós lineáris normált tereken

Rátérünk $\mathbf{R}^n$ azon részhalmazainak definiálására és legfontosabb jellemzőik megadására, melyek integrálási tartományként szerepelhetnek. A tárgyalás során néhány példával illusztráljuk az újonnan bevezetett fogalmakat.

Az alábbi definíció annak a szemléletes felületfogalomnak az egzakt megfelelője és általánosítása, mely szerint "a körlapból nyújtással, csavarással, öszenyomással szakítás és belső pontban való ragasztás nélkül kapott alakzatok a felületek".

1.9 Definíció (Felületek)

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.

(1) Legyen $H \subseteq \mathbf{R}^n$ tetszőleges halmaz. Bármely f fügyvény **szakaszonként folytonosan deriválható** H–n (jelben $f \in \dot{C}_1(H)$), ha f folytonos H–n és H előáll véges sok olyan mérhető páronként közös belső pont nélküli részhalmazának úniójaként, melyek mindegyikének belsejében folytonosan deriválható és itt a deriváltja korlátos.

(2) Legyen $H \subseteq \mathbf{R}^n$ tetszőleges. H **lezártjának** nevezzük azt a $\overline{H}$ halmazt, melynek elemei H elemei és H torlódási pontjai. H **összefüggő**, ha nincs $A, B \subseteq H$, hogy $A \cup B = H$, $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \emptyset$.

(3) Legyen $m \in \mathbf{N}$, $1 \leq n \leq m$ és legyen $A \subseteq \mathbf{R}^n$ zárt, korlátos, összefüggő, mérhető és nem üres belsejű halmaz. Legyen $r = r(u)$ A–n értelmezett, A–n szakaszonként folytonosan deriválható és A belsejében invertálható $\mathbf{R}^m$–be képező függvény, melynek parciális deriváltjai, az

$$r_u = (r_{u_1}, r_{u_2}, \ldots, r_{u_n})$$

vektor komponensei (melyek maguk is $\mathbf{R}^n$–beli vektorok) – ahol léteznek – lineárisan függetlenek. A $\mathrm{Rg}\, r$ halmazt az r **által definiált** (n **dimenziós) (m dimenzióbeli) felület**nek és r - et a felület **(explicit) egyenletének** nevezzük.

(4) Ha a felület dimenziója azonos annak a térnek dimenziójával, melynek részhalmaza, azaz $n = m$, **térrésznek**, ha eggyel kisebb annál, azaz $n = m - 1$, akkor **valódi (hiper) felületnek** nevezzük. Ha egy valódi hiperfelület lineáris altér eltóltja, akkor **hipersíknak** nevezzük. Az egydimenziós felületeket **görbéknek** nevezzük.

(5) $\mathbf{R}^n$ kölcsönösen egyértelmű inverzeivel együtt folytonos leképezéseit **homeomorfizmusoknak** nevezzük. Az n–dimenziós zárt gömbök homeomorf képeiként előálló felületeket **elemi héjaknak**, míg az egydimenziós elemi héjakat, azaz azokat a görbéket, melyek zárt intervallumok homeomorf képei **elemi íveknek** nevezzük. **Szakasznak** nevezzük az $r(t) = r_0 + te$, $t \in I$ alakú függvények által definiált görbéket, ha $I \subseteq \mathbf{R}$ valamely intervallum és r_0, $e \in \mathbf{R}^n$, $e \neq 0$. Egy n–dimenziós felület **belső pontjai** azok a pontok, melyek előállnak valamely n–dimenziós nyílt egységgömb egy pontjának olyan homeomerfizmus szerinti képeként, melynél az egész egységgömb képe a felületre esik. A felület belső pontjainak halmazát a felület **belsejének** nevezzük és $\mathrm{Int}\ F$ - el jelöljük, a többi pontokat a felület **határpontjainak** nevezzük, ezek a felület **határát** alkotják. Egy felületet **zártnak** nevezünk, ha minden pontja belső pont.

1.10 Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a fenti definícióban nem minden jelző nélkül csak felület, hanem *valamely r függvény által definiált* felület szerepel. Tehát felületen nem $\mathbf{R}^n$ valamely részhalmazát önmagában, hanem ezt a részhalmazt mint egy (a fenti feltételeknek eleget tevő) r függvény értékkészletét értjük, *magával az r függvénnyel együtt.* Pontosabb volna tehát. ha azt mondanánk, hogy felületen egy olyan (F, r) párt értük, melyre $F = \mathrm{Rg}\, r$, ez azonban nincs összhangban köznapi felület képünkkel, továbbá a jelölést és a terminológiát is túlságosan elbonyolítaná. Másszóval, ahogy az alábbiakban látni fogjuk, különbséget teszünk két olyan felület között, melyeknek egyenletei $\mathbf{R}^n$ ugyanazon részhalmazát határozzák meg. Azt is látni fogjuk, hogy, bár sokszor ennek a különbségtevésnek nincs jelentősége, vannak esetek, amikor lényeges elvi következményekkel jár. Mindenesetre fontos, hogy a továbbiakban:

ha mást nem mondunk, akkor felületen mindig valamely r függvénnyel definiált felületet és egyenletén mindig ezt az r függvényt értjük.

Az alábbi példákban és a továbbiakban is – ha mást nem mondunk – a felületek egyenleteiben szereplő konstansok, melyek a felületek méreteit rögzítik (sugár: R, magasság: h, stb.) mindig pozitívak.

1.11 Példák

(1)(a) $a,\, b \in \mathbf{R}^n$. a és b–t összekötő *szakasz* : $r(t) = a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$

(b) R sugarú origóközéppontú *körvonal* a síkban : $r(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

(c) R sugarú z tengelyű origócsúcsú $\pi/4$ félnyílásszögű kúppalástra írt egyenletes menetemelkedésű *csavarvonal*:

$$r(t) = (t\cos t, t\sin t, t)\,,\ t \in [0, R]$$

(2)(a) R sugarú origóközéppontú *gömbfelület*:

$$r(u,v) = (R\cos u \sin v, R\sin u \sin v, R\cos v)\ , u \in [0, 2\pi]\ ,\ v \in [0,\pi]$$

(b) R sugarú z tengelyű h magas *hengerpalást*:

$$r(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)\,,\ u \in [0, 2\pi]\ ,\ v \in [0, h]$$

(c) R sugarú z tengelyű origócsúcsú $\pi/4$ félnyílásszögű *kúppalást*:

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)\,,\ u \in [0, R]\,,\ v \in [0, 2\pi]$$

(3)(a) Alulról és felülről is lezárt R sugarú z tengelyű h magas *hengerfelület*:

$$r(u,v) = \begin{cases} ((v-h)\cos u, (v-h)\sin u, h) & \text{ha } h \le v \le R+h\ ,\ 0 \le u \le 2\pi \\ (R\cos u, R\sin u, v) & \text{ha } 0 < v < h\ ,\ 0 \le u \le 2\pi \\ ((v+R)\cos u, (v+R)\sin u, 0) & \text{ha } -R \le v \le 0\ ,\ 0 \le u \le 2\pi \end{cases}$$

(b) R sugarú origóközéppontú *körlap*:

– mint kétdimenziós térrész:

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v)\,,\ u \in [0, R]\,,\ v \in [0, 2\pi]$$

– mint kétdimenziós (háromdimenzióbeli) valódi felület:

$$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 0)\,,\ u \in [0, R]\,,\ v \in [0, 2\pi]$$

(c) Az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ által határolt kétdimenziós térrész:

$$r(u,v) = (u,v)\,,\ u \in [0,1]\,,\ v \in [u^2, \sqrt{u}]$$

(4)(a) Négydimenzióbeli R sugarú w tengelyű h magasságú háromdimenziós *gömbhenger*:

$$r(u,v,w) = (R\cos u\ \sin v, R\sin u\ \sin v, R\cos v, w)\,,\ u \in [0, 2\pi]\,,\ v \in [0,\pi]\,,\ w \in [0,h]$$

(b) Négydimenzióbeli R sugarú w tengelyű h magasságú négydimenziós *gömbhenger(test)*:

$$r(s,u,v,w) = (s\cos u\ \sin v, s\sin u\ \sin v, \cos v, w)\,,\ s \in [0,R]\,,\ u \in [0, 2\pi]\,,\ v \in [0,\pi]\,,\ w \in [0,h]$$

1.12 Megjegyzések

(1) Az elnevezések egybeesése zavaró lehet, de a két fogalomcsoport, egy felület belső- ill. határpontja és zártsága egyfelől, a felületnek, mint *halmaz*nak belső- ill. határpontja és zártsága másfelől, lényegesen eltér egymástól. Speciálisan azonban, nyilván, térrész határához tartozó pontjai ill. belső pontjai éppen a térrésznek, mint az $\mathbf{R}^n$ normált tér egy részhalmazának belső- ill. határ pontjai.

(2) A síkban a valódi felületek a görbék.

(3) Definiálhatjuk a nulla dimenziós felületeket is, ezek persze az egyelemű ponthalmazok.

(4) Vegyük észre, hogy látszólagos bonyolultsága ellenére, a felület definíciója nagyon természetes feltételeket tartalmaz. Vegyük sorra ezeket. A definiáló függvény értelmezési tartománya zárt, korlátos, összefüggő, mérhető és nem üres belsejű. A zártság feltétele azt jelenti, hogy egy-egy felület "kontúrját", "szélét" is a felülethez tartozónak tekintjük, a korlátosság azt, hogy csak véges alakzatokat tekintünk felületnek, az összefüggőség pedig nyilván annak a természetes követelménynek formális megjelenése, hogy csak "egy darabból álló" alakzatokat tekintsünk felületnek. A mérhetőségre azért van szükségünk, mert felületeken integrálni is akarunk. Végül az utolsó feltétel az alább tárgyalt másik, a függvényre vonatkozó kikötéssel együtt kizárja az elfajuló eseteket, biztosítja azt, hogy például egy görbe "valóban" görbe legyen, ne pedig egy pont, mint abban az esetben, ha megengednénk üres belsejű, azaz egy pontból álló intervallumokat is, mint görbéket definiáló függvények értelmezési tartományait. Magára a definiáló függvényre három megkötés vonatkozik : szakaszonkénti folytonos deriválhatóság, a határoktól eltekintve való invertálhatóság és végül a parciálisok lineáris függetlensége. Az első feltétel azt jelenti, hogy pl. egy kétdimenziós felületen csak görbe mentén lehetnek "törésvonalak" és csak "kevés csúcs lehet rajta", a nagyon "összetört" alakzatok nem felületek. Az invertálhatósági feltétel lényegében azt jelenti, hogy a felület belsejében nincsenek "elágazások", különböző részeit nem "ragasztjuk össze" "túl sokszor". Végül az utolsó feltétel a felület "jó" megadásának követelménye, biztosítja, hogy a felületek bizonyos alább definiálandó jellemzőit kiszámíthassuk az egyenletükből. Így például az $r(t) = (t,t)$ $t \in [-1,1]$ síkbeli 45°-os egyenes szakasz érintő irányvektora nyilván *mindenütt* az $\dot{r}(t) = (1,1)$. Ám, ha ugyanezt a szakaszt az $s(t) = (t^3,t^3)$, $t \in [-1,1]$ egyenletével definiáljuk, akkor $\dot{s}(0) = (0,0)$ nem adja meg az origóban is létező érintőt.

(5) Könnyen megmutatható, hogy a valós egyenes összefüggő részhalmazai az intervallumok (lásd a 1.26 (2)(a) feladatot), tehát a görbék egyenletei mindig *intervallumokon* értelmezett függvények.

(6) Az a tény, hogy halmazok belsejét és felületek belsejét azonos szimbólummal (Int) jelöljük, nem okoz zavart, mert felületekre mindig *csak* az utóbbit alkalmazzuk.

1.13 Definíció (Felületek jellemzői)

(1) Legyen $n \geq 1$ és F az $r = r(u)$, $u \in A \subseteq \mathbf{R}^n$ által definiált n-dimenziós valódi felület.

(a) Az F **felszíne** :

$$|F| = \int_A |\mathrm{CROSS}(r_u)|\,du = \int_A |\mathrm{CROSS}(r_{u_1}, r_{u_2}, \ldots, r_{u_n})|\,du_1\,du_2\ldots du_n$$

(b) A $\mathrm{CROSS}(r_u)$ vektorfüggvényt F **irányításának**, $\mathrm{CROSS}(r_u)$ ill. $\mathrm{CROSS}(r_u)/|\mathrm{CROSS}(r_u)|$ egy adott pontbeli értékét F adott pontbeli **(felületi) normálisának** ill. **egységnormálisának** nevezzük.

(c) Legyen F az $r = r(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in A$ által definiált n-dimenziós valódi felület

$$A' = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n : (-u_1, u_2, \ldots, u_n) \in A\} \quad \text{és}$$
$$s = s(u_1, u_2, \ldots, u_n) = r(-u_1, u_2, \ldots, u_n),\ (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in A'.$$

$-F$-el jelöljük és az F-el **ellentétes irányítású** felületnek nevezzük az s által definiált valódi felületet.

Ha az F felület egy V térrész határának részhalmaza, akkor F irányítását (V-ből nézve) **kifelé irányításnak** és F-et (V-ből nézve) **kifelé irányítottnak** nevezzük, ha minden $u \in \mathrm{Do}\, r_u$ esetén van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$r(u) + \delta \cdot \mathrm{CROSS}(r_u(u)) \notin V \text{ minden } 0 < \delta < \varepsilon \text{ esetén.}$$

(d) Legyen $r_0 = r(u_0) \in F$. A CROSS($r_u(u_0)$) normálvektorú r_0–on átfektetett hipersíkot F r_0–beli **érintő (hiper)síkjának** nevezzük.

(2) Legyen L az $r = r(u)$, $u \in A \subseteq \mathbf{R}$ által definiált görbe.

(a) L **ívhossza**:

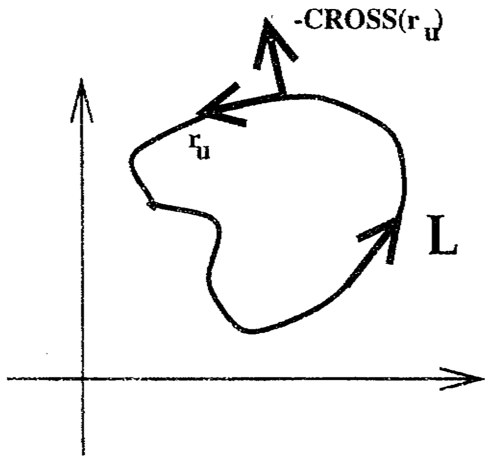
$$|L| = \int_A |r_u|\, du$$

(b) Az r_u vektorfüggvényt L **irányításának**, r_u ill. $r_u/|r_u|$ egy adott pontbeli értékét L adott pontbeli **érintővektorának** ill. **érintőegységvektorának** nevezzük.

(c) Legyen L az $r = r(u)$, $u \in A$ által definiált görbe. $-L$–el jelöljük és az L–el **ellentétes irányítású** görbének nevezzük az

$$s = s(u) = r(-u)\ ,\ u \in A' = \{u \in \mathbf{R} : -u \in A\} \text{ által definiált görbét.}$$

Ha az L görbe a kétdimenziós térben valamely V térrész határának részhalmaza, akkor L irányítását (V–ból nézve) **pozitív irányításnak** és L–et (V–ből nézve) **pozítívan irányítottnak** nevezünk, ha az $F = -L$ (valódi) felület kifelé irányított:



(d) Legyen $r_0 = r(u_0) \in L$. Az $r_u(u_0)$ irányvektorú r_0–on átmenő egyenest L r_0–beli **érintőjének (érintő egyenesének)** nevezzük.

(3) Legyen $n \geq 1$ és V az $r = r(u)$, $u \in A \subseteq \mathbf{R}^n$ által definiált n–dimenziós térrész.
V térfogata:

$$|V| = \int_A |\det r_u|\, du$$

ahol $\det r_u$ $r = r(u)$ Jacobi determinánsa.

1.14 Megjegyzések

(1) A fenti definícióban szereplő integrálok nyilván léteznek, hiszen az adott feltételek esetén az integrandus folytonos függvénye változóinak. Belátható továbbá, hogy ha F és F' az r–el ill. r'–vel definiált felületek és $\mathrm{Rg}\, r = \mathrm{Rg}\, r'$ akkor F és F' ívhossza, felszíne ill. térfogata megegyezik (vö az 1.20 (1) megjegyzéssel). Másrészt háromdimenziós esetben bizonyos természetes megkötéseknek eleget tevő egyenesszakaszokból (síklapokból) álló (ill. síklapokkal határolt) alakzatokkal való közelités esetén a közelítő alakzatok ívhosszának (felszínének ill. térfogatának) sorozata a fent definiált ívhosszhoz (felszínhez ill. térfogathoz) konvergál. Ez azért van így, mert például az ívhossz esetén – *nagyon* leegyszerűsítve – az adott görbe egy felosztásakor az i. felosztáselem hossza megközelítően a két végpontját összekötő húr

$|\Delta r_i| \approx |\dot{r}(t_i)| \cdot \Delta t_i$ hossza, tehát a $\sum |\dot{r}(t_i)| \cdot \Delta t_i$ összeg az ívhossz egy közelítése, ez pedig az $\int_A |r_u|\, du$ egy integrálközelítő összege. (A felszínre és térfogatra vonatkozóan analóg gondolatmenetek érvényesek.) Mivel továbbá mindhárom mennyiség nemnegatív additív halmazfüggvény és a háromdimenziós térben egyenesszakaszokból (síklapokból) álló (ill. síklapokkal határolt) alakzatok esetén az eredeti ívhosszt (felszínt ill. térfogatot) adja meg, jogosan tekinthetőek az ívhossz (felszín ill. térfogat) klasszikus fogalma általánosításainak.

(2) Ami az irányítással kapcsolatos mennyiségek geometriai jelentését illeti, a görbe adott pontbeli érintője a ponton átmenő szelők határhelyzete, míg az érintősík a ponton átmenő és a felület által tartalmazott görbék érintőjének síkja (vö. (26) (6)), a felületi normális ennek a síknak a normálisa.

(3) A továbbiakban a görbék egyenletében a változót általában u helyett t–vel jelöljük, hangsúlyozandó, hogy egydimenziós változóról van szó. Továbbá történelmi okokból a t szerinti deriváltat általában $\cdot$ –al jelöljük.

(4) Nulla dimenziós felületek esetén:

a) felszínükön elemszámukat értjük, azaz felszínüket 1–nek tekintjük

b) irányításukon olyan e függvényeket értünk, melyek elemeikhez egydimenziós egységvektorokat, azaz a +1, -1 számok valamelyikét rendelik, ellentétes irányítású alakzatnak nevezzük azt az alakzatot, melynek irányítása az eredeti (-1)–szerese és az egydimenziós térrész határaként adódó nulla dimenziós felület kifelé irányításának definícióját az általános definícióból úgy kapjuk, hogy abban a CROSS helyett az e–t szerepeltetjük.

(4) A kétdimenziós térben valamely V térrész határának részeként adódó L görbe r_u irányítása (V–ből nézve) pontosan akkor pozitív ha L bármely r pontjára, melyben létezik az r_u érintővektor és V egy tetszőleges s belső pontjára igaz, hogy az $r - s$ és az r_u vektor jobbsodrású vektorrendszert alkot. (Ez azt jelenti, hogy a görbét az óramutató járásával ellenkező irányban járjuk be.)

1.15 Példa Az R sugarú z tengelyű origócsúcsú $\pi/4$ félnyílásszögű R magasságú F kúppalást felszínének kiszámítása.

F egyenlete : $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $0 \le u \le R$, $0 \le u \le 2\pi$. Ezzel $r_u = (\cos v, \sin v, 1)$ és $r_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$; így $r_u \times r_v = (-u\cos v, -u\sin v, u)$, $|r_u \times r_v| = \sqrt{2}u$, tehát

$$|F| = \int_A |r_u \times r_v|\, dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{2}u\, dudv = \sqrt{2}R^2\pi\,.$$

1.16 Definíció

Legyen F valódi felület. Ha $f = f(r)$ olyan többváltozós függvény melyre igaz, hogy

$$r \in F \quad \text{iff} \quad r \in \mathrm{Do}\, f \text{ és } f(r) = 0,$$

akkor az $f(r) = 0$ egyenletet F egy **implicit egyenletének** nevezzük.

1.17 Példák Különböző felületek explicit egyenletei.

(1) Síkban

(a) R sugarú origóközéppontú gömbfelület : $x^2 + y^2 = R^2$

(b) R sugarú y tengelyű h magasságú félhengerpalást: $x^2 = R^2$, $0 \le y \le h$, $x > 0$

(c) R sugarú y tengelyű h magasságú origócsúcsú $\pi/4$ félnyílásszögű kúppalást :

$$x^2 = y^2\,, 0 \le z \le h$$

(2) Háromdimenziós térben

(a) R sugarú origóközéppontú gömbfelület: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

(b) R sugarú z tengelyű h magasságú hengerpalást: $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \le z \le h$

(c) R sugarú z tengelyű h magasságú origócsúcsú $\pi/4$ félnyílásszögű kúppalást:

$$x^2 + y^2 = z^2\,, 0 \le z \le h$$

(3) Négydimenziós térben

(a) R sugarú origóközéppontú gömbfelület: $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$

(b) R sugarú w tengelyű h magasságú hengerpalást: $x^2+y^2+z^2=R^2$; $0 \le w \le h$
(c) R sugarú w tengelyű h magasságú origócsúcsú $\pi/4$ félnyílásszögű kúppalást:

$$x^2+y^2+z^2=w^2\,,\ 0 \le w \le h$$

1.18 Példa A $w=xyz$ felület $P=(1,2,3,6)$ pontbeli érintő hipersíkja egyenletének kiszámítása.

A felület (egy véges részének) explicit egyenlete (alkalmas $A \subseteq \mathbf{R}^3$-al) $r(x,y,z)=$ $=(x,y,z,xyz)\,,(x,y,z) \in A$ és $r_x=(1,0,0,yz)\,,r_y=(0,1,0,xz)\,,\ r_z=(0,0,1,xy)$. Ha $\mathbf{R}^4$ szokásos bázisa (i,j,k,l), akkor ezekkel

$$-\mathrm{CROSS}(r_x,r_y,r_z)=\begin{vmatrix} i & j & k & l \\ 1 & 0 & 0 & yz \\ 0 & 1 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 1 & xy \end{vmatrix}=yz\cdot i-(-xz)\cdot j+xy\cdot k-1\cdot l=(yz,xz,xy,-1)\,.$$

Így $-\mathrm{CROSS}(r_x,r_y,r_z)\big|_P=(6,3,2,-1)$. Az érintősík implicit egyenlete tehát: $6(x-1)+3(y-2)+2(z-3)-(w-6)=0$, vagyis $6x+3y+2z-w=12$.

Nos, a görbék és valódi felületek lesznek $\mathbf{R}^n$ azon részhalmazai, melyek majd vizsgálatainkban integrálási tartományként szerepelnek. Így most már minden rendelkezésre áll ahhoz, hogy megadjuk a többváltozós függvények integrálfogalmának lehetséges kiterjesztéseit.

1.3 Vonal–, felületi és térfogati integrálok

Az alábbiakban megadjuk a többváltozós függvények integrálfogalmának görbékre és valódi felületekre ill. vektorfüggvényekre vonatkozó általánosításait. Szabadon fogalmazva, a vonal(felületi) integrál olyan integrálközelítő összegek sorozatáinak határárértéke, mely összegekben az egyes tagok a görbe(felület) egy adott felosztásának valamely elemébe eső valamely reprezentáns pontbeli függvényértéknek és egy, az ezen felosztáselem méretét jellemző mennyiségnek a szorzata, speciálisan vektorfüggvény *görbe(felület)menti* integrálja esetén a felosztáselem *irányított* ívhosszával(felszínével) való skaláris (más esetben vektoriális) szorzata, míg *ívhossz(felszín) szerinti* integrálja esetén a felosztáselem ívhosszával (felszínével), mint skalárral való szorzata.

Az alábbi definícióban felhasználjuk vektorérfüggvények többes integráljának fogalmát, melyet a komponenseik integráljai által alkotott vektorként értelmezünk. Nyilvánvaló azonban, hogy – bár (amint azt később megmutatjuk) vannak kivételek – az alább definiált fogalmak közül a legszemléletesebben azok az integrálok értelmezhetőek, melyek definíciójához erre nincs szükség, tehát azok az integrálok, melyek többváltozós függvények integráljaira vezetnek. Másszóval, az ívhossz ill. felszín szerinti integrálok többváltozós, azaz skalárfüggvényekre, a görbe– és felületmenti integrálok pedig vektorfüggvényekre alkalmazhatóak legtermészetesebben. A későbbiekben látni fogjuk, hogy az alább definiált integráltípusok közül a legfontosabbak, melyeknek elvi jelentőségük van, a vektorfüggvények görbe– és felületmenti integráljai. Az ezek által definiált mennyiségeknek, melyek segítségével a vektorfüggvényeket nagyon természetesen és szemléletesen lehet jellemezni, fontos fizikai alkalmazásai vannak. A *térfogati* (a térrészekre vonatkozó) integrál definíciója persze nem más, mint a többváltozós függvények integráljára vonatkozó integráltranszformáció (hiszen a térrészek egyenletei nyilvánvalóan a tér paramétertranszformációi).

A definíciót követően az integrál legfontosabb tulajdonságait vizsgáljuk és illusztráljuk két rövid példán, majd külön tárgyaljuk a vonal– és felületi integrálok közötti összefüggést a kétdimenziós esetben, hiszen későbbi részletes tárgyalásunk színtere a sík lesz; végül pedig a normáltartomány fogalmának általánosításaként egy olyan speciális, de gyakorlatilag minden lényeges esetet magában foglaló térrész típust definiálunk, melynek határán könnyű integrálni.

1.19 Definíció (Integrálok)

Legyen $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ tetszőleges, $H \subseteq \mathbf{R}^n$ és $v : H \to \mathbf{R}^m$, ahol $m = 1$ vagy $m = n$. (Az alábbi definíciókban a $\cdot$ jel nyilván értelemszerűen skalárral való szorzást ill. skaláris szorzást jelent attól függően, hogy $m = 1$ (v skalárértékű) vagy $m = n$ (v vektorértékű).) Legyen $v \in C(H)$.

(1) Legyen az L görbe egyenlete $r = r(t) \in H \subseteq \mathbf{R}^n$, $t \in I \subseteq \mathbf{R}$.

v **vonalmenti** (vagy **görbementi**) **integrálja** L-en:

$$\int_L v\, dr = \int_I v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\, dt$$

v **ívhossz szerinti integrálja** L-en :

$$\int_L v\, |dr| = \int_I v(r(t))|\dot{r}(t)|\, dt$$

(2) Legyen az F *valódi* felület egyenlete $r = r(u) \in H \subseteq \mathbf{R}^n$, $u \in A \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$.

v **felületmenti integrálja** F-en :

$$\int_F v\, df = \int_A v(r(u)) \cdot \mathrm{CROSS}(r_u(u))\, du$$

v **felszín szerinti integrálja** F-en :

$$\int_F v\, |df| = \int_A v(r(u))|\mathrm{CROSS}(r_u(u))|\, du$$

(3) Fenti jelölésekkel ha $m = n = 3$, akkor

v **vektorértékű görbementi integrálja** L-en:

$$\int_L v \times dr = \int_I v(r(t)) \times \dot{r}(t)\, dt$$

v **vektorértékű felületmenti integrálja** F-en:

$$\int_F v \times df = \int_A v(r(u)) \times \mathrm{CROSS}(r_u(u))\, du$$

(4) Legyen V térrész egyenlete $r = r(u)$, $u \in A$.

v **térfogati integrálja** V-n:

$$\int_V v\, dV = \int_A v(r(u))|\det r_u(u)|\, du$$

ahol $\det r_u(u)$ az $r = r(u)$ Jacobi determinánsa.

A görbementi és ívhossz szerinti integrálokat közös néven **vonalintegráloknak**, míg a felületmenti és felszín szerinti integrálokat **felületi integráloknak** nevezzük.

1.20 Megjegyzések

(1) A fenti definícióban szereplő integrálok nyilván léteznek, hiszen az adott feltételek esetén az integrandus nullmértékű halmaz kivételével folytonos függvénye változóinak. Továbbá, bizonyos feltételek mellett az integrálok függetlenek a felületeket definiáló egyenletektől, csak az általuk meghatározott halmaztól függenek. Pontosabban, ha F és F' az r-el ill. r'-vel definiált valódi felületek és $\mathrm{Rg}\, r = \mathrm{Rg}\, r'$, akkor tetszőleges $\mathrm{Rg}\, r$-en folytonos függvény integráljai F-en és F'-n megegyeznek, amennyiben *felületmenti* integrál esetén még azt is feltesszük, hogy F és F' azonos irányításúak, azaz van olyan térrész, hogy mindketten kifele vannak irányítva, mint ezen térrész határának részhalmazai. Hasonló tartalmú állítást

lehet megfogalmazni vonalintegrálokra vonatkozóan is (vö. az 1.26 (13) feladattal).

(2) Nyilván nulla dimenziós felületek esetén is értelmezhetőek a felületi integrálok, ezeken a függvénynek az adott pontbeli (felület vagy vonal*menti* integrálás esetén, melyek ilyenkor persze egybeesnek, ennek irányításával megszorzott) helyettesítési értékét értjük.

A vonal- és felületi integrálok egyik leglényegesebb tulajdonsága, hogy, mint az eddig megismert összes integráltípusok, additív intervallumfüggvények. Ahhoz, hogy ezt a tényt pontosan megfogalmazhassuk, a felosztás fogalmát általánosítanunk kell felületekre.

1.21 Definíció (Felületek lefedése és felosztása)

(1) Ha véges sok, páronként közös belső pont nélküli halmaz (felület) uniója egy H halmaz (F felület), akkor ezt a véges sok halmazt (felületet) együttesen H (F) egy **lefedésének** és az egyes halmazokat (felületeket) a lefedés **elemeinek** nevezzük.

(2) Legyen f tetszőleges függvény , $H \subseteq Dof$. A g függvény f-nek H-ra való **megszorítása**, ha $\mathrm{Do}\, g = H$ és minden $x \in H$ esetén $g(x) = f(x)$.

(3) Legyen F az r függvény által definiált felület. $\mathrm{Do}\, r$ egy lefedése esetén r-nek a lefedés elemeire való megszorítása által definiált felületeket együttesen F egy **felosztásának** nevezzük. Azt, hogy $F_1, F_2, \ldots, F_k$ F egy felosztása, így jelöljük: $\sum_{i=1}^{k} F_i = F$.

A most következő összes állítás közvetlen következménye a vonal- és felületmenti integrál definícióinak és a többes integrálok megfelelő tulajdonságainak (lásd az 1.26 (12)(a) feladatot).

1.22 Állítás (Integrálok tulajdonságai)

(1) *Vonal- és felületi integrál örökli az egyváltozós függvények integráljának tulajdonságait:*

(a) *Integrál lineáris homogén operáció*

(b) *Integrál additív halmazfüggvény, azaz*

$$\int_{\sum_{i=1}^{n} L_i} v\, dr = \sum_{i=1}^{n} \int_{L_i} v\, dr \qquad \textit{és} \qquad \int_{\sum_{i=1}^{n} F_i} v\, df = \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} v\, df$$

(c)

$$\int_{-L} v\, dr = -\int_{L} v\, dr \qquad \textit{és} \qquad \int_{-F} v\, df = -\int_{F} v\, df$$

(d) *ha* $m \leq v(r) \leq M$ *minden* $r \in L$ *ill.* $r \in F$ *esetén, akkor*

$$m \cdot |L| \leq \int_{L} v\, dr \leq M \cdot |L| \qquad \textit{ill.} \qquad m \cdot |F| \leq \int_{F} v\, df \leq M \cdot |F|$$

(2) *Ha* v_e v*-nek* L *érintőegységvektorára,* e*-re eső vetülete, azaz* $e = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}$*-el* $v_e = (v, e)$ *és* v_n v*-nek* F *egységnormálisára,* n*-re eső vetülete, azaz* $n = \frac{\mathrm{CROSS}(r_u(u))}{|\mathrm{CROSS}(r_u(u))|}$ *-el* $v_n = (v, n)$, *akkor*

$$\int_{L} v\, dr = \int_{L} v_e\, |dr| \qquad \textit{ill.} \qquad \int_{F} v\, df = \int_{F} v_n\, |df|$$

1.23 Példák

(1) Az

$$\int_{L} k \times r\, dr$$

integrál kiszámítása ha $k = (0, 0, 1)$ és L az $r = r(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ egyenlettel definiált $[xy]$-síkbeli pozitív irányítású egységkör.

(a) $k \times r(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $\dot{r}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $(k \times r(t)) \cdot \dot{r}(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, így

$$\int_L k \times r \, dr = \int_C^{2\pi} (k \times r(t)) \cdot \dot r(t) \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

(b) Felhasználva a vonalmenti és ívhossz szerinti integrálok közötti fenti összefüggést, továbbá azt, hogy L $\dot r$ irányú e érintő egységvektora és $k \times r$ azonos irányúak, tehát $(k \times r)_e$, $k \times r$–nek e–re eső vetülete éppen $|k \times r|$, valamint figyelembe véve, hogy k és r merőlegesek egymásra (hisz a kör benne van az $[xy]$ síkban) és hogy a körön $|r| = 1$, azt kapjuk, hogy

$$\int_L k \times r \, dr = \int_L (k \times r)_e \, |dr| = \int_L |k \times r| \, |dr| = \int_L |k| \cdot |r| \, |dr| = \int_L |r| \, |dr| = \int_L |dr| = |L| = 2\pi \, .$$

(2) Az

$$\int_F r \, dr$$

integrál kiszámítása, ha F az $r = r(u,v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, $0 \le u \le R$, $0 \le u \le 2\pi$ egyenlettel definiált R sugarú z tengelyű $\pi/4$ félnyílásszögű kúppalást (melyre $-F$ kifelé irányított).

(a) $r_u = (\cos v, \sin v, 1)$, $r_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$, így $r_u \times r_v = (-u \cos v, -u \sin v, u)$, $r \cdot (r_u \times r_v) = -u^2 \cos^2 v - u^2 \sin^2 v + u^2 = 0$, tehát

$$\int_F r \, dr = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot (r_u \times r_v) \, du dv = 0$$

(b) A felületi integrál definíciója alapján az integrál 0, ha az integrandus a felület pontjaiban merőleges az érintősík normálvektorára. Origócsúcsú kúp esetén minden felületi pontban az r helyvektor alkotó irányú és ez merőleges az érintősík normálisára, tehát a $v(r) = r$ függvény integrálja egy ilyen kúp bármely részén 0.

1.24 Megjegyzés (A kétdimenziós eset)

Mivel a görbék az egydimenziós felületek, $n = 2$ esetén a görbék és a valódi felületek egybeesnek. Így a sík valamely valódi felületén egyidejűleg értelmezett tetszőleges kétdimenziós vektor-vektor függvény görbementi és felületmenti integrálja is. Az alábbiakban a fenti definíciók alapján megadjuk a kettő közötti összefüggést egy (valamely térrészből nézve) pozitívan irányított L görbe és (a pozitív irányítottság definíciója alapján kifelé irányított) $F = -L$ esetén:

$$\int_F v \, df = \int_L \mathrm{CROSS}(v) \, dr \qquad \text{és} \qquad \int_L v \, dr = -\int_F \mathrm{CROSS}(v) \, df \, .$$

Valóban, legyen a pozitívan irányított L síkgörbe egyenlete: $r = r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Felhasználva, hogy kétdimenziós esetben $\mathrm{CROSS}((x,y)) = (-y, x)$ (lásd az 1.7 (1) megjegyzést), azt kapjuk, hogy $F = -L$ - re:

$$\int_F v \, df = \int_{-L} v \, df = -\int_L v \, df = -\int_I v(r(t)) \cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t)) \, dt =$$

$$= -\int_I (v_1, v_2) \cdot (-\dot y, \dot x) \, dt = -\int_I (-v_1 \dot y + v_2 \dot x) \, dt = -\int_I (v_2, -v_1) \cdot (\dot x, \dot y) \, dt =$$

$$= \int_I (-v_2, v_1) \cdot \dot r(t) \, dt = \int_L (-v_2, v_1) \, dr = \int_L \mathrm{CROSS}(v) \, dr$$

Másrészt, mivel $\mathrm{CROSS}(\mathrm{CROSS}(-v)) = v$ és $\mathrm{CROSS}(-v) = -\mathrm{CROSS}(v)$, ebből

$$\int_L v \, dr = \int_L \mathrm{CROSS}(\mathrm{CROSS}(-v)) \, dr = \int_L \mathrm{CROSS}(-\mathrm{CROSS}(v)) \, dr = -\int_F \mathrm{CROSS}(v) \, df$$

Bár azt, hogy a vonal- és felületi integrálok *felosztások* esetén additív halmazfüggvényként viselkednek könnyű bizonyítani, az alkalmazásokban ez általában nem elég, azt kellene tudni, hogy *lefedések* esetén is ilyenek. A gyakorlatban elégnek bizonyul csak bizonyos speciális tartományok határai esetén vizsgálni ezt a kérdést, melyek köre azért még elég tág ahhoz, hogy az összes "normális" térrészeket tartalmazza, csak a "torzszülötteket" zárja ki a tekintetbe veendő halmazok közül (vö az 1.26 (18) feladattal). Ezeket a speciális halmazokat néhány rájuk vonatkozó megjegyzést követően az alábbiakban definiáljuk.

A kétváltozós függvények integrálszámítása során bevezetett normáltartományt a sík egy olyan részhalmazaként definiáltuk, melyet – szabadon fogalmazva – egyváltozós függvények görbéi határolnak. Az alábbi definícióban a koordinátafelület a függvény görbéjének megfelelő általános fogalom és a reguláris normáltartomány az ilyenek által határolt térrész. Végül a normál térrészt a tér egy olyan részhalmazaként definiáljuk, melynek szerkezete biztosítja, hogy a határára vett integrált visszavezethessük normáltartományok határára, azaz koordinátafelületekre való integrálásra. Ugyanis a definícióban rögzített feltételek fennállása esetén bizonyítható, hogy a normál térrész felosztható normáltartományokra olymódon, hogy a felosztás elemeinek a térrész belsejébe eső határszakaszain vett integrálok kiejtik egymást, míg a maradék határszakaszokon vett integrálok összege a térrész határára vett integrált adja (lásd az 1.26 (15)(b) és (17) feladatokat).

