17. ISMERTESSE A TÁVÍRÓEGYENLETEKET ÉS MEGOLDÁSUKAT SZINUSZOS GERJESZTÉS ESETÉN!

Távvezetékek → távíró egyenletek (lev. mélből) → Helmholtz egyenlet (levezetéssel) ⇒ Helmholtz-egyenlet megoldása levezetéssel + hullámimpedancia

1. TÁVVEZETÉKEK

A távvezetékeket a koncentrált paraméterű hálózat általánosításaként fogjuk tárgyalni.

A koncentrált (~~elosztott~~) paraméterű hálózat fogalom addig használható fogalom, amíg a modellezendő objektum méretei a hullámhosszhoz képest kicsik. (Nincs késleltetés, terjedési idő, elemek pontszerűek).

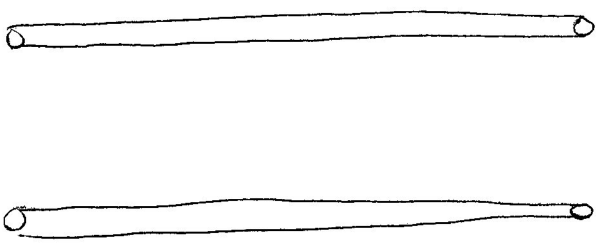
Az elosztott paraméterű objektum feszültséggel és árammal leírjuk, és figyelembe vesszük a véges terjedési sebességet. A feszültség és áram nem csak az időtől, hanem egy térbeli koordinátától is függ:

$u(x,t)$ $i(x,t)$. A legfontosabb elosztott par. hálózatot a távvezeték.

Távvezetéktípusok:

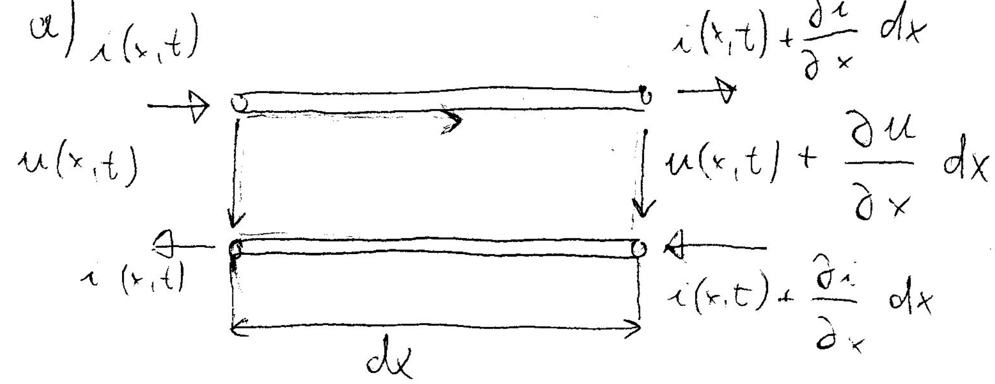
- Homogén kitöltésű: Vezetékpár (Lecher-vez.) koaxiális kábel, szalagvonal, árnyékolt vezetékpár, szim. szalagvonal
- Inhomogén kitöltésű: Tápvezeték, mikroszalagvonal, koplanáris vezeték (közös sík)

2. A TÁVÍRÓ (TELEGRÁF) EGYENLETEK



Távvezeték szimbóluma, megkülönböztetjük az egyszerű kötő dróttól, kétvezetékes elrendezés.

a)



Írjuk fel a II. Maxwell-egyenletet a zölddel jelölt zárt hurokra!

$\oint \bar{E}\, d\bar{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$: Ez azt jelenti részletesen, hogy a térerősségeket össze kell számolni a zárt hurok mentén. Legyen R_1 a felső, R_2 az alsó vezeték hosszegységre eső ellenállása: $[R_1] = \frac{\Omega}{m}$ ekkor:

$$R_1\,dx \cdot i(x,t) + u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}dx + R_2\,dx \cdot i(x,t) - u(x,t) =$$