1.25 Definíció (Normáltartomány általánosítása)

Legyen $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$ és legyen $V \subseteq \mathbf{R}^n$ egy az identitásfüggvénnyel definiált térrész.

(1)(a) Ha $n = 1$ és V nem üres belsejű zárt intervallum, akkor V–t (reguláris) normáltartománynak nevezzük.

(b) Legyen $n > 1$, $1 \leq i \leq n$. V–t **az i. tengelyre vonatkoztatva n dimenziós (reguláris) normáltartomány**nak nevezzük, ha van olyan $H \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ reguláris normáltartomány és vannak olyan f, g H–n értelmezett szakaszonként folytonosan deriválható $(n-1)$–változós függvények, hogy

$$\text{minden } (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \operatorname{Int} H \text{ esetén}$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) < f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,,$$

továbbá minden $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ esetén $x \in V$ iff

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in H \quad \text{és}$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq x_i \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,.$$

(c) Legyen $n > 1$. V–t **(reguláris) normáltartomány**nak nevezzük, ha minden $1 \leq i \leq n$ esetén az i. tengelyre vonatkoztatva reguláris normáltartomány.

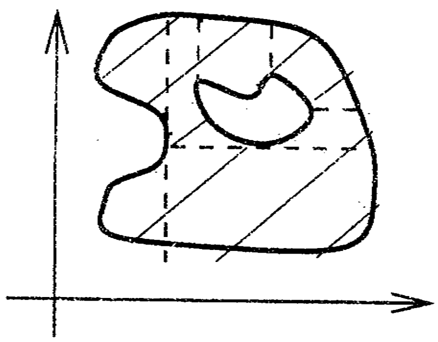
(2) Az (1)(b)–ben szereplő feltételeket kielégítő H normáltartomány és f függvény esetén az

$$r = r(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)\,,$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in H$$

alakú függvények által definiált és a velük ellentétes irányítású felületeket (n dimenzióbeli) (i. tengely szerinti) **koordinátafelület**eknek nevezzük. (Speciálisan a síkon a koordinátafelületek az $r = r(x) = (x, f(x))\,, x \in [a, b]$ és az $r = r(y) = (g(y), y)\,, y \in [c, d]$ alakú függvények által definiált valódi felületek.) Továbbá koordinátafelületnek tekintünk minden nulldimenziós felületet is.

(3) V–t **normál térrész**nek nevezzük, ha V lefedhető olyan kifelé irányított határú reguláris normáltartományokkal, melyek mindegyikének határa szintén lefedhető úgy, hogy ezen lefedések V határára eső elemei V határának egy koordinátafelületekből álló lefedését adják, V–ből nézve kifelé vannak irányítva és belsejük pontosan egy normáltartomány határának része, míg a határok lefedésének minden többi elemére fennáll, hogy azok ellentétes irányítással pontosan két normáltartomány határának lefedésében szerepelnek elemként (az illusztrációt lásd a túloldalon).

Nos, koordinátafelületekkel való lefedésre vonatkozóan, így normál térrészek határának bizonyos lefedéseire vonatkozóan is, az integrálok megőrzik additívitásukat. Ezt a tényt pontos formában az alább következő 1.26 (15)(b) és (17) feladatokban fogalmazzuk meg.



1.26 Feladatok

(1) Bizonyítsuk be, hogy ha a és b jobbsodrású rendszert alkot, akkor a–t pozitív (azaz az óramutató járásával ellenkező irányú) π–nél kisebb szöggel való elforgatás viszi b–be!

(2)(a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{R}$ összefüggő részhalmazai az intervallumok!

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $H \subseteq \mathbf{R}^n$ és minden $x, y \in H$ összeköthető H–n belül elemi ívvel, akkor H összefüggő !

(3) Egy halmaz **konvex**, ha minden pontpárja összeköthető a halmazon belüli szakasszal.

(a) Bizonyítsuk be, hogy minden konvex halmaz összefüggő!

(b) Adjunk példát $\mathbf{R}^3$–beli konvex, továbbá nem konvex, de összefüggő felületekre!

(4)(a) Bizonyítsuk be, hogy a felületek zárt, korlátos halmazok!

(b) Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges normált lineáris tér és legyen $H \subseteq \mathcal{L}$ korlátos, zárt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x \in \mathcal{L}$ esetén, ha $x \notin H$, akkor van x–nek olyan $S(x)$ környezete, hogy $S(x) \cap H = \emptyset$.

(c) Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges normált lineáris tér és legyenek $H_1, H_2 \subseteq \mathcal{L}$ diszjunkt korlátos, zárt halmazok. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $d > 0$, hogy minden $x \in H_1$, $y \in H_2$ esetén $\|x - y\| \geq d$. (A $d(H_1, H_2) = \inf\{\|x - y\| : x \in H_1, y \in H_2\} \geq d > 0$ számot H_1 és H_2 **távolságának** nevezzük.)

(d) Bizonyítsuk be, hogy véges sok zárt halmaz uniója zárt! Igaz-e ez végtelen sok halmaz esetén is?

(5)(a) Bizonyítsuk be, hogy a koordinátafelületek valóban felületek!

(b) Bizonyítsuk be, hogy a koordinátafelületek elemi héjak!

(6) Legyen F az n–dimenziós valódi felület egy implicit egyenlete $f(r) = 0$, $r_0 \in F$ és $\operatorname{grad} f(r_0) \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden r_0–on átmenő, a felület által tartalmazott görbe r_0–beli érintője a $\operatorname{grad} f(r_0)$ normálisú r_0–beli érintő hipersíkba esik.

(7)(a) Bizonyítsuk be, hogy ha F egyenlete $r = r(u)$, $u \in A'$, akkor $r^*\operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} F$!

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha F és F' az r–el ill. r'–vel definiált azonos dimenziós felületek és $\operatorname{Rg} r = \operatorname{Rg} r'$ akkor $\operatorname{Int} F = \operatorname{Int} F'$!

(8) Bizonyítsuk be, hogy ha az F egydimenziós felület egyenlete $r = r(t)$, $t \in A$ és $-F$ egyenlete $s = s(t)$, $t \in A'$, akkor

(a) $\operatorname{Rg} r = \operatorname{Rg} s$

(b) F pontjaiban F és $-F$ irányítása egymás (-1)- szeresei, azaz, ha $r(t) = s(t')$, valamely $t \in A$, $t' \in A'$ esetén, akkor $\operatorname{CROSS}(\dot{s}(t')) = -\operatorname{CROSS}(\dot{r}(t))$.

(9) Legyen F az $r = r(t)$, $t \in I = [a, b]$ által definiált görbe.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha F elemi ív, akkor $\operatorname{Int} F = r^* \operatorname{Int} I$, tehát F határa az $\{r(a), r(b)\}$ halmaz.

(b) Igaz-e, hogy ha r invertálható $\operatorname{Int} I$–n és $r(a) = r(b)$, akkor F zárt felület?

(10) Ha az L görbe $r = r(t)$, $t \in I = [a, b]$ egyenlete olyan, hogy minden $a < c < b$ esetén az r–nek mind az $[a, c]$–re mind a $[c, b]$–re való megszorítása által definiált görbe elemi ív, akkor L–et **egyszerű ívnek** nevezzük. (Nyilván minden elemi ív egyszerű ív is.) Legyen az L egyszerű ív egyenlete $r = r(t)$, $t \in I = [a, b]$. $r(a)$–t L **kezdőpontjának** és $r(b)$–t L **végpontjának** nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy

(a) r invertálható mind az $(a, b]$–n, mind az $[a, b)$–n és *folytonosan* invertálható (a, b)–n,

(b) L akkor és csak akkor zárt ha $r(a) = r(b)$,

(c) L akkor és csak akkor elemi ív ha nem zárt.

(d) Az $r = r(t) = (R \sin t, R \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ egyenlettek definiált grbe zárt.

(11) Legyenek $a < b < c$ tetszőleges valósok és tegyük fel, hogy $r_1 = r_1(t)$, $t \in [a, b]$ és $r_2 = r_2(t)$, $t \in [b, c]$ elemi íveket definiálnak és $r_1(b) = r_2(b)$. Legyen

$$r(t) = \begin{cases} r_1(t) & \text{ha } t \in [a, b] \\ r_2(t) & \text{ha } t \in [b, c] \end{cases}, \quad t \in [a, c]$$

(Ez az r_1 és r_2 által definiált görbék **egymáshoz csatolása**.) Bizonyítsuk be, hogy

(a) ha $\operatorname{Rg} r_1 \cap \operatorname{Rg} r_2 = \{r(b)\}$, akkor r elemi ívet definiál és

(b) ha $r_2(c) = r_1(a)$ és $\operatorname{Rg} r_1 \cap \operatorname{Rg} r_2 = \{r(a), r(b)\}$, akkor r egyszerü ívet definiál!

(12)(a) Bizonyítsuk be a vonal- és felületi integráloknak az 1.22 Állításban felsorolt tulajdonságait !

(b) Bizonyítsuk be a síkbeli (egydimenziós) valódi felületek esetén a következőt: ha F az $r = r(t)$ $t \in I$ által definiált felület, f I–n definiált szigorúan monoton növő deriválható függvény, akkor az $s(t) = r(f(t))$, $t \in I' = (f^{-1})^* I$ által definiált F' felület esetén $\operatorname{Rg} r = \operatorname{Rg} s$ és bármely az F – en folytonos v függvény esetén

$$\int_F v \, df = \int_{F'} v \, df .$$

(13) Legyenek L és L' egyszerű ívek egyenletei $r = r(t)$, $t \in I$ ill. $s = s(t)$, $t \in I'$. (Az egyszerű ív definíciójához lásd a (10) feladatot.) Tegyük fel, hogy L és L' kezdőpontjai egybeesnek, továbbá $\operatorname{Rg} r = \operatorname{Rg} s$. Legyen $G = \operatorname{Rg} r$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $v \in C(G)$ esetén v–nek L–en és L'–ön vett vonalintegráljai megegyeznek!

(14) Legyenek $a < b$ és $c < d$ tetszőleges valósok és legyenek L_1 és L_2 az $r_1 = r_1(t)$, $t \in [a, b]$ ill. az $r_2 = r_2(t)$, $t \in [c, d]$ által definiált elemi ívek. Tegyük fel, hogy

(a) $r_1(b) = r_2(c)$ és $\operatorname{Rg} r_1 \cap \operatorname{Rg} r_2 = \{r_1(b)\}$

vagy

(b) $r_1(b) = r_2(c)$, $r_1(a) = r_2(d)$ és $\operatorname{Rg} r_1 \cap \operatorname{Rg} r_2 = \{r_1(a), r_1(b)\}$.

Bizonyítsuk be, hogy ha L az $r = r(t)$, $t \in I$ egyenlettel definiált olyan L görbe, melyre $\operatorname{Rg} r = \operatorname{Rg} r_1 \cup \operatorname{Rg} r_2$, akkor minden L–en folytonos v függvény esetén

$$\int_L v \, dr = \int_{L_1} v \, dr + \int_{L_2} v \, dr .$$

(15)* (a) Legyen V kétdimenziós normál térrész és F zárt felület része V határának. Bizonyítsuk be, hogy V határának minden $F_1, F_2, \ldots, F_n$ lefedéséből kiválasztható F–nek egy $F_1', F_2', \ldots, F_n'$ lefedése.

(b) Legyen V tetszőleges kétdimenziós térrész. Legyen F V–ből nézve kifele irányított valódi felület része V határának. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 2$ és az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ olyan V–ből nézve kifele irányított koordinátafelületekkel való lefedése F–nek, melyek mindegyike egy V által tartalmazott reguláris normáltartomány határának része, akkor bármely F–en folytonos v függvény esetén

$$\int_F v\,df = \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} v\,df\,.$$

(c) Legyenek V_1, V_2 kétdimenziós normál térrészek és $V_2 \subseteq \operatorname{Int} V_1$. Legyenek V_1 és V_2 kifelé irányított határai az F_1 és F_2 felületek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $V = V_1 \setminus \operatorname{Int} V_2$ olyan térrész, melynek határát F_1 és F_2 lefedi, továbbá F_1 és $-F_2$ V–ből nézve kifelé vannak irányítva.

(d) Bizonyítsuk be, hogy ha V az origóközéppontú R sugarú körlap, akkor V normál térrész melynek az $r = r(t) = (R\sin t, R\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ egyenlettel definiált F körvonal a határa.

(16) Legyenek $a < b$ valósok, $f, g \in \dot{C}_1[a,b]$, $V = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$. Bizonyítsuk be, hogy ha az F egydimenziós valódi felület egyenlete

(a) $r = r(x) = (x, f(x))$, $x \in (a,b)$, akkor F V–ből nézve kifelé van irányítva,

(b) $r = r(x) = (x, g(x))$, $x \in [a,b]$, akkor $-F$ V–ből nézve kifelé van irányítva.

(17) Legyenek $a < b$ tetszőleges valósok és $f, g \in \dot{C}_1[a,b]$ olyanok, hogy $g(x) < f(x)$ minden $x \in (a,b)$–re. Legyen

$$V = \{(x,y) : a \le x \le b\,,\ g(x) \le y \le f(x)\}\,,$$

kétdimenziós reguláris normáltartomány. Legyenek továbbá

$$\begin{array}{lll} F_1 & \text{az} & r_1(x) = (x, f(x))\,, x \in [a,b]\,, \\ F_2 & \text{az} & r_2(x) = (x, g(x))\,,\ x \in [a,b]\,, \\ F_3 & \text{az} & r_3(x) = (a, y)\,,\ y \in [g(a), f(a)] \ \text{ és} \\ F_4 & \text{az} & r_4(x) = (b, y)\,,\ y \in [g(b), f(b)] \end{array}$$

által definiált egydimenziós felületek, továbbá legyen F V kifele irányított határa. (F_3–at és F_4–et természetesen csak akkor definiáljuk ha $g(a) < f(a)$ ill. $g(b) < f(b)$.) A (15) (b) feladat eredményének felhasználása nélkül bizonyítsuk be hogy F_1, F_2, F_3, F_4 V határának lefedése (ahol $g(a) = f(a)$ esetén a harmadik, $g(b) = f(b)$) esetén a negyedik elem hiányzik) és bármely F–en folytonos v függvény esetén

$$\int_F v\,df = \int_{F_1} v\,df - \int_{F_2} v\,df + \int_{F_3} v\,df - \int_{F_4} v\,df$$

(ahol $g(a) = f(a)$ esetén a harmadik, $g(b) = f(b)$) esetén a negyedik tag hiányzik).

(18) Mutassunk példát olyan síkbeli reguláris normáltartományokra, melyek nem normál térrészek!

2. Vektorfüggvények jellemzése integráljaikkal

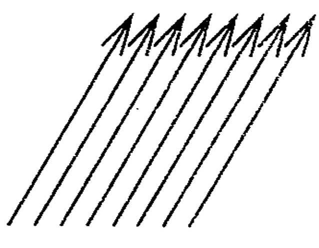
Szeretnénk a vektorfüggvények változásának jellemzésére az egyváltozós függvények deriváltjához hasonlóan szemléletes jelentéssel bíró olyan fogalmakat keresni, melyek pontonként leírják a vektorfüggvény nagyságának és irányának változását külön-külön, hiszen maga a deriváltoperátor további elemzés nélkül erre nem alkalmas, a vektor irányának és nagyságának változását együtt adja meg. Ehhez természetesen először is magának a vektorfüggvénynek a szemléltetésére kell eszközöket keresnünk.

2.1 Vektorfüggvények szemléltetése

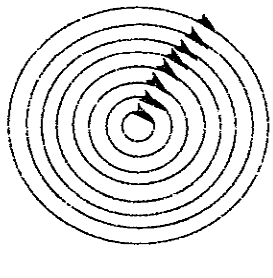
Vizsgáljuk meg tehát hogyan lehetne szemléltetni a vektorfüggvényeket! A matematikai fogalmaknak általában két fajta szemléltetése van. Az egyik tulajdonképpen **alkalmazást** jelent, azt, hogy a matematikai mennyiségeknek konkrét (pl. fizikai) jelentést tulajdonítunk. Ez annak az eljárásnak a megfordítása, amikor valamely fizikai jelenség matematikai modelljét keressük. Így például egy háromváltozós függvényt mindig tekinthetünk hőmérsékleteloszlás függvénynek, kezelhetjük úgy, mint egy olyan függvényt, mely a tér minden pontjához az adott pontbeli hőmérsékletet rendeli. A másik, a **grafikus szemléltetés** során a matematikai mennyiségekhez geometriai jelentést rendelünk abból a célból, hogy geometriai objektumok segítségével ábrázolhassuk őket és így a szó szoros értelmében szemléletes képet nyerjünk róluk.

A vektorfüggvények leggyakoribb két alkalmazása közül az egyik az, amikor a függvény értékeit adott pontbeli erőnek (pl. elektromos, mágneses, gravitációs erőnek) tekintjük; ilyen esetben a vektorfüggvényt **erőtérnek** nevezzük. A másik gyakori alkalmazás esetén a függvény értékeit valamilyen áramló anyag (pl. folyadék, gáz vagy akár hömpölygő kőgörgeteg, felvonuló embertömeg) adott pontbeli sebességének tekintjük, azaz a vektorfüggvény valamely pontbeli értékének iránya az áramlás irányát, míg nagysága az egységnyi idő alatt ebben az irányban átáramló anyagsűrűséget, azaz, egy, erre az irányra merőleges, egységnyi felszínű (valódi) felületen átáramló anyag mennyiségét adja meg (háromdimenziós folyadék áramlás esetén pl. $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot \frac{1}{\text{sec}}$-ban). Ekkor a függvényt **áramlási** **térnek** hívjuk.

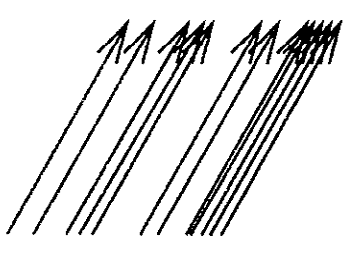
Grafikusan egy vektorfüggvényt olyan görbesereggel, az ún. **erővonalakkal** (vagy **áramvonalakkal**) ábrázolhatunk vázlatosan, melyek esetén egy adott pontban a vektorfüggvény irányát a ponton áthaladó görbe érintőjének iránya, míg nagyságát a görbesereg adott pontbeli sűrűsége, azaz az érintőre merőleges egységnyi felszínű felületen áthaladó (azt metsző) erővonalak száma adja meg. Az alábbiakban megadjuk néhány egyszerű speciális síkbeli erőtér erővonalas ábrázolását. (A későbbiekben is mindig, ha mást nem mondunk az erővonalas ábrázolások síkvektorterekre vonatkoznak, az általános esetet ezen lehet a legkényelmesebben illusztrálni.) **Homogén nagyságú(irányú)** egy tér ha nagysága(iránya) állandó, ellenkező esetben **inhomogén nagyságú(irányú)**, **homogén** ha homogén nagyságú *és* irányú, végül **inhomogén** ha nem homogén.



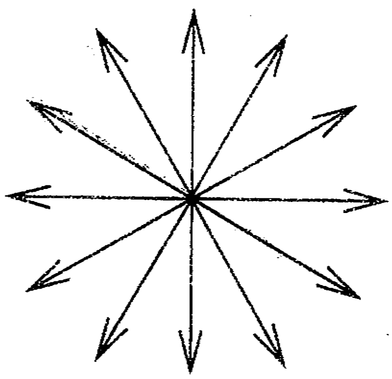
Homogén erőtér



Homogén nagyságú inhomogén erőtér



Homogén irányú inhomogén erőtér



Inhomogén nagyságú és irányú erőtér

Vizsgáljuk meg, hogy milyen fizikai jelentés tulajdonítható a görbe- és felületmenti integráloknak az áramlási tér terminusaiban, illetve mi felel meg ezeknek az integráloknak erővonalas ábrázolás esetén! Mint látni fogjuk, a felületmenti integrál a vektorfüggvény nagyságváltozásával van kapcsolatban, míg a vektorfüggvény irányváltozását a vonalmenti integrál jellemzi.

2.2 Felületmenti integrál

A felületmenti integrál szemléletes jelentését először az áramlási tér esetén (rögzített időegységre vonatkoztatva) vizsgáljuk meg. Mivel a vektorfüggvény ilyenkor egy irányított sűrűség és a felületmenti integrál ezen sűrűség felületi normálisra eső vetületének az integrálja, a felületmenti integrál a felületen átáramló anyag előjeles összemennyisége, azaz a felületen keresztül a felület irányítása által meghatározott irányban és az ellenkező irányban áramló anyag mennyiségének különbsége. Például nyilvánvalóan egy olyan véges síktartomány mint felület esetén, mely mentén az áramlás iránya állandó, ha a sík párhuzamos az áramlás irányával, akkor az integrál nulla és az integrál akkor maximális, ha a sík merőleges az áramlás irányára.

A fentiekből következően egy térrész *kifelelé* irányított határfelülete esetén a felületmenti integrál éppen a felület által bezárt térrészből kiáramló és az oda beáramló anyag mennyiségének különbsége, azaz a térrészben keletkező (vagy negatív előjel esetén eltűnő) anyag mennyisége, másszóval az áramló anyag mennyiségének a tekintett térrészen történő *megváltozása*. Következésképp, az, hogy egy ilyen felületre vonatkozó felületmenti integrál nulla, azt jelenti, hogy amennyi anyag a térrészbe érkezik, ugyanannyi távozik is onnan, tehát nem keletkezik és nem is tűnik el itt anyag, pontosabban, az itt keletkező és eltűnő anyag mennyisége azonos.

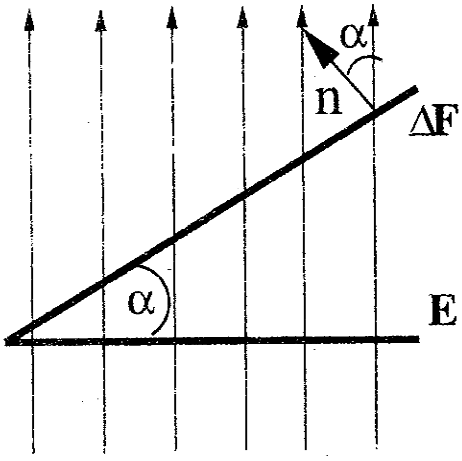
Analóg módon grafikus szemléltetés esetén a felületmenti integrál a a felületen áthaladó összes erővonalak száma. Valóban, az erőtér egy kicsiny, homogénnak tekinthető darabját tekintve (az ábrát lásd a túloldalon), ha egy egységnyi felszínű, az erővonalakra merőleges E felületdarabon áthaladó erővonalak száma $k = |v|$, akkor a vele α szöget bezáró ΔF felületdarabon ugyanezek az erővonalak áthaladnak, de ΔF felszíne már $\frac{1}{\cos\alpha}$, így rajta az erővonalak sűrűsége

$$\frac{k}{\frac{1}{\cos\alpha}} = k \cdot \cos\alpha = |v| \cdot \cos\alpha = v \cdot n = v_n \, ,$$

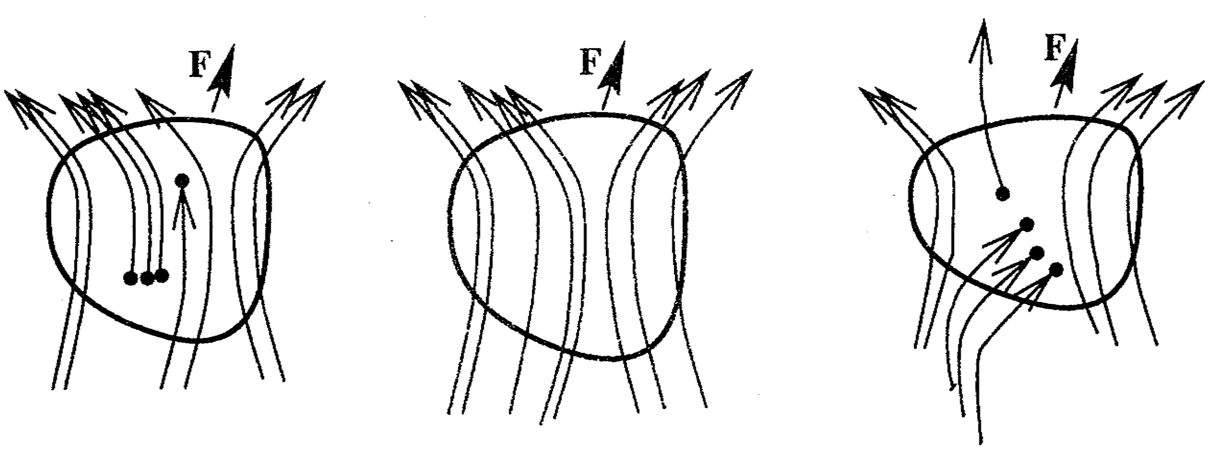
ahol n ΔF egységnormálisa és v_n v-nek erre eső vetülete. K-t, az egész F-en áthaladó erővonalak számát, nyilván az erővonalsűrűség felszín szerinti integrálja adja meg. Felhasználva az 1.22 (2) állítást, azt kapjuk, hogy

$$K = \int_F v_n \, |df| = \int_F v \, df \ ,$$

amit meg akartunk mutatni.



Tehát a felületmenti integrál a a felületen áthaladó összes erővonalak száma. Persze itt is az, hogy a felületen *áthaladó* azt jelenti, hogy a felületi normális irányába és azzal ellentétes irányban áthaladó erővonalak számának előjeles összege. Ebből következően egy térrészt határoló *kifele* irányított felület esetén a felületmenti integrál a térrészből ki- és oda belépő erővonalak számának, másszóval a felületen a két irányban áthaladó összes erővonalak számának különbsége, azaz az erővonalszámnak a térrészben történő *megváltozása*. Az integrál tehát pontosan akkor nulla, ha a felület által bezárt térrészben az ott eredő és eltűnő erővonalak száma megegyezik, vagyis, ahány erővonal a térrészbe belép, ugyanannyi ki is lép onnan. Speciálisan ez a helyzet, ha az erőtér erővonalai mindkét irányban végtelenek vagy pedig zártak. Ekkor sehol nem erednek új erővonalak és nem is tűnnek el sehol. Azokat a pontokat, ahol új erővonalak keletkeznek **forrás**oknak, míg azokat, ahol erővonalak szűnnek meg, **nyelő**knek nevezzük.



$\int_F v\, df > 0$ $\int_F v\, df = 0$ $\int_F v\, df < 0$

2.1 Definíció

Egy v vektorfüggvénynek az F felületen vett felületmenti integrálja a v-nek F-re vonatkozó (F-re számított) **fluxusa**.

Az eddig elmondottak alapján a fluxus egy - egy térrészben a vektorfüggvény *nagyságának* (az általa leírt anyag *összemennyiségének*) változását adja meg.

2.2 Példa A

$$v(x, y) = (f(x), 0)\,, \quad x \in [a, b]\,, \; y \in [c, d]$$

és a

$$w(x,y) = (f(y),0)\,, \quad x \in [a,b]\,, \; y \in [c,d]$$

vektorfüggvények ($f \in C(\mathbf{R})$ pozitív és szigorúan monoton növő függvény) fluxusának kiszámítása a

$$V = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

koordinátatengelyekkel párhuzamos élű téglalap, mint kétdimenziós térrész kifelele irányított határára vonatkozóan.

Legyen V kifele irányított határa F és legyenek

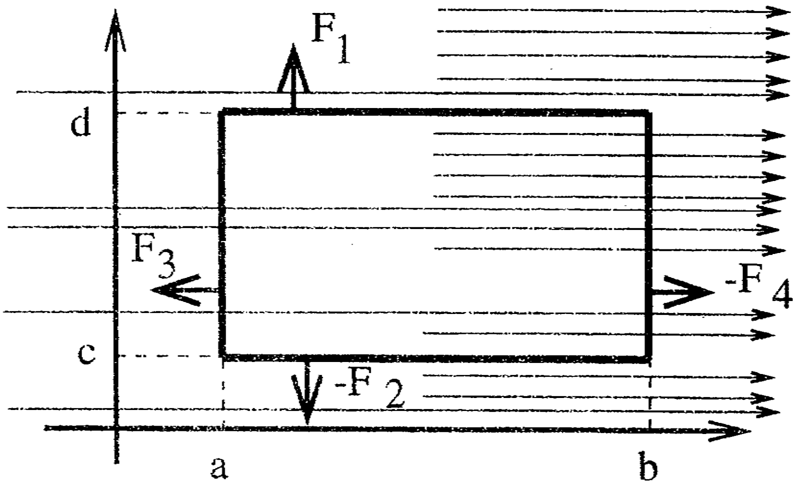
$$\begin{array}{lll} F_1 & \text{az} & r_1(x) = (x,d)\,,\; a \le x \le b\,, \\ F_2 & \text{az} & r_2(x) = (x,c)\,,\; a \le x \le b\,, \\ F_3 & \text{az} & r_3(y) = (a,y)\,,\; c \le y \le d\,, \\ F_4 & \text{az} & r_4(y) = (b,y)\,,\; c \le y \le d \end{array}$$

által definiált felületek. Az integrálnak a normáltartományok határain való additívitását használva (lásd az 1.26 (15) (b) vagy az 1.26 (17) feladatot) adódik, hogy

$$\int_F v\, df = \int_{F_1} v\, df - \int_{F_2} v\, df + \int_{F_3} v\, df - \int_{F_4} v\, df$$

(F_2 és F_4 azért szerepelnek negatív előjellel, mert $-F_2$ és $-F_4$ vannak V-ből kifele irányítva, hiszen például $r_2'(x) = (1,0)$ miatt F_2 irányítása $\mathrm{CROSS}(r_2') = (0,1)$.

(1) $\quad v(x,y) = (f(x),0)\,,\; x \in [a,b]\,,\; y \in [c,d]$



Mivel v-nek csak x irányú komponense van, így mindenütt merőleges F_1 és F_2 normálisaira, tehát

$$\int_{F_1} v\, df = \int_{F_2} v\, df = 0\,.$$

Valóban, például $r_1'(x) = (1,0)$, így $\mathrm{CROSS}(r_1') = (0,1)$, következésképpen

$$\int_{F_1} v\, df = \int_a^b (f(x),0)\cdot(0,1)\, dx = \int_a^b 0\, dx = 0\,.$$

Másrészt, $r_3(y) = (a,y)\,,\; c \le y \le d$, tehát F_3 pontjaiban $x = a$, így $v(r_3(y)) = (f(a),0)$. Továbbá, $r_3'(y) = (0,1)$, így $\mathrm{CROSS}(r_3') = (-1,0)$, tehát

$$\int_{F_3} v\, df = \int_c^d v(r_3(y))\cdot \mathrm{CROSS}(r_3')\, dy = \int_c^d (f(a),0)\cdot(-1,0)\, dy =$$

$$= \int_c^d -f(a)\, dy = -f(a) \int_c^d dy = -f(a)(d-c)$$

és pontosan ugyanígy

$$\int_{F_4} v\, df = -f(b)(d-c)\,,$$

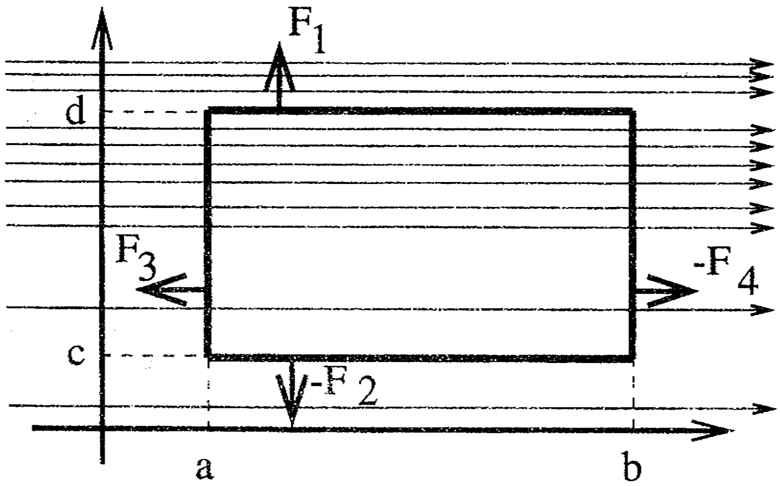
tehát

$$\int_F v\, df = \int_{F_1} v\, df - \int_{F_2} v\, df + \int_{F_3} v\, df - \int_{F_4} v\, df =$$

$$= -f(a)(d-c) - (-f(b)(d-c)) = (f(b) - f(a))(d-c) > 0\,.$$

A V-ben keletkező erővonalak száma tehát $(f(b) - f(a))(d-c)$, ahogy ez várható is, hiszen ez nem más mint az F_3-on belépő erővonalak számának $(d-c) \cdot f(a)$-nak és az F_4-en kilépő erővonalak számának $(d-c) \cdot f(b)$-nek a különbsége, mert F_3-on az erővonalak sűrűsége $|v(x,y)| = f(a)$, F_4-en pedig $|v(x,y)| = f(b)$.

(2) $w(x,y) = (f(y), 0)$, $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$



Hasonlóan az előző esethez, mivel w-nek is csak x irányú komponense van, tehát mindenütt merőleges F_1 és F_2 normálisaira, azaz

$$\int_{F_1} w\, df = \int_{F_2} w\, df = 0\,.$$

A két másik integrált szintén az előző esettel analóg módon számíthatjuk:

$$\int_{F_3} w\, df = \int_c^d w(r_3(y)) \cdot \mathrm{CROSS}(r_3')\, dy = \int_c^d (f(y), 0) \cdot (-1, 0)\, dy = -\int_c^d f(y)\, dy$$

és ugyanígy

$$\int_{F_4} w\, df = -\int_c^d f(y)\, dy\,,$$

vagyis

$$\int_F w\, df = \int_{F_1} w\, df - \int_{F_2} w\, df + \int_{F_3} w\, df - \int_{F_4} w\, df = \int_{F_3} w\, df - \int_{F_4} w\, df = 0\,,$$

amint az persze várható is volt, hisz az F_3–on belépő minden erővonal F_4–en kilép mert w erővonalai mindkét irányban végtelenek, nincsenek sem forrásai, sem nyelői.

A fenti példa szépen illusztrálja, hogy a fluxus csak a vektorfüggvény, azaz az erővonalak irányába eső nagyságváltozásra érzékeny, az erre merőleges változásra nem, pontosabban a változásnak csak az erővonalak irányára vett vetületét méri.

Nos, a fentiek szerint a fluxus csak az átáramló anyag mennyiségének ill. az áthaladó összes erővonalak számának egy-egy felület által bezárt *térrészen való* megváltozását adja meg, így elég durva módon, csak egy tartomány egészén **globálisan** jellemzi a vektorfüggvényt, hasonlóan ahhoz, ahogy egy egyváltozós függvényt jellemez egy-egy adott intervallum szélein felvett értékeinek különbsége. Hogyan tudnánk ennek segítségével egy **lokális**, pontonkénti jellemzőt definiálni? Szembeszökő az analógia az egyváltozós függvények deriváltjának fogalmával. Ott is a függvény egy-egy résztartományon, speciálisan intervallumon, való megváltozása áll rendelkezésre és ezt a megváltozást a tartomány mértékével (az intervallum hosszával) elosztva kapunk egy, a függvény relatív megváltozását jellemző adatot, melyből aztán a tartományt egy pontra "zsugorítva", azaz valamely adott pontot tartalmazó intervallumok hosszát nullához közelítve kapjuk meg a deriváltat, a függvény változását az adott pontban jellemző mennyiséget. Vektorfüggvény esetén az ennek megfelelő, a "lokális fluxusváltozást" megadó fogalom egy adott pontban a függvény nagyságának változását jellemzi, szemléletes jelentése az adott pontban a térfogategységre jutó anyagmennyiség ill. erővonalszám változás, azaz az *anyagmennyiség ill. erővonalszám változás* adott pontbeli *sűrűsége*.

2.3 Definíció

Legyen n tetszőleges pozitív egész szám.

(1) Legyen $H \subseteq \mathbf{R}^n$ tetszőleges korlátos halmaz. A $d(H) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in H\}$ számot H **átmérőjének** nevezzük és $d(H)$-val jelöljük.

(2) Legyen $r_0 \in \mathbf{R}^n$ tetszőleges, $H_k \subseteq \mathbf{R}^n$ minden $k \in \mathbf{N}$–re. Azt mondjuk, hogy a (H_k) sorozat az r_0**–ra zsugorodik** ha $r_0 \in \operatorname{Int} H_k$ minden $k \in \mathbf{N}$–re és $d(H_k) \underset{k}{\longrightarrow} 0$.

2.4 Definíció

Legyen n tetszőleges pozitív egész szám.

Legyen $r_0 \in G \subseteq \mathbf{R}^n$ tetszőleges nyílt halmaz, $v : G \to \mathbf{R}^n$ folytonos $G \setminus \{r_0\}$-on. Ha a (V_k) r_0–ra zsugorodó $\mathbf{R}^n$–beli normál térrészek tetszőleges olyan sorozatára, melyre minden $k \in \mathbf{N}$ esetén $V_k \subseteq G$ határa a kifelé irányított F_k valódi felület, a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v\, df$$

(véges vagy végtelen) határérték létezik és ugyanaz, akkor ezt a mennyiséget v r_0–beli **forrássűrűségének** nevezzük. Azt a függvényt, mely megadja v forrássűrűségét minden olyan pontban, ahol létezik és véges, $s(v)$-vel jelöljük. Ha r_0–ban a forrássűrűség pozitív, akkor v–nek **forrása**, ha negatív, akkor pedig **nyelője** van r_0–ban.

2.5 Megjegyzés

A definícióban szereplő feltételek természetesek, hiszen v folytonossága biztosítja integrálhatóságát, G nyíltsága azt, hogy van az adott pontra zsugorodó olyan térrész-sorozat, melynek minden elemén v folytonos, végül a tekintetbe vett térrész sorozat normalitása, kizárva a "túl speciális, furcsa, torz" térrészeket, garantálja, hogy a definiált határérték v–t és nem magát a térrész sorozatot jellemzi.

2.6 Példa A 2.2 Példában szereplő vektorfüggvények $r_0 = (x_0, y_0)$ pontbeli forrássűrűségének meghatározása.

Jelenlegi eszközeinkkel egyelőre nem tudjuk megvizsgálni, hogy létezik–e egy függvény forrássűrűsége, csak azt tudjuk megállapítani, hogy mekkora az értéke, *feltéve, hogy létezik.* Tehát tegyük fel, hogy mindkét esetben létezik a forrássűrűség. Szükségünk lesz továbbá arra a feltevésre is, hogy f folytonosan deriválható r_0 valamely környezetében.

Ha létezik forrássűrűség, akkor bármely r_0–ra zsugorodó normál térrész–sorozatra ugyanannyi lesz a forrássűrűség definíciójában szereplő határérték, tehát tekinthetünk egy koordinátatengelyekkel párhuzamos élű téglalapokból álló (V_k) térrész sorozatot, ahol

$$V_k = \{(x,y) : a_k \leq x \leq b_k,\, c_k \leq y \leq d_k\}, \quad a_k \leq x_0 \leq b_k\,,\, c_k \leq y_0 \leq d_k$$

és

$$\lim_k (b_k - a_k) = \lim_k (d_k - c_k) = 0\,.$$

Felhasználva a 2.2 Példa eredményét, a $v(x,y) = (f(x), 0)$ függvény esetén

$$s(v)\Big|_{r_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v\, df = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(b_k - a_k)(d_k - c_k)} \cdot (f(b_k) - f(a_k))(d_k - c_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} = f'(x_0)\,.$$

Továbbá, ugyanígy a $w(x,y) = (f(y), 0)$ esetén

$$s(w)\Big|_{r_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} w\, df = 0$$

hiszen a 2.2 Példa alapján w fluxusa mnden F_k-ra nulla. w r_0-beli forrássűrűsége tehát nulla, amint az várható is abból, hogy w erővonalai mindkét irányban végtelenek, így w-nek nincs sehol forrása. (Hol használtuk azt a feltételt, hogy r_0 valamely környezetében f *folytonosan* deriválható? A válaszhoz lásd a 2.14 (1) feladatot.)

Természetesen a forrássűrűség örökli a fluxusnak azt a tulajdonságát, hogy csak a vektorfüggvény, azaz az erővonalak irányába eső nagyságváltozásra érzékeny, az erre merőleges nagyságváltozásra nem. Ezt tükrözi eredményünk, melynek alapján az sejthető, hogy a forrássűrűségbe a vektorfüggvény ***első*** komponensének ***csak*** x-től míg (nyilván szimmetriaokokból) ***második*** komponensének ***csak*** y-tól való függése szól bele méghozzá a megfelelő változó szerinti deriválton keresztül. Kézenfekvő arra gondolni, hogy az operáció, mely ezt az eredményt szolgáltatja a megfelelő változó szerinti parciális deriválás, vagyis ha

$$v_1 = (f(x,y), 0)\,, \quad v_2 = (0, g(x,y))\,,$$

akkor – egy olyan nyílt halmazon ahol f és g folytonosan deriválhatóak –

$$s(v_1) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{és} \qquad s(v_2) = \frac{\partial g}{\partial y}\,.$$

Nos, a példában követett eljáráshoz teljesen hasonlóan ez tényleg könnyen megmutatható (lásd a 2.14 (1) feladatot), így a síkbeli általános esetben, ha

$$v = v_1 + v_2 = (f(x,y)\,,\, g(x,y))\,,$$

akkor – felhasználva, hogy mind az integrál, mind pedig a határérték lineáris operáció –

$$s(v) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\,.$$

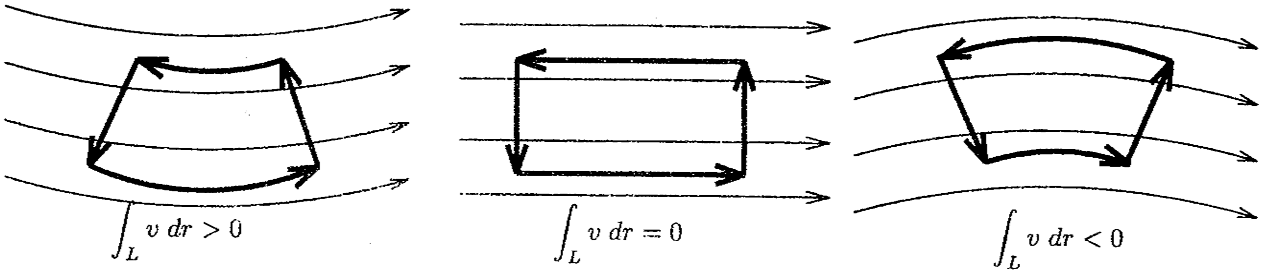
Erre az összefüggésre alább még visszatérünk, most azonban a másik integrál vizsgálatát kezdjük el.

2.3 Vonalmenti integrál

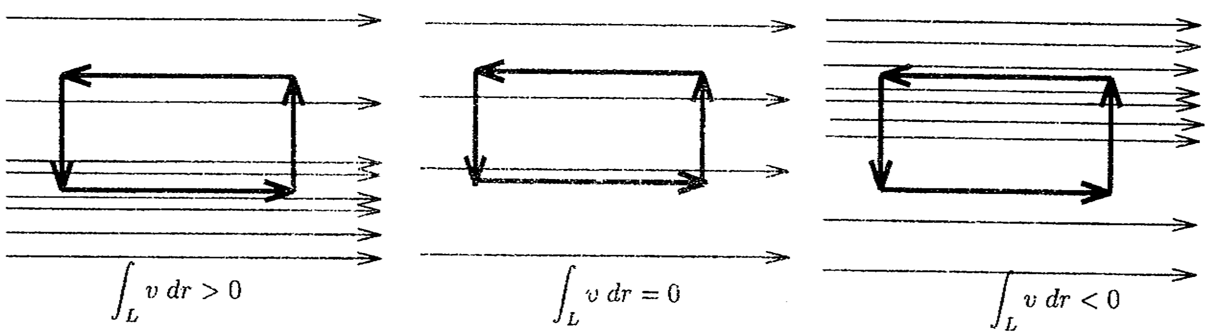
Az áramlási tér esetén a vektorfüggvény egy irányított sűrűség és a vonalmenti integrál ezen sűrűség érintőre eső vetületének az integrálja, a vonalmenti integrál tehát egy egységnyi keresztmetszetű, az adott irányított görbével, mint hossztengellyel adott csőben levő anyag *összimpulzusa* (pl. $(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\frac{1}{\mathrm{sec}})\cdot \mathrm{m} = \frac{1}{\mathrm{m}^2}(\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}})$–ban), azaz annak mérőszáma, hogy ha a csövön kívül az anyag áramlását megszüntetnénk, akkor a csőben milyen irányban (előre vagy hátra) és milyen sebességgel mozogna az anyag. Például nyilvánvalóan egy olyan egyenes szakasz, mint görbe esetén, mely mentén az áramlás iránya állandó, ha a szakasz merőleges az áramlás irányára, akkor az integrál nulla és az integrál akkor maximális, ha a szakasz párhuzamos az áramlás irányával.

A fentiekből következően zárt görbe esetén a görbementi integrál éppen – előjeltől függően – a görbe irányában és azzal ellentétesen egy egységnyi keresztmetszetű csőben áramló anyag impulzusainak különbsége és azt mutatja, hogy az áramlást környezetétől elkülönítve és magára hagyva milyen irányú és sebességű keringést végez a görbe mentén az anyag.

(1) Homogén nagyságú erőtér:



(2) Homogén irányú erőtér:



Analóg módon grafikus szemléltetés esetén a görbementi integrál azt méri, hogy a görbe mentén mozogva mekkora utat tettünk meg milyen sűrű erővonalak mentén azok irányában és ellenkező irányban.

2.7 Definíció

Egy v vektorfüggvénynek az L görbén vett vonalmenti integrálja v–nek L–re vonatkozó (L–re számított) **cirkulációja** (örvénylése)

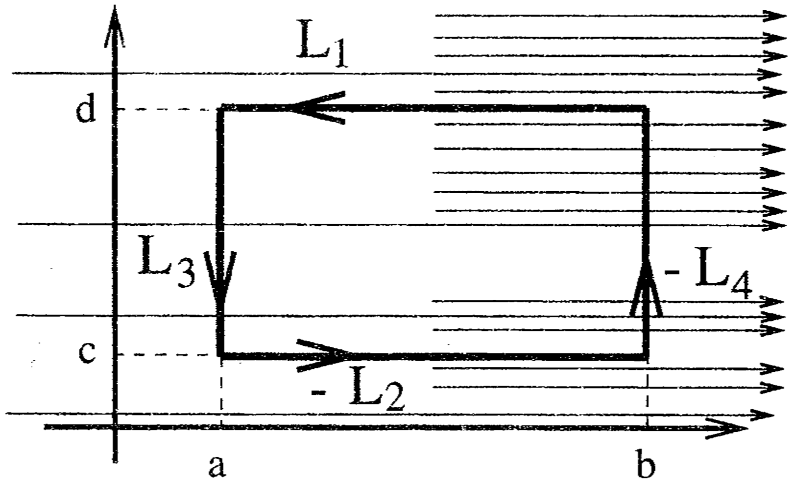
Az eddig elmondottak azt mutatják és a példák azt illusztrálják, hogy a cirkuláció homogén nagyságú vektorfüggvény esetén annak *irányváltoztatásával*, azaz az erővonalak görbültségével kapcsolatos. Lényeges azonban, hogy homogén irányú erőtérnek (melyben az erővonalak nem görbülnek) is lehet nem nulla cirkulációja. Ennek oka, hogy – szabadon fogalmazva – a cirkuláció a fluxusnak a vektortér irányára vonatkozó duálisa, vagyis pontosan fordítva viselkedik mint a fluxus: az erővonalak irányába eső nagyságváltozásra nem érzékeny, de az erre merőleges nagyságváltozásra igen. Az azonban igaz, hogy ***homogén nagyságú erőtér esetén*** a cirkuláció akkor és csakis akkor nulla, ha az erővonalak nem görbülnek, vagyis ilyenkor a cirkuláció valóban méri a vektorfüggvény irányváltoztatását, azaz az erővonalak görbültségét.

2.8 Példa A 2.2 Példában szereplő vektorfüggvények cirkulációjának kiszámítása az ott definiált V térrész határára, mint egy, a V–ből nézve pozitívan irányított L görbére vonatkozóan.

A görbe irányításának definíciója szerint (lásd az 1.13 (c) definíciót) az $L = -F$ görbe lesz pozitívan irányított. Legyen $L_i = -F_i$, $1 \leq i \leq 4$. Normáltartományok határain az integrál additív (az 1.26 (15) (b) vagy az 1.26 (17) feladat eredménye az 1.24 Megjegyzés miatt alkalmazható a vonalmenti integrálokra is), így azt kapjuk, hogy

$$\int_L v\, dr = \int_{L_1} v\, dr - \int_{L_2} v\, dr + \int_{L_3} v\, dr - \int_{L_4} v\, dr$$

(1) $v(x,y) = (f(x), 0)$, $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$



Mivel v–nek csak x irányú komponense van, így mindenütt merőleges L_3 és L_4 érintőire, tehát

$$\int_{L_3} v\, dr = \int_{L_4} v\, dr = 0\,.$$

Valóban, például $r_3'(y) = (0,1)$, így

$$\int_{L_3} v\, dr = \int_{-F_3} v\, dr = -\int_{F_3} v\, dr =$$

$$= -\int_a^b (f(x),0)\cdot(0,1)\, dx = -\int_a^b 0\, dx = 0\,.$$

Másrészt, $r_1(x) = (x,d)$, $a \leq x \leq b$, tehát $v(r_1(x)) = (f(x),0)$ és $r_1'(x) = (1,0)$, így

$$\int_{L_1} v\, dr = \int_{-F_1} v\, dr = -\int_{F_1} v\, dr =$$

$$= -\int_a^b v(r_1(x))\cdot r_1'\, dx = -\int_a^b (f(x),0)\cdot(1,0)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

és teljesen hasonlóan

$$\int_{L_2} v\, dr = -\int_a^b f(x)\, dx\,,$$

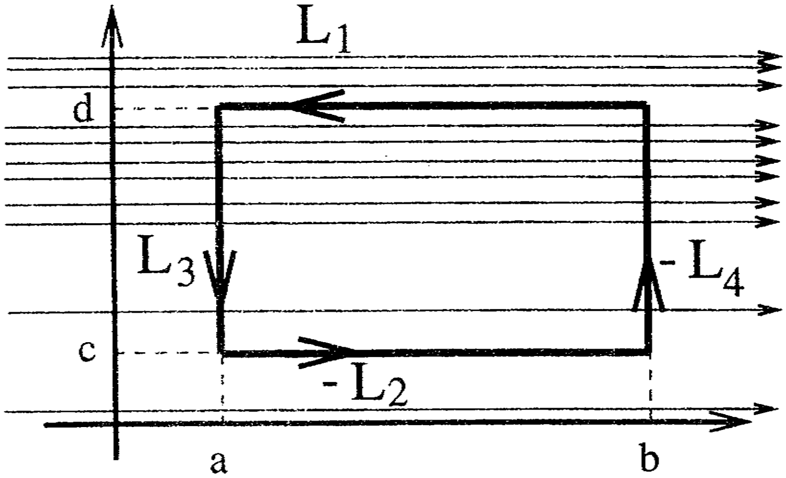
tehát

$$\int_L v\, dr = \int_{L_1} v\, dr - \int_{L_2} v\, dr + \int_{L_3} v\, dr - \int_{L_4} v\, dr = \int_{L_1} v\, dr - \int_{L_2} v\, dr =$$

$$= -\int_a^b f(x)\,dx - \left(-\int_a^b f(x)\,dx\right) = 0\,.$$

Ez az eredmény egybevág szemléletünkkel, hiszen a görbe mentén mozogva ugyanakkora utat tettünk meg azonos sűrűségű erővonalak mentén az erővonalak irányában ($-L_2$-n), mint ellenkező irányban (L_1-en), hiszen -- mivel v csak x-től függ, az erővonalak sűrűsége azonos L_2-n és L_1-en, nevezetesen $|v(x,y)| = f(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén.

(2) $w(x,y) = (f(y),0)\,,\ x \in [a,b]\,,\ y \in [c,d]$ w-re is igaz, hogy csak x irányú komponense van, így



mindenütt merőleges L_3 és L_4 érintőire, azaz

$$\int_{L_3} w\,dr = \int_{L_4} w\,dr = 0\,.$$

A két másik integrált szintén az előző esettel analóg módon számíthatjuk.

$$\int_{L_1} w\,dr = \int_{-F_1} w\,dr = -\int_{F_1} w\,dr = -\int_a^b w(r_1(x)) \cdot r_1'\,dx =$$

$$= -\int_a^b (f(d),0)\cdot(1,0)\,dx = -\int_a^b f(d)\,dx = -f(d)\int_a^b dx = -f(d)(b-a)$$

és persze ugyanilyen módon kapjuk azt is, hogy

$$\int_{L_2} w\,dr = -f(c)(b-a)\,,$$

tehát végül

$$\int_L w\,dr = \int_{L_1} w\,dr - \int_{L_2} w\,dr + \int_{L_3} w\,dr - \int_{L_4} w\,dr = \int_{L_1} w\,dr - \int_{L_2} w\,dr =$$

$$= -f(d)(b-a) - (-f(c)(b-a)) = (f(c) - f(d))(b-a) < 0\,.$$

Nos, az (1) esethez hasonlóan ez az eredmény is várható volt, mert bejárva a görbét nagyobb sűrűségű erővonalak mentén mozgunk az erővonalakkal ellentétes irányban (L_1 mentén, ahol az erővonalak sűrűsége $|v(x,y)| = f(d)$), mint velük azonos irányban ($-L_2$ mentén, ahol az erővonalak sűrűsége $|v(x,y)| = f(c) < f(d)$), mindkét esetben ugyanolyan hosszú utat téve meg. A példa illusztrálja azt a fent már említett tényt is, hogy a cirkuláció az erővonalak irányába eső nagyságváltozásra nem érzékeny, de az erre merőleges nagyságváltozásra igen.

Arról, hogy a cirkulációból mint globális fogalomból hogyan származtatható a deriválás analógiájára egy lokális fogalom *mutatis mutandis* (megváltoztatva a megváltoztatandókat) lényegében ugyanazokat mondhatjuk el, mint a fluxus esetén. Két fontos különbség azonban van.

Az egyik, hogy a háromdimenziós térben a keringésnek, melyet a cirkuláció mér nemcsak iránya és nagysága, hanem tengelye is van, azon görbe síkjának normálisa (ha van ilyen sík), melyen a cirkulációt számítjuk. Egy pont környezetében azonban a különböző síkokba eső örvénylés nagymértékben különbözhet. Például a $v(x,y,z) = (f(y), 0, 0)$ függvény esetén nyilván annak alapján, amit a 2.8 Példában láttunk, az [xy] síkkal párhuzamos síkokban fekvő görbék esetén a cirkuláció sohasem nulla, de nyilván az [xz] síkkal párhuzamos síkokban (amelyek mindegyikében v egy-egy homogén síkvektortérnek tekinthető, hiszen ezen síkokban a függvény állandó) a cirkuláció nulla. Következésképp, a cirkuláció pontonkénti változatának is, ami nyilván áramlási tér esetén az anyag adott pontbeli örvénylését méri, van tengelye, tehát nem lehet csupán egy skalár, hanem olyan vektornak kell lennie, melynek egyenese az örvénylés tengelyét, iránya annak (jobbcsavar szerinti) irányát, nagysága pedig erősségét adja meg.

A másik különbség a forrássűrűség és a cirkuláció pontonkénti változata között az, hogy az örvénylés, mint valmely tengely körüli elforduiás, alapvetően *kétdimenziós* fogalom. Valóban, a tiszta örvénylés egy síkbeli elforgatás. A térbeli tengelykörüli forgatás is egy, a tengelyre merőleges (tehát az összes vektorra közös) síkban való elforgatás, és a valódi térbeli örvénylés, mint pl. valamely csavarvonal mentén való mozgás sem más mint egy síkbeli elforgatás és egy rá merőleges tengely mentén való eltólás kompoziciója. Tehát az elforgatás kétdimenziós fogalmának nincs természetes háromdimenziós általánosítása. Következésképp a cirkuláció pontonkénti változatát alapvetően csak a kétdimenziós esetre definiáljuk, a háromdimenziós változatot erre visszavezetve értelmezzük annak alapján, hogy az örvénysűrűség lineáris operáció és egy háromdimenziós vektorfüggvény örvénysűrűségének bármely koordinátatengely irányába eső komponensét csak a függvénynek erre a koordinátatengelyre merőleges koordinátasíkjába eső vetületének, mint egy kétdimenziós vektorfüggvénynek örvénysűrűsége határozza meg (hiszen a harmadik, a síkra merőleges tengelybe eső komponens nem szól bele egyetlen a síkba eső görbére vett görbementi integrálba sem). (Továbbá az egyszerűség kedvéért háromdimenzióban az örvénysűrűséget csak folytonossági pontokban értelmezzük és értékeinek csak véges mennyiségeket engedünk meg.) Magasabb dimenzióban egyáltalában nem vizsgáljuk a fogalmat.

2.9 Definíció

Legyen $r_0 \in G \subseteq \mathbf{R}^2$ tetszőleges nyílt halmaz, $v : G \to \mathbf{R}^2$ folytonos $G \setminus \{r_0\}$-on. Ha az (F_k) r_0-ra zsugorodó $\mathbf{R}^2$-beli normál térrészek tetszőleges olyan sorozatára, melyre minden $k \in \mathbf{N}$ esetén $F_k \subseteq G$ határa a pozitívan irányított L_k görbe, a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|F_k|} \cdot \int_{L_k} v\, dr$$

(véges vagy végtelen) határérték létezik és ugyanaz, akkor ezt a mennyiséget v r_0-beli **örvénysűrűségének** nevezzük. Azt a függvényt, mely megadja v örvénysűrűségét minden olyan pontban, ahol létezik és véges, $c(v)$-vel jelöljük.

2.10 Definíció

Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^3$ tetszőleges nyílt halmaz, $v : G \to \mathbf{R}^3$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ folytonos és legyen $e = (e_1, e_2, e_3)$ $\mathbf{R}^3$ szokásos bázisa. Az e_n és e_m $(n, m = 1, 2, 3, n \neq m)$ vektorok által kifeszített koordinátasíkkal párhuzamos S síkban a koordinátasíkba eső $v' = v_n e_n + v_m e_m$ kétdimenziós vektorfüggvény (S-ben a harmadik változó konstans) $C(v')$ **örvénysűrűség vektora** az a w vektor, mely merőleges S-re, hossza a v' függvény (mint az e_n és e_m által generált kétdimenziós lineáris térbeli vektorfüggvény) c' örvénysűrűségének abszolút értéke, iránya pedig olyan, hogy az e_n, e_m, $\operatorname{sign} c' \cdot w$ jobbsodrású rendszert alkotnak.

A $c(v) = C(v_2, v_3) + C(v_3, v_1) + C(v_1, v_2)$ függvényt v **örvénysűrűségének** nevezzük.

2.11 Példa A 2.2 Példában szereplő vektorfüggvények $r_0 = (x_0, y_0)$ pontbeli örvénysűrűségének meghatározása.

Természetesen eljárásunk a 2.2 Példában alkalmazottal analóg. Ha létezik forrássűrűség, akkor bármely r_0-ra zsugorodó normál térrész-sorozatra ugyanannyi lesz a definícióban szereplő határérték, tehát tekinthetünk egy koordinátatengelyekkel párhuzamos élű téglalapokból álló (F_k) térrész sorozatot, ahol

$$F_k = \{(x,y) : a_k \le x \le b_k, c_k \le y \le d_k\}, \ a_k \le x_0 \le b_k, c_k \le y_0 \le d_k$$

és

$$\lim_k (b_k - a_k) = \lim_k (d_k - c_k) = 0 .$$

Felhasználva a 2.2 Példa eredményét, a $v(x,y) = (f(x),0)$ függvény esetén nyilván

$$c(v)\Big|_{r_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|F_k|} \cdot \int_{L_k} v \, dr = 0 ,$$

vagyis az r_0–beli cirkulációsűrűség, ha létezik, akkor nulla és persze ugyanígy a $w(x,y) = (f(y),0)$ függvény esetén

$$c(w)\Big|_{r_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|F_k|} \cdot \int_{L_k} w \, df = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(b_k - a_k)(d_k - c_k)} \cdot (f(c_k) - f(d_k))(b_k - a_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{f(c_k) - f(d_k)}{d_k - c_k} = -f'(y_0)$$

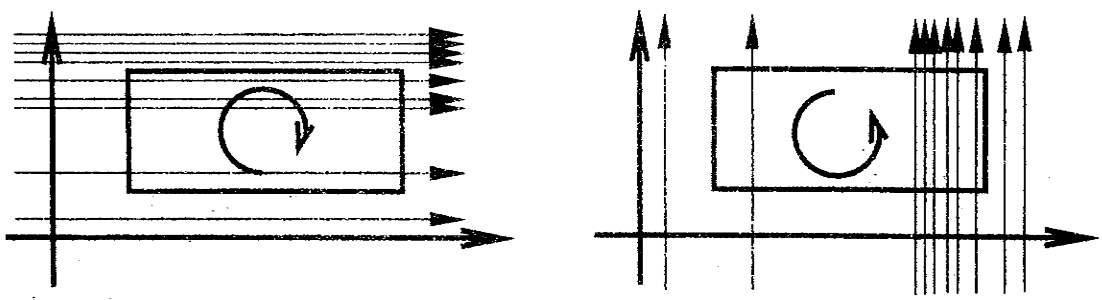
(feltéve, hogy f folytonosan deriválható r_0 valamely környezetében). Ahogy eljárásunk és eredményeink is mutatják, nyilván a 2.6 Példa utáni, a forrássűrűséggel kapcsolatos megjegyzés analogonja igaz a cirkulációsűrűségre. Az ott elmondottak szellemében abból következően hogy – amint azt a példa is illusztálja – természetesen a cirkulációsűrűség örökli a cirkuláció azon tulajdonságát, hogy az erővonalak irányába eső nagyságváltozásra nem, csak az erre merőleges nagyságváltozásra érzékeny, könnyen megjósolható a

$$v_1 = (f(x,y),0) \qquad \text{és} \qquad v_2 = (0, g(x,y)) ,$$

alakú vektorfüggvények cirkulációsűrűsége. Valóban, annak alapján, hogy v_1 cirkulációsűrűségét (negatív előjellel) csak y–tól való függése, v_2–ét pedig csak x–től való függése befolyásolja, azt várjuk (ami a 2.14 (1) példában alkalmazott eljárással analóg módon valóban bizonyítható is), hogy egy olyan nyílt halmazon ahol f és g folytonosan deriválhatóak

$$c(v_1) = -\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{és} \qquad c(v_2) = \frac{\partial g}{\partial x} .$$

Arról is könnyen meggyőzhetjük magunkat, hogy a fenti összefüggésekben az előjelek is helyesek, hiszen, ahogy ábránk is illusztrálja,



egy *pozitív, növekedő* f függvény esetén az $(f(y),0)$ cirkulációja *negatív*, míg a $(0,f(x))$ cirkulációja *pozitív*, hiszen az előbbi az óramutató járásával megegyező irányú, míg az utóbbi azzal ellenkező örvénylést idéz elő. Ez nem is meglepő, hiszen a két függvény egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan, egymásból az x és y tengelyek felcserélésével jönnek létre, a tükrözés pedig megfordítja a körüljárást. (Helyezzük egy tükröt az ábrákon az $y = x$ egyenesre a lap síkjára merőlegesen és a tükörben a másik ábrát kapjuk meg.)

Nos, a fentiek alapján – felhasználva, hogy mind az integrál, mind pedig a határérték lineáris homogén operáció – megadhatunk egy, a a síkbeli általános esetre vonatkozó állítást, melybe belefoglaljuk a 2.6 Példa után megfogalmazott, a forrássűrűségre vonatkozó gondolatmenetünk eredményét is:

2.12 Állítás

Ha a sík egy nyílt részhalmazán létezik a v vektorfüggvény forrássűrűsége, f és g itt folytonosan deriválható függvények és

$$v = (f(x,y),\, g(x,y))$$

akkor itt

$$s(v) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \text{és} \qquad c(v) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

A következő fejezetben ezt az állítást lényegesen erősebb formában, a forrássűrűség létezésére vonatkozó elégséges feltétellel kiegészítve fogjuk bizonyítani.

A fent definiált két lokális, egy-egy pontot jellemző fogalmat, a forrás- ill. örvénysűrűséget globális változatukból a fluxus ill. örvénylés fogalmából vezettük le. Természetesen merül fel a kérdés, hogyan fordítható meg ez a viszony, megkaphatóak-e a globális fogalmak a lokálisakból, és ha igen hogyan. A kérdésre adott válasz két különböző informális gondolatmenettel is megsejthető.

Egyrészt, mivel a lokális fogalmakat az egyváltozós függvények deriváltjának analógiájára mintegy "térfogati derivált"-ként vezettük be, az analógiát folytatva, azt várhatjuk, hogy a megfordítás a térfogati integrálás lesz. Másrészt, mivel a szemléletes jelentésükkel kapcsolatban elmondottak alapján mindkét fent definiált lokális fogalom, a forrássűrűség és örvénysűrűség is valóban sűrűség–jellegű fogalom, nyilvánvalóan adódik a következtetés, hogy egyfelől egy adott térrész kifelelé irányított határfelületére vonatkozó fluxus, mint a felület által bezárt térrészen belüli *teljes* anyag- ill. erővonalváltozás nem más, mint az ezen mennyiség pontonkénti változásának, azaz ***változás–sűrűségének*** (és ez éppen a forrássűrűség) integrálja erre a térrészre; másfelől a cirkulációra nyilvánvalóan az ezzel analóg állítás igaz. Fogalmazzuk meg tehát sejtésünket.

2.13 Sejtés

(1) Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^n$ nyílt és $v : G \to \mathbf{R}^n$ tetszőleges. Ha a $V \subseteq G$ n–dimenziós normál térrész határa az F kifele irányított valódi felület és V–n létezik a folytonos $s(v)$ forrássűrűség, akkor

$$\int_F v\, df = \int_V s(v)\, dV\,.$$

(2) Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^2$ nyílt és $v : G \to \mathbf{R}^2$ tetszőleges. Ha az $F \subseteq H$ kétdimenziós normál térrész határa az L pozitívan irányított görbe és F–en létezik a folytonos $c(v)$ örvénysűrűség, akkor

$$\int_L v\, dr = \int_F c(v)\, dV$$

Nos, a következő fejezetet fenti sejtésünk helyességének igazolásával fogjuk kezdeni. A bizonyítás a vektoranalízis két központi tételéhez és a 2.12 Állítás egy erősebb változatához vezet majd.

Mielőtt azonban rátérnénk erre, egy lényeges általános megjegyzést kell tennünk. Viszszatekintve a fejezetben tárgyalt fogalmakra, nem lehet nem észrevenni, hogy egy sajátos kettősség érvényesül minden definícióban, példában, állításban: valamilyen értelemben mindegyiknek van egy-egy megfelelője. Ennek oka az, hogy a két integráltípus, továbbá azon fogalmak, melyeket ezek segítségével definiáltunk egy speciális, a szimmetriához hasonló viszonyban ún. **dualitás**ban vannak egymással, **duálisai** egymásnak. A dualitás azt jelenti, hogy a fogalmakból, melyek között fennáll, létrehozható egy olyan párosítás, hogy létezzen egy vagy több igaz állítás, melyekben kicserélve az összes a párosításban szereplő fogalmat a párjára, (esetleg a lényeget nem érintő kis változtatás után) újra igaz állítást kapjunk. (Ez utóbbit állítást az eredeti állítás duálisának szoktuk nevezni.) Például a síkgeometriában ilyen dualitás áll fenn a "pont" és az "egyenes" között a

két (nem azonos) *pont* egyértelműen meghatároz egy *egyenes*t

állításra vonatkozólag, hiszen a duális állítás, mely szerint

két (nem párhuzamos) *egyenes* egyértelműen meghatároz egy *pont*ot

is igaz. Hasonlóan, a logikában a "vagy"–"és" logikai konnektívumpár és a "hamis"–"igaz" jelzőpár is ilyen viszonyban vannak. Valóban, mindkét alábbi mondat igaz:

p *és* nem p mindig *hamis* és p *vagy* nem p mindig *igaz*

Végül még egy példa az elektromos hálózatok elméletéből, ahol duális fogalom-párok a következők: soros–párhuzamos, rövidzár–szakadás, áram–feszültség, tekercs–kondenzátor. Valóban egyszerre igaz például az, hogy

rövidzáron eső *feszültség* nulla és az, hogy *szakadáson* átfolyó *áram* nulla,

vagy, hogy

feszültségen lévő *kondenzátor rövidzárásakor* végtelen *áram* folyik

és

áram által átfolyt *tekercs megszakításakor* végtelen *feszültség* indukálódik.

Nos, a bekezdés elején említett kettősséget pontosabban úgy lehet leírni, hogy a vonalmenti integrál–felületmenti integrál, fluxus–cirkuláció, forrássűrűség–örvénysűrűség fogalompárok elemei több lényeges összefüggésben duálisai egymásnak. Ezekhez további tárgyalásunk során még egy dualis fogalompár fog társulni.

Miután a vektorfüggvényeket jellemző összes lényeges alapfogalmat definiáltuk és megismerkedtünk ezek szemléletes jelentésével, a kvetkező fejezetben részletesen megvizsgljuk tulajdonságaikat és egymásközti viszonyukat. Mindezt a síkban fogjuk végrehajtani (ahogy sejtésünket is erre vonatkoztatva fogalmaztuk meg), itt ugyanis minden technikailag sokkal egyszerűbb, mint az általános esetben, jól követhető, szemléltethető és illusztrálható, ugyanakkor a sík a lényeget tekintve nem különbözik az általános esettől. Ez utóbbit röviden a következő utáni fejezetben foglaljuk össze.

2.14 Feladatok

(1) Bizonyítsuk be, hogy ha a sík egy nyílt részhalmazán létezik a $v = (f(x,y), 0)$ vektorfüggvény forrássűrűsége és f itt folytonosan deriválható függvény, akkor itt

$$s(v) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

(2) (a) Keressünk a felsoroltakon kívül más példákat dualitásra!

(b) Mutassunk az ebben a fejezetben vizsgált fogalmakra vonatkozó duális állítás–párokat!

3. Síkvektoranalízis

Ebben a fejezetben *kizárólag a síkra, azaz $\mathbf{R}^2$-re szorítkozva* vizsgáljuk az előző fejezetben definiált fogalmainkat és azok összefüggéseit (tehát ha semmi egyebet nem mondunk, akkor skalárfüggvényen mindig valamely kétváltozós függvényt, azaz a sík egy részhalmazán értelmezett valósértékű függvényt, míg vektorfüggvényen egy $v : H \to \mathbf{R}^2$, $H \subseteq \mathbf{R}^2$ függvényt, azaz a sík egy részhalmazán értelmezett és a síkba képező függvényt értünk). Az előző fejezet 2.12 Állításában megjelenő mennyiségeket megvizsgálva eljutunk a vektoranalízis két központi fogalmához a divergenciához és rotációhoz, melyek a vektorfüggvényt jellemző eddig definiált fogalmak és a deriváltoperátor kapcsolatát írják le, továbbá megfogalmazzuk az ezeket jellemző két fundamentális tételt, a vektoranalízis ún. integrál- (vagy integrálátalakító) tételeit, a Gauss-Osztrogradszkij és a Stokes tételt. Ezt követően az mutatjuk meg, hogyan lehet a divergenciát és a rotációt kiszámítani, megvizsgálunk két alapvető fizikai alkalmazást és kitérünk az integráltételek néhány következményére. Végül a primitív függvény fogalmát és a primitív függvénynek az eredeti függvénnyel való kapcsolatát leíró összefüggést általánosítjuk vektorfüggvényekre.

3.1 Divergencia

3.1.1 A deriváltoperátor skalárinvariánsa

A 2.12 Állításban felbukkanó a forrás- ill. örvénysűrűséget megadó kifejezések a deriváltoperátort jellemző nevezetes mennyiségek. Ebben a pontban az elsővel foglalkozunk, mely a deriváltoperátor szokásos bázisbeli mátrixának főátlójában levő elemek összege.

3.1 Állítás

Lináris transzformáció mátrixában a főátló elemeinek összege független a bázistól.

BIZONYÍTÁS. Csak a kétdimenziós esetet vizsgáljuk, az általános eset analóg. Legyen e és f $\mathbf{R}^2$ két bázisa, $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2)$ és

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathrm{fe}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathrm{ef}} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

($\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathrm{ef}}$ és $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathrm{fe}}$ az e-ről az f-re ill. az f-ről az e-re való áttérés mátrixai.)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathrm{f}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathrm{fe}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathrm{f}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathrm{ef}} :$$

így $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathrm{f}}$ főátlóbeli elemeinek összege

$$s_f = a_{11}(x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21}) + a_{12}(x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21}) + a_{21}(x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22}) + a_{22}(x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22}).$$

Másrészt mivel $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathrm{fe}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathrm{ef}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$, ahol $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ az egységmátrix, így

$$x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} = x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} = 1 \quad \text{és} \quad x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21} = x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} = 0$$

tehát

$$s_f = a_{11} + a_{22}.$$

3.2 Definíció

Lineáris transzformáció mátrixában a főátlóbeli elemek összegét a transzformáció **skalárinvariánsának** nevezzük.

3.3 Definíció

A $v : H \to \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$ egész, $H \subseteq \mathbf{R}^n$ deriválható vektorfüggvény deriváltoperátorának skalárinvariánsát v **divergenciájának** nevezzük és $\operatorname{div} v$-vel jelöljük, tehát speciálisan kétdimenziós esetben, ha $H \subseteq \mathbf{R}^2$ és $v : H \to \mathbf{R}^2$ deriválható vektorfüggvény, melynek komponensei v_1 és v_2, azaz $v = (v_1, v_2)$, akkor

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

3.1.2 Divergencia és fluxus, divergencia és forrássűrűség

A divergencia fogalmának segítségével hozzáfoghatunk a 2.13 Sejtés bizonyításához. Ez a sejtés felfogható úgy, mint egy, a felületmenti és térfogati integrálok közötti összefüggést megadó állítás. Bizonyításához először normáltartományok esetén vizsgáljuk meg a felületi és térfogati integrál közötti kapcsolatot.

3.4 Lemma

Legyen V tetszőleges kétdimenziós térrész, melynek határa a kifelé irányított F valódi felület és h tetszőleges V-n folytonosan deriválható kétváltozós függvény.

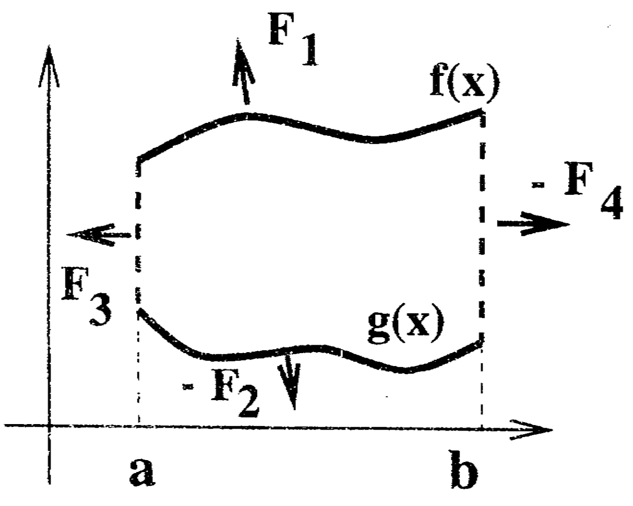
(1) *Ha V az x tengelyre vonatkoztatva reguláris normáltartomány, akkor*

$$\int_F (0, h)\, df = \int_V \frac{\partial h}{\partial y}\, dV$$

(2) *Ha V az y tengelyre vonatkoztatva reguláris normáltartomány, akkor*

$$\int_F (h, 0)\, df = \int_V \frac{\partial h}{\partial x}\, dV$$

BIZONYÍTÁS. Csak (1)-et bizonyítjuk, nyilván (2) teljesen analóg. A reguláris normáltartománynak az 1.25 (1) definícióban megadott meghatározása szerint vannak olyan a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$ számok és f, $g \in C_1[a, b]$ függények, hogy $f(x) < g(x)$ minden $x \in (a, b)$ esetén és $V = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$.