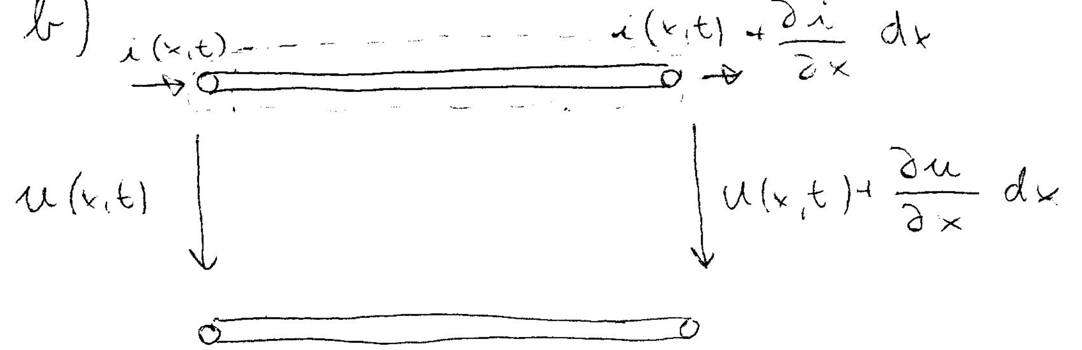
$$= -\frac{d\phi}{dt}$$ // i-nél a $\frac{\partial i}{\partial x}\cdot dx$-et elhagyhatjuk, mert csak belépne egy elhanyagolható dx^2-es tag.

$$\Rightarrow \overbrace{(R_1+R_2)}^{R}\,dx\,i(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\partial x = -L\,dx\,\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad / \; \phi = L\,dx\,i$$

$i(x,t) \to i$

$$\boxed{-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}}$$ 1. TÁVÍRÓ EGYENLET.

b)



A folytonossági egyenletet alkalmazzuk a pirossal jelölt zárt dobozra:

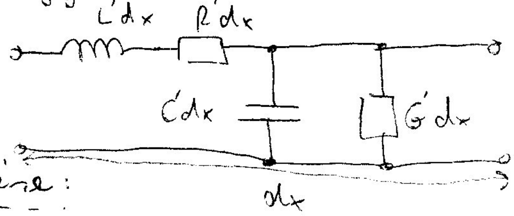
$$\oint_A \bar{j}\, d\bar{A} = -\frac{dQ}{dt}$$

hosszegységre eső átvezetés $[G] = \frac{S}{m}$

$$-i(x,t) + i(x,t) + \frac{\partial i}{\partial x}dx + \underbrace{G\,dx\cdot u}_{\text{szivárgási áram}} = -C\,dx\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}}$$

2. távíró egyenlet



Távíró egyenletek fizikai jelentése:

$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}$: A feszültség csökken, mert az ohmos ellenálláson és az induktivitáson ~~feszültség esik.~~ áram folyik, ezáltal fesz. esik.

$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$: Az áram csökken, mert az átvezetésen elszivárog és mert a kondenzátoron átfolyik a kapacitív áram (eltolási áram).

3. HELMHOLTZ EGYENLET

Az időben szinuszos állandósult állapotot a feszültség és áram komplex alakjával írjuk le:

$$u(x,t) = Re\{\bar{U}(x)e^{j\omega t}\} \quad \Big| \quad i(x,t) = Re\{\bar{I}(x)e^{j\omega t}\}$$

Az időbeli ~~szorzás~~ differenciálás $j\omega$-val való szorzásra egyszerűsödik. ☆

így a távíró egyenletek:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}\left\{\bar{U}(x)e^{j\omega t}\right\} = R\operatorname{Re}\left\{\bar{I}(x)e^{j\omega t}\right\} + L\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Re}\left\{\bar{I}(x)e^{j\omega t}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{d\bar{U}(x)}{dx} = (R+j\omega L)\bar{I}(x)$$

Ugyanez a 2. távíró egyenletre is:

$$-\frac{d\bar{I}(x)}{dx} = (G+j\omega C)\bar{U}(x)$$

Deriváljuk le mégegyszer az első egyenletet x szerint:

$$-\frac{d^2\bar{U}(x)}{dx^2} = (R+j\omega L)\frac{d\bar{I}(x)}{dx} \qquad // \quad -\frac{d\bar{I}(x)}{dx} = (G+j\omega C)\bar{U}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\bar{U}(x)}{dx^2} = \underbrace{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}_{\bar{\gamma}^2}\bar{U}(x)$$

: γ a terjedési e.h.: $\boxed{\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}}$

$$\boxed{\frac{d^2\bar{U}(x)}{dx^2} = \bar{\gamma}^2\,\bar{U}(x)}$$

HELMHOLTZ EGYENLET

→ Azért a felülvonás, mert komplex, nem azért mert vektor!