Legyenek

$$\begin{array}{lll} F_1 & \text{az} & r_1(x) = (x, f(x)),\, x \in [a, b], \\ F_2 & \text{az} & r_2(x) = (x, g(x)),\, x \in [a, b], \\ F_3 & \text{az} & r_3(x) = (a, y),\, y \in [g(a), f(a)] \text{ és} \\ F_4 & \text{az} & r_4(x) = (b, y),\, y \in [g(b), f(b)] \end{array}$$

által definiált egydimenziós felületek, továbbá legyen F V kifele irányított határa. (F_3–at és F_4–et természetesen csak akkor definiáljuk ha $g(a) < f(a)$ ill. $g(b) < f(b)$.)
A szokásos módon az integrálnak a normáltartományok határain való additívitását használva (lásd az 1.26 (15) (b) vagy az 1.26 (17) feladatot) adódik, hogy

$$\int_F (0,h)\,df = \int_{F_1} (0,h)\,df - \int_{F_2} (0,h)\,df + \int_{F_3} (0,h)\,df - \int_{F_4} (0,h)\,df\,,$$

ahol $g(a) = f(a)$ esetén a harmadik, $g(b) = f(b)$) esetén a negyedik tag hiányzik. (F_2 és F_4 azért szerepelnek negatív előjellel, mert $-F_2$ és $-F_4$ vannak V–ből kifele irányítva, ami szemléletesen is jól látható, hiszen például (ahol létezik) $r_2'(x) = (1, g'(x))$ miatt a térrész "alsó" határának, $-F_2$–nek irányítása $-\mathrm{CROSS}(r_2') = -(-g'(x), 1)$, aminek második koponense – lévén negatív – az alsó félsíkba, tehát a térrészből valóban kifele mutat.)

$(0, h)$–nak csak y irányú komponense van, így mindenütt merőleges F_3 és F_4 normálisaira, tehát

$$\int_{F_3} v\,df = \int_{F_4} v\,df = 0\,.$$

(Valóban, például $r_3'(x) = (0, 1)$, így $\mathrm{CROSS}(r_3') = (-1, 0)$ amivel

$$\int_{F_3} v\,df = \int_{g(a)}^{f(a)} (0, h(a,y)) \cdot (-1,0)\,dy = \int_{g(a)}^{f(a)} 0\,dy = 0\,.)$$

Ami a másik két integrált illeti, a felületmenti integrál definícióját alkalmazva könnyen kiszámíthatóak. Felhasználva, hogy $r_1'(x) = (1, f'(x))$, tehát $\mathrm{CROSS}(r_1') = (-f'(x), 1)$, az első integrálra a következő adódik:

$$\int_{F_1} (0,h)\,df = \int_a^b \big(0, h(x, f(x))\big) \cdot \mathrm{CROSS}(r_1')\,dx =$$

$$= \int_a^b \big(0, h(x, f(x))\big) \cdot (-f'(x), 1)\,dx = \int_a^b h(x, f(x))\,dx\,.$$

Ugyanígy a második integrál:

$$\int_{F_2} (0,h)\,df = \int_a^b \big(0, h(x, g(x))\big) \cdot \mathrm{CROSS}(r_2')\,dx =$$

$$= \int_a^b \big(0, h(x, g(x))\big) \cdot (-g'(x), 1)\,dx = \int_a^b h(x, g(x))\,dx\,.$$

Mindezekből (felhasználva h folytonos deriválhatóságát) a Newton-Lebniz formula és a kettős integrálnak kétszeres integrállá való átalakítására vonatkozó összefüggés segítségével azt kapjuk, hogy

$$\int_F (0,h)\,df = \int_{F_1} (0,h)\,df - \int_{F_2} (0,h)\,df = \int_a^b h(x, f(x))\,dx - \int_a^b h(x, g(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \big(h(x, f(x)) - h(x, g(x))\big)\,dx = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} h_y(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_V \frac{\partial h}{\partial y}\,dV\,.$$

A most bizonyított összefüggés segítségével bebizonyíthatjuk a vektoranalízis egyik központi tételét, mely a divergencia és a fluxus viszonyát írja le:

3.5 Tétel ((Síkbeli) Gauss-Osztrogradszkij tétel)
Ha V kétdimenziós normál térrész, melynek határa az F kifelé irányított valódi felület, $V \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^2$ és $v : H \to \mathbf{R}^2$ tetszőleges V–n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\int_F v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dV$$

BIZONYÍTÁS. A V normál térrész lefedhető a $V_1, V_2, \dots, V_n$ normáltartományokkal az 1.25 Definícióban szereplő módon, tehát a kétszeres integrál additivitása miatt:

(1)
$$\int_V \operatorname{div} v \, dV = \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \operatorname{div} v \, dV .$$

Minden V_i–re alkalmazható a 3.4 Lemma, azaz

(2) minden $1 \le i \le n$–re fennáll, hogy

$$\int_{F_i} v \, df = \int_{F_i} (v_1, 0) \, df + \int_{F_i} (0, v_2) \, df = \int_{V_i} (\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}) \, dV = \int_{V_i} \operatorname{div} v \, dV ,$$

ahol F_i V_i kifele irányított határa. Felhasználva a felületmenti integrálnak a normáltartományok határain való additivitását (lásd például az 1.26 (17) feladatot) kapjuk, hogy

(3)
$$\int_{F_i} v \, df = \sum_{j=1}^{n(i)} \int_{F_{ij}} v \, df \qquad \text{minden } 1 \le i \le n\text{–re},$$

ahol $F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{in(i)}$ a V_i–t határoló kifelé irányított koordinátafelületek. (1), (2) és (3)–ból

(4)
$$\int_V \operatorname{div} v \, dV = \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} v \, df = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n(i)} \int_{F_{ij}} v \, df = \sum_{k=1}^{m} \int_{G_k} v \, df ,$$

ahol $G_1, G_2, \dots, G_m$ F–nek V–ből kifele irányított kooordinátafelületekből álló lefedése, hiszen az 1.25 Definíció alapján azon F_{ij}–n vett integrálok, melyek nem esnek F–re, kétszer ellenkező előjellel szerepelnek a fenti összegben és így kiesnek, a többiek pedig kifele irányítva lefedik F–et. Tehát a felületmenti integrálnak a normál térrészek határain való additivitását felhasználva (1.26 (15)(b) feladat):

$$\int_V \operatorname{div} v \, dV = \sum_{k=1}^{m} \int_{G_k} v \, df = \int_F v \, df ,$$

és ez az, amit bizonyítani akartunk.

Mivel normál térrész határának nem kell okvetlenül felületnek lennie, lehet éppen véges sok felület egyesítése is (például a körgyűrű ilyen), a a fenti bizonyítás árnyalatnyi módosításával a fenti tételnek egy általánosabb alakját nyerhetjük:

3.6 Tétel (Általánosított (síkbeli) Gauss-Osztrogradszkij tétel)

Ha V kétdimenziós normál térrész és a kifelé irányított $G_1, G_2, \dots, G_n$ páronként diszjunkt zárt valódi felületek V határának egy lefedését alkotják, továbbá $V \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^2$ és $v : H \to \mathbf{R}^2$ tetszőleges V–n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{G_i} v \, df = \int_V \operatorname{div} v \, dV$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás megegyezik a Gauss-Osztogradszkij tétel fenti bizonyításával egészen (4)–ig, tehát

(4*)
$$\int_V \operatorname{div} v \, dV = \sum_{k=1}^{m} \int_{F_k} v \, df ,$$

ahol $F_1, F_2, \dots, F_m$ V határának V–ből kifele irányított kooordinátafelületekből való lefedése. Az 1.26 (15)(a) feladat alapján $F_1, F_2, \dots, F_m$–ből kiválasztható G_i egy lefedése az összes $1 \le i \le m$ esetén. Minden ilyen lefedésben különböző elemek szerepelnek, hiszen a lefedett halmazok diszjunktak, tehát feltehető, hogy $F_1, F_2, \dots, F_m$ úgy van felsorolva, hogy G_1 lefedése $F_1, F_2, \dots, F_{m_1}$, G_2 lefedése $F_{m_1+1}, F_{m_1+2}, \dots, F_{m_1+m_2}$ és így tovább, végül G_n lefedése $F_{m-m_k}, F_{m-m_k+1}, \dots, F_m$, tehát a szokásos módon a felületmenti integrálnak a normál térrészek határain való additivitását felhasználva (1.26 (15)(b) feladat):

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{F_k} v \, df = \sum_{i=1}^{n} \int_{G_i} v \, df ,$$

amiből (4*)-gal adódik a bizonyítandó állítás.

A Gauss-Osztrogradszkij tétel tulajdonképpen a divergencia és a forrássűrűség közti viszony leírásának ún. **integrális alakja**. Ebből az integrál tulajdonságainak felhasználásával megkapjuk a fenti viszony leírásának **differenciális alakját**, mely azon kívül, hogy igazolja a 2.12 Állításban szereplő, a forrássűrűséget megadó formula helyességét, elégséges feltétel is ad a forrássűrűség létezésére:

3.7 Következmény (Divergencia = forrássűrűség)
Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^2$ nyílt és $v : G \to \mathbf{R}^2$ tetszőleges G-n folytonosan deriválható vektorfüggvény. Ekkor G-n létezik v-nek $s(v)$ forrássűrűsége és fennáll, hogy

$$s(v) = \operatorname{div} v\,.$$

BIZONYÍTÁS. Az integrál tulajdonságaiból következik az alábbi egyszerű tény :

(*) Ha $G \subseteq \mathbf{R}^2$ nyílt, w G-n folytonos kétváltozós függvény, $r_0 \in G$ és (V_k) r_0-ra zsugorodó normál térrészek tetszőleges olyan sorozata, melyre minden $k \in \mathbf{N}$ esetén $V_k \subseteq G$, akkor

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{V_k} w\, dV = w(r_0)\,.$$

Valóban, legyen $k \in \mathbf{N}$. Mivel V_k zárt (lásd az 1.26 (4)(a) feladatot) és korlátos halmaz, továbbá $w \in C(V_k)$, léteznek az

$$M_k = \max_{r\in V} w(r) \quad \text{és az} \quad m_k = \min_{r\in V} w(r)$$

mennyiségek. Ezekkel egyrészt persze $m_k \leq w(r_0) \leq M_k$, másrészt (az 1.22 (1)(d)-ből adodó)

$$m_k \cdot |V_k| \leq \int_{V_k} w\, dV \leq M_k \cdot |V_k| \quad \text{miatt} \quad m_k \leq \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{V_k} w\, dV \leq M_k\,.$$

Így

$$\left| \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{V_k} w\, dV - w(r_0) \right| \leq M_k - m_k \xrightarrow[k]{} 0, \quad \text{hiszen} \quad w \in C(V_k) \quad \text{és} \quad d(V_k) \xrightarrow[k]{} 0\,.$$

Ezek után, a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapján (*)-ot a $w(r) = \operatorname{div} v(r)$ függvényre alkalmazva, a forrássűrűség definíciójában szereplő feltételek esetén az ottani jelölésekkel (most persze $n = 2$), azt kapjuk, hogy

$$s(v)\Big|_{r_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v\, df = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{V_k} \operatorname{div} v\, dV = \operatorname{div} v\Big|_{r_0}\,.$$

3.2 Rotáció

3.2.1 A deriváltoperátor vektorinvariánsa

Most áttérünk a 2.12 Állításban megjelenő, az örvénysűrűséget megadó kifejezésnek a derivalttenzor jellemzésében betöltött szerepéhez.

3.8 Állítás
$\mathbf{R}^2$ tetszőleges $\mathbf{A}$ antiszimmetrikus lineáris transzformációjához van egyetlen olyan $c \in \mathbf{R}$ skalár, hogy

$$\mathbf{A}\, r = c\, \mathrm{CROSS}(r)$$

tetszőleges $r \in \mathbf{R}^2$ esetén. Ez a skalár $\mathbf{A}$ tetszőleges jobbsodrású orthonormált bázisbeli mátrixában a második sor első eleme.

BIZONYÍTÁS. Az egyértelműség nyilvánvaló. $\mathbf{R}^2$ tetszőleges e jobbsodrású orthonormált bázisa és bármely $r \in \mathbf{R}^2$ esetén valamely valós a–ra

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

így, ha $r = xe_1 + ye_2$, akkor

$$\underline{\underline{\mathbf{A}\,r}}_e = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_e \underline{r}_e = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= a \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = a \cdot \underline{\underline{\mathrm{CROSS}(r)}}_e = \underline{\underline{a\,\mathrm{CROSS}(r)}}_e,$$

amiből

$$\mathbf{A}\,r = a\,\mathrm{CROSS}(r) \qquad \text{minden } r \in \mathbf{R}^2 \text{ esetén.}$$

3.9 Megjegyzés

Az állítás szerint tehát: skalár erejéig CROSS a sík egyetlen antiszimmetrikus lineáris transzformációja.

A most következő definícióban szereplő elnevezés furcsaságát – amint azt később látni fogjuk – a fogalom háromdimenziós megfelelője magyarázza.

3.10 Definíció

Legyen $\mathbf{A}$ $\mathbf{R}^2$ tetszőleges lineáris transzformációja. Azt a 3.8 Állításban szereplő $a \in \mathbf{R}$ skalárt, mely $\mathbf{A}$ antiszimmetrikus részéhez tartozik, $\mathbf{A}$ **vektorinvariáns**ának nevezzük.

A vektorinvariáns ugyan nem vektor, de a 3.8 Állítás alapján legalább tényleg invariáns, amennyiben nem függ a bázistól, hiszen magát a deriváltoperátort jellemzi.

3.11 Definíció

Legyen $H \subseteq \mathbf{R}^2$ és $v : H \to \mathbf{R}^2$ deriválható vektorfüggvény. A v deriváltoperátora vektorinvariánsának kétszeresét v **rotáció**jának nevezzük és rot v–vel jelöljük.

3.12 Állítás

Legyen $H \subseteq \mathbf{R}^2$ és $v : H \to \mathbf{R}^2$ deriválható vektorfüggvény, melynek komponensei v_1 és v_2, azaz $v = (v_1, v_2)$. Ekkor

$$\mathrm{rot}\, v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{R}^2$ szokásos e bázisában a $\mathbf{D}$ deriváltoperátor antiszimetrikus részének mátrixa a következő:

$$\frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}_e - \underline{\underline{\mathbf{D}}}_e^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}.$$

A rotáció (definíciója alapján) a vektorinvariáns kétszerese, ez pedig a 3.8 Állítás alapján a fenti mátrixban a második sor első eleme, így a rotáció ezen mátrixban a második sor első elemének kétszerese, és pont ezt akartuk bizonyítani.

3.2.2 Rotáció és cirkuláció, rotáció és örvénysűrűség

A síkban a felületmenti- és görbementi integrálok közötti összefüggést felhasználva a Gauss-Osztrogradszkij tételből megkaphatjuk annak görbementi integrálra vonatkozó megfelelőjét, a vektoranalízis másik központi tételét, mely a rotáció és vonalintegrál kapcsolatát írja le:

3.13 Tétel ((Síkbeli) Stokes-tétel)
Ha F kétdimenziós normál tértész, melynek határa a pozitívan irányított L görbe, $F \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^2$ és $v : H \to \mathbf{R}^2$ tetszőleges F-en folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\int_L v \, dr = \int_F \operatorname{rot} v \, dV$$

BIZONYÍTÁS. Mivel ha $v = (v_1, v_2)$, akkor

$$\operatorname{div} \mathrm{CROSS}(v) = \operatorname{div}(-v_2, v_1) = -\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y},$$

így az 1.24 Megjegyzés alapján a Gauss-Osztrogradszkij tételből és a 3.12 Állításból azt kapjuk, hogy

$$\int_L v \, dr = -\int_L \mathrm{CROSS}(v) \, df = -\int_F \operatorname{div} \mathrm{CROSS}(v) \, dV =$$

$$= \int_F \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dV = \int_F \operatorname{rot} v \, dV$$

Nyilván a tétel egy általánosabb formában adódik a Gauss-Osztrogradszkij tétel általánosabb alakjából.

3.14 Tétel (Általánosított (síkbeli) Stokes-tétel)
Ha F kétdimenziós normál tértész és a pozitívan irányított $G_1, G_2 \ldots, G_n$ páronként diszjunkt zárt görbék V határának egy lefedését alkotják, továbbá $F \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^2$ és $v : H \to \mathbf{R}^2$ tetszőleges F-n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{G_i} v \, dr = \int_F \operatorname{rot} v \, dV$$

A vektorfüggvények jellemzései közti, az integrális alakokra vonatkozó analógia fennáll a differenciális alakokra is. A Stokes tételből, a cirkuláció és az örvénysűrűség közti viszony integrális alakjából megkaphatjuk ennek az összefüggésnek a differenciális alakját is pontosan ugyanolyan módon, ahogy fent, a 3.7 Következményben a divergencia és forrássűrűség esetén tettük:

3.15 Következmény (Cirkuláció = örvénysűrűség)
Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^2$ nyílt és $v : G \to \mathbf{R}^2$ tetszőleges G-n folytonosan deriválható vektorfüggvény. Ekkor G-n létezik v-nek $c(v)$ örvénysűrűsége és fennáll, hogy

$$c(v) = \operatorname{rot} v \,.$$

A Gauss-Osztrogradszkij tétel és a Stokes tételt együttesen a vektoranalízis (fő) **integráltétel**einek vagy **integrálátalakító tétel**einek szokás nevezni.

Az alábbi példában néhány egyszerű esetre alkalmazzuk az integráltételeket.

3.16 Példa
Tekintsük a síkban az origóközéppontú R sugarú körvonalat mint egy síkbeli kifele irányított valódi F felületet (síkbeli gömbhéjat) és ugyanezt a körvonalat, mint egy L pozitívan irányított görbét. Számítsuk ki az

$$\int_F v\, df \qquad \text{és az} \qquad \int_L v\, dr$$

integrálokat az alábbi vektorfüggvényekre:

(a) $v(x,y) = (x,y)$
(b) $v(x,y) = (x,-y)$
(c) $v(x,y) = (y,x)$
(d) $v(x,y) = (y,-x)$

Megoldás. A megoldás során a Gauss-Osztrogradszkij tételt és a Stokes tételt fogjuk használni, továbbá ellenőrzésképpen kiszámítjuk az integrált a definíció alapján és néhány esetben a felületmenti ill. görbementi integrált felszín szerinti ill. ívhossz szerinti integrálszámításra visszavezető, az 1.22 (2) Állításban szereplő formula alapján is. Az ellenőrzéshez szükségünk lesz F és L egyenleteire is. Jelöljük az F által határolt térrészt, az origóközéppontú R sugarú körlemezt V-vel.

$$F \text{ egyenlete:} \quad r = r(t) = (R\sin t, R\cos t)\,,\ 0 \le t \le 2\pi\,.$$
$$\text{Így} \quad \dot r(t) = (R\cos t, -R\sin t)$$
$$\text{és} \quad \mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = (R\sin t, R\cos t)\,.$$

(Ha ezzel az egyenlettel definiáljuk F-et, akkor valóban kifelé irányított lesz, hisz ha $p(\delta) = r(t) + \delta \cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = \big(R(1+\delta)\sin t, R(1+\delta)\cos t\big)$, akkor $|p(\delta)|^2 = R^2(1+\delta)^2 > R^2$, tehát $p(\delta) \notin V = \{r \in \mathbf{R}^2 : |r|^2 \le R^2\}$ minden $\delta > 0$ esetén.)

$$L \text{ egyenlete:} \quad s = s(t) = (R\cos t, R\sin t), 0 \le t \le 2\pi\,.$$
$$\text{Így} \quad \dot s(t) = (-R\sin t, R\cos t)\,,$$
$$\text{és } \mathrm{CROSS}(\dot s(t)) = -(R\cos t, R\sin t)\,.$$

(Ha ezzel az egyenlettel definiáljuk L-et, akkor valóban pozitívan irányított lesz, mert pontosan ugyanúgy, ahogy az előbb, belátható, hogy $-L$ V-ből kifelé irányított, hiszen $-\mathrm{CROSS}(\dot s(t)) = (R\cos t, R\sin t)$, így ha $p(\delta) = s(t) + \delta \cdot -\mathrm{CROSS}(\dot s(t)) = \big(R(1+\delta)\cos t, R(1+\delta)\sin t\big)$, akkor $|p(\delta)|^2 = R^2(1+\delta)^2 > R^2$.)

(a) $v(x,y) = (x,y)$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 + 1 = 2 \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} v = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \quad \text{így}$$

$$\int_F v\, df = \int_V \operatorname{div} v\, dV = \int_V 2\, dV = 2\int_V dV = 2|V| = 2R^2\pi\,,$$

$$\int_L v\, dr = \int_V \operatorname{rot} v\, dV = \int_V 0\, dV = 0\,.$$

ELLENŐRZÉS.

(1) $v(r(t)) \cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = r(t) \cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = (R\sin t, R\cos t) \cdot (R\sin t, R\cos t) = R^2(\sin^2 t + cos^2 t) = R^2$ és $v(s(t)) \cdot \dot s(t) = s(t) \cdot \dot s(t) = (R\sin t, R\cos t) \cdot (-R\sin t, R\cos t) = R^2(\sin^2 t - \cos^2 t) = -R^2\cos 2t$ tehát

$$\int_F v\, df = \int_0^{2\pi} v(r(t)) \cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t))\, dt = \int_0^{2\pi} R^2\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} dt = R^2 2\pi = 2R^2\pi\,,$$

$$\int_L v\, dr = \int_0^{2\pi} v(s(t)) \cdot \dot s(t)\, dt = -\int_0^{2\pi} R^2 \cos 2t\, dt = R^2 \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0\,.$$

(2) F minden pontjában F n normálisa $v(r) = r$ irányú, így v n-re eső vetülete $v_n = |v| = |r|$, továbbá F-n $|r| = R$, tehát F-en $v_n = R$. Így

$$\int_F v\, df = \int_F v_n\, |df| = \int_F |r|\, |df| = \int_F R\, |df| = R\int_F |df| = R|F| = R \cdot 2R\pi = 2R^2\pi\,.$$

Másrészt L minden pontjában L érintője merőleges a $v(r) = r$ függvényre, így v érintőre eső v_e vetülete nulla, azaz

$$\int_L v\, dr = \int_L v_e\, |dr| = \int_L 0\, |dr| = 0\,.$$

(b) $v(x,y) = (x,-y)$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial -y}{\partial y} = 1-1=0 \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} v = \frac{\partial -y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0-0=0 \quad \text{így}$$

$$\int_F v\, df = \int_V \operatorname{div} v\, dV = \int_V 0\, dV = 0\,,$$

$$\int_L v\, dr = \int_V \operatorname{rot} v\, dV = \int_V 0\, dV = 0\,.$$

ELLENŐRZÉS.
$v(r(t)) \cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = (R\sin t, -R\cos t)\cdot(R\sin t, R\cos t) = R^2(\sin^2 t - \cos^2 t) = -R^2\cos 2t$ és $v(s(t))\cdot\dot s(t) = s(t)\cdot\dot s(t) = (R\cos t, -R\sin t)\cdot(-R\sin t, R\cos t) = -R^2(\cos t\ \sin t + \sin t\ \cos t) = -R^2 \sin 2t$ tehát

$$\int_F v\, df = \int_0^{2\pi} v(r(t))\cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t))\, dt = -\int_0^{2\pi} R^2\cos 2t\, dt = R^2 \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0\,,$$

$$\int_L v\, dr = \int_0^{2\pi} v(s(t))\cdot\dot s(t)\, dt = -\int_0^{2\pi} R^2 \sin 2t\, dt = R^2\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0\,.$$

(c) $v(x,y) = (y,x)$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0+0=0 \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} v = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} = 1-1=0 \quad \text{így}$$

$$\int_F v\, df = \int_V \operatorname{div} v\, dV = \int_V 0\, dV = 0\,,$$

$$\int_L v\, dr = \int_V \operatorname{rot} v\, dV = \int_V 0\, dV = 0\,.$$

ELLENŐRZÉS.
$v(r(t)) \cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = (R\cos t, R\sin t)\cdot(R\sin t, R\cos t) = R^2(\cos t\, sint + \sin t\ \cos t) = R^2\sin 2t$ és $v(s(t))\cdot\dot s(t) = s(t)\cdot\dot s(t) = (R\sin t, R\cos t)\cdot(-R\sin t, R\cos t) = R^2(\cos^2 t - \sin^2 t) = R^2\cos 2t$ tehát

$$\int_F v\, df = \int_0^{2\pi} v(r(t))\cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t))\, dt = \int_0^{2\pi} R^2\sin 2t\, dt = -R^2 \frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0\,,$$

$$\int_L v\, dr = \int_0^{2\pi} v(s(t))\cdot\dot s(t)\, dt = \int_0^{2\pi} R^2 \cos 2t\, dt = R^2\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0\,.$$

(d) $v(x,y) = (y,-x)$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial -x}{\partial y} = 0+0=0 \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} v = \frac{\partial -x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} = -1-1=-2 \quad \text{így}$$

$$\int_F v\, df = \int_V \operatorname{div} v\, dV = \int_V 0\, dV = 0\,,$$

$$\int_L v\, dr = \int_V \operatorname{rot} v\, dV = \int_V -2\, dV = -2\int_V dV = -2|V| = -2R^2\pi\,.$$

ELLENŐRZÉS.
(1) $v(r(t)) \cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = (R\cos t, -R\sin t)\cdot(R\sin t, R\cos t) = R^2(\cos t\, sint - \sin t\ \cos t) = 0$ és $v(s(t))\cdot\dot s(t) = s(t)\cdot\dot s(t) = (R\sin t, -R\cos t)\cdot(-R\sin t, R\cos t) = R^2(-\sin^2 t - \cos^2 t) = -R^2$ tehát

$$\int_F v\, df = \int_0^{2\pi} v(r(t))\cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t))\, dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0\,,$$

$$\int_L v\,dr = \int_0^{2\pi} v(s(t))\cdot \dot{s}(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} R^2\,dt = -R^2\int_0^{2\pi} dt = -R^2 2\pi = -2R^2\pi\,.$$

(2) Mivel $v(x,y)\cdot(x,y) = (y,-x)\cdot(x,y) = yx - xy = 0$, így $v(r)\cdot r = 0$, azaz a $v = v(r)$ függvény mindenütt merőleges az r helyvektorra. Azonban F minden pontjában F n normálisa pont r irányú, így v n–re eső vetülete v_n F minden pontjában nulla, tehát

$$\int_F v\,df = \int_F v_n\,|df| = \int_F 0\,|df| = 0\,.$$

Másrészt L minden pontjában L érintője pontosan v egyenesébe esik és azzal ellentétes irányú $\big(\dot{s}(t) = = (-R\sin t, R\cos t) = (-y,x)\big|_{s(t)} = -(y,-x)\big|_{s(t)} = -v(s(t))\big)$, így v–nek az L érintőjére eső v_e vetülete: $v_e = -|v|$, továbbá L-en mindenütt $|v| = R$, tehát

$$\int_L v\,dr = \int_L v_e\,|dr| = -\int_L |v||dr| = -\int_L R\,|dr| = -R\int_L |dr| =$$

$$= -R|L| = -R\cdot 2R\pi = -2R^2\pi\,.$$

3.3 Vektorfüggvények jellemzőinek számítása

Az alábbiakban, ha mást nem mondunk, u mindig differenciálható skalárfüggvényt, v pedig differenciálható vektorfüggvényt jelöl.

a. A nabla operátor

Ahhoz, hogy bizonyos összefüggéseket tömör formában írhassunk fel, célszerű egy speciális rövidített írásmódot alkalmazni, melyben a

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$$

szimbólum, egy formális, matematikai jelentés nélküli "vektor" szerepel. Ezzel, az ún. **nabla vektorral** (vagy **nabla operátorral**) végzett formális műveletek segítségével könnyen leírhatók és megjegyezhetőek bizonyos képletek. Így

$$\operatorname{div} v = \nabla\cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

$$\operatorname{rot} v = -\nabla\cdot \mathrm{CROSS}(v) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

b. Az invariánsok és a gradiens lineáris operátorok

$$\operatorname{div}(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \operatorname{div} v_1 + c_2 \operatorname{div} v_2$$
$$\operatorname{rot}(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \operatorname{rot} v_1 + c_2 \operatorname{rot} v_2$$
$$\operatorname{grad}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \operatorname{grad} u_1 + c_2 \operatorname{grad} u_2$$

Ezek az összefüggések nyilvánvaló következményei annak, hogy a deriválás lineáris operátor.

c. Szorzatfüggvény invariánsai és gradiense

$$\operatorname{div}(u\,v) = u \operatorname{div} v + v \cdot \operatorname{grad} u$$
$$\operatorname{rot}(u\,v) = u \operatorname{rot} v - \mathrm{CROSS}(v) \cdot \operatorname{grad} u$$
$$\operatorname{grad}(u_1\,u_2) = u_1 \operatorname{grad} u_2 + u_2 \operatorname{grad} u_1$$

Valóban,

$$\operatorname{div}(u\,v) = \frac{\partial}{\partial x}(u\,v)_1 + \frac{\partial}{\partial y}(u\,v)_2 = \frac{\partial}{\partial x}(u\,v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(u\,v_2) =$$
$$= v_1\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v_2}{\partial y} =$$
$$= u(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}) + (v_1, v_2) \cdot (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = u \operatorname{div} v + v \cdot \operatorname{grad} u$$

és

$$\operatorname{rot}(u\,v) = \frac{\partial}{\partial x}(u\,v)_2 - \frac{\partial}{\partial y}(u\,v)_1 = \frac{\partial}{\partial x}(u\,v_2) - \frac{\partial}{\partial y}(u\,v_1) =$$
$$= v_2\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v_2}{\partial x} - v_1\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v_1}{\partial y} =$$
$$= u(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}) - (-v_2, v_1) \cdot (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = u \operatorname{rot} v - \mathrm{CROSS}(v) \cdot \operatorname{grad} u\,.$$

Végül

$$\operatorname{grad}(u_1\,u_2) = \Big(\ \frac{\partial}{\partial x}(u_1\,u_2), \frac{\partial}{\partial y}(u_1\,u_2)\Big) \ = \Big(\ u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x}, u_1\frac{\partial u_2}{\partial y} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}\Big) \ =$$
$$= u_1(\frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}) + u_2(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}) = u_1 \operatorname{grad} u_2 + u_2 \operatorname{grad} u_1$$

d. Divergencia és rotáció kapcsolata

$$\operatorname{div} v = \operatorname{rot} \mathrm{CROSS}(v)$$
$$\operatorname{rot} v = -\operatorname{div} \mathrm{CROSS}(v)$$

Valóban,

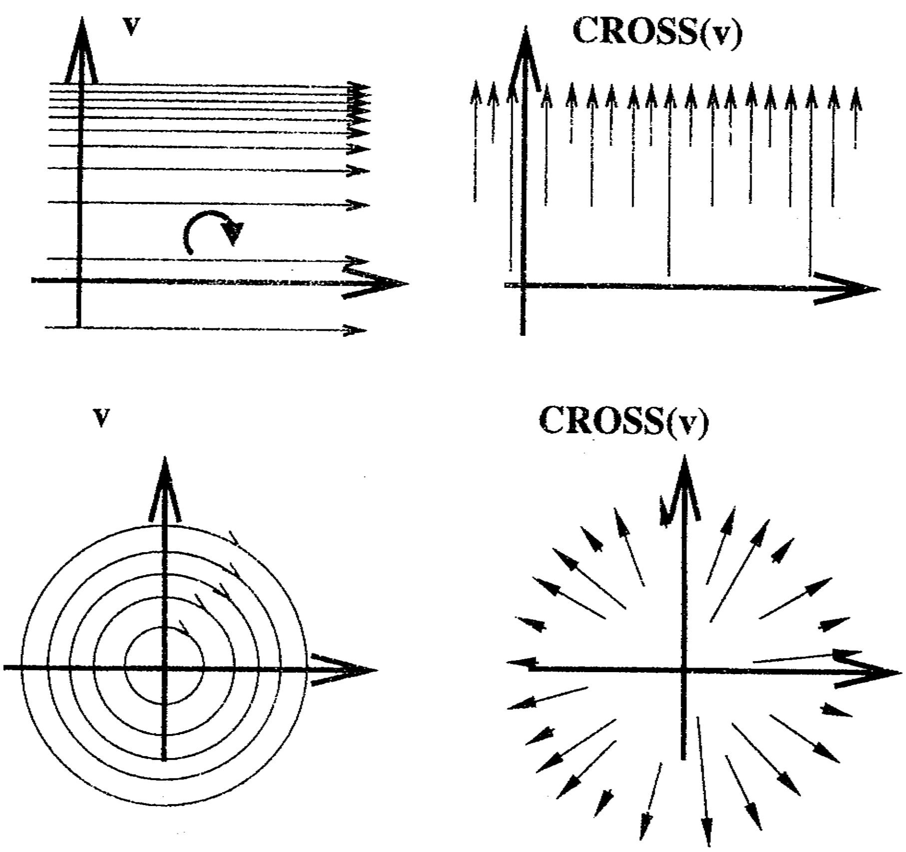
$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \operatorname{div}(v_2, -v_1) = \operatorname{div}(-\mathrm{CROSS}(v)) = -\operatorname{div} \mathrm{CROSS}(v) \quad \text{és}$$
$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \operatorname{rot}(-v_2, v_1) = \operatorname{rot} \mathrm{CROSS}(v).$$

Megjegyzés.

A fenti összefüggések segítik megvilágítani a síkban a divergencia és rotáció jelentését és a két fogalom viszonyát. Az alábbiakban két példán illusztráljuk ezt a kapcsolatot.

(1) $v = (f(y), 0)$, f pozitív monoton nővő. Ekkor $\mathrm{CROSS}(v) = (0, f(y))$ (lásd az első ábrát a túloldalon). v rotációját az okozza, hogy v nagysága irányára merőlegesen változik és ugyanezért, ugyanilyen mértékben $\mathrm{CROSS}(v)$ (v–vel megegyező) nagysága $\mathrm{CROSS}(v)$ irányában változik, ami $\mathrm{CROSS}(v)$ divergenciáját okozza. Tehát $\mathrm{CROSS}(v)$ divergenciájának arányosnak kell lennie v rotációjával. Hasonlóan indokolható v divergencia– és $\mathrm{CROSS}(v)$ rotációmentességének összefüggése.

(2) $v = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(y, -x)$. Ekkor $\mathrm{CROSS}(v) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(x, y)$ (lásd a második ábrát a túloldalon). v erővonalai koncentrikus körök, mert v minden r pontban $v(r)$ merőleges r–re hiszen $v(r) \| (y, -x)$, $r = (x, y)$ és $((y, -x) \cdot (x, y) = 0$. Az erővonalak sűrűsége állandó, mert v nagysága állandó ($|v| = 1$).



v rotációjának az az oka, hogy v nagysága állandó és erővonalai görbülnek. Ez pont azt jelenti, hogy CROSS(v)-nek a v-re merőleges erővonalai a görbülés mértékében széttartanak, így ahhoz, hogy sűrűségük nagysága állandó lehessen (mert $|\mathrm{CROSS}(v)| = |v| = 1$), az kell, hogy az erővonalak irányában a széttartás mértékével arányosan új erővonalak eredjenek, tehát, hogy CROSS(v) divergenciája arányos legyen erővonalai széttartásának, azaz v erővonalai görbültségének mértékével.

e. Néhány kitüntetett függvény

Konstansfüggvény

$$\text{Ha } c \text{ konstans vektor, akkor } \operatorname{div} c = \operatorname{rot} c = 0 \text{ és}$$
$$\text{ha } c \text{ konstans skalár, akkor } \operatorname{grad} c = 0\,.$$

Ugyanis konstans deriváltoperátora nulla, így invariánsai is azok és konstans gradiense is nulla.

Lineáris transzformáció

Legyen $\mathbf{A}$ $\mathbf{R}^2$-en értelmezett lineáris transzformáció. Ekkor

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \text{ azonos } \mathbf{A} \text{ skalárinvariánsával és}$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{A}\ \ \mathbf{A} \text{ vektorinvariánsának kétszerese.}$$

Ezek az állítások az invariánsok definícióinak és annak nyilvánvaló következményei, hogy lineáris operátor deriváltja önmaga.
Az alábbiakban megadjuk a vizsgált mennyiségeket két speciális lineáris operátor esetén.

Identitás: $\quad v(r) = r\,.$

$$\operatorname{div} r = 2$$
$$\operatorname{rot} r = 0$$

Valóban, nyilván az identitás mátrixa (bármely bázisban) az egységmátrix, melynek főátlója két egyesből áll, ezek összege pedig 2. Másrészt, az identitás szimmetrikus operátor, tehát antiszimmetrikus része nulla, és ennek nyilván vektorinvariánsa is nulla. Persze, közvetlenül a definíciókból is adódik, hogy $v(r) = r = (x, y)$ esetén

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 + 1 = 2 \qquad \text{és}$$

$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0 - 0 = 2\,.$$

CROSS: $\quad v(r) = \mathrm{CROSS}(r)\,.$

$$\operatorname{div} \mathrm{CROSS}(r) = 0$$
$$\operatorname{rot} \mathrm{CROSS}(r) = 2$$

Ezt többféleképpen is beláthatjuk.

(1) Egyrészt, felhasználva azt, amit épp az előbb az identitásra bizonyítottunk, valamint a d. pontbeli összefüggéseket div és rot között, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{div} \mathrm{CROSS}(r) = -\operatorname{rot} r = 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} \mathrm{CROSS}(r) = \operatorname{div} r = 2\,.$$

(2) Egy másik lehetőség közvetlenül a definíciók alkalmazása. Felhasználva, hogy $\mathrm{CROSS}(r) = (-y, x)$, adódik, hogy

$$\operatorname{div} \mathrm{CROSS}(r) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial -y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0 + 0 = 0 \qquad \text{és}$$

$$\operatorname{rot} \mathrm{CROSS}(r) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial -y}{\partial y} = 1 - (-1) = 2\,.$$

(3) Végül használhatjuk azt, hogy CROSS lineáris transzformáció. Legyen $\mathbf{R}^2$ szokásos bázisa $e = (i, j)$. $\mathrm{CROSS}(i) = j$, $\mathrm{CROSS}(j) = -i$, tehát CROSS mátrixa e-ben:

$$\underline{\underline{\mathrm{CROSS}}}_e = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$\underline{\underline{\mathrm{CROSS}}}_e$ tehát antiszimmetrikus, főátlóbeli elemeinek összege 0, így $\operatorname{div} \mathrm{CROSS}(r) = 0$. Másrészt, persze $\mathrm{CROSS}(r) = 1 \cdot \mathrm{CROSS}(r)$, így a vektorinvariáns definíciója alapján CROSS vektorinvariánsa 1, és ennek kétszerese a rotáció, vagyis $\operatorname{rot} \mathrm{CROSS}(r) = 2$.

Skalárszorzás

Legyen $u(r) = (c, r)$, ahol c valamely rögzített konstansvektor. Ekkor

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad}(c, r) = c\,.$$

Valóban, $u(r)$ lineáris operátor, így $u'(r) = u(r) = (c, r)$, amiből grad definícióját használva, $\operatorname{grad} u = c$.

Körszimmetrikus tér

(1) Legyen $u(r) = f(|r|)$, ahol f tetszőleges $\mathbf{R}^+$-on deriválható egyváltozós függvény. Ha $r \neq 0$, akkor

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} f(|r|) = f'(|r|)\frac{r}{|r|}\,.$$

(2) Legyen $v(r) = f(|r|)r$, ahol f tetszőleges $\mathbf{R}^+$-on deriválható egyváltozós függvény. Ha $r \neq 0$, akkor

$$\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(f(|r|)r) = 0\,.$$

Az első összefüggés a láncszabály egy alkalmazása, hiszen ha $r \neq 0$, akkor

$$\operatorname{grad}|r| = \operatorname{grad}\sqrt{x^2+y^2} = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Big) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) = \frac{r}{|r|}.$$

A második összefügés pedig a fenti c. pontból adódik:

$$\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(f(|r|)r) = f(|r|)\operatorname{rot} r - \mathrm{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad} f(|r|) =$$

$$= 0 + \mathrm{CROSS}(r) \cdot (f'(|r|)\frac{r}{|r|}) = \frac{f'(|r|)}{|r|}(\mathrm{CROSS}(r) \cdot r) = 0$$

hiszen már láttuk, hogy $\operatorname{rot} r = 0$ és, mivel $\mathrm{CROSS}(r)$ és r merőlegesek egymásra, $\mathrm{CROSS}(r) \cdot r = 0$.

f. Két nevezetes összefüggés

(1) Legyen u és v kétszer folytonosan deriválható skalár– ill. vektorfüggvény. Ekkor

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0.$$

Valóban,

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \operatorname{rot}(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x}) = u_{xy} - u_{yx} = 0$$

a Young- tétel miatt.

(2) Legyen u kétszer folytonosan deriválható skalárfüggvény. Vezessük be a következő jelölést:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \quad (\Delta\text{-t } \textbf{Laplace operátor}\text{nak nevezzük}).$$

Ekkor

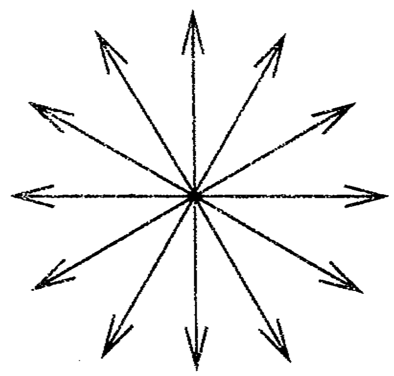
$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u.$$

Ugyanis: $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{grad} u)_1 + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{grad} u)_2 = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})$

3.4 Két fundamentális fizikai alkalmazás

3.4.1 Ponttöltés elektromos tere

Legyen minden $r \neq 0$ esetén $v(r) = \frac{r}{|r|^2}$:



Ez a vektorfüggvény, mint erőtér az egységnyi síkbeli ponttöltés tere, míg mint áramlási tér a pontszerű forrás vagy (ellenkező előjellel) lefolyó áramlási tere. Ez utóbbi akár kísérletileg is viszonylag könnyen igazolható: ha egy köralakú, mélységéhez képest nagy felszínű tepsiben levő vizet a tepsi közepén vágott viszonylag kis lyukon keresztül úgy eresztünk le, hogy megakadályozzuk itt (a Föld tengelyforgásának eredményeképpen létrejövő) örvénylő mozgást, akkor a víz mozgásának sebessége, amit például kis papírdarabokkal mérhetünk, nyilván a lefolyó felé irányul és nagysága $|v(r)| = \frac{1}{|r|}$, azaz a mért távolsággal fordítva arányos.

A függvény az origó kivételével mindenütt folytonosan deriválható, az origóban pedig még folytonossá sem tehető. Valóban,

$$v = v(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

ami pontosan akkor folytonosan deriválható, ha koordinátafüggvényei azok. Nos a koordinátafüggvények,

$$v_1 = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{és} \quad v_2 = \frac{y}{x^2+y^2}$$

egyrészt nyilván az origón kívül mindenütt folytonosan deriválhatóak, hiszen csak az origóban eltűnő nevezőjű racionális törtfüggvények, másrészt az origóban még csak folytonossá sem tehetőek, mert még határértékük sincs ott. Például

$$v_1(x,0) = \frac{1}{x} \longrightarrow \infty \quad \text{ha} \quad x \longrightarrow 0+, \quad \text{míg} \quad v_1(0,y) = 0 \longrightarrow 0 \quad \text{ha} \quad y \longrightarrow 0.$$

FORRÁSSŰRŰSÉG ÉS FLUXUS.

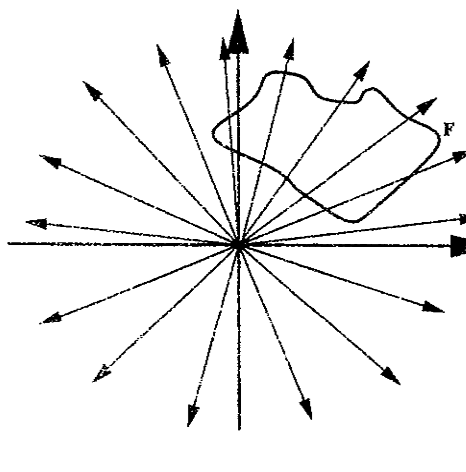
A tér forrássűrűsége az origó kivételével mindenütt nulla:

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div}\frac{r}{|r|^2} = \frac{1}{|r|^2}\operatorname{div} r + r\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{|r|^2} = \frac{2}{|r|^2} + r\cdot\left(-2\frac{1}{|r|^3}\frac{r}{|r|}\right) =$$

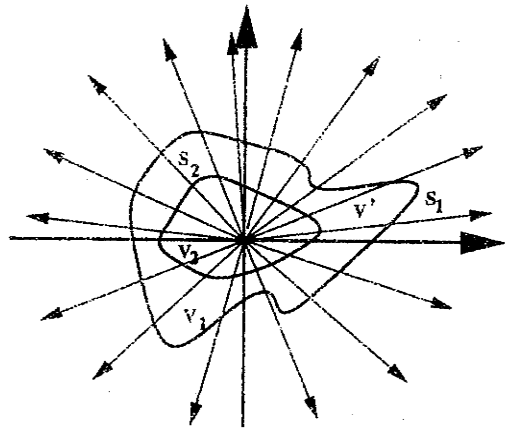
$$= \frac{2}{|r|^2} - \frac{2}{|r|^4}(r\cdot r) = \frac{2}{|r|^2} - \frac{2}{|r|^2} = 0 \quad \text{ha} \quad r \neq 0.$$

Az origóban nincs értelmezve a divergencia, hiszen, ahogy láttuk, v még folytonossá sem tehető ott.

A forrássűrűség tehát az origó kivételével mindenütt nulla, következésképpen, a Gauss-Osztrogradszkij tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy fluxusa minden az origót nem tartalmazó normál térrészt határoló F felületre vonatkozóan nulla: az összes erővonal ami az F által bezárt térrészbe belép, ki is lép onnan:



Nyilván egy az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló zárt S felület esetében más a helyzet, hiszen a térrészen belül van forrás, új erővonalak keletkeznek. Ahhoz, hogy egy ilyen felületre vonatkozóan meghatározzuk a fluxust, felhasználjuk azt a tényt, hogy két különböző ilyen felületre: S_1–re és az általa bezárt V_1 térrész belsejébe eső S_2–re vonatkozó fluxus megegyezik, hiszen a két felület közé eső V' térrészben nem keletkeznek erővonalak, azok az erővonalak, melyek az S_2 által bezárt V_2 térrészből kilépnek, kilépnek V_1 - ből is:



Ez persze minden olyan esetben, mikor a V' normál térrész, formálisan is belátható, hiszen ekkor (mivel S_1 és $-S_2$ kifelé irányított zárt felületek lefedik V' határát (1.26 (15)(c) feladat)) alkalmazható rá a Gauss-Osztrogradszkij tétel általánosított változata (3.6 Tétel):

$$\int_{S_1} v\,df + \int_{-S_2} v\,df = \int_{V'} \operatorname{div} v\,dv = 0\,, \qquad \text{tehát}$$

$$\int_{S_1} v\,df = \int_{S_2} v\,df\,.$$

Nos, ezek után elég egy origóközéppontú kédimenzióbeli gömbhéjra (azaz körvonalra) vonatkozóan kiszámítani a fluxust, hiszen minden, az origót belsejében tartalmazó térrész esetében van teljesen a térrészbe eső origóközéppontú gömb. Legyen tehát F az R sugarú kétdimenzbeli gömbhéj. F egyenlete: $r = r(t) = (R\sin t, R\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Ekkor $\dot r(t) = (R\cos t, -R\sin t)$, $\mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = (R\sin t, R\cos t)$. (A 3.16 Feladatban már láttuk, hogy ez valóban kifelé irányítja F–et, az 1.26 (10)(d) feladat alapján F zárt felület és az 1.26 (15)(d) feladat alapján F az origót belsejében tartalmazó normál térrész határa.) Ezekkel

$$v(r(t)) = \frac{r(t)}{|r(t)|^2} = \frac{1}{R^2}\cdot(R\sin t, R\cos t) = \frac{1}{R}(\sin t, \cos t)\,.$$

Tehát $v(r(t))\cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = 1$. Így

$$\int_F v\,df = \int_0^{2\pi} v(r(t))\cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t))\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi\,.$$

Ezt az eredményt megkaphattuk volna a következőképpen is: F minden pontjában annak n normálisa r irányú, így, mivel $v \| r$, adódik, hogy $n \| r \| v$ és (mivel F kifele irányított) n és v iránya is megegyezik. Következésképp v–nek n–re eső vetülete $v_n = |v|$, tehát felhasználva, hogy F–n $|v| = \frac{R}{R^2} = \frac{1}{R}$:

$$\int_F v\,df = \int_F v_n\,|df| = \int_F |v|\,|df| = \int_F \frac{1}{R}\,|df| = \frac{1}{R}\cdot\int_F |df| = \frac{1}{R}\cdot|F| = \frac{1}{R}\cdot 2R\pi = 2\pi\,.$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló kifele irányított zárt S felületre vonatkozó fluxus azonosan 2π. Ebből következően persze az origóbeli forrássűrűség végtelen, hiszen ha (V_k) az origóra zsugorodó normál térrészek egy olyan sorozata, melyre minden $k \in \mathbf{R}$ esetén V_k határa a zárt kifelé irányított F_k felület, akkor $|V_k| \xrightarrow[k]{} 0$, miatt

$$\frac{1}{|V_k|}\cdot\int_{F_k} v\,df = \frac{1}{|V_k|}\cdot 2\pi \xrightarrow[k]{} \infty\,.$$

A fenti, az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló felületen számított fluxusra vonatkozó eredményünkkel kapcsolatban érdemes még egy észrevételt tenni. Láttuk, hogy $\operatorname{div} v = 0$ az origó kivételével mindenütt, teht $\operatorname{div} v$ *egy pont kivételével folytonos* a síkon és értelmezési tartományán korlátos is. Ebből az integrálszámítás jól ismert tétele szerint div v integrálható minden zárt, korlátos és mérhető halmazon, így bármely az origót belsejében tartalmazó normál V térrészen is és

$$\int_V \operatorname{div} v \, dV = 0\,,$$

amiből Gauss-Osztrogradszkij tétel alapjánn v–nek V határára, F–re vonatkozó fluxusa is nulla, ellentmondásban fenti eredményünkkel, mely szerint ez a fluxus 2π. Ez az érvelés azonban hibás, V–re a Gauss-Osztogradszkij tétel *nem alkalmazható*, mert ennek feltétele v–nek *egész V–re vonatkozó* folytonos deriválhatósága, v azonban (amint már láttuk) még csak folytonossá sem tehető az origóban.

ÖRVÉNYSŰRŰSÉG ÉS CIRKULÁCIÓ.

Az örvénysűrűség az origó kivételével minden pontban és így Stokes-tétellel a cirkuláció minden, az origót belsejében nem tartalmazó, normál térrészt határoló görbére vonatkozóan nulla, hiszen a 3.3 e. pontban láttuk, hogy körszimmetrikus tér rotációja az origón kívül nulla, $\operatorname{rot} v = 0$ az origón kívül mindenütt.

Persze ahogy a divergencia, a rotáció sem értelmezhető az origóban. Az örvénysűrűséggel azonban más a helyzet. Pontosan ugyanúgy, ahogy a Gauss-Osztrogradszkij tételre és a divergenciának az origón kívül való eltűnésére támaszkodva megmutattuk, hogy minden az origót belsejében tartalmazó normál térrész zárt kifele irányított határán a fluxus ugyanaz, a rotáció eltűnését és a Stokes-tételt használva megmutatható, hogy az origót belsejükben tartalmazó normál térrész pozitívan irányított zárt határain vett cirkuláció is azonos. Következésképpen, nem maradt más hátra, minthogy kiszámítsuk a cirkulációt egy origóközéppontú R sugarú pozitívan irányított L körvonalra. Ez azonban igen egyszerű, hiszen L minden pontjában L érintője merőleges az r irányú $v(r)$ függvényre, tehát v érintőre eső v_e vetülete nulla, azaz

$$\int_L v \, dr = \int_L v_e \, |dr| = \int_L 0 \, |dr| = 0\,.$$

Következésképpen, az origót belsejükben tartalmazó normál térrészek határaira vonatkozó cirkuláció is nulla, vagyis a cirkuláció *minden* normál térrész határára vonatkozóan nulla. Ebből persze rögtön az is következik, hogy az örvénysűrűség *mindenütt*, így az origóban is nulla annak ellenére, hogy a rotáció az origóban nem létezik! Ez nyilván nem mond ellent a 3.15 Következménynek, hiszen ez csak olyan pontokban garantálja a két mennyiség azonosságát, melyekben az adott függvény folytonosan deriválható, ami v–re az origóban nem igaz, ahogy azt már megmutattuk.

Röviden tehát minden az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló kifele irányított zárt felletre vonatkozó fluxus 2π, az origóbeli forrássűrűség végtelen és *minden más* nulla.

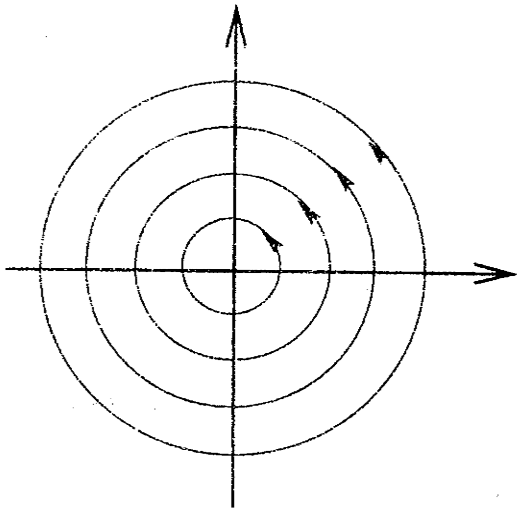
Tömören és szemléletesen mindazt, amit eddig elmondtunk a függvényről, fenti erővonalas ábrázolása foglalja össze. Tulajdonképpen amit csináltunk, az éppen ezen ábrázolás korrektségének vizsgálata volt formális eszközökkel. Egyrészt, a függvény forrássűrűsége az origó kivételével mindenütt nulla, ott pedig végtelen, így csak az origóban van forrása, tehát minden erővonal az origóból indul ki és sehol nem tűnik el. Továbbá persze definíciójából a függvény mindenütt r–irányú, tehát az erővonalak origón átmenő egyenesek. Másrészt, ami az erővonalak sűrűségét illeti, ez egy origóközéppontú R sugarú kör kerülete mentén azonos, mert itt $|v(r)| = \frac{1}{|r|} = \frac{1}{R}$ állandó. Mivel v sugárirányú, ez egyszersmind azt is jelenti, hogy a függvény nagysága nem változik irányára merőlegesen, ez pedig azzal a ténnyel együtt, hogy az erővonalak nem görbülnek, a tér mindenütt való cirkuláció és örvénysűrűség mentességét tükrözi.

3.4.2. Végtelen vezető mágneses tere

Legyen minden $r \neq 0$ esetén $w(r) = \dfrac{\mathrm{CROSS}(r)}{|r|^2}$ (az erőteret a túloldalon ábrázoltuk).
Ez a vektorfüggvény, mint erőtér a végtelen mágneses vezető terének síkmetszete, míg, mint áramlási tér egy középpont körül örvénylő folyadék áramlási tere.

Matematikailag a végtelen vezető mágneses terét leíró vektorfüggvény a ponttöltés erőterét leíró előző vektorfüggvény duálisa, pontosabban a végtelen vezető mágneses tere–ponttöltés erőtere, fluxus–cirkuláció, divergencia–rotáció, forrássűrűség–örvénysűrűség, v–CROSS(v) duális fogalompárok.

$$\text{Legyen} \quad v(r) = \frac{r}{|r|^2}\,. \quad \text{Ekkor} \quad w(r) = \mathrm{CROSS}(v(r))\,,$$



így w és v nagysága mindenütt megegyezik, valamint erővonalaik egymás ún. **orthogonális trajektóriái**, azaz mindenütt merőlegesek egymásra. Továbbá, $w(r) = \mathrm{CROSS}(v(r))$ a fenti 3.3 d. pontbeli összefüggések felhasználásával a következőkre vezet:

$$\operatorname{div} w = \operatorname{div} \mathrm{CROSS}(v) = -\operatorname{rot} v \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} w = \operatorname{rot} \mathrm{CROSS}(v) = \operatorname{div} v\,.$$

Így a ponttöltés erőterét leíró $v = v(r)$ vektorfüggvényre kapott fenti eredmények felhasználásával az adódik, hogy div $w = 0$ (ahogy az erővonalak zártságából leolvasható) és rot $w = 0$ az origó kivételével mindenütt. Ezekből következően a forrássűrűség az origó kivételével mindenütt és Gauss-Osztrogradszkij tétellel a fluxus minden az origót belsejében nem tartalmazó normál térrészt határoló felületre vonatkozóan nulla. Továbbá az örvénysűrűség az origó kivételével mindenütt nulla és minden olyan görbére vonatkozó cirkuláció is nulla, mely az origót belsejében nem tartalmazó normál térrész határa. Végül, mivel $\mathrm{CROSS}(\mathrm{CROSS}(v)) = -v$, a felületmenti és görbementi integrálok közötti összefüggés (1.24 Megjegyzés) és az a. pontbeli eredmény felhasználásával az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló kifele irányított F felületre vonatkozó fluxus nulla, hiszen $F = -L$-el:

$$\int_F w\, df = \int_L \mathrm{CROSS}(w)\, dr = \int_L \mathrm{CROSS}(\mathrm{CROSS}(v))\, dr = \int_L -v\, dr = 0$$

és az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló pozitívan irányított L zárt görbére vonatkozó cirkuláció 2π, mert ugyanúgy, ahogy az előbb:

$$\int_L w\, dr = -\int_F \mathrm{CROSS}(w)\, df = -\int_F \mathrm{CROSS}(\mathrm{CROSS}(v))\, df = -\int_F -v\, df = 2\pi\,,$$

amiből persze (az a. pontban alkalmazott gondolatmenethez hasonló módon) az is adódik, hogy az origóban a forrássűrűség nulla, az örvénysűrűség pedig végtelen.

Összefoglalva tömören az mondható, hogy minden az origót belsejében tartalmazó normál térrészt határoló pozitívan irányított zárt görbére vonatkozó cirkuláció 2π, az origóbeli örvénysűrűség végtelen és *minden más* nulla.

Természetesen fordítva is csinálhattuk volna, a w-re vonatkozó eredményeket közvetlen számolással is megkaphattuk volna, ahogyan azt a v esetében tettük és aztán a v-t jellemző adatokat a dualitást használva számíthattuk volna ki, ahogy azt most a w esetében tettük.

Még egy tényre érdemes a figyelmet felhívni. Ahogy láttuk, w örvénysűrűsége az origó kivételével mindenütt nulla, annak ellenére, hogy w *sehol sem homogén irányú*, azaz erővonalai mindenütt görbülnek! Nos, bár azt már a 2. fejezetben láttuk, hogy az örvénysűrűség lehet nullától eltérő homogén irányú vektorfüggvény esetén is (azaz akkor is, ha az erővonalak nem görbülnek), a fordított esetre még nem láttunk példát. A magyarázat az, hogy bár w erővonalai görbülnek, w nagysága azonban *irányára merőlegesen* változik, amiről már láttuk (éppen azokban a 2. fejezetben szereplő példákban, melyekre most hivatkoztunk), hogy szintén cirkulációt okoz. Nomármost, w esetében a két hatás éppen semlegesíti, kioltja egymást, amekkora pozitív örvénylést az erővonalak görbültsége okoz, éppen akkora negatív örvénylést vált ki sugár irányú ritkulásuk.

3.5 Az integráltételek alkalmazásai

3.5.1. Egyéb integráltételek

3.17 Tétel (Green–tételek)
Legyen $V \subseteq \mathbf{R}^2$ normál térrész, melynek határa az F kifelé irányított felület és u, $v \in C_2(V)$ tetszőleges kétváltozós függvények, melyeknek az F felületi normális irányú iránymenti deriváltjai $\frac{\partial v}{\partial n}$ ill. $\frac{\partial v}{\partial n}$. Ekkor

(1) (Antiszimmetrikus Green-formula)

$$\int_V (u\Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)\, dV = \int_F u \frac{\partial v}{\partial n}\, df\,.$$

(2) (Szimmetrikus Green-formula)

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \int_F (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\, df\,.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel nyilván az antiszimmetrikus Green-formulából az eredeti és az u–v szerepcserével kapott formula különbségeként adódik a szimmetrikus formula, elég az antiszimmetrikus formulát bizonyítani. Legyen

$$w = u \operatorname{grad} v\,.$$

Ekkor

$$\operatorname{div} w = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = u \operatorname{div} \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v$$

Másrészt w–nek n–re, az F egységnormálisára eső vetülete:

$$w_n = w \cdot n = (u \operatorname{grad} v) \cdot n = u(\operatorname{grad} v \cdot n) = u\frac{\partial v}{\partial n}\,.$$

Így Gauss–Osztrogradszkij tétellel:

$$\int_V (u\Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)\, dV = \int_V \operatorname{div} v\, dV = \int_F w\, df = \int_F w_n\, df = \int_F u\frac{\partial v}{\partial n}\, df\,.$$

Érdekes módon azonos alakú integrálátalakító tételek vonatkoznak a deriváltoperátor mindkét invariánsára és a gradiensre is. Az elsővel persze már találkoztunk.

3.18 Tétel (Gauss–Osztrogradszkij tipusú tételek)
Ha $V \subseteq \mathbf{R}^2$ normál térrész, melynek határa az F kifelé irányított felület, $u : V \to \mathbf{R}$ és $v : V \to \mathbf{R}^2$, továbbá u, $v \in C_1(V)$ tetszőlegesek, akkor

(1) (I. Gauss–Osztogradszkij tétel)

$$\int_V \operatorname{div} v\, dV = \int_F v\, df$$

(2) (II. Gauss–Osztogradszkij tétel)

$$\int_V \operatorname{rot} v\, dV = -\int_F \operatorname{CROSS} v\, df$$

(3) (Gradiens tétel)

$$\int_V \operatorname{grad} u \, dV = \int_F u \, df .$$

BIZONYÍTÁS. (1)-et már bizonyítottuk, ez a Gauss-Osztogradszkij tétel (3.5 Tétel). Ami (2)-t illeti az 1.24 Megjegyzésből Stokes-tétellel a következő adódik ($L = -F$):

$$\int_F \mathrm{CROSS}\, v \, df = -\int_L v \, dr = -\int_V \operatorname{rot} v \, dV .$$

Végül (3) bizonyításához legyen $c \in \mathbf{R}^2$ tetszőleges konstans vektor. Mivel ekkor

$$\operatorname{div}(c u) = u \operatorname{div} c + c \cdot \operatorname{grad} u = c \cdot \operatorname{grad} u ,$$

hiszen $\operatorname{div} c = 0$, így Gauss-Osztogradszkij tétellel:

$$(*) \qquad c \cdot \int_F u \, df = \int_F c u \, df = \int_V \operatorname{div}(c u) \, dV = \int_V c \cdot \operatorname{grad} u \, dV = c \cdot \int_V \operatorname{grad} u \, dV .$$

És ezzel készen is vagyunk, hiszen

$$\int_F u \, df , \int_V \operatorname{grad} u \, dV \in \mathbf{R}^2$$

és (*)-gal $\mathbf{R}^2$ bármely orthonormált $e = (e_1, e_2)$ bázisa esetén

$$\int_F u \, df \text{ és } \int_V \operatorname{grad} u \, dV$$

e-beli oszlopvektorai megegyeznek.

Pontosan ugyanolyan módon, ahogyan a 3.7 Következményben a az I. Gauss-Osztrogradszkij tétel segítségével a divergenciára egy sűrűség-jellegű összefüggést bizonyítottunk, kaphatunk a II. Gauss-Osztogradszkij tétel és a gradiens tétel alapján a rotációra és a gradiensre egy-egy hasonló összefüggést. (Érdemes elgondolkodni azon, hogy a gradiens esetén mi ennek a szemléletes tartalma. A divergencia és a rotáció esetén ez a szemléletes tartalom következik az eddig elmondottakból.) Az alábbi állításba a teljesség kedvéért belefoglaltuk a 3.7 Következményben már bizonyított összefüggést is.

3.19 Következmény (Ignatowsky-féle definiciók)

Legyen $r_0 \in G \subseteq \mathbf{R}^n$ tetszőleges nyílt halmaz, $v : G \to \mathbf{R}^2$ és $u : G \to \mathbf{R}$ folytonosak. Ha a (V_k) r_0-ra zsugorodó $\mathbf{R}^2$-beli normál térrészek tetszőleges olyan sorozata, melyre minden $k \in \mathbf{N}$ esetén $V_k \subseteq G$ határa a kifelé irányított zárt F_k felület, akkor

$$\operatorname{div} v \big|_{r_0} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v \, df$$

$$\operatorname{rot} v \big|_{r_0} = -\lim_{k \to \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} \mathrm{CROSS}(v) \, df$$

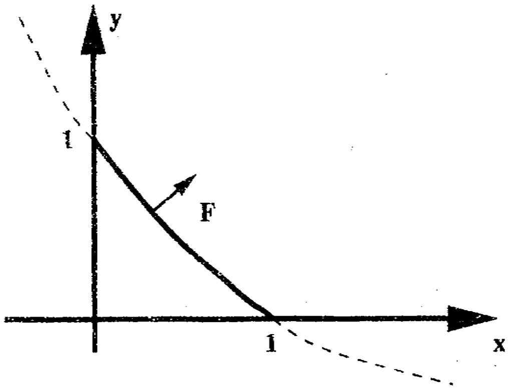
$$\operatorname{grad} u \big|_{r_0} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} u \, df$$

3.5.2. Felület- és vonalmenti integrálok számítása

Mivel a fő integráltételek és fent tárgyalt következményeik integrálok között állapítanak meg összefüggéseket, természetesen sok esetben jól alkalmazhatóak integrálok kiszámítására. Ezt az alábbiakban néhány egyszerű példán keresztül mutatjuk meg.

3.20 Példák

(1) Legyen $v(x, y) = (x, -y)$ és F az a felső félsíkba irányított felület, melynek implicit egyenlete: $y = \dfrac{2}{x+1} - 1 , 0 \le x \le 1$:



Számítsuk ki az $\int_F v\, df$ integrált!

MEGOLDÁS.

Minthogy $\operatorname{div} v = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial -y}{\partial y} = 1 - 1 = 0$, ha F' az a felület, melyet úgy kapunk, hogy F–et kiegészítjük a megfelelően irányított $S_1 = \overline{OP_1}$ és $S_2 = \overline{OP_2}$ szakaszokkal, ahol $O = (0,0)$, $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (0,1)$, akkor az F' által határolt V háromszöglapra és a kifele irányított F'–re alkalmazható a Gauss–Osztrogradszkij tétel, így

$$\int_F v\, df + \int_{S_1} v\, df + \int_{S_2} v\, df = \int_{F'} v\, df = \int_V \operatorname{div} v\, dV = 0$$

$$\text{tehát} \quad \int_F v\, df = -\int_{S_1} v\, df - \int_{S_2} v\, df\,.$$

Másrészt azonban $\int_{S_1} v\, df = \int_{S_2} v\, df = 0$, mert S_1 mentén $v = (x, 0)$, ami x irányú, azaz S_1 normálisára merőleges, valamint ugyanígy S_2 mentén $v = (0, -y)$, ami y irányú, azaz S_1 normálisára merőleges. Vagyis

$$\int_F v\, df = -\int_{S_1} v\, df - \int_{S_2} v\, df = 0\,.$$

(2) Legyen $v(r) = r\, e^{r^2}$ és L az $r = r(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ egyenletű ellipszis (a, b pozitív valós számok). Számítsuk ki az $\int_L v\, dr$ integrált!

MEGOLDÁS.

Ha $r \neq 0$, akkor

$$\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} r\, e^{r^2} = e^{r^2} \operatorname{rot} r - \operatorname{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad} e^{r^2} = 0 - 0 = 0\,.$$

Valóban, egyrészt $\operatorname{rot} r = 0$. Másrészt persze $r^2 = |r|^2$ és így $(r^2)' = 2\,|r| \frac{r}{|r|} = 2\,r$, tehát

$$\operatorname{grad} e^{r^2} = (e^{r^2})' \operatorname{grad} |r| = 2\,|r|\, e^{r^2} \frac{r}{|r|} = 2\, r\, e^{r^2}\,,$$

azaz a $\operatorname{grad} e^{r^2}$ vektor r irányú így (mivel r merőleges $\operatorname{CROSS}(r)$–re) $\operatorname{grad} e^{r^2}$ merőleges $\operatorname{CROSS}(r)$–re, vagyis $\operatorname{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad} e^{r^2} = 0$.

Ha tehát a Stokes tételt alkalmazzuk L–re és az általa határolt F ellipszislapra, akkor

$$\int_L v\, dr = \int_F \operatorname{rot} v\, dV = \int_F 0\, dV = 0\,.$$

(3)(a) Legyen $V \subseteq \mathbf{R}^2$ normál térrész, melynek határa az F kifelé irányított felület. Legyen $|V| = V_0$.

$$\int_F r\,df = ?$$

(b) Legyen $F \subseteq \mathbf{R}^2$ normál térrész, melynek határa az L pozitívan irányított görbe. Legyen $|F| = F_0$.

$$\int_L \mathrm{CROSS}(r)\,dr = ?$$

MEGOLDÁS.

(1) $$\int_F r\,df = \int_V \operatorname{div} r\,dV = \int_V 2\,dV = 2\int_V dV = 2|V| = 2V_0$$

(2) $$\int_L \mathrm{CROSS}(\mathrm{r})\,dr = \int_F \operatorname{rot}\mathrm{CROSS}(r)\,dV = \int_F \operatorname{div} r\,dV = \int_F 2\,dV = 2\int_F dV = 2|F| = 2F_0$$

3.6 Potenciálelmélet elemei

Eddig nyilvánvalóan az egyváltozós függvények *határozott* integráljának fogalmát általánosítottuk vektorfüggvényekre. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy az egyváltozós függvények integrálszámításában fontos szerepet játszó másik két alapfogalom, a primitív függvény és az integrálfüggvény általánosítható–e vektorfüggvényekre, van–e ezeknek is megfelelőjük a vektorfüggvények között. Ahogyan hamarosan látni fogjuk, ez az általánosítás lehetséges és ugyanúgy, ahogyan az egyváltozós függvények esetén, a vektorfüggvények körében is az integrálszámítás és a differenciálszámítás megfordítása, azaz a primitív függvény keresés közötti összefüggés analóg az egyváltozós függvények körében megismert, az integrálfüggvény által létesített kapcsolattal. Az alábbiakban ezt a viszonyt fogjuk vizsgálni.

A potenciál a primitív függvény fogalmának vektorfüggvényekre való általánosítása. A pontos definíció után a potenciál létezésének és egyértelműségének feltételeit vizsgáljuk. Ennek a vizsgálatnak eredményeképpen megfogalmazzuk az egyváltozós integrálszámítás alapvető eredményeinek vektorfüggvényekre vonatkozó megfelelőit, többek között a Newton–Leibniz formula egy lehetséges általánosítását, majd két egyszerű módszert mutatunk arra, hogyan lehet meghatározni a potenciált. Ezután a 3.4 pontban szereplő központi jelentőségű vektorfüggvények leírását egészítjük ki a potenciáljukra vonatkozó eredményekkel, végül egy, a differenciálegyenletek körébe eső alkalmazást ismertetünk. Minthogy deriválhatóságot csak belső pontban, integrálhatóságot csak összefüggő halmazon értelmeztünk, természetesen vizsgálatainkban nyílt és összefüggő halmazokra szorítkozunk. Végül az integrálhatóságot biztosítandó, a potenciállal kapcsolatos kérdéseket vizsgálatát a folytonos függvények körére korlátozzuk.

3.21 Definíció

Legyen $n \geq 1$ egész, $G \subseteq \mathbf{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz és $v : G \to \mathbf{R}^n$. Az $u : G \to \mathbf{R}$ skalárfüggvényt v vektorfüggvény G–beli **(skalár)potenciáljának** nevezzük, ha u deriválható G–n és itt $\operatorname{grad} u = v$.

3.6.1 Egzisztencia és unicitás

Az egyváltozós függvények integrálszámításában a két központi szerepet betöltő fogalmat, a primitív függvényt és a határozott integrált az integrálfüggvény fogalma kapcsolja össze. Kézenfekvő, hogy az egyváltozós függvények integrálfüggvénye, "az integrál, mint a felső határ függvénye" fogalmának megfelelőjét a vonalintegrálban keressük, hiszen az egyváltozós integrál is tulajdonképpen skalárfüggvénynek a valós számegyenes menti vonalintegrálja. Az egyváltozós esettől eltérően azonban a síkon – valamely rögzített kezdőpont esetén is – egy adott végpontba sokféleképpen, sok görbe mentén integrálhatunk és ezek az integrálok egymástól különbözhetnek. Ha fent, a bevezető megjegyzésekben megfogalmazott feltevésünk helyes és az integrálfüggvény potenciált határoz meg, akkor azonban az integrál nem függhet attól, milyen görbe mentén integrálunk egy adott végpontba, hisz a potenciál csak ettől az adott ponttól függ. Nos, az alábbiakban megmutatjuk, hogy ez tényleg így is van. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy "az integrál nem függ az integrálási úttól". Ezt a tulajdonságot szokás *pontatlanul* úgy átfogalmazni, hogy "zárt görbéken a vonalmenti integrál nulla". Nyilvánvaló, hogy ez a két feltétel valóban összefügg, sőt bizonyos feltételek esetén ekvivalensek is (ezt rögtön látni fogjuk), azonban ekvivalenciájuk teljes általánosságban való vizsgálata mindenképpen meghaladja annak a fogalmi apparátusnak kereteit, mely tárgyalásunk alapját képezi (lásd a 3.25 Megjegyzést és a 3.7.1 pontbeli (1) feladatot). A zárt görbékre vonatkozó állítások esetén csak a nem túl bonyolult szerkezetű, a "természetes" görbefogalomnak leginkább megfelelő egyszerű ívekre szorítkozunk (vö. a 3.7.1 pont (2) feladattal), ezért megismételjük az egyszerű ívnek az 1.26 (10) feladatban szereplő definícióját. Az egyszerű ívvel kapcsolatos legfontosabb állításokat az 1.26 (9),(10),(11),(12) és (14) feladatok tartalmazzák. Ezek közül számunkra a leglényegesebb az, amit – kissé pontatlanul – úgy fogalmazhatunk meg, hogy egy egyszerű ív vagy elemi ív vagy a két végén "összeforrasztott" elemi ív, azaz formálisan: ha L egy $r = r(t)\,,\ t \in [a,b]$ egyenletű egyszerű ív, akkor

(1) L csak akkor elemi ív ha nem zárt,

(2) L akkor és csak akkor zárt ha $r(a) = r(b)$.

3.22 Definíció

(1) Ha az L görbe $r = r(t)\,,\ t \in [a,b]$ egyenlete olyan, hogy minden $a < c < b$ esetén az r–nek mind az $[a,c]$–re mind a $[c,b]$–re való megszorítása által definiált görbe elemi ív, akkor L–et **egyszerű ívnek** nevezzük.

(2) Legyen $r = r(t)\,,\ t \in [a,b]$ az L görbe egyenlete. $r(a)$–t L **kezdőpontjának**, $r(b)$–t L **végpontjának** nevezzük.

3.23 Megjegyzés

(1) Nyilván minden elemi ív egyszerű ív is.

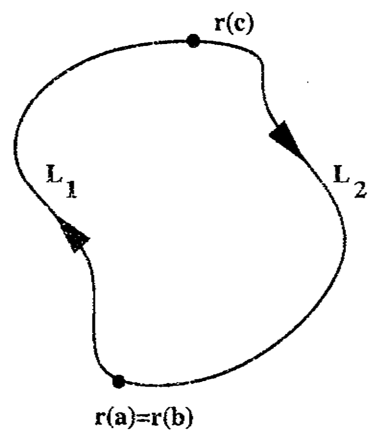
(2) $-L$ kezdőpontja L végpontjával és $-L$ végpontja L kezdőpontjával azonos.

Valóban, legyen L egyenlete $r = r(t)\,,\ t \in [a,b]$. Ekkor az 1.13 (2)(c) definíció alapján $-L$ egyenlete $s = s(t) = r(-t)\,,\ t \in [-b,-a]$. Következésképp, $-L$ kezdőpontja $s(-b) = r(-(-b)) = r(b)$, azaz L végpontja. Másrészt, $-L$ végpontja $s(-a) = r(-(-a)) = r(a)$, vagyis L kezdőpontja.