4. AZ EGYENLETEK MEGOLDÁSA

$$\frac{d^2 \bar{U}(x)}{dx^2} = \bar{\gamma}^2 \bar{U}(x)$$

Olyan függvényt keresünk, aminek a második deriváltja arányos a függvénnyel. Két ilyen van, az $e^{-\bar{\gamma} x}$ és az $e^{\bar{\gamma} x}$. A kettőnek a lineáris kombinációja is megoldás:

$$\boxed{\bar{U}(x) = \bar{U}_0^{+} e^{-\bar{\gamma} x} + \bar{U}_0^{-} e^{\bar{\gamma} x}} = \bar{U}^{+}(x) + \bar{U}^{-}(x)$$

komplex, de NEM függ x-től

Az áramra is szeretnénk meghatározni a megoldást.

$$-\frac{d\bar{U}(x)}{dx} = (R+j\omega L)\bar{I}(x) \Rightarrow \bar{I}(x) = -\frac{1}{R+j\omega L}\frac{d\bar{U}(x)}{dx}$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{\gamma}}{R+j\omega L}\bar{U}_0^{+} e^{-\bar{\gamma} x} - \frac{\bar{\gamma}}{R+j\omega L}\bar{U}_0^{-} e^{\bar{\gamma} x}$$

~~A~~ Vezessünk be még egy mennyiséget:

$$\frac{R+j\omega L}{\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}} = \boxed{\sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} = Z_0}$$

: Hullámimpedancia.

$$\boxed{\bar{I}(x) = \frac{\bar{U}_0^{+}}{Z_0} e^{-\bar{\gamma} x} - \frac{\bar{U}_0^{-}}{Z_0} e^{\bar{\gamma} x}} = \bar{I}^{+}(x) + \bar{I}^{-}(x)$$

$$\boxed{\bar{Z}_0 \triangleq \frac{\bar{U}^{+}(x)}{\bar{I}^{+}(x)}} = \frac{-\bar{U}^{-}(x)}{\bar{I}^{-}(x)}$$

18. ISMERTESSE A LEZÁRT TÁVVEZETÉKEN A REFLEXIÓ TÉNYEZŐ, A BEMENETI IMPEDANCIA FOGALMÁT!

Helmholtz egyenlet megoldása → $x \Rightarrow z$ csere ⇒ Bemeneti impedancia, majd kapcs.
1. BEVEZETŐ: reflexiós tényező → képletek → fizikai jelentés (NEM TRANZIENST ÍR LE!)

A vezetéken kialakuló feszültség, illetve áram komplex amplitúdójának kifejezése:

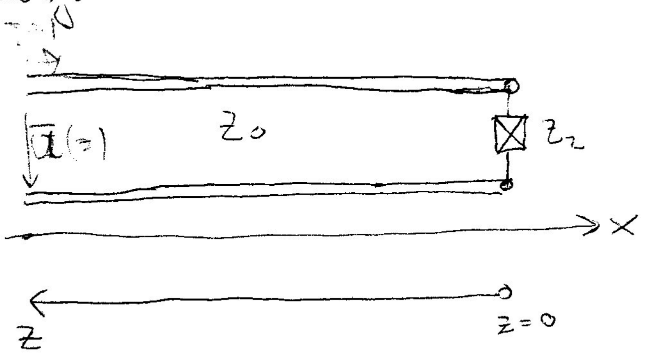
$$\overline{U}(x) = \overline{U}_0^+ e^{-\overline{\gamma} x} + \overline{U}_0^- e^{\overline{\gamma} x} \qquad \overline{I}(x) = \frac{\overline{U}_0^+}{\overline{Z}_0} e^{-\overline{\gamma} x} - \frac{\overline{U}_0^-}{\overline{Z}_0} e^{\overline{\gamma} x}$$

Ahol $\overline{U}_0^+$ és $\overline{U}_0^-$ komplex konstans (a peremfeltételekből), a poz. ill. negatív irányban terjedő feszültséghullám komplex amplitúdója a vezeték elején ($x=0$). Célunk e két állandó kifejezése az adottnak tekinthető mennyiségekkel.

2. ~~(A REFLEXIÓS TÉNYEZŐ)~~, BEMENETI IMPEDANCIA

peremfeltételünk lesz: Adott

A következő speciális peremfeltételünk lesz: Adott a feszültség és áram hányadosa a vezeték valamely pontjában. A távvezetéken bevezetünk egy új koord. rendszert:



A z tengely 0 helye a távvezetéken a lezárás helyével lesz egyező. A távvezetéknek valahol vége van, és oda ~~van~~ kötve egy Z_2 nagyságú impedancia. $\overline{\gamma} = \alpha + j\beta$ {Ideális távvez.!} $\overline{Z}_0 = Z_0$ $(\alpha = 0)$, Ekkor:

$$\overline{U}(z) = \overline{U}_0^+ e^{j\beta z} + \overline{U}_0^- e^{-j\beta z} \qquad \overline{I}(z) = \frac{\overline{U}_0^+}{Z_0} e^{j\beta z} - \frac{\overline{U}_0^-}{Z_0} e^{-j\beta z}$$

$$\boxed{\overline{Z}(z) \triangleq \frac{\overline{U}(z)}{\overline{I}(z)}}$$: BEMENETI IMPEDANCIA: z helyen bejövő az impedancia, ha tőle befelé ellenegyezünk.

$$\overline{Z}(z) = \frac{\overline{U}(z)}{\overline{I}(z)} = \frac{\overline{U}_0^+ e^{j\beta z} + \overline{U}_0^- e^{-j\beta z}}{\frac{\overline{U}_0^+}{Z_0} e^{j\beta z} - \frac{\overline{U}_0^-}{Z_0} e^{-j\beta z}} = Z_0 \frac{1 + \frac{\overline{U}_0^- e^{-j\beta z}}{\overline{U}_0^+ e^{j\beta z}}}{1 - \frac{\overline{U}_0^- e^{-j\beta z}}{\overline{U}_0^+ e^{j\beta z}}}$$

[illegible] KÉPLET: $Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \operatorname{tg} \beta x}{Z_0 + jZ_2 \operatorname{tg} \beta x}$

3) A REFLEXIÓS TÉNYEZŐ

Definiáljuk a reflexiós tényezőt az alábbi módon:

$$\boxed{\bar{r}(z) = \frac{\bar{U}_0^- e^{-j\beta z}}{\bar{U}_0^+ e^{j\beta z}}} = \frac{\text{a jobbról balra haladó feszültség hullám komplex amplitúdója}}{\text{a balról jobbra — || —}}$$

(lezárás felől jövő)

(lezárás felé terjedő)

$$\bar{r}(z) = \underbrace{\frac{\bar{U}_0^-}{\bar{U}_0^+}} e^{-j2\beta z} = \bar{r}(0)\, e^{-j2\beta z}$$

A $z=0$ helyen vett reflexiós tényező: $\bar{r}(0) = \dfrac{\bar{U}_0^-}{\bar{U}_0^+}$

Mivel $\left|e^{j\varphi}\right| = |\cos\varphi + j\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$

Ezért $\boxed{|\bar{r}(z)| = |\bar{r}(0)|}$: A reflexiós tényezőnek csak a szöge változik a távvezeték mentén.

Bemeneti impedancia és a refl. tényező viszonya:

$$\boxed{\bar{Z}(z) = Z_0 \frac{1+\bar{r}(z)}{1-\bar{r}(z)}} \qquad \bar{r}(z) = \frac{\bar{Z}(z) - Z_0}{\bar{Z}(z) + Z_0}$$

$$\boxed{\bar{r}_0(0) = \frac{\bar{Z}_2 - Z_0}{\bar{Z}_2 + Z_0}} \qquad \bar{Z}_2: \text{lezárás}$$

$$U_0^- e^{j\delta^-} = |\bar{r}(0)| e^{j\varphi}\, U_0^+ e^{j\delta^+} \qquad U_0^- = |\bar{r}(0)|\, U_0^+ \qquad \delta^- = \delta^+ + \varphi$$

A refl. tényező egy kötést határoz meg a kétirányba terjedő hullámok között. A $z=0$ helyen lévő kötés meghatározza a két nemben haladó hullám ampl. és fázis viszonyát, tetszőleges z helyen. Ez a mondanivalója a

$$\bar{r}(z) = \frac{\bar{U}_0^-}{\bar{U}_0^+} e^{-j2\beta z} = \bar{r}(0)\, e^{-j2\beta z}$$

egyenletnek.