3.24 Állítás

Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^2$ nyílt, öszefüggő halmaz és $v : G \to \mathbf{R}^2$ folytonos vektorfüggvény. Ha v görbementi integrálja minden G-be eső két pont közötti G-beli görbe esetén csak a kezdő- és végpontoktól függ, a görbe választásától nem, akkor v görbementi integrálja minden G-be eső zárt egyszerű íven nulla.

BIZONYÍTÁS. Legyen L az $r = r(t)\,,\ t \in [a,b]$ egyenlettel definiált zárt egyszerű ív és legyen $c \in (a,b)$ tetszőleges. Legyenek L_1 és L_2 az r–nek $[a,c]$–re ill. $[c,b]$–re való megszorítása által definiált görbék.



Mivel L zárt, $r(a) = r(b)$ (lásd a 1.26 (10)(b) feladatot). Következésképp, L_1 és $-L_2$ azonos kezdő– és végpontokkal rendelkeznek, hiszen L_1 kezdőpontja $r(a) = r(b)$, ami L_2 végpontjával, azaz $-L_2$

kezdőpontjával esik egybe, míg L_1 végpontja $r(c)$ s ez azonos L_2 kezdőpontjával, azaz $-L_2$ végpontjával. Emiatt a feltétellel az adódik, hogy

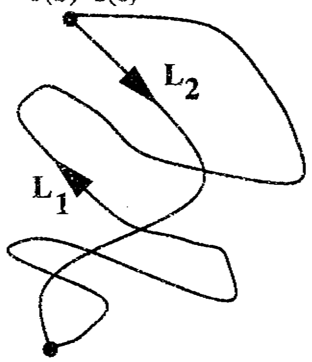
$$\int_{L_1} v\, dr = \int_{-L_2} v\, dr = -\int_{L_2} v\, dr\,.$$

Vagyis, felhasználva az integrálnak felosztásokra nézve additív voltát (1.22 (1)(b) Állítás),

$$\int_L v\, dr = \int_{L_1} v\, dr + \int_{L_2} v\, dr = 0\,.$$

3.25 Megjegyzés

A bizonyítás alapján könnyen látható, hogy az állítás megfordítását miért nem lehet olyan könnyen bizonyítani, mint magát az állítást. Nem biztos ugyanis, hogy, két azonos pontot összekötő görbe egymáshoz csatolása (ehhez a fogalomhoz lásd a 1.26 (11) feladatot) görbét eredményez. Ez még akkor sem igaz, ha a görbék elemi ívek:



Az alábbi tétel a Newton-Leibniz tétel vonalintegrálokra való általánosítása:

3.26 Tétel

Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^2$ tetszőleges nyílt, összefüggő halmaz és $v : G \to \mathbf{R}^2$ folytonos vektorfüggvény. Tegyük fel, hogy v-nek létezik G-n potenciálja. Ekkor v görbementi integrálja minden G-be eső két pont közötti G-beli görbe esetén csak a kezdő- és végpontoktól függ, a görbe választásától nem, mégpedig tetszőleges G-beli p és q pontok esetén minden G-be eső olyan L görbére, melynek kezdőpontja p, végpontja pedig q, fennáll, hogy

$$\int_L v\, dr = u(q) - u(p)$$

BIZONYÍTÁS. Legyen v potenciálja G-n u és legyen L olyan p kezdő- és q végpontú G-beli görbe, melynek egyenlete $r = r(t)\,,\ t \in [a,b]$. Mivel r szakaszonként folytonosan deriválható, $[a,b]$ előáll olyan közös belső pont nélküli $[a_i,b_i]\,,\ 1 \le i \le n$ zárt intervallumok uniójaként, melynek mindegyikének belsején r folytonosan deriválható. Ezek a részintervallumok L-nek egy felosztását definiálják (lásd az 1.21(3) definíciót). Vizsgáljuk meg v görbementi integrálját ezen felosztás egy L_i elemén. Felhasználva, hogy a láncszabály alkalmazásával

$$\frac{d}{dt}u(r(t)) = \operatorname{grad} u \cdot \dot r(t) \qquad \text{minden} \qquad t \in (a_i,b_i) \quad \text{esetén,}$$

a görbementi integrál definíciója és a Newton–Leibniz formula alapján ($u \circ r \in C[a_i,b_i]$):

$$\int_{L_i} v\, dr = \int_{L_i} \operatorname{grad} u\, dr = \int_{a_i}^{b_i} \operatorname{grad} u(r(t)) \cdot \dot r(t)\, dt = \int_{a_i}^{b_i} \frac{d}{dt}u(r(t))\, dt = u(r(b_i)) - u(r(a_i))\,.$$

A bizonyítandó állítás ebből már közvetlenül adódik, mert az integrál felosztásokra nézve additív (lásd az 1.22 (1)(b) állítást) és persze

$$a_1 = a\,,\, b_n = b \quad \text{és} \quad a_{i+1} = b_i\,,\, 1 \le i \le n-1\,,$$

tehát

$$\int_L v\, dr = \sum_{i=1}^{n} \int_{L_i} v\, dr = \sum_{i=1}^{n} \big(u(r(b_i)) - u(r(a_i))\big) = u(r(b)) - u(r(a)) = u(q) - u(p)$$

hiszen a fenti utolsó összegben $u(r(b))$ és $u(r(a))$ kivételével minden tag kétszer szerepel ellenkező előjellel.

A tétel következményeképpen adódik az egyváltozós függvényekre vonatkozó "az integrálfüggvény primitív függvény" és "primitív függvények nyílt intervallumokon csak konstansban különbözhetnek" állítások megfelelői vektorfüggvényekre: "a vonalintegrál potenciál" és "potenciálok nyílt összefüggő halmazokon csak konstansban különbözhetnek":

3.27 Következmény

Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^2$ tetszőleges nyílt, összefüggő halmaz és $v : G \to \mathbf{R}^2$ folytonos vektorfüggvény.

(1) *Ha v-nek van potenciálja G-n, akkor v tetszőleges G-beli rögzített kezdőpontú görbére vett görbementi integrálja, mint végpontjának függvénye megadja v-nek egy potenciálját G-n.*

(2) *v potenciáljai G-n csak konstansban különbözhetnek.*

BIZONYÍTÁS.
Legyen v egy G-beli potenciálja u és $p \in G$ tetszőleges rögzített. G nyílt és összefüggő halmaz, tehát (a fejezet végén szereplő) 3.7.1 pont (3) feladat alapján

(*) tetszőleges $r \in G$ esetén van p kezdő- és r végpontú G-beli görbe.

Másrészt, az előző tétel szerint, v-nek bármely G-beli p kezdő- és r végpontű görbén vett görbementi integrálja rögzített p esetén csak r-től függ. Ha ezt az integrált, mint r függvényét $w = w(r)$-el jelöljük, akkor tehát (*) miatt w értelmezve van az egész G-n. Az előző tétel alapján $w(r) = u(r) - u(p)$ és (mivel $u(p)$ nem függ r-től, azaz konstans) u-val együtt w is deriválható és $\operatorname{grad} w = \operatorname{grad} u = v$. Ezzel (1)-et beláttuk. Ami (2)-t illeti, ha az u^* is v potenciálja G-n, akkor (*) alapján az előző tételből az adódik, hogy bármely $r \in G$ esetén

$$u^*(r) - u^*(p) = \int_L v\, dr = u(r) - u(p)\,,$$

vagyis

$$u^*(r) - u(r) = u^*(p) - u(p) = \text{const.}$$

Az alábbi tétel eddigi eredményeinket foglalja össze a potenciál létezésére vonatkozó szükséges feltételek megadásával:

3.28 Tétel

Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^2$ tetszőleges nyílt, összefüggő halmaz és $v : G \to \mathbf{R}^2$ folytonos vektorfüggvény. Ekkor az alábbi állítások mindegyike következik az elsőből:

(1) *v-nek van potenciálja S-en.*

(2) *v görbementi integrálja minden G-be eső két pont közötti G-beli görbe esetén csak a kezdő- és végpontoktól függ, a görbe választásától nem*

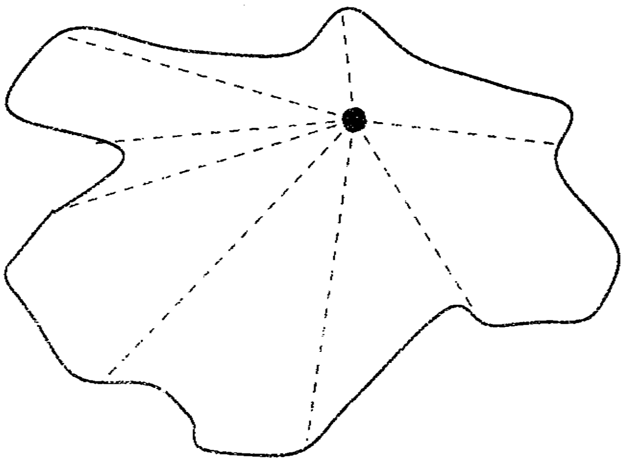
(3) *v görbementi integrálja minden G-be eső zárt egyszerű íven nulla.*

(4) $\operatorname{rot} v = 0$ *az egész G-n amennyiben $v \in C_1(G)$.*

BIZONYÍTÁS.
(1) $\Longrightarrow$ (2): 3.26 Tétel.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 3.24 Állítás.
(1) $\Longrightarrow$ (4): $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$ G-n (lásd a 3.3 f. pontbeli (1) összefüggést).

A kérdés mostmár természetesen az, hogy vajon a 3.28 Tétel megfordítható-e, pontosabban a potenciál létezésére vonatkozó, a tételben megfogalmazott szükséges feltételek közül melyek és milyen feltételek esetén elégségesek is egyben. Mivel a 3.27 Következmény szerint ha létezik potenciál, akkor (konstans erejéig) a potenciál vonalintegrál, tehát ha potenciált akarunk találni, mindenképpen valahogyan a vonalintegrál segítségével kell definiálnunk egy skalárfüggvényt. Ez nyilván csak akkor tehető meg, ha az integrál nem függ a görbe választásától. Ekkor azonban elég a legegyszerűbben kezelhető görbék, azaz az egyenes szakaszok mentén integrálni. Másrészt, ha csak az adott pontokat összekötő szakaszokra szorítkozunk, akkor az így kapott számok valóban csak a a kezdő- és végpontoktól függenek, tehát rögzített kezdőpont esetén az egyenesszakaszmenti integrál minden ponthoz egyértelműen hozzárendel egy skalárt. Az így definiált függvénynek a fentiek szerint potenciálnak kell lennie – ha létezik egyáltalán potenciál. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha a görbementi integrál független a görbe választásától, akkor az egyenes szakasz menti integrál, mint végpontjának függvénye potenciál. Ezt az egyváltozós esettel analóg módon lehet belátni. (Érdekes módon, a görbétől való függetlenség feltételében nem is kell az összes lehetséges görbe menti integrált figyelembe venni, hanem – ahogy majd az alábbi tétel bizonyításában látni fogjuk – elég csak a háromszögek élei mentén való integrálásra szorítkozni.) Mivel egyenes szakaszok mentén vett integrállal definiált függvényt természetesen csak olyan halmazon lehet értelmezni, ahol található olyan rögzített pont, melyből minden halmazbeli pontba vezet a halmazon belül egyenes szakasz, azaz ahonnan minden halmazbeli pont "látható", a bizonyításban ilyen tulajdonságú nyílt halmazokra, ún. csillagszerű tartományokra szorítkozunk:



Most megadjuk a fent vázolt bizonyításhoz szükséges fogalmak pontos meghatározását:

3.29 Definíció

Legyen n tetszőleges pozitív egész.

(1) Legyenek p, $q \in \mathbf{R}^n$ tetszőlegesek, $p \neq q$. Az $r = r(t) = p + t(q-p)$, $t \in [0,1]$ egyenlettel definiált görbét a **p–t és q–t összekötő szakasznak** nevezzük, és $[p,q]$–val jelöljük. Egy ponthármasról azt mondjuk, hogy **egy egyenesbe esnek**, ha van olyan szakasz, mely mindhármat tartalmazza.

(2) A $T \subseteq \mathbf{R}^n$ görbét **háromszögnek** nevezzük, ha vannak olyan nem egy egyenesbe eső p_1, p_2, $p_3 \in \mathbf{R}^n$ pontok, hogy a $[p_1,p_2]$, $[p_2,p_3]$ és $[p_3,p_1]$ szakaszok T egy lefedését adják. p_1, p_2 és p_3 a háromszög **csúcsai**, a lefedő szakaszok pedig a háromszög **oldalai**.

(3) Az $S \subseteq \mathbf{R}^n$ nyílt halmazt **csillagszerű tartománynak** nevezzük, ha van olyan $s \in S$, hogy minden $x \in S$ esetén $[s,x] \subseteq S$. Egy ilyen s pontot S **csillagpontjának** nevezünk.

Csillagszerü tartomány például az egész sík, bármely félsík és körlap, általában minden konvex halmaz, de ilyen például az a nem konvex halmaz is, melyet úgy kapunk, hogy valamelyik síknegyedet elhagyjuk a síkból. Másrészt nem csillagszerű tartomány például a körgyűrű.

3.30 Jelölés

$$\int_p^q v\,dr = \int_{[p,q]} v\,dr \quad \text{ha} \quad p \neq q \quad \text{és} \quad \int_p^p v\,dr = 0\,.$$

Most a szakaszoknak, háromszögeknek és csillagszerű tartományoknak azokat a szemléletesen nyilvánvaló és formálisan is definíciójukból közvetlenül bizonyítható elemi tulajdonságait fogalmazzuk meg, melyeket a későbbiekben fel fogunk használni.

3.31 Megjegyzések

(1)(a) Szakasz definíciója alapján nyilvánvalóan minden szakasz elemi ív.

(b) A 3.23 (2) megjegyzésből adódóan

$$-[p,q] = [q,p]\,, \quad \text{így} \quad \int_q^p v\,dr = -\int_p^q v\,dr\,.$$

(2)(a) A normáltartomány definícióját használva egyszerű analitikus síkgeometria feladat annak ellenőrzése, hogy minden háromszög normál térrész (speciálisan normáltartomány) határa (lásd a 3.7.1 pont (6) feladatot alább).

(b) Az 1.26 (11) és (10)(b) feladatok következményeképpen minden háromszög zárt egyszerű ív.

(3) Alább a 3.7.1 pont (4) feladatban megmutatjuk, hogy minden csillagszerű tartomány egy háromszöggel együtt tartalmazza az általa határolt normáltartományt is.

(4) A definíciókra támaszkodva nagyon könnyű belátni (lásd a 3.7 pont (5) feladatot alább), hogy azonos kezdő- és végpontú szakaszok esetén mind az általuk lefedett halmazok, mind pedig a rajtuk vett integrálok azonosak, azaz ha az L_1 és L_2 szakaszok egyenletei $r_1 = r_1(t)\,,\ t \in [a_1, b_1]$ és $r_2 = r_2(t)\,,\ t \in [a_2, b_2]$, továbbá L_1 és L_2 kezdő- ill. végpontjai megegyeznek, akkor

$$\operatorname{Rg} r_1 = \operatorname{Rg} r_2$$

és

$$\int_{L_1} v\,dr = \int_{L_1} v\,dr \quad \text{bármely } \operatorname{Rg} r_1 = \operatorname{Rg} r_2\text{-n folytonos } v \text{ esetén.}$$

(5) Mivel (3) alapján tetszőleges háromszög *felosztható* olyan szakaszokra, melyeken a vonalmenti integrálok azonosak az oldalakon vett vonalmenti integrálokkal és három egy egyenesbe eső pont esetén a lefedett szakasz *felosztható* olyan szakaszokra, melyeken az integrál megegyezik a felosztás elemein vett integrállal, így az 1.22 (1)(b) állítás alapján háromszögeken és egy egyenesbe eső szakaszokon az integrál additív, azaz egyrészt bármely egy egyenesbe eső p_1, p_2, p_3 pont esetén

$$\int_{p_1}^{p_3} v\,dr = \int_{p_1}^{p_2} v\,dr + \int_{p_2}^{p_3} v\,dr\,,$$

másrészt ha valamely p_1, p_2, p_3 csúcsú háromszögön a vonalmenti integrál nulla, akkor

$$\int_{p_1}^{p_2} v\,dr + \int_{p_2}^{p_3} v\,dr + \int_{p_3}^{p_1} v\,dr = 0\,,$$

tehát (1)(b) miatt ekkor is

$$\int_{p_1}^{p_3} v\,dr = \int_{p_1}^{p_2} v\,dr + \int_{p_2}^{p_3} v\,dr\,.$$

(6) Az 1.26 (2)(b) és (11) feladatok következményeként (1)(a) alapján adódik, hogy csillagszerű tartomány összefüggő halmaz.

Fenti tények birtokában már könnyen megmutatható, hogy csillagszerű tartományon a 3.28 Tétel megfordítható:

3.32 Tétel

Legyen $S \subseteq \mathbf{R}^2$ csillagszerű tartomány és $v : G \to \mathbf{R}^2$ folytonos vektorfüggvény. Az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) *v–nek van potenciálja S-en.*

(2) *v görbementi integrálja minden G–be eső két pont közötti G–beli görbe esetén csak a kezdő- és végpontoktól függ, a görbe választásától nem.*

(3) *v görbementi integrálja minden S–be eső zárt egyszerű íven nulla.*

(4) $\operatorname{rot} v = 0$ *az egész S–en, amennyiben $v \in C_1(G)$.*

BIZONYÍTÁS.

A bizonyítás azon alapul, hogy megmutatjuk a tételben szereplő feltételek és az alábbi feltétel ekvivalens voltát:

(5) v görbementi integrálja minden S–beli háromszögön nulla.

(a) (5) $\Longrightarrow$ (1) Tegyük fel, hogy v görbementi integrálja minden S–beli háromszögön nulla. Legyen $p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{R}^2$ tetszőleges. Ekkor a 3.31 (5) megjegyzés alapján, akár egy egyenesen vannak ezek a pontok, akár nem, fennáll, hogy

$$(*) \qquad \int_{p_1}^{p_3} v\,dr - \int_{p_1}^{p_2} v\,dr = \int_{p_2}^{p_3} v\,dr$$

Megmutatjuk, hogy amennyiben S csillagpontja $s \in S$, akkor a minden $r \in S$ esetén értelmezett

$$u(r) = \int_s^r v\,dr$$

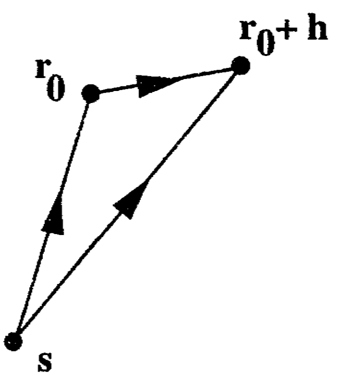
függvény potenciálja v–nek S–en. Azt kell tehát belátni, hogy tetszőleges $r_0 \in S$ esetén

$$\frac{u(r_0+h) - u(r_0) - v(r_0)\cdot h}{|h|} \longrightarrow 0 \quad \text{ha} \quad h \longrightarrow 0,$$

hiszen ez a definíció szerint pont azt jelenti, hogy $\operatorname{grad} u\big|_{r_0} = v(r_0)$.

(*)–ból

$$u(r_0+h) - u(r_0) = \int_s^{r_0+h} v\,dr - \int_s^{r_0} v\,dr = \int_{r_0}^{r_0+h} v\,dr$$



és $[r_0, r_0+h]$ egyenlete: $r(t) = r_0 + th$, $t \in [0,1]$, tehát $\dot r(t) = h$. Ezért

$$\int_{r_0}^{r_0+h} v(r_0)\,dr = \int_0^1 v(r_0)\cdot \dot r(t)\,dt = \int_0^1 v(r_0)\cdot h\,dt = (v(r_0))\cdot h)\int_0^1 dt = v(r_0)\cdot h,$$

következésképp,

$$u(r_0+h)-u(r_0)-v(r_0)\cdot h=\int_{r_0}^{r_0+h} v\,dr-\int_{r_0}^{r_0+h} v(r_0)\,dr=\int_{r_0}^{r_0+h}(v(r)-v(r_0))\,dr\,.$$

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. Mivel $v\in C(G)$, így van $\delta>0$, hogy $|v(r)-v(r_0)|<\varepsilon$, ha $|r-r_0|<\delta$, ezért $|v(r)-v(r_0)|<\varepsilon$, ha $r\in[r_0,r_0+h]$ és $|h|<\delta$ (hiszen ekkor $r=r_0+t\,h$ valamely $0\le t\le 1$-re, tehát $|r-r_0|=|t\,h|=|t|\,|h|\le|h|<\delta$). Mindezekkel

$$|u(r_0+h)-u(r_0)-v(r_0)\cdot h|=\left|\int_{r_0}^{r_0+h}(v(r)-v(r_0))\,dr\right|\le\int_{r_0}^{r_0+h}|v(r)-v(r_0)|\,|dr|<$$

$$<\int_{r_0}^{r_0+h}\varepsilon\,|dr|=\varepsilon\int_{r_0}^{r_0+h}|dr|=\varepsilon|h|\,,\quad \text{tehát}$$

$$\left|\frac{u(r_0+h)-u(r_0)-v(r_0)\cdot h}{|h|}\right|=\frac{|u(r_0+h)-u(r_0)-v(r_0)\cdot h|}{|h|}<\varepsilon\quad\text{ha}\quad |h|<\delta\,,$$

amit bizonyítanunk kellett.

(b) (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3): 3.28 Tétel és 3.24 Állítás.

(c) (3) $\Longrightarrow$ (5): 3.31 (2)(b) megjegyzés

Továbbá, ha $v\in C_1(G)$, akkor

(d) (1) $\Longrightarrow$ (4): 3.28 Tétel.

(e) (4) $\Longrightarrow$ (5): 3.31 (2)(a) megjegyzés és Stokes tétel.

3.6.2 Potenciálkeresés

Az alábbiakban két egyszerű példán keresztül ismertetünk két módszert, melyek segítségével a potenciál – ha létezik – könnyen meghatározható.

a) Parciális differenciálegyenletrendszer megoldása

Legyen

$$v=v(x,y)=(x(1+y^2),y(1+x^2))$$

az a vektorfüggvény, melynek potenciálját meg akarjuk határozni.

Mivel $\operatorname{rot}v=2xy-2xy=0$, így v-nek tényleg van potenciálja az egész síkon. Legyen u ez a potenciál. Ekkor $(v_1,v_2)=v=\operatorname{grad}u=(u_x,u_y)$ miatt a

(*) $$v_1=u_x\quad\text{és}\quad v_2=u_y$$

összefüggéseknek fenn kell állniok. Ezt az egyenletrendszert kell megoldanunk.

Induljunk ki például az

$$u_x=v_1=x(1+y^2)$$

egyenletből. Ekkor x szerint integrálva

(**) $$u=\tfrac{x^2}{2}(1+y^2)+c(y)$$

valamely $c=c(y)$ *csak* y-tól függő differenciálható függvényre. Ebből, v definíciójából és (*)-ból

$$y(1+x^2)=v_2=u_y=x^2y+c'(y)\,,$$

azaz $c'(y)=y$, tehát valamely c konstansra

$$c(y)=\tfrac{y^2}{2}+c\,,$$

amit visszahelyettesítve (**)-ba,

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + x^2y^2 + y^2) + c.$$

Ez az eredmény persze ellenőrizhető, valóban

$$\operatorname{grad} u = (u_x, u_y) = (x + xy^2, y + yx^2) = v.$$

Nyilván megtehettük volna, hogy először $u_y = v_2 = y(1+x^2)$-ből határozzuk meg u-t egy $c = c(x)$ erejéig, majd ebből az u-ból kiszámított u_x felhasználásával, az $u_x = v_2$ egyenlet segítségével adódó c' integrálása után kapjuk meg u végleges formáját.

Végül természetesen az eljárás *csak* akkor vezethet helyes eredményre, ha tényleg létezik potenciál. (Próbáljuk ki, mi adódik akkor, ha a $v = \mathrm{CROSS}(r)$ függvény ($\operatorname{rot} v = 2$ miatt sehol sem létező) potenciálját akarnánk meghatározni így!) Ugyanez igaz persze bármely, a potenciál meghatározására szolgáló eljárásra, így az alább ismertetendő módszerre is.

b) Origókezdőpontú szakasz menti vonalintegrál kiszámítása

Legyen n tetszőleges nemnegatív egész és

$$v = v(r) = r|r|^n$$

az a vektorfüggvény, melynek potenciálját meg akarjuk határozni.

Mivel ha $r \neq 0$, akkor $\operatorname{grad}|r|^n = n|r|^{n-1}\operatorname{grad}|r| = n|r|^{n-1}\frac{r}{|r|} = n|r|^{n-2}r$, azaz $\operatorname{grad}|r|^n \parallel r$, így $\mathrm{CROSS}(r) \perp r \parallel \operatorname{grad}|r|^n$. Ebből adódóan, felhasználva, hogy $\operatorname{rot} r = 0$, $\operatorname{rot} v = |r|^n \operatorname{rot} r - \mathrm{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad}|r|^n = 0$, Megmutatjuk, hogy v rotációja az origóban is nulla. Mivel $n = 0$ esetén $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} r = 0$ mindenütt, feltehetjük, hogy $n \geq 1$. Azt fogjuk bebizonyítani, hogy az origóban v deriváltoperátora nulla, amiből persze már közvetlenül adódik, hogy a deriváltoperátor antiszimmetrikus része és vele együtt annak vektorinvariánsa, tehát v rotációja is nulla. Definíció szerint a D operátor a v vektorfüggvény $r_0 \in \operatorname{Int}\operatorname{Do} v$-beli deriváltoperátora pontosan akkor, ha

$$h \longrightarrow 0 \quad \text{esetén} \quad \frac{v(r_0 + h) - v(r_0) - D\,h}{|h|} \longrightarrow 0.$$

A mi esetünkben, mivel $v(0) = 0|0|^n = 0$, ez annak megmutatását jelenti, hogy

$$\frac{v(0+h) - v(0) - 0\,h}{|h|} = \frac{v(h) - 0 - 0\,h}{|h|} = \frac{v(h)}{|h|} \longrightarrow 0.$$

Nos, $v(h) = h|h|^n$, így $n \geq 1$ miatt

$$\frac{v(h)}{|h|} = \frac{h|h|^n}{|h|} = h|h|^{n-1} \longrightarrow 0.$$

Beláttuk tehát, hogy $\operatorname{rot} v = 0$ mindenütt, következésképpen létezik az u potenciál az egész síkon. Határozzuk meg ezt egy olyan L szakasz mentén vett vonalintegrál segítségével, melynek kezdőpontja az origó, végpontja pedig r !

L egyenlete:

$$s = s(t) = t\,r\,,\ t \in [0,1]\,,$$

így $\dot{s}(t) = r$, tehát

$$u(r) = \int_0^r v\cdot dr = \int_0^1 v(s(t)) \cdot \dot{s}(t)\,dt = \int_0^1 s(t)|s(t)|^n \cdot \dot{s}(t)\,dt = \int_0^1 t\,r|tr|^n \cdot r\,dt =$$

$$= \int_0^1 t|t|^n|r|^n(r\cdot r)\,dt = |r|^n(r\cdot r)\int_0^1 t|t|^n\,dt = |r|^{n+2}\int_0^1 t^{n+1}\,dt = |r|^{n+2}\frac{t^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1 = \frac{|r|^{n+2}}{n+2}.$$

És valóban, mivel u az origó kivételével deriválható függvények összetett függvénye, láncszabállyal $r \neq 0$ esetén

$$\operatorname{grad}\frac{|r|^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{n+2}\operatorname{grad}|r|^{n+2} = \frac{1}{n+2}(n+2)|r|^{n+1}\operatorname{grad}|r| = |r|^{n+1}\frac{r}{|r|} = r|r|^n.$$

No de mi a helyzet az origóban? Megmutatjuk, hogy u ott is potenciál. $v(0) = 0|0|^n = 0$, tehát azt kell megmutatnunk, hogy u gradiense az origóban valóban nulla. A gradiens definíciója szerint a $g(r_0)$ vektor gradiense u-nak valamely $r_0 \in \mathbf{R}^2$ pontban akkor és csak akkor ha

$$h \longrightarrow 0 \quad \text{esetén} \quad \frac{u(r_0 + h) - u(r_0) - g(r_0) \cdot h}{|h|} \longrightarrow 0 .$$

Nomármost, legyen $r_0 = 0$ és $g(r_0) = 0$. Ekkor $u(r_0) = u(0) = \frac{1}{n+2}|0|^{n+2} = 0$, így

$$\frac{u(r_0 + h) - u(r_0) - g(r_0) \cdot h}{|h|} = \frac{u(0 + h) - u(0) - 0 \cdot h}{|h|} = \frac{u(h) - 0 - 0}{|h|} =$$

$$= \frac{u(h)}{|h|} = \frac{\frac{1}{n+2}|h|^{n+2}}{|h|} = \frac{1}{n+2}|h|^{n+1}$$

és persze $n \geq 0$ miatt tényleg

$$\frac{1}{n+2}|h|^{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{ha} \quad h \longrightarrow 0 ,$$

ami fentiekkel pont azt jelenti, hogy

$$\operatorname{grad} u\Big|_0 = 0 = v(0) .$$

Hangsúlyozni kell, hogy a módszer *csak* akkor vezet *biztosan* helyes ereményre, ha az origó csillagpontja a tartománynak, melyen a potenciál létezését garantáló 3.32 Tétel feltételei fennállnak (tehát, többek között, a vizsgált függvény folytonos), hiszen az origókezdőpontú szakaszon vett integrál csak azon r pontokban adja meg a potenciált, melyhez van olyan r végpontú origókezdőpontú szakasz, mely teljesen a tartományba esik. Másrészt persze előfordulhat, hogy ez a feltétel nem áll fenn és a módszerrel kapott eredmény mégis helyes. Ezt nyilván közvetlen deriválással egyszerűen ellenőrizhetjük.

Természetesen az origókezdőpontú szakasz mellett bármely olyan más görbe típus, melyen egyszerű integrálni felhasználható arra, hogy a rajta vett integrál segítségével meghatározzuk a potenciált. Gyakran például a koordinátatengelyekkel párhuzamos görbék menti integrálokat szokták potenciálkeresésre használni.

3.6.3 A ponttöltés erőterének és duálisának potenciálja

A 3.4 pontban tárgyalt két fizikai alkalmazásról elmondottakat most kiegészítjük a potenciálok megadásával. A két vektorfüggvény a

$$v(r) = \frac{r}{|r|^2} \quad \text{és} \quad w(r) = \frac{\text{CROSS}(r)}{|r|^2} .$$

Már láttuk, hogy mindkét függvény rotációja az origóval kiszúrt teljes síkon nulla, így a 3.32 Tétel alapján a sík bármely, az origót nem tartalmazó csillagszerű tartományán van potenciáljuk. A potenciálok kiszámítására a fent ismertetettek módszerek közül csak az első alkalmazható, mert a függvények az origóban nem léteznek (és – ahogy már a 3.4 pontban láttuk – folytonossá sem tehetőek).

a) Ponttöltés erőtere

Ha $x^2 + y^2 \neq 0$, akkor

$$v = v(r) = \frac{r}{|r|^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y) .$$

Ebből

$$u_x = v_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} ,$$

tehát

(*)
$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + c(y) ,$$

így

$$u_y = \frac{y}{x^2+y^2} + c'(y)\,,$$

amiből

$$u_y = v_2 = \frac{y}{x^2+y^2}$$

miatt $c'(y) = 0$, vagyis $c(y)$ konstans, tehát választható 0–nak, ezért (*)-gal egy potenciál:

$$u = u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \ln\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{ha} \quad x^2+y^2 \neq 0\,,$$

vagyis

$$u = u(r) = \ln|r| \text{ ha } r \neq 0\,.$$

Nos, ebből láncszabállyal azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{grad}\ln|r| = \frac{1}{|r|}\operatorname{grad}|r| = \frac{1}{|r|}\frac{r}{|r|} = \frac{r}{|r|^2} \qquad \text{minden } r \neq 0 \text{ esetén,}$$

tehát v–nek nem csak valamely csillagszerű tartományon, hanem *az origóval kiszúrt teljes síkon*, azaz egész értelmezési tartományán van potenciálja, egy ezek közül az $u(r) = \ln|r|$ függvény. Következésképpen, a 3.28 Tétel alapján v görbementi integrálja *minden* G–be eső zárt egyszerű íven nulla (így az origót a belsejében tartalmazó normál térrész határaként adódó zárt egyszerű ívre is az), amint azt a 3.4 potban láttuk, legalábbis normál térrészek határaiként előálló zárt egyszerű ívek esetén.

A tér ekvipotenciális felületei (azaz azon pontok halmaza, melyek mentén a potenciál állandó, tehát valamely c konstansra $u = u(r) = c$) az origóközéppontú körök, hiszen ha $R > 0$ rögzített és $|r| = R$, akkor $u = u(r) = \ln R$ állandó. Ezek mentén tehát a potenciál nem változik, hiszen ezek bármely szakaszán a v vonalmenti integrálja nulla, mert a kör érintője merőleges v–re, vagyis a körök, mint kétdimenzióbeli valódi felületek normálisát adja meg $\operatorname{grad} u = v$. Valóban, v – lévén sugárirányú – minden pontban az azon a ponton áthaladó kör érintőjének normálisa. Másszóval, u a körök mentén nem változik, leggyorsabb változási iránya pedig éppen az azokra merőleges irány, a $v = \operatorname{grad} u$ iránya.

b) Pontszerű vezető mágneses tere

1. POTENCIÁL A JOBB- ÉS BALFÉLSÍK BELSEJÉBEN

Ha $x^2+y^2 \neq 0$, akkor

$$w = w(r) = \frac{\mathrm{CROSS}(r)}{|r|^2} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)\,.$$

Ebből $x \neq 0$ esetén

$$u_x = v_1 = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,,$$

tehát

(**)
$$u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + c(y)\,,$$

így

$$u_y = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + c'(y)\,,$$

amiből

$$u_y = v_2 = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

miatt $c'(y) = 0$, vagyis $c(y)$ konstans, így választható 0–nak, ezért (**)-gal (minden olyan nyílt halmazon, ahol $x \neq 0$) egy potenciál:

$$u = u(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.$$

És valóban ellenőrizhető, hogy ha $x \neq 0$, akkor

$$\operatorname{grad}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)\,.$$

Igen ám, de, ha ennyivel megelégednénk, az azt jelentené, hogy w–nek legfeljebb a jobb ill. bal félsík belsejében van potenciálja, hisz ezeknél bővebb halmazok már belemetszenek az $x = 0$ egyenletű y tengelybe. Ez viszont ellentmond annak, amit már vizsgálatunk elején megjegyeztünk, hogy – mivel mindkét függvény rotációja az origóval kiszúrt teljes síkon nulla – a 3.32 Tétel alapján w–nek a sík bármely, az origót nem tartalmazó csillagszerű tartományán van potenciálja! Például bármely origóból induló, az origót tartalmazó félegyenes pontjaitól megfosztott (a félegyenes mentén **felmetszett**) sík is egy, az origót nem tartalmazó csillagszerű tartomány (a félegyenes másik felének bármely pontja csillagpontja), úgyhogy itt is kell lennie potenciálnak, pedig ez nyilván vagy a bal vagy a jobb nyílt félsíknál bővebb halmaz, belemetsz az y tengelybe! Másszóval a fenti függvénynek "folytathatónak", kiterjeszthetőnek kell lennie, méghozzá folytonosan deriválható módon a jobb ill. bal félsíknál bővebb halmazokra is!

2. A POTENCIÁL FOLYTONOS KITERJESZTÉSE A POZITÍV FÜGGŐLEGES FÉLTENGELYRE

A jobb és bal félsíkok belsejében minden konstans c–re

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + c$$

is potenciál, így nyilván az

$$u^+(r) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

a jobb félsíkon, míg az

$$u^-(r) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi$$

a bal félsíkon potenciálja w–nek. Másrészt, mivel

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

miatt a pozitív y féltengely bármely $(0, y_0)$ pontjára minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|u^+(x,y) - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad x > 0, \ |(x,y) - (0,y_0)| < \delta$$

és

$$|u^-(x,y) - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad x < 0, \ |(x,y) - (0,y_0)| < \delta,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy az

$$u(x,y) = \begin{cases} u^+ & \text{ha } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } x = 0,\ y > 0 \\ u^- & \text{ha } x < 0 \end{cases}, \quad \text{azaz az} \quad u(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{ha } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } x = 0,\ y > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény folytonos a jobb és a bal félsíkon kívül a pozitív y féltengely pontjaiban is, azaz az egész, a negatív zárt y féltengely mentén felmetszett nyílt

$$S^- = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0 \text{ és } y \le 0\}.$$

síkon. Ez nyilván nyílt és összefüggő halmaz. Nos, u nem csak folytonos, de deriválható is S^-–on és egész S^-–on tényleg potenciál, azaz *mindenütt* $\operatorname{grad} u = v$! Ez megmutatható a gradiens definíciója alapján közvetlenül is (lásd a 3.7.1 pont (7) feladatot), de egyszerűbb annak bizonyításán keresztül, hogy parciálisai folytonosak, hisz ebből következik a deriválhatóság.

3. A KITERJESZTETT POTENCIÁL PARCIÁLIS DERIVÁLTJAI A JOBB ÉS BAL FÉLSÍK BELSEJÉBEN

A nyílt jobb és bal félsíkon, azaz az y tengely pontjaitól különböző pontokban persze u folytonosan deriválható, hiszen ilyen tulajdonságú függvényekből áll elő alapműveletekkel ill. összetett függvény képzés segítségével, melyek mindegyike megőrzi a folytonos deriválhatóságot. Ezért a gradiens létezik és komponensei a parciális deriváltak, melyek meghatározásához felhasználhatóak az alapműveletek ill. az összetett függvény deriváltjára vonatkozó összefüggések, tehát

$$u_x(x,y) = \frac{-y}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{és} \quad u_y(x,y) = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{ha} \quad x \neq 0.$$

Ezekből persze valóban, az y tengely pontjait kivéve, mindenütt

$$\operatorname{grad} u = (u_x, u_y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = v\,,$$

azaz u potenciál a jobb és bal nyílt félsíkon.

4. A KITERJESZTETT POTENCIÁL PARCIÁLIS DERIVÁLTJAI A POZITÍV FÜGGŐLEGES FÉLTENGELYEN

(a) Először u_x létezését és folytonosságát vizsgáljuk meg a pozitív y féltengely pontjaiban. Legyen $y > 0$ tetszőleges. A parciális derivált definíciója szerint, felhasználva a L'Hospital-szabályt,

$$u_x(0,y) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,y) - u(0,y)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,y) - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{d}{dx} u(x,y) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{-y}{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \lim_{x \to 0} -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{y^2} = -\frac{1}{y}\,.$$

Tehát bármely $y > 0$ esetén létezik u-nak $(0,y)$-ban x szerinti parciális deriváltja, mégpedig

$$u_x(0,y) = -\frac{1}{y}\,. \tag{1}$$

Megmutatjuk, hogy u_x folytonos a pozitív y féltengely pontjaiban is. Legyen P_0 rajta a a pozitív y féltengelyen, azaz legyen $P_0 = (0, y_0)$ valamely rögzített $y_0 > 0$-ra. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén van $\delta > 0$, hogy

$$|u_x(x,y) - u_x(P_0)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |(x,y) - P_0| < \delta$$

akár rajta van (x,y) a pozitív y féltengelyen, akár nincs. Valóban, az első esetben (1)-ből következően

$$\lim_{(x,y) \to P_0} u_x(0,y) = \lim_{(x,y) \to P_0} -\frac{1}{y} = -\frac{1}{y_0} = u_x(P_0)\,,$$

míg a másodikban a félsíkok belsejére a fenti 3.-ban kapott

$$u_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

eredményből adódóan

$$\lim_{(x,y) \to P_0} u_x(x,y) = \lim_{(x,y) \to P_0} -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y_0}{y_0^2} = -\frac{1}{y_0} = u_x(P_0)\,.$$

(b) Ami u_y-t illeti, a pozitív y tengely mentén való létezése és folytonossága hasonlóan látható be, mert egyrészt ha $y > 0$ tetszőleges rögzített, akkor a parciális derivált definíciója alapján

$$u_y(0,y) = \frac{d}{dy} u(0,y) = \frac{d}{dy} \frac{\pi}{2} = 0\,,$$

tehát létezik u-nak minden $y > 0$ esetén $(0,y)$-ban y-szerinti parciális deriváltja, mégpedig

$$u_y(0,y) = 0. \tag{2}$$

Végül u_y-nek a pozitív y féltengely pontjaiban való folytonosságának vizsgálatához legyen $P_0 = (0, y_0)$, ahol $y_0 > 0$ tetszőleges rögzített. Ekkor u_y folytonossága P_0-ban abból adódik, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, melyre

$$|(x,y) - P_0| < \delta\text{-ból következik} \quad |u_y(x,y) - u_y(P_0)| < \varepsilon$$

akár rajta van (x,y) a pozitív y féltengelyen, akár nincs, hiszen ugyanúgy, ahogy előbb, egyrészt persze (2)-vel

$$\lim_{(x,y) \to P_0} u_y(0,y) = \lim_{(x,y) \to P_0} 0 = 0 = u_x(P_0)\,,$$

másrészt a fenti 3.-ból a félsíkok belsején érvényes

$$u_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

összefüggéssel

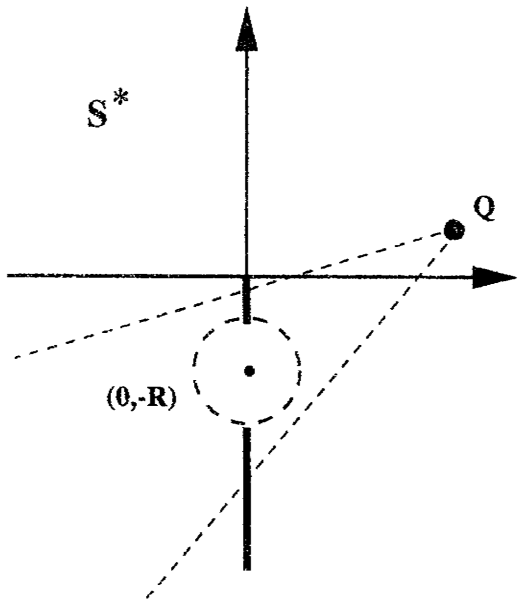
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow P_0} u_y(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow P_0} \frac{x}{x^2+y^2} = 0 = u_x(P_0)\,.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a fenti 2.–ben S^-–en, azaz a negatív y zárt féltengely mentén felvágott síkon definiált u függvény *folytonosan deriválható* az egész S^-–en és itt mindenütt

$$\operatorname{grad} u = (u_x, u_y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}) = v\,,$$

másszóval u potenciál az egész S^-–on.

Egyetlen kérdést kell még megvizsgálnunk, nevezetesen azt, hogy vajon nincs-e S^-–nél bővebb nyílt és összefüggő halmaz, melyen létezik potenciál. Nos, a válasz az, hogy nincs. Legyen ugyanis $R > 0$ tetszőleges és vegyük hozzá S^-–hez a $(0,-R)$ pontot egy bármely $\varepsilon > 0$ sugarú $S_\varepsilon(0,-R)$ környezetével együtt (ez utóbbit azért kell hozzávennünk $(0,R)$–el együtt, hogy a bővebb halmaz még mindig nyílt maradjon), és legyen $S^* = S^- \cup S_\varepsilon(0,-R)$ az ilymódon kapott új halmaz. S^* is nyilván nyílt és összefüggő halmaz, de az origóközéppontú R sugarú kör már benne fekszik S^*–ban, tehát ha volna az S^* halmazon potenciálja v–nek, akkor az ezen kör mentén vett vonalintegráljának a 3.28 Tétel szerint nullának kellene lennie. A 3.4 pontban azonban már láttuk, hogy ennek az integrálnak az értéke $2\pi \neq 0$! Vegyük azt is észre, hogy ez nem mond ellent annak a ténynek, amit szintén a 3.4 pontban mutattunk meg, hogy $\operatorname{rot} v = 0$ még az új S^* halmaz minden pontjában is, bár a 3.32 Tétel szerint a rotáció nulla volta maga után vonja a potenciál létezését (nyilván $v \in C_1(S^*)$, hisz v csak az origóban "romlik el"). Igen ám, de a tétel csak csillagszerű tartományokra vonatkozik és, bár S^- még csillagszerű, de már nem bővíthető olymódon, hogy az is maradjon. Valóban, S^* már nem csillagszerű tartomány: nyilván ha $Q \in S^*$ nincs az y tengelyen, akkor egyenes szakasszal Q–ból a Q–t az origóval összekötő egyenes által definiált félsíkok közül az egyik pontjai nem érhetőek el szakasszal Q–ból kivéve azokat, melyek a Q–t az $S_\varepsilon(0,-R)$ valamely pontjával összekötő egyenesen vannak, míg ha Q az y tengelyen van, akkor $S_\varepsilon(0,-R)$ y tengelyen fekvő pontjai nem érthetőek el Q–ból:



A tér ekvipotenciális felületeit persze az előző példa duális állításai írják le. Ezek az origón átmenő egyenesek, hiszen ha $c \in \mathbf{R}$ rögzített és $\frac{y}{x} = c$, akkor $u = u(r)$ állandó. Ezen egyenesek mentén tehát a potenciál nem változik, mert bármely szakaszukon a v vonalmenti integrálja nulla, hisz érintőjük merőleges v–re. Ezen egyenesek, mint kétdimenzióbeli valódi felületek normálisát adja meg $\operatorname{grad} u = v$. Valóban v – lévén sugárra merőleges irányú– minden pontban az origót a ponttal összekötő egyenes normálisa. Másszóval, $u(r)$ az egyenesek mentén nem változik, leggyorsabb változási iránya pedig éppen az azokra merőleges irány, a $v = \operatorname{grad} u$ iránya.

Vegyük észre azt is, hogy az $u = u(x,y)$ potenciál pontosan az (x,y) pontnak a pozitív x tengellyel bezárt szögét adja meg a $(-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$ tartományban!

Végül érdemes még megemlíteni, hogy az előzőekkel teljesen analóg módon lehet belátni, hogy *bármely* az origóból induló, az origót tartalmazó félegyenes mentén felmetszett síkon van v–nek potenciálja és ennek a potenciálnak meghatározása pontosan ugyanúgy történik, mint a fenti u kiszámítása (lásd a 3.7.1 pont (7) feladatot) alább). Például az

$$u^*(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y} & \text{ha } y < x \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } y = x\,,\ x > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y} + \pi & \text{ha } y > x \end{cases}$$

függvény potenciál az $y = x$ egyenesnek a harmadik síknegyedbe eső fele mentén felmetszett síkon. (u^* az (x,y) pontnak az $y = -x$ egyenesnek a negyedik síknegyedbe eső felével bezárt szögét adja meg.) Abból azonban, hogy *bármely* origókezdőpontú félegyenes mentén felmetszett síkon van v–nek potenciálja, a 3.28 Tétel miatt az is következik (amit már más eszközökkel az origót nem tartalmazó normál térrészek határaiként adódó zárt egyszerű ívekre láttunk), hogy azon egyszerű ívek esetén, melyekhez van az ívet nem metsző origó kezdőpontú félegyenes (az ilyan ívekről azt mondjuk, hogy "nem takarják el az origót") a görbementi integrál nulla.

3.6.4 Az egzakt differenciálegyenlet

A potenciálelmélet egyik alkalmazásaként megmutatjuk, hogy a potenciálkeresés problémája átfogalmazható a differenciálegyenletek terminusaiban is.

3.33 Definíció

Legyen $g = g(x,y)$ és $h = h(x,y)$ valamely $H \subseteq \mathbf{R}^2$–en értelmezett függvények. Azt a H–n értelmezett $F = F(x,y)$ függvényt, melyre $F_x = g(x,y)$ és $F_y = h(x,y)$ minden $(x,y) \in H$ esetén, a (g,h) függvénypár H–beli **primitív függvényének** nevezzük.

Ez a fogalom nyilván a potenciál átfogalmalmazása vektorfüggvények helyett kétváltozós függvényekre. A differenciálegyenletek alább definiálandó típusának meghatározásához felelevenítjük az elsőrendű differenciálegyenlet és a kétváltozós implicit függvény probléma megoldhatóságának fogalmát:

3.34 Definíció

(1) Legyen $H \subseteq \mathbf{R}^2$ nyílt, összefüggő halmaz és $f(x,y)$ H–n folytonos kétváltozós függvény. Azt mondjuk, hogy egy $I \subseteq \mathbf{R}$ intervallumon értelmezett deriálható egyváltozós $y = y(x)$ függvény az $y' = f(x,y)$ **differenciálegyenlet megoldása** H–n, ha

$$y'(x) = f(x,y(x)) \quad \text{és} \quad (x,y(x)) \in H \quad \text{minden} \quad x \in I \quad \text{esetén.}$$

(2) Legyen $F(x,y)$ tetszőleges kétváltozós függvény, $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstans és $H \subseteq \mathbf{R}^2$. Azt mondjuk, hogy egy $I \subseteq \mathbf{R}$ intervallumon értelmezett egyváltozós $y = y(x)$ függvény az $F(x,y) = c$ (kétváltozós) **implicit függvény probléma megoldása** H–n, ha

$$F(x,y(x)) = c \quad \text{és} \quad (x,y(x)) \in H \quad \text{minden} \quad x \in I \quad \text{esetén.}$$

Nos, a kétváltozós implicit függvény probléma differenciálható megoldásai azonosak az egy speciális differenciálegyenlet típus megoldásaival:

3.35 Definíció

Legyen $H \subseteq \mathbf{R}^2$ továbbá $g = g(x,y)$ és $h = h(x,y)$ folytonos H–n értelmezett függvények. Tegyük fel, hogy $h(x,y) \neq 0$ minden $(x,y) \in H$ esetén. A

$$g(x,y) + h(x,y)\,y' = 0$$

differenciálegyenletet **egzakt**nak nevezzük, ha a (g, h) függvénypárnak van primitív függvénye H-n.

3.36 Jelölés

Az egzakt differenciálegyenletet hagyományosan az alábbi alakban szokták megadni:

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0\,.$$

A következő állítás a 3.35 Definíció és a 3.32 Tétel nyilvánvaló következménye:

3.37 Állítás

Legyen $g = g(x,y)$ és $h = h(x,y)$ a $H \subseteq \mathbf{R}^2$ csillagszerű tartományon értelmezett folytonosan differenciálható függvények. A $g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$ differenciálegyenlet akkor és csak akkor egzakt ha

$$g_y = h_x\,.$$

3.38 Állítás

Legyen $H \subseteq \mathbf{R}^2$ nyílt, összefüggő halmaz, g és h H-n folytonos függvények és legyen F a (g,h) függvénypár egy H-beli primitív függvénye. A

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$$

egzakt differenciálegyenlet H-beli megoldásai azonosak az $F(x,y) = c$, $c \in \operatorname{Rg} F$ implicit függvény problémák differenciálható H-beli megoldásaival.

BIZONYÍTÁS. Lagrange középértéktétellel és láncszabállyal:

$$F(x,y(x)) = c \quad \text{tetszőleges } x \in I\text{–re} \quad \text{iff} \quad F_x(x,y(x))\cdot 1 + F_y(x,y(x))\,y'(x) = 0 \quad \text{tetszőleges } x \in I\text{–re}$$

$$\text{iff} \quad g(x,y(x)) + h(x,y(x))\,y'(x) = 0 \quad \text{tetszőleges } x \in I\text{–re}\,.$$

Az állítás alapján egy egzakt differenciálegyenlet megoldásához a differenciálegyenletben szereplő függvények által alkotott függvénypár primitív függvényének, azaz azon vektorfüggvény potenciáljának meghatározása vezet, melynek komponensei ezek a függvények. Következésképpen, a differenciálegyenlet megoldásához a potenciálkeresésnél megismert módszerek alkalmazhatóak.

3.39 Példa

Oldjuk meg az

$$x\,dx + y\,dy = 0\,, \quad y(0) = 2$$

kezdeti érték problémát!

Először is, a differenciálegyenlet tényleg egzakt: $g(x) = x$, $h(y) = y$, így $g_y = 0 = h_x$. Egy primitív függvényt, azaz potenciált a 3.6.2 a) pontban ismertetett eljárással keresünk meg:

$$F_x = g(x) = x \rightsquigarrow F = \frac{x^2}{2} + c(y) \rightsquigarrow y = h(y) = F_y = c'(y) \rightsquigarrow c(y) = \frac{y^2}{2} \rightsquigarrow F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\,.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát az

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

megoldásai, tehát az origóközéppontú félkörök. A kezdeti érték probléma megoldásához pedig

$$\frac{0^2}{2} + \frac{2^2}{2} = c \rightsquigarrow c = 2 \rightsquigarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 2 \rightsquigarrow x^2 + y^2 = 4\,.$$

Tehát a kezdeti érték probléma megoldása az origóközéppontú $R = 2$ sugarú pozitív félkör:

$$y = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

ELLENŐRZÉS Egyrészt nyilván $y(0) = \sqrt{4 - 0^2} = 2$, másrészt

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} \quad \text{miatt} \quad x + y\,y' = 0.$$

3.40 Példa (A szeparábilis differenciálegyenlet, mint egzakt differenciálegyenlet)

A szeparábilis differenciálegyenlet az alábbi alakú (g és h folytonos függvények, h sehol nem nulla):

$$y' = g(x)\,h(y).$$

Írjuk át ezt a következő formában:

$$g(x) - \frac{1}{h(y)}\,y' = 0.$$

Ez valóban egzakt, hiszen $g_y = 0 = (\frac{1}{h(y)})_x$. Az egyváltozós $f = f(x)$ függvény egy primitív függvényének jelölésére az $\int f(x)\,dx$ jelet használva, meghatározzuk azokat az implicit függvény problémákat, melyek megoldása szolgáltatja a differenciálegyenlet megoldását.

$$F_x = g(x) \rightsquigarrow F = \int g(x)\,dx + c(y) \rightsquigarrow -\frac{1}{h(y)} = F_y = c'(y) \rightsquigarrow$$

$$c(y) = \int -\frac{1}{h(y)}\,dy \rightsquigarrow F(x,y) = \int g(x)\,dx - \int \frac{1}{h(y)}\,dy$$

Vagyis a 3.38 Állítás alapján a differenciálegyenlet általános megoldását a szóbajöhető valós c számokkal adódó

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx + c$$

implicit függvény problémák megoldásai adják. (Az implicit függvény problémákat az eredeti differenciálegyenletből formálisan úgy kaphatjuk meg, hogy abban y' helyett dy/dx-et írunk, az x-es és y-os tagokat (beleértve a dx és dy-t is) egy-egy oldalra rendezzük, majd meghatározzuk mindkét oldal primitív függvényeit.)

Illusztráló példaként megoldjuk az

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

differenciálegyenletet.

$$y' = \frac{y^2}{x^2} \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} \rightsquigarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \rightsquigarrow$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2} + c \rightsquigarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c \rightsquigarrow y = \frac{x}{1 - cx}.$$

Tehát a differenciálegyenlet megoldásai:

$$y = \frac{x}{1 - cx}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

ELLENŐRZÉS

$$y' = \frac{(1 - cx) - x \cdot (-c)}{(1 - cx)^2} = \frac{1}{(1 - cx)^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

3.7 Feladatok

3.7.1 Elméleti feladatok

(1) Mutassunk példát olyan két azonos pontot összekötő görbékre, melyek *nem* egy zárt görbe lefedését adják!

(2) Mutassunk példát olyan görbére, mely nem egyszerű ív!

(3) **Poligon**nak nevezzük azokat a görbéket, melyek feloszthatóak szakaszokra. Azt mondjuk, hogy egy görbe **összeköti az a és b pontot** ha a görbe végpontjai a és b. Bizonyítsuk be, hogy összefüggő halmaz tetszőleges két pontja összeköthető poligonnal a halmazon belül!

(4) Bizonyítsuk be, hogy minden csillagszerű tartomány egy háromszöggel együtt tartalmazza az általa határolt normáltartományt is!

(5) Bizonyítsuk be, hogy ha az L_1 és L_2 szakaszok egyenletei $r_1 = r_1(t)$, $t \in [a_1, b_1]$ és $r_2 = r_2(t)$, $t \in [a_2, b_2]$, továbbá L_1 és L_2 kezdő- ill. végpontjai megegyeznek, akkor

$$\mathrm{Rg}\, r_1 = \mathrm{Rg}\, r_2$$

és

$$\int_{L_1} v\, dr = \int_{L_1} v\, dr \quad \text{bármely } \mathrm{Rg}\, r_1 = \mathrm{Rg}\, r_2\text{-n folytonos } v \text{ esetén.}$$

(6) Bizonyítsuk be, hogy minden háromszög normál térrész (speciálisan normáltartomány) határa!

(7) Bizonyítsuk be közvetlenül a gradiens definíciója alapján, hogy az

$$u(r) = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

függvény deriválható módon kiterjeszthető a negatív y tengely mentén felvágott egész síkra!

(7) Bizonyítsuk be, hogy ha

$$w(r) = \frac{\mathrm{CROSS}\,(r)}{|r|^2}, \; r \neq 0,$$

akkor minden origóból induló, az origót tartalmazó félegyenes esetén van w-nek potenciálja a félegyenes mentén felmetszett síkon és határozzunk meg egy potenciált!

3.7.2 Gyakorló feladatok

(1) Legyen H egy origócsúcsú h magasságú a alapú háromszögvonal a síkon. H-t egy kétdimenzióbeli valódi felületnek tekintve határozzuk meg az

$$\int_H r\; df\; df$$

integrál értékét az integrál kiszámításával és a Gauss-Osztrogradszkij-tétel felhasználásával!

(2) Legyen N az a síkbeli téglalap, melynek egyik csúcsa az origó, egyik a hosszú oldala az x és egyik b hosszú oldala az y tengely pozitív felére esik. Legyen $v(x, y) = (x^2, 0)$ egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki v felületmenti integrálját N-en, mint egy kétdimenzióbeli valódi felületen!

(3) Legyenek a és b pozitív valós számok és legyen H az a háromszögvonal, melynek csúcsai a $(-a, 0)$, $(0, b)$,

$(a, 0)$ pontok. Legyen $v(x, y) = (x - y, x + y)$ egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki v vonalmenti integrálját H-n!

(4) Legyen $v = v(x, y) = (xy, x + y)$ az egész síkon értelmezett vektorfüggvény és $\mathbf{R}^2$ szokásos bázisa $e = (i, j)$. Legyen

$$f = (\frac{i + j}{\sqrt{2}}, \frac{i - j}{\sqrt{2}})$$

$\mathbf{R}^2$ egy másik (othonormált) bázisa. A deriváltoperátor transzformációja ***nélkül*** határozzuk meg v deriváltoperátorának f-beli mátrixát és számítsuk ki *ebből a mátrixból* v divergenciáját és rotációját!

(5) Legyen K a síkbeli első síknegyedbe eső R sugarú körlapnegyed:

$$K = \{(x, y) : x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Legyen H K határvonala és $v(r) = r \cdot |r|^2$ egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki v felületmenti integrálját H-n, mint egy kétdimenzióbeli valódi felületen a Gauss–Osztrogradszkij tétel felhasználásával és anélkül!

(6) Ellenőrizzük a 3.4 pont utolsó előtti bekezdésében jelzett módon a ponttöltés erőterére és a pontszerű vezető mágneses terére vonatkozó eredményeinket!

4. Magasabb dimenziós általánosítások

Mindaz, amit az előzőekben a síkra vonatkozó vizsgálataink eredményeképpen kaptunk nagyon természetes módon igen könnyen kiterjeszthető, mégpedig – ahogy arra már a 2. fejezetben utaltunk – a cirkulációval, örvénysűrűséggel és rotációval kapcsolatos fogalmaink és állításaink a háromdimenziós, míg a fluxussal, forrássűrűséggel és divergenciával összefüggőek bármely véges (nullánál nagyobb) dimenziós lineáris normált térre. Ebben a fejezetben, melyben tehát n *mindig* tetszőleges, de rögzített pozitív egész szám, röviden összefoglaljuk ennek az általánosításnak, a véges- ill. háromdimenziós vektoranalízisnek legfontosabb eredményeit.

4.1 Divergencia

A divergencia általános meghatározását már a 3.3 Definícióban megadtuk, ez a deriváltoperátor skalárinvariánsa, azaz

4.1 Definíció

Egy $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) : H \to \mathbf{R}^n$, $H \subseteq \mathbf{R}^n$ deriválható vektorfüggvény divergenciája

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x}.$$

Ami a Gauss-Osztrogradszkij tételt illeti, ennek bizonyítása az értelemszerű változtatásokkal igen könnyen általánosítható, csupán pontosan ugyanazt kell n komponensre végrehajtani, amit a kétdimenziós esetben kettőre csináltunk meg. (Az egyetlen nehézséget egy technikai feltétel, az integrálok normál térrészek határain mentén való additivitásának igazolása, az 1 26 (15)(b) feladat magasabb dimenziókra való kiterjesztése jelenti.) Maga a tétel szó szerint megegyezik a 3.5 Tétellel, kivéve természetesen azt, hogy kétdimenzió helyett n dimenzióra vonatkozik:

4.2 Tétel (Gauss-Osztrogradszkij tétel)

Ha V n–dimenziós normál térrész, melynek határa az F kifelé irányított valódi felület, $V \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^n$ és $v : H \to \mathbf{R}^n$ tetszőleges V–n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\int_F v \, df = \int_V \operatorname{div} v \, dV$$

Természetesen a tétel véges sok határoló felületre vonatkozó formája (3.6 Tétel) is hasonlóan, minden lényeges változtatás nélkül, kiterjeszthető bármely nullánál nagyobb véges dimenzióra. Ezt felhasználva egyébként könnyen látható, hogy a Gauss-Osztogradszkij tétel a Newton–Leibniz tétel többdimenzióra való általánosítása. Valóban, (felhasználva az 1.12 (3), 1.14 (4)(b) és az 1.20 (2) megjegyzéseket) a tételt az $n = 1$ esetre alkalmazva azt kapjuk, hogy ha $V = [a, b]$ egydimenziós térrész, azaz intervallum (melynek kifele irányított határát a $+1$–el irányított $F_1 = \{b\}$ és a -1–el irányított $F_2 = \{a\}$ nulldimenziós felületek lefedik), $v = v(x)$ pedig V–n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\int_a^b v'(x) \, dx = \int_V \operatorname{div} v \, dV = \int_{F_1} v \, df + \int_{F_2} v \, df = v(b) - v(a).$$

Másrészről ez az összefüggés megvilágítja a Newton– Leibniz tétel fizikai jelentését: egy cső két végén be– és kiáramló folyadék mennyiségének különbsége a csőben keletkező (eltűnő) folyadék mennyiségével egyenlő, mely utóbbi nem más, mint a hosszegységenként keletkező (eltűnő) folyadékmennyiségnek, azaz a hosszegységenkénti folyadékmennyiség-változásnak a cső hosszára vett integrálja.

Végül a tétel differenciális alakja is szó szerint általánosítható, tehát a divergencia n dimenzióban is a forrássűrűséget adja meg:

4.3 Következmény

Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^n$ nyílt és $v : G \to \mathbf{R}^n$ tetszőleges G-n folytonosan deriválható vektorfüggvény. Ekkor G-n létezik v-nek $s(v)$ forrássűrűsége és fennáll, hogy

$$s(v) = \operatorname{div} v .$$

4.2 Rotáció

A rotációval már egy kissé komplikáltabb a helyzet, mint a divergenciával. Meg kell találnunk a 3.8 Állítás megfelelőjét $\mathbf{R}^3$-ra, amivel aztán a 3.10 és 3.11 Definíciókban a dimenziónak kettőről háromra változtatásával megkapjuk a kívánt fogalmat.

4.4 Állítás

$\mathbf{R}^3$ tetszőleges $\mathbf{A}$ antiszimmetrikus lineáris transzformációjához van egyetlen olyan $c \in \mathbf{R}^3$ vektor, hogy

$$\mathbf{A}\, r = c \times r \qquad \textit{tetszőleges } r \in \mathbf{R}^3 \textit{ esetén}$$

továbbá $\mathbf{A}$ tetszőleges e orthonormált bázisbeli $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{e} = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ mátrixából c leolvasható:

$$c = (a_{32}, a_{13}, a_{21}) .$$

BIZONYÍTÁS. Az egyértelműség nyilvánvaló. $\mathbf{A}$ antiszimmetrikus, tehát $\mathbf{R}^3$ tetszőleges $e = (e_1, e_2, e_3)$ orthonormált bázisbeli $(a_{ij})_{i,j=1}^3$ mátrixa is az, vagyis a $c_1 = a_{32}$, $c_2 = a_{13}$, $c_3 = a_{21}$ jelölésekkel

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{e} = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Így bármely $r = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbf{R}^3$ esetén

(1)
$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{e}\, \underline{r}_{e} = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -yc_3 + zc_2 \\ xc_3 - zc_1 \\ -xc_2 + yc_1 \end{pmatrix} .$$

Másrészt az 1.6 Állítás alapján

$$c \times r = \mathrm{CROSS}(c, r) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (c_2 z - c_3 y)e_1 - (c_1 z - c_3 x)e_2 + (c_1 y - c_2 x)e_3 ,$$

tehát (1)-el

$$\underline{\mathbf{A}\, r}_{e} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{e}\, \underline{r}_{e} = \begin{pmatrix} c_2 z - c_3 y \\ c_1 z + c_3 x \\ c_1 y - c_2 x \end{pmatrix} = \underline{c \times r}_{e} .$$

Következésképpen,

$$\mathbf{A}\, r = c \times r \quad \text{minden} \quad r \in \mathbf{R}^3 \text{ esetén} .$$

4.5 Definíció

(1) Azt a a fenti állításban szereplő c vektort, melyet $\mathbf{R}^3$ tetszőleges lineáris transzformációjának antiszimmetrikus része egyértelműen meghatároz, a transzformáció **vektorinvariánsának** nevezzük.

(2) Legyen $H \subseteq \mathbf{R}^3$ és $v : H \to \mathbf{R}^3$ deriválható vektorfüggvény. v deriváltoperátora vektorinvariánsának kétszeresét v **rotációjának** nevezzük és rot v–vel jelöljük.

4.6 Állítás

Legyen $H \subseteq \mathbf{R}^3$ és $v : H \to \mathbf{R}^3$ deriválható vektorfüggvény, melynek komponensei v_1, v_2 és v_3, azaz $v = (v_1, v_2, v_3)$. Ekkor

$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

vagyis

$$\operatorname{rot} v = (\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y})$$

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{R}^3$ szokásos e bázisában a $\mathbf{D}$ deriváltoperátor mátrixának i. sora:

$$(\frac{\partial v_i}{\partial x}, \frac{\partial v_i}{\partial y}, \frac{\partial v_i}{\partial z})$$

és ezen operátor antiszimetrikus részének $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ mátrixa a következő:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}_e - \underline{\underline{\mathbf{D}}}_e^*).$$

Ezek szerint

$$a_{32} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}), \quad a_{13} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}), \quad a_{21} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}),$$

ami az előző állítás és a rotáció definíciója szerint éppen az, amit bizonyítani akartunk.

Ami a Stokes tétel illeti, vele más a helyzet, mint a Gauss-Osztogradszkij tétellel. Ahogy alább megmutatjuk, a Stokes tétel háromdimenziós általánosítása nem a kétdimenziós változat háromdimenziós "másolata", hanem annak *következménye*. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a síkbeli Stokes tétel könnyen átvihető a háromdimenziós tér síkfelületeire. Az alábbi definíció segítségével a térbeli síkfelületek és síkgörbék leírását visszavezethetjük $\mathbf{R}^2$–beli térrészek ill. valódi felületek definiálására.

4.7 Definíció

(1) A háromdimenziós térben valamely F felületet **síkfelületnek** nevezünk ha van olyan sík, melynek részhalmaza.

(2)(a) Legyen $\mathbf{P}$ az az $\mathbf{R}^3$–ból $\mathbf{R}^2$–be képező lineáris operátor, mely minden vektorhoz az [xy]–síkra való vetületét rendeli *mint $\mathbf{R}^2$-beli vektort*, azaz

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

és legyen bármely e és f bázisok esetén $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ef}$ az e–ről az f–re való áttérés mátrixa.

(b) Legyen $\mathbf{R}^3$ szokásos bázisa e. Legyen továbbá F az $r = r(u) = (x(u), y(u), z(u)), u \in A$, egyenlettel definiált n normálisú $\mathbf{R}^3$–beli síkfelület és $f = (f_1, f_2, f_3)$ olyan jobbsodrású orthonormált bázis, melyre $f_3 \| n$ és $f_3 \cdot n > 0$. Az

$$r^*(u) = (\mathbf{P} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ef}) r(u), \quad u \in A$$

egyenlettel definiált $\mathbf{R}^2$–beli felületet F (f szerinti vagy f–beli $\mathbf{R}^2$-)**árnyékának** nevezzük.

(3) A háromdimenziós térben valamely F valódi síkfelületet **normál** felületnek nevezünk, ha van olyan bázis, melyben F árnyéka normál térrész.

(4) A háromdimenziós térben valamely n normálisú F síkfelület határaként adódó L görbét (F–ből nézve) pozitív irányításúnak mondunk, ha van olyan bázis, melyben L árnyéka (F árnyékából nézve) pozitív irányítású.

Nyilván a pozitív irányítás azt jelenti, hogy a görbét a felületi normális irányából nézve az óramutató járásával ellenkező irányban járjuk be.

4.8 Megjegyzés

(1) Nyilván felület határának árnyéka az árnyék határa (lásd a 4.18 (1) feladatot alább).

(2) Könnyen megmutatható (lásd a 4.18 (5) feladatot), hogy ha egy görbe árnyéka valamely bázisban pozitív irányítású, akkor minden bázisban az.

A Stokes-tétel bizonyításához szükségünk lesz még egy olyan háromdimenziós térbeli összefüggésre, melynek nincs síkbeli megfelelője:

4.9 Állítás

Bármely kétszer folytonosan deriválható $v : H \to \mathbf{R}^3$, $H \subseteq \mathbf{R}^3$ *deriválható vektorfüggvény esetén*

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0 .$$

BIZONYÍTÁS. A 4.4 Állítással

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} v = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) =$$

$$= (v_3)_{yx} - (v_2)_{zx} + (v_1)_{zy} - (v_3)_{xy} + (v_2)_{xz} - (v_1)_{yz} = 0 ,$$

hiszen a Young-tétellel a vegyes parciálisok egyenlőek, azaz

$$(v_1)_{zy} = (v_1)_{yz}, \quad (v_2)_{zx} = (v_2)_{xz}, \quad (v_3)_{yx} = (v_3)_{xy} .$$

4.5 Tétel (Stokes tétel)

Legyen V háromdimenziós normál térrész, melynek határa felosztható az F kifelé irányított valódi felületre és az ugyancsak kifele irányított $-G$ normál síkfelületre. Legyen G határa a G–ből nézve pozitívan irányított L görbe. Ha $V \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^3$ és $v : H \to \mathbf{R}^3$ tetszőleges V–n folytonosan deriválható vektorfüggvény, akkor

$$\int_L v \, dr = \int_F \operatorname{rot} v \, df .$$

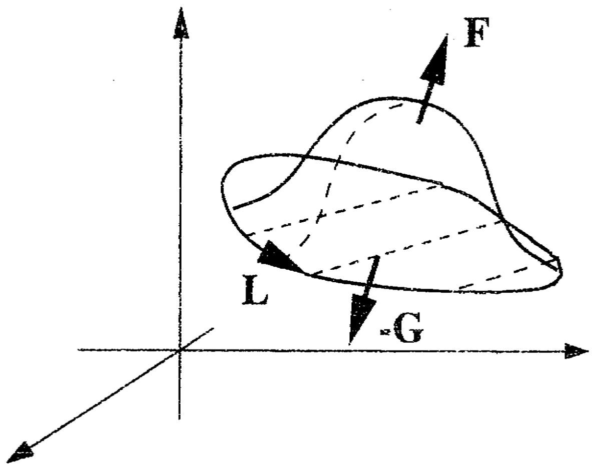
BIZONYÍTÁS. (Ábra a túloldalon.) Csak azt az esetet vizsgáljuk, mikor a G egységnormálisa k (tehát G az [xy]–síkkal párhuzamos) és G árnyéka a szokásos e bázisban normál térrész. Az általános eset a rotáció és az integrálok bázisfüggetlensége miatt teljesen analóg módon tárgyalható (lásd a 4.18 (6) feladatot). A bizonyítás azon alapszik, hogy – mivel a 4.9 Állítás alapján $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0$ – Gauss-Osztrogradszkij tétellel:

$$\int_F \operatorname{rot} v \, df + \int_{-G} \operatorname{rot} v \, df = \int_{F+-G} \operatorname{rot} v \, df = \int_V \operatorname{div}\operatorname{rot} v \, dV = 0 ,$$

amiből

(*) $$\int_F \operatorname{rot} v \, df = -\int_{-G} \operatorname{rot} v \, df = \int_G \operatorname{rot} v \, df .$$

Az eredményül kapott integrál azonban – minthogy G síkfelület – egyszerűen átalakítható G e–beli árnyékán, mint kétdimenziós térrészen vett térfogati integrállá, melyre alkalmazhatjuk a síkbeli Stokes-tételt. Valóban, legyen G egyenlete: $r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z_0)$, $(u,v) \in A$, L egyenlete pedig:



$\rho = \rho(t) = (\xi(t), \eta(t), z_0)$, $t \in I$. (Feltételünk szerint G pontjainak harmadik koordinátája valamely z_0 állandó.) Továbbá, az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelölést tetszőleges háromváltozós f függvény esetén: $f(x,y) = f(x,y,z_0)$. Végül legyenek G és L e-beli árnyékai V^* ill. L^*. Nos, ekkor

$$\mathrm{CROSS}(r_u, r_v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

és G egységnormálisa k, így tetszőleges G-n folytonos $w = (w_1, w_2, w_3)$ függvény esetén, w-nek az egységnormálisra eső vetülete $w_n = w \cdot k = w_3$, tehát a kettős integrál transzformációjára vonatkozó formula felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\int_G w\,df = \int_G w_n\,|df| = \int_G w_3\,|df| = \int_A w_3(x(u,v), y(u,v), z_0)\,|\mathrm{CROSS}(r_u, r_v)|\,dudv =$$

$$= \int_A w_3(x(u,v), y(u,v))\,|\mathrm{CROSS}(r_u, r_v)|\,dudv = \int_A w_3(x(u,v), y(u,v))\,\left|\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\right|\,dudv =$$

$$= \int_{V^*} w_3(x,y)\,dxdy = \int_{V^*} w_3\,dV\,,$$

tehát

$$\int_G w\,df = \int_{V^*} w_3\,dV\,.$$

A kapott összefüggés $w = \mathrm{rot}\,v$ esetén az árnyékokra vonatkozó síkbeli Stokes tétel alkalmazását teszi lehetővé, hiszen felhasználva a 4.8 Megjegyzést, valamint azt, hogy G normál felület és L irányítása G-ből nézve pozitív:

$$\int_G \mathrm{rot}\,v\,df = \int_{V^*} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dV = \int_{L^*} (v_1, v_2)\,dr = \int_I (v_1, v_2)(\rho(t)) \cdot (\dot\xi(t), \dot\eta(t))\,dt =$$

$$= \int_I (v_1, v_2, v_3)(\rho(t)) \cdot (\dot\xi(t), \dot\eta(t), 0)\,dt = \int_I v(\rho(t)) \cdot \dot\rho(t)\,dt = \int_L v\,dr\,.$$

Ez pedig (*)-gal a bizonyítandó állítás.

Érdemes megjegyezni, hogy a Stokes tétel érvényes marad akkor is, ha a vizsgált felület határáról nem kötjük ki, hogy az síkgörbe legyen.

Végül az örvénysűrűségnek a 2.5 Definícióbeli meghatározása alapján a 4.6 Állításból az adódik, hogy a háromdimenziós térben is az örvénysűrűséget a rotáció adja meg:

4.11 Következmény

Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^3$ nyílt és $v : G \to \mathbf{R}^3$ tetszőleges G-n folytonosan deriválható vektorfüggvény. Ekkor G-n létezik v-nek $c(v)$ örvénysűrűsége és fennáll, hogy

$$c(v) = \operatorname{rot} v\,.$$

4.3 Vektorfüggvények jellemzőinek számítása

A divergenciára, rotációra és gradiensre vonatkozó, az előző fejezetben megismert alapvető összefüggések (esetleges értelemszerű módosításokkal) érvényben maradnak magasabb dimenziókban is, tehát az alább megadott állítások a 3.3 pontban szereplő bizonyításokkal analóg módon láthatóak be:

4.12 Állítás

(1) *A divergencia, rotáció és gradiens lineáris operátorok.*

(2) *Konstans vektor divergenciája és rotációja, továbbá konstans skalár gradiense nulla.*

(3) *Lineáris transzformáció divergenciája azonos annak skalárinvariánsával, rotációja pedig vektorinvariánsának kétszeresével.*

(4) *Bármely $v : H \to \mathbf{R}^n$, $H \subseteq \mathbf{R}^n$ deriválható vektorfüggvény, u, u_1, $u_2 : H \to \mathbf{R}$, $H \subseteq \mathbf{R}^n$ deriválható skalárfüggvények, f tetszőleges $\mathbf{R}^+$-on deriválható egyváltozós függvény és c konstans vektor esetén:*

$$\operatorname{div}(u\,v) = u \operatorname{div} v + v \cdot \operatorname{grad} u$$
$$\operatorname{grad}(u_1 u_2) = u_1 \operatorname{grad} u_2 + u_2 \operatorname{grad} u_1$$
$$\operatorname{div} r = n$$
$$\operatorname{grad}(c, r) = c$$
$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n}$$
$$\operatorname{grad} f(|r|) = f'(|r|)\,\frac{r}{|r|} \qquad \text{ha } r \neq 0$$

(5) *Bármely $v : H \to \mathbf{R}^3$, $H \subseteq \mathbf{R}^3$ deriválható vektorfüggvény, $u : H \to \mathbf{R}$, $H \subseteq \mathbf{R}^3$ deriválható skalárfüggvény és c konstans vektor esetén:*

$$\operatorname{rot}(u\,v) = u \operatorname{rot} v - v \times \operatorname{grad} u$$
$$\operatorname{div}(c \times v) = -c \cdot \operatorname{rot} v$$
$$\operatorname{rot} r = 0$$
$$\operatorname{div}(c \times r) = 0\,, \operatorname{rot}(c \times r) = 2c$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$$

4.4 Két fundamentális fizikai alkalmazás

4.4.1 n–dimenziós Coulomb törvény

Ha az n-dimenziós térben meg akarjuk határozni a ponttöltés erőterét, akkor az erőtér három fizikai tulajdonságát kell figyelembe vennünk. Ezek a következők:

(a) A ponttöltés által létrehozott erőtér az adott pontot a ponttöltéssel össszekötő egyenesen hat.

(b) Nincs kitüntetett irány: a tér minden irányban homogén.

(c) A töltés pontszerű: a térnek az origó kivételével nincs forrása.

Nos, ez a három feltétel – mint ahogy alább látni fogjuk – (konstans erejéig) egyértelműen meghatározza a ponttöltés által létrehozott erőteret.

Az első feltétel azt jelenti, hogy a teret leíró $v = v(r)$ vektorfüggvény origóirányú, tehát

(1) $$v(r) = u(r)\,r$$

alakú valamely $u = u(r)$ skalárfüggvény esetén, a második szerint a vektorfüggvény gömbszimmetrikus, azaz tetszőleges, az origótól azonos távolságban levő pontra azonos nagyságú, tehát a fenti skalárfüggvény csak $|r|$-től függ:

(2) $$u(r) = f(|r|)$$

valamely $f = f(x)$ valós függvényre, míg a harmadik alapján

(3) $$\operatorname{div} v(r) = 0 \quad \text{minden } r \neq 0 \text{ esetén.}$$

Mindezekkel

$$\operatorname{div} f(|r|)\,r = f(|r|)\operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad} f(|r|) = n\,f(|r|) + r \cdot f'(|r|)\frac{r}{|r|} = n\,f(|r|) + f'(|r|)|r| = 0\,,$$

amiből $y = f(x)$-re az alábbi differenciálegyenletet adódik:

$$n\,y + y'\,x = 0\,.$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet:

$$y' = -n\,\frac{y}{x}\,.$$

Megoldva a differenciálegyenletet:

$$y' = -n\,\frac{y}{x} \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = -n\,\frac{y}{x} \rightsquigarrow \frac{dy}{y} = -n\,\frac{1}{x} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = -n \int \frac{1}{x}\,dx + c \rightsquigarrow \ln|y| = -n\ln|x| + c \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \ln|y| = \ln\frac{1}{|x|^n} + c \rightsquigarrow \ln|y| = \ln\frac{c'}{|x|^n} \rightsquigarrow |y| = \frac{c'}{|x|^n} \rightsquigarrow y = \frac{c''}{x^n}\,, \quad c'' \in \mathbf{R}\,.$$

(Az utolsó lépés indoklásához lásd a 4.18 (4) feladatot.) Tehát a kívánalmaknak megfelelő $f = f(x)$ függvény az alábbi alakú:

$$f(x) = \frac{c''}{x^n}\,, \quad \text{valamely } c'' \in \mathbf{R}\text{-re}\,.$$

Visszahelyettesítve a kapott eredményt (1) és (2)-be és a töltés egységét úgy határozva meg, hogy $c'' = 1$ legyen, megkapjuk az az n-dimenziós ponttöltés erőterét megadó vektorfüggvényt, azaz az **n-dimenziós Coulomb törvényt:**

$$v(r) = \frac{r}{|r|^n} \quad \text{ha } r \in \mathbf{R}^n \quad \text{és} \quad r \neq 0\,.$$

Nos, erről a vektorfüggvényről – mutatis mutandis – persze ugyanazokat mondhatjuk el, mint síkbeli rokonáról. Először is, persze, a függvényt éppen úgy definiáltuk, hogy az origó kivételével $\operatorname{div} v = 0$. Ebből következően a Gauss-Osztograszkij tétel alapján minden az origót nem tartalmazó normáltartományt határoló zárt felület mentén vett integrál nulla. Másrészt, az origót a belsejükben tartalmazó normáltartományt határoló zárt felületmenti integrál értéke az n-dimenziós egységgömb felületének nagysága. Valóban, egyrészt, ugyanúgy látható be, ahogy a síkon, hogy minden ilyen felületre vett integrál azonos értékű. Másrészt, ha F az origóközéppontú egységgömb, akkor F minden pontjában annak n normálisa r irányú, így, mivel $v \| r$, adódik, hogy $n \| r \| v$ és (mivel F kifele irányított) n és v iránya is megegyezik. Következésképp v-nek n-re eső vetülete $v_n = |v|$, tehát felhasználva, hogy F-n $|v| = \frac{R}{R^n} = 1$, hisz $R = 1$:

$$\int_F v\, df = \int_F v_n\, |df| = \int_F |v|\, |df| = \int_F |df| = |F| .$$

Ami a vonalintegrálokat illeti, a 4.6.3 pontban látni fogjuk, hogy v tetszőleges zárt egyszerű íven vett vonalintegrálja nulla.

Érdemes még megegyezni, hogy általánosításunk nem csak kettőnél nagyobb, de az annál kisebb dimenzióra, tehát az egyenesre is vonatkozik. A ponttöltés tere az egyenesen, vagy a másik példánkat alkalmazva, az egyenes lefolyó, vagy "a vályú" sebességtere:

$$v(r) = \frac{r}{|r|} \quad \text{ha} \quad r \neq 0 ,$$

amiből – mivel $|v(r)| = 1$ – leolvasható, ami szemléletünkkel és közvetlen tapasztalatunkkal is egybevág, hogy egy állandó keresztmetszetű (csap és lefolyó nélküli) csőben vagy csatornában az áramló folyadék sebessége állandó.

4.4.2 Végtelen vezető mágneses tere

A síkbeli eset általánosításához legyen $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a szokásos bázis $\mathbf{R}^n$–en és $L = \mathcal{L}(e_3, e_4, \ldots, e_n)$ azaz az [xy]–síkra merőleges altér. A pontszerű vezető síkbeli mágneses terét leíró függvény egy lehetséges n–dimenziós általánosítása a következő vektorfüggvény:

$$w(r) = \frac{\mathrm{CROSS}(e_3, e_4, \ldots, e_n, r)}{|\mathrm{CROSS}(e_3, e_4, \ldots, e_n, r)|^2} \quad \text{ha } r \notin L .$$

Nos, ez a függvény lényegében nem különbözik a már tárgyalt kétdimenziós esettől. Valóban, az 1.7 Megjegyzés alapján

$$\mathrm{CROSS}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, r) = (-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \ldots & e_{n-1} & e_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \ldots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = (-x_2, x_1, 0, 0, \ldots, 0) .$$

Vagyis bevezetve az $x_1 = x$, $x_2 = y$, $e_1 = i$ és $e_2 = j$ jelöléseket, azt kaptuk, hogy

$$w(x, y, x_3, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-yi + xj) \quad \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 ,$$

ami nyilván teljesen analóg a síkbeli esettel. Tehát egyrészt

$$\operatorname{div} w = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 ,$$

így a Gauss-Osztogradszkij tétellel minden L–be nem belemetsző, normál térrészeket határoló felületen a fluxus nulla. Másrészt, a 4.6.3 pontban majd megmutatjuk, hogy w tetszőleges olyan zárt egyszerű íven vett vonalintegrálja nulla, mely nem veszi körül L-et (lásd a 4.18 (2) feladatot alább).

Speciálisan háromdimenzióban ez a vektorfüggvény a következő alakú (k a z tengely irányú egységvektor):

$$w(r) = \frac{k \times r}{|k \times r|^2} \quad \text{ha} \quad r \in \mathbf{R}^3 \quad \text{és} \quad k \not\parallel r .$$

$$k \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-y, x, 0)\,, \qquad \text{így, ha } k \not\parallel r\,, \text{ akkor}$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y,x,0) \quad \text{tehát a } z \text{ tengely pontjait kivéve}$$

$$\operatorname{div} w(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\operatorname{rot} w(x,y) = (0,0,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}) = 0$$

Következésképpen, a két integráltétel alapján, a z tengelybe nem belemetsző, normál térrészeket határoló felületeken a fluxus nulla és nulla a cirkuláció is az olyan síkgörbéken, melyek nem kerülik meg a z tengelyt (ezek azok a síkgörbék, melyek árnyéka az origót nem tartalmazó kétdimenziós normáltartomány határa). Végül, a kétdimenziós esetre való visszavezetéssel könnyen belátható (lásd a 4.18(3) feladatot alább), hogy a z tengely megkerülő síkgörbéken (melyek árnyéka az origót belsejében tartalmazó normáltartomány határa) a cirkuláció 2π.

4.5 Az integráltételek további alkalmazásai

4.5.1 Egyéb integráltételek

A 3.17 Tétel bizonyítása szó szerint minden változatás nélkül alkalmazható az alábbi általános változat igazolására:

4.13 Tétel (Green–tételek)
Legyen $V \subseteq \mathbf{R}^n$ normál térrész, melynek határa az F kifelé irányított felület és u, $v \in C_2(V)$ tetszőleges n-változós függvények, melyeknek az F felületi normális irányú iránymenti deriváltjai $\frac{\partial u}{\partial n}$ ill. $\frac{\partial v}{\partial n}$. Ekkor

(1) (Antiszimmetrikus Green-formula)

$$\int_V (u\Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)\, dV = \int_F u\frac{\partial v}{\partial n}\,|df|\,.$$

(2) (Szimmetrikus Green-formula)

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \int_F (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\,|df|\,.$$

4.14 Tétel (Gauss–Osztrogradszkij tipusú tételek)
Ha $V \subseteq \mathbf{R}^n$ normál térrész, melynek határa az F kifelé irányított felület, $u : V \to \mathbf{R}$ és $v : V \to \mathbf{R}^n$ tetszőlegesek, továbbá u, $v \in C_1(V)$, akkor

(1) (I. Gauss–Osztogradszkij tétel)

$$\int_V \operatorname{div} v\, dV = \int_F v\, df$$

(2) (Gradiens tétel)

$$\int_V \operatorname{grad} u\, dV = \int_F u\, df\,.$$

Továbbá:

(3) (II. Gauss–Osztogradszkij tétel)

Ha $V \subseteq \mathbf{R}^3$ normál térrész, melynek határa az F kifelé irányított felület és $v : V \to \mathbf{R}^3$, $v \in C_1(V)$ tetszőleges, akkor

$$\int_V \operatorname{rot} v \, dV = -\int_F v \times df$$

BIZONYÍTÁS. Ahogy már említettük, (1) bizonyítása a síkbeli változattal analóg és ugyanez igaz (2)–re is. Ami (3)–at illeti, legyen $\mathbf{R}^3$ szokásos bázisa $e = (i, j, k)$. Azt fogjuk megmutatni, hogy a két oldalon álló vektorok mindhárom komponense megegyezik. Miután persze a három eset teljesen analóg, csak az egyiket, a k irányú komponensek azonosságának igazolását részletezzük.
Először is, ha $v = (v_1, v_2, v_3)$, akkor

$$v \times k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (v_2, -v_1, 0),$$

amiből

$$\operatorname{div}(v \times k) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = k \cdot \operatorname{rot} v \ .$$

Nos, a Gauss-Osztrogradszkij tételt használva fenti eredmény a következőre vezet:

$$\int_F v \times k \, df = \int_V \operatorname{div}(v \times k) \, dV = \int_V k \cdot \operatorname{rot} v \, dV = k \cdot \int_V \operatorname{rot} v \, dV$$

A bizonyítás teljessé tételéhez, most már csak annyit kell bizonyítanunk, hogy

$$\int_F v \times k \, df = -k \cdot \int_F v \times df .$$

Azonban a felületmenti integrálok definíciója és a vegyes szorzat (melyet alább szögletes zárójellel jelölünk) ciklikus permutációkra való invarianciája alapján ez egyszerű számolással adódik. Valóban, legyen F egyenlete $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in A$. Ekkor

$$\int_F v \times k \, df = \int_A (v \times k)(r(u,v)) \; \mathrm{CROSS}(r_u, r_v) \, dudv = \int_A \mathrm{CROSS}(r_u, r_v) \cdot (v \times k) \, dudv =$$

$$= \int_A [\mathrm{CROSS}(r_u, r_v) \, v \, k] \, dudv = \int_A [k \, \mathrm{CROSS}(r_u, r_v) v] \, dudv = -\int_A k \cdot (v \times \mathrm{CROSS}(r_u, r_v)) \, dudv =$$

$$= -k \cdot \int_A (v \times \mathrm{CROSS}(r_u, r_v)) \, dudv = -k \cdot \int_A v \times df .$$

Mivel a 3.7 Következmény bizonyításában szereplő (*) állítás szó szerint átvihető tetszőleges nem nulla véges dimenzióra, fenti tételek közvetlen következményeiként adódnak az invariánsok és a gradiens magasabb dimenziókra is érvényes sűrűség–jellegű jellemzései:

4.15 Következmény (Ignatowsky–féle definíciók)

(1) *Legyen $r_0 \in G \subseteq \mathbf{R}^n$ tetszőleges nyílt halmaz, $v : G \to \mathbf{R}^n$ és $u : G \to \mathbf{R}$ folytonosak. Ha a (V_k) r_0–ra zsugorodó $\mathbf{R}^n$–beli normál térrészek tetszőleges olyan sorozata, melyre minden $k \in \mathbf{N}$ esetén $V_k \subseteq G$ határa a kifelé irányított F_k felület, akkor*

$$\operatorname{div} v\big|_{r_0} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v \, df$$

$$\operatorname{grad} u\big|_{r_0} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} u \, df$$

(2) *Legyen* $r_0 \in G \subseteq \mathbf{R}^3$ *tetszőleges nyílt halmaz és* $v : G \to \mathbf{R}^3$ *folytonos. Ha a* (V_k) r_0*–ra zsugorodó* $\mathbf{R}^3$*-beli normál térrészek tetszőleges olyan sorozata, melyre minden* $k \in \mathbf{N}$ *esetén* $V_k \subseteq G$ *határa a kifelé irányított* F_k *felület, akkor*

$$\operatorname{rot} v\Big|_{r_0} = -\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} v \times df$$

4.5.2 Felület– és vonalmenti integrálok számítása

Az integráltételeknek különböző integálok kiszámítára való alkalmazását egy olyan példával illusztráljuk, melyben a felületi integrál kiszámítására mind a két fő integráltétel alkalmazható.

4.16 Példa

Legyen k a z tengely irányú egységvektor és K az [xy]–síkbeli origóközéppontú R sugarú $-k$ egységnormálisú körlap, továbbá F tetszőleges olyan felület, hogy $F + K$ egy normál térrész kifele irányított határa. Számítsuk ki $v(r) = \operatorname{rot}(k \times r)$ esetén az

$$\int_F v\, df$$

integrált !

1. MEGOLDÁS

Gauss-Osztrogradszkij tétellel :

$$\int_F v\, df + \int_K v\, df = \int_{F+K} v\, df = \int_V \operatorname{div} v\, dV = 0\,,$$

mert $\operatorname{rot}(k \times r) = 2k$ (lásd az 4.12 (5) Állítást) és így $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = \operatorname{div}\operatorname{rot}(k \times r) = \operatorname{div} 2k = 0$.
Tehát

(*) $$\int_F v\, df = -\int_K v\, df\,.$$

Számítsuk ki a jobboldali integrált ! Mivel K normálisa $-k$ irányú, így k–nak a normálisra eső vetülete -1, tehát

$$\int_K v\, df = \int_K \operatorname{rot}(k \times r)\, df = \int_K 2k\, df = 2\int_K -1\,|df| = -2\int_K |df| = -2|K| = -2R^2\pi\,,$$

így (*)–gal

$$\int_F v\, df = -\int_K v\, df = 2R^2\pi\,.$$

2. MEGOLDÁS

Legyen L a K $-K$–ból nézve pozitívan irányított határa, az [xy]–síkbeli origóközéppontú R sugarú körvonal és L érintő egységvektora e. Mivel e és $k \times r$ azonos irányúak, tehát $(k \times r)_e$, $k \times r$–nek e–re eső vetülete éppen $|k \times r|$, valamint figyelembe véve, hogy k és r merőlegesek egymásra (hisz a kör benne van az $[xy]$ síkban) és hogy a körön $|r| = R$, Stokes tétellel azt kapjuk, hogy

$$\int_F v\, df = \int_F \operatorname{rot}(k \times r)\, df = \int_L k \times r\, dr = \int_L (k \times r)_e\, |dr| = \int_L |k \times r|\, |dr| = \int_L |k|\,|r|\,|dr| =$$

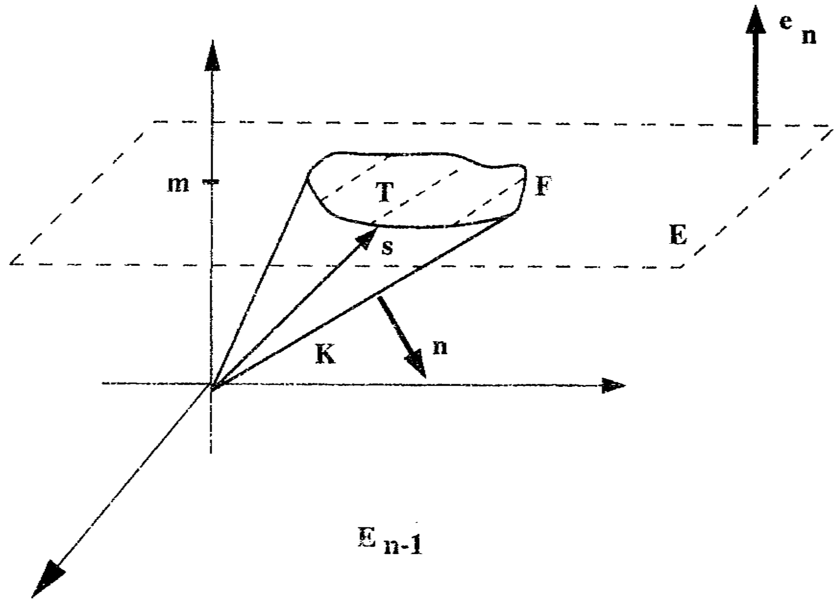
$$= \int_L R\,|dr| = R\int_L |dr| = R|L| = R2R\pi = 2R^2\pi\,.$$

4.5.3 Egy geometriai alkalmazás: az n–dimenziós kúp térfogata

Legyen F egy olyan $n-2$ dimenziós felület, mely az n. koordinátatengelyre merőleges $n-1$ dimenziós E_{n-1} koordinátaaltér $E = (0,0,\ldots,0,m) + E_{n-1}$ eltóltjában van és tegyük fel, hogy F a $T \subseteq E$ $(n-1)$–dimenziós felület határa. Legyen F egyenlete $s = s(u)$, $u \in A \subseteq \mathbf{R}^{n-2}$. Ha az $r = r(u,t) = t \cdot s(u)$, $u \in A$, $t \in \mathbf{R}$, $0 \le t \le 1$ egy $(n-1)$–dimenziós K felületet definiál, akkor ezt az n–**dimenzióbeli origócsúcsú** T **alapú** m **magasságú kúp(palást)**nak nevezzük. Az elnevezés nyilván jogos, hiszen háromdimenziós esetben ez a definíció a $z = m$ síkban fekvő F alapgörbéjű és T alaplapú origócsúcsú (közönséges) kúpot adja. Nos, ha $K + T$ egy n dimenziós V normál térrész kifelé irányított határa, melynek térfogata V_0 és T felszíne t, akkor

$$V_0 = \frac{t\,m}{n}\,;$$

azaz a kúp térfogata: "alapterület szorozva magasság osztva a dimenzióval".



Valóban, legyen $v(r) = r$. Mivel r definíciójából $r_t = s(u)$, így CROSS definíciója alapján a $w = (u,t)$ jelöléssel, ha $r \in K$, akkor

$$n = \mathrm{CROSS}(r_w) \perp r_t = s(u) \parallel t \cdot s(u) = r = v,$$

tehát

(1) $$\int_K v\, df = \int_K v_n\, |df| = 0\,.$$

Másrészt, $T \subseteq E$ miatt T egységnormálisa pontosan e_n, az n. koordinátaegységvektor és persze ugyanezért a T–beli vektorok utolsó koordinátája m, így

$$\text{ha} \quad r \in T\,, \quad \text{akkor} \quad r \in T\,, \quad \text{tehát} \quad r \cdot e_n = m\,,$$

vagyis

(2) $$\int_T v\, df = \int_T v_{e_n}\, |df| = \int_T v \cdot e_n\, |df| = \int_T r \cdot e_n\, |df| = \int_T m\, |df| = m \int_T |\, df| = m\,t\,.$$

Most jöhet a Gauss-Osztrogradszkij tétel, amivel (felhasználva persze azt, hogy $\operatorname{div} v = \operatorname{div} r = n$):

$$\int_T v\,df + \int_K v\,df = \int_{K+T} v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dV = \int_V \operatorname{div} v\,dV = \int_V n\,dV = n\int_V dV = n\,V_0\,.$$

Ez pedig már a bizonyítandó állítás, hiszen (1) és (2) alapján ebből

$$m\,t = \int_T v\,df = n\,V_0\,.$$

Érdemes a kapott formulát az első néhány dimenzióban egy pár speciális esetre kipróbálni:

(1) $n = 1$: az m magas szakasz hossza (egydimenziós térfogata) (az alap nulldimenziós felszíne az 1.14 (4) megjegyzés szerint 1):

$$V_0 = \frac{1\cdot m}{1} = m\,.$$

(2) $n = 2$: az m magas a alaphosszúságú háromszög szakasz területe (kétdimenziós térfogata):

$$V_0 = \frac{a\,m}{2}\,,$$

vagyis az n–dimenziós kúp térfogatára kapott összefüggésünk a háromszög jól ismert területképletének: "alap szorozva magasság osztva kettő" általánosítása, másszóval a háromszög területképletében a kettes a dimenziószám, azért ennyi szerepel itt, mert a háromszög *sík*idom.

(3) $n = 3$: az m magas R sugarú körkúp térfogata:

$$V_0 = \frac{R^2\pi\,m}{3}\,.$$

(4) $n = 4$: az m magas R sugarú gömbkúp térfogata:

$$V_0 = \frac{\frac{4R^3\pi}{3}\,m}{4} = \frac{R^3\pi\,m}{3}\,.$$

4.5.4 Egy fizikai alkalmazás: Archimedes törvénye

1. p_0 külső nyomás esetén nyugvó ρ sűrűségű homogén folyadékban a felszíntől számított h mélységben a nyomás, az ún. **hidrosztatikai nyomás**, a külső nyomás és felületelem felett lévő függőleges folyadékoszlop súlyából származó nyomás összege, azaz

$$p = p_0 + \rho g h\,,$$

amely *független a felületelem irányításától* (g a gravitációs állandó).

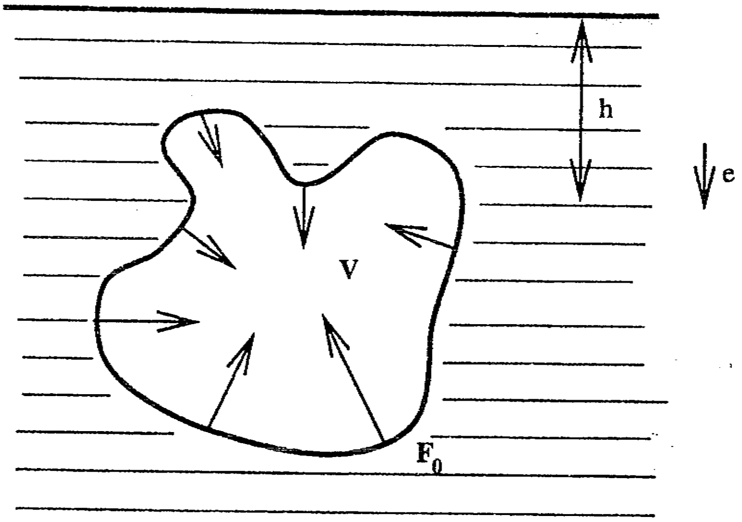
(Maga a p nyomás általában a q felületű lapra (vagy Δq felületelemre) merőlegesen és egyenletesen ható nyomóerő F (ill. ΔF) nagyságának és a felületnek hányadosa, azaz a következő skaláris mennyiség:

$$p = \frac{F}{q} \quad (\text{ill. } p = \frac{\Delta F}{\Delta q})\,.)$$

(Vö. pl. Budó Ágoston: Kísérleti Fizika I. 224. és 211. old.)

2. Fentiek alapján valamely folyadékban egy V térrészt kitöltő test esetén, a folyadék hidrosztatikai nyomásából származó, a testre ható erők eredője, azaz a test határát alkotó zárt befelé irányított F_0 felületre ható eredő erő (az ábrát lásd a túloldalon) :

$$F = \int_{F_0} p\,df\,.$$



Mivel a folyadék homogén, azaz ρ állandó, tehát $c = \rho \cdot g$ konstans, p csak h-tól függ, $p = p(h) = p + c \cdot h$, így $|\mathrm{grad}\, p| = c =$ állandó és $\mathrm{grad}\, p$ mindenütt lefelé mutat (h csak erre változik és erre nő), tehát ha e a lefelé mutató egységvektor, akkor

$$\mathrm{grad}\, p = c \cdot e\,.$$

Ebből, a térrész térfogatát V_0-al jelölve, gradiens tétellel

$$F = \int_{F_0} p\, df = -\int_{-F_0} p\, df = -\int_V \mathrm{grad}\, p\, dV = -\int_V c \cdot e\, dV = -c \cdot e \int_V dV = -cV_0 \cdot e = -g\rho V_0 \cdot e\,.$$

Mivel ρV_0 a test térfogatával megegyező térfogatú folyadék tömege, tehát $g\rho V_0$ ennyi folyadék súlya, azt kaptuk, hogy a testre ható eredő erő a test térfogatával megegyező térfogatú folyadék súlyával egyenlő nagyságú és azzal ellenkező irányú, vagyis például ha a folyadék víz, akkor

egy vízbe mártott test a súlyából annyit veszt, amennyi az általa kiszorított víz súlya.

4.6 Potenciálelemélet elemei

4.6.1 Egzisztencia és unicitás

A potenciál létezésére és egyértelműségére vonatkozó legfontosabb két eredmény, a 3.28 Tétel és a 3.32 Tétel háromdimenziós változatának bizonyítása a kétdimenziós változat bizonyításának szó szerinti másolata, ugyanis egyik bizonyításban sem használtuk ki sehol azt, hogy síkon van. Sőt, ez igaz bármely véges dimenzióra is, természetesen a rotációra vonatkozó feltétel alkalmas módosításával. Nevezetesen, legyen $v : V \to \mathbf{R}^n$ tetszőleges vektorfüggvény. Azt mondjuk, hogy v **keresztbe vett parciális deriváltjai megegyeznek** ha $(v_i)_{x_j} = (v_j)_{x_i}$ minden $i, j = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Nos, nyilván, ez a feltétel értelmezhető tetszőleges n pozitív egész esetén $\mathbf{R}^n$-re, továbbá, ha $n = 2$ és $n = 3$, akkor ekvivalens azzal, hogy v rotációja nulla. A 3.28 és a 3.32 tételek bizonyításában a rotáció eltűnését a keresztbe vett parciális deriváltak megegyezésével helyettesítve megkapjuk ezen tételek $\mathbf{R}^n$-re vonatkozó általánosítását:

4.17 Tétel

Legyen $G \subseteq \mathbf{R}^n$ tetszőleges nyílt, összefüggő halmaz és $v : G \to \mathbf{R}^n$ folytonos vektorfüggvény. Ekkor az alábbi állítások mindegyike következik az elsőből és ha G csillagszerű tartomány, akkor mindezen állítások ekvivalensek is:

(1) *v-nek van potenciálja S-en.*

(2) *v görbementi integrálja minden G-be eső két pont közötti G-beli görbe esetén csak a kezdő- és végpontoktól*
függ, a görbe választásától nem

(3) *v görbementi integrálja minden G-be eső zárt egyszerű íven nulla.*

(4) *v keresztbe vett parciális deriváltjai megegyeznek az egész G-n, amennyiben $v \in C_1(G)$.*

4.6.2 Potenciálkeresés

A síkon alkalmazott mindkét módszer könnyedén kiterjeszthető magasabb dimenziókra. Pontosabban, mivel az origókezdőpontú szakasz mentén való vonalintegrál alkalmazásakor egyáltalában nem használtuk ki, hogy $\mathbf{R}^2$-en vagyunk, ennél a módszernél csupán annyi a változás, hogy a rotáció eltűnése helyett a keresztben vett parciálisok megegyezését kell vizsgálnunk, ha garantálni akarjuk, hogy a módszer helyes eredményt szolgáltat. A parciális differenciálegyenletrendszer megoldását használó módszer alkalmazásának kiterjesztését egy egyszerű példán ilusztráljuk.

Legyen

$$v = v(x, y, z) = (y + z, x + w, x + w, y + z)$$

az a vektorfüggvény, melynek potenciálját meg akarjuk határozni.

Mivel $(v_1)_y = 1 = (v_2)_x$, $(v_1)_z = 1 = (v_3)_x$, $(v_1)_w = 0 = (v_4)_x$, $(v_2)_z = 0 = (v_3)_y$, $(v_2)_w = 1 = (v_4)_y$, $(v_3)_w = 1 = (v_4)_z$, így v-nek tényleg van potenciálja az egész síkon. Legyen u ez a potenciál. Ekkor $(v_1, v_2, v_3, v_4) = v = \operatorname{grad} u = (u_x, u_y, u_z, u_w)$ miatt a

(*) $$v_1 = u_x\,,\ v_2 = u_y\,,\ v_3 = u_z\,,\ v_4 = u_w$$

összefüggéseknek fenn kell állniok. Ezt az egyenletrendszert kell megoldanunk.

Induljunk ki például az

$$u_x = v_1 = y + z$$

egyenletből. Ekkor x szerint integrálva

$$u = (y + z)x + a(y, z, w)$$

valamely $a = a(y, z, w)$ *csak* y, z és w-tól függő differenciálható függvényre. Ebből, v definíciójából és (*)-ból

$$\begin{aligned} x + w = v_2 = u_y &= x + a_y\,, \\ x + w = v_3 = u_z &= x + a_z\,, \\ y + z = v_4 = u_w &= a_w\,, \end{aligned}$$

tehát

(**) $$\begin{aligned} a_y &= w\,, \\ a_z &= w\,, \\ a_w &= y + z\,, \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ezzel az u-ra vonatkozó négy egyenletből álló (*) összefüggést egy, az a-ra vonatkozó már csak három egyenletből álló összefüggésre redukáltuk. Látható tehát, hogy a síkbeli potenciálkeres ismertetésekor adott algoritmus minden lépésben eggyel csökkenti a megoldandó egyenletrendszerben szereplő egyenletek számát. Tehát az eljárást folytatva az előző összefüggések közül az elsőből $a_y = w$, így:

$$a = wy + b(z, w)$$

valamely $b = b(z, w)$ *csak* z és w-től függő differenciálható függvényre, amiből (**)-gal

$$\begin{aligned} b_z = a_z &= w\,, \\ y + b_w = a_w &= y + z\,, \end{aligned}$$

vagyis

(***)
$$b_z = w\,,$$
$$b_w = z\,,$$
tehát
$$b = wz + c(w)\,,$$
valamely $c = c(w)$ *csak* wz–től függő differenciálható függvényre, amiből (***) alapján
$$z = b_w = z + c'\,,$$
tehát
$$c' = 0\,,\ \text{vagyis } c \text{ konstans.}$$
Visszahelyettesítve a b, a és u–ra vonatkozó előző összefüggésekbe megkapjuk a keresett potenciált:
$$b = wz + c \rightsquigarrow a = wy + wz + c \rightsquigarrow u = (y+z)x + wy + wz + c = (y+z)(x+w) + c\,.$$
És persze valóban:
$$u_x = y + z = v_1\,,\ u_y = x + w = v_2\,,\ u_z = x + w = v_3\,,\ u_w = y + z = v_4\,.$$

4.6.3 A ponttöltés erőterének és duálisának potenciálja

Alapvető fizikai alkalmazásainkat a 4.4 pontban általánosítottuk. Most mogmutatjuk, hogy ezen általánosítások esetén is létezik potanciál, ami a 4.4 pontban elmondottakkal együtt azt jelenti, hogy ezek a kiterjesztések megőrzik az erdeti síkbeli függvények leglényegesebb vonásait.

a) A ponttöltés erőtere

Az n–dimenziós ponttöltés erőterének potenciáljának meghatározásához felhasználjuk azt a 3.6.2 b)–ben kapott eredményt, hogy *ha* m *nemnegatív egész, akkor*
$$\operatorname{grad}\frac{|r|^{m+2}}{m+2} = \frac{1}{m+2}\operatorname{grad}|r|^{m+2} = \frac{1}{m+2}(m+2)|r|^{m+1}\operatorname{grad}|r| = |r|^{m+1}\frac{r}{|r|} = r|r|^m \quad (r \neq 0)\,.$$
Vegyük észre, hogy itt sehol sem használtuk a feltételt, tehát a kapott eredmény igaz ***minden*** olyan m esetén, melyre a baloldal egyáltalán értelmes, tehát minden $m \neq -2$–re. Ezzel készen is vagyunk, hiszen a 3.6.3 pontban a síkbeli esetre már meghatároztuk a potenciált, tehát a fenti összefüggésből az $m = -n$ helyettesítéssel:

A $v(r) = \dfrac{r}{|r|^n}$, $(n \geq 1$ egész$)$ függvény potenciálja $u(r) = \begin{cases} \frac{1}{2-n}\frac{1}{|r|^{n-2}} & \text{ha } n \neq 2 \\ \ln|r| & \text{ha } n = 2 \end{cases} \quad (r \neq 0).$

Ebből aztán a 4.17 Tétel alapján az is következik, hogy v–nek tetszőleges zárt egyszerű íven vett vonalintegrál nulla. Ami az erővonalakat illeti, a síkbelihez hasonlóan az általános esetben is ezek az origóból induló félegyenesek, melyek érintői az ekvipotenciális felületek, azaz az origóközéppontú gömbök normálisai.

b) Végtelen vezető mágneses tere

Emlékeztetőül, a teret leíró, a kétdimenzióssal analóg függvény (lásd a 4.4.2 pontot):
$$w(x, y, x_3, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-yi + xj) \quad \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0\,.$$
A síkbeli esethez hasonlóan mutatható meg, hogy w–nek minden csillagszerű tartományon, melynek elemeire fennáll, hogy $x^2 + y^2 \neq 0$ van potenciálja, például a negatív y tengellyel felmetszett síkon az
$$u(x, y, x_3, \ldots, x_n) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{ha } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } x = 0\,,\ y > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény. Ebből következően a 4.17 Tétel szerint tetszőleges olyan zárt egyszerű íven vett vonalintegrál nulla, mely a

$$L = \{(x, y, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x^2 + y^2 = 0\}$$

halmazt nem veszi körül (lásd a 4.18 (2) feladatot).

4.7 Feladatok

(1) Bizonyítsuk be, hogy háromdimenziós téren felület határának árnyéka az árnyék határa!

(2) Fogalmazzuk meg a "körülveszi a z tengelyt" tulajdonság általánosítását a kétdimenziós eset mintájára (lásd a 3.6.3 b) pont utolsó mondatát)!

(3) Bizonyítsuk be, hogy a z tengely megkerülő síkgörbéken, azaz azokon a síkgörbéken, melyek árnyéka az origót belsejében tartalmazó normáltartomány határa, a

$$w(r) = \frac{k \times r}{|k \times r|^2} \qquad (r \in \mathbf{R}^3, \ \ k \not\parallel r)$$

háromdimenziós vektorfüggvény cirkulációja 2π!

(4) Bizonyítsuk be, hogy bármely I intervallum esetén

$$|y| = \frac{c}{|x|^n}$$

függvényegyenlet I–n folytonos megoldásai azonosak a

$$y = \frac{c}{x^n}$$

függvényegyenlet I–n folytonos megoldásaival!

(5) Bizonyítsuk be, hogy ha egy görbe árnyéka valamely bázisban pozitív irányítású, akkor minden bázisban az.

(6) Bizonyítsuk be tetszőleges egységnormálisú síkfelületre a a Stokes tételt!