Ez a refl. tényező nem tranzienst ír le, hanem 2 végtelen hosszú szinusz ampl. és kezdőfázis viszonyát rögzíti!

Ha marad idő: speciális reflexiós tényezők illesztett lezárás, szakadás, rövidzár

19. ISMERTESSE SPECIÁLIS LEZÁRÁSOK ESETÉN AZ IDEÁLIS TÁVVEZETÉKEN KIALAKULÓ ÁRAM ÉS FESZÜLTSÉGVISZONYOKAT, ÁLLÓHULLÁMOKAT!

ideális vezeték → ÁLLÓHULLÁMARÁNY → illesztett vezeték, [illegible], diagramok, VÉGÉN RZ TÁVVEZ, egyenletek, időfv., állóhullám, IMPEDANCIA, csúcsérték helyfüggése, → lehetséges ohmos lezárás

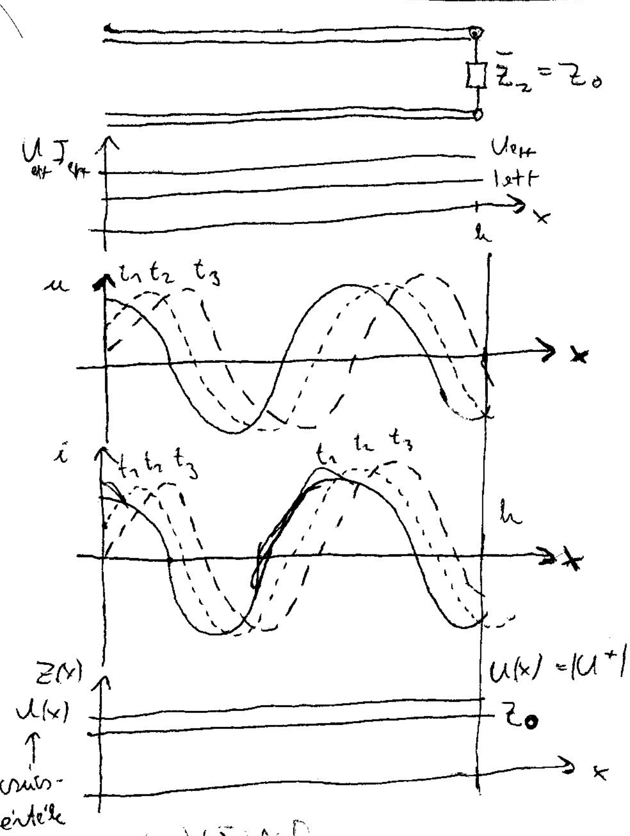
1. IDEÁLIS VEZETÉK

Az ideális (veszteségmentes) vezetékről beszélünk akkor, ha $\alpha = 0$

$$\gamma = j\beta = j\frac{\omega}{v} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$ (frekvencia független v, Z_0)

2. ILLESZTETT VEZETÉK (LEZÁRÁS HULLÁMIMPEDANCIÁVAL)

× állóhullámarány



$$\boxed{\begin{aligned}\bar{U}(z) &= \bar{U}_0^+\left(e^{+j\beta z} + \bar{r}(0)e^{-j\beta z}\right)\\ \bar{I}(z) &= \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0}\left(e^{j\beta z} - \bar{r}(0)e^{-j\beta z}\right)\end{aligned}}$$

$$\bar{r}(0) = \frac{\bar{Z}_2 - Z_0}{\bar{Z}_2 + Z_0} = 0 \qquad Z(x) = Z_0$$

Hullám és lezárási impedancia megegyezik, nincs visszavert hullám.

$$\bar{U}(z) = \bar{U}_0^+ e^{j\beta z} \qquad \bar{I}(z) = \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0}e^{j\beta z}$$

~~U(x)~~, t $\bar{U}(x) = \bar{U}_0^+ e^{-j\beta x}$ $\qquad \bar{I}(x) = \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0}e^{-j\beta x}$

$$\boxed{u(x,t) = U_0^+\cos(\omega t - \beta x)} \quad \boxed{i(x,t) = \frac{U_0^+}{Z_0}\cos(\omega t - \beta x)}$$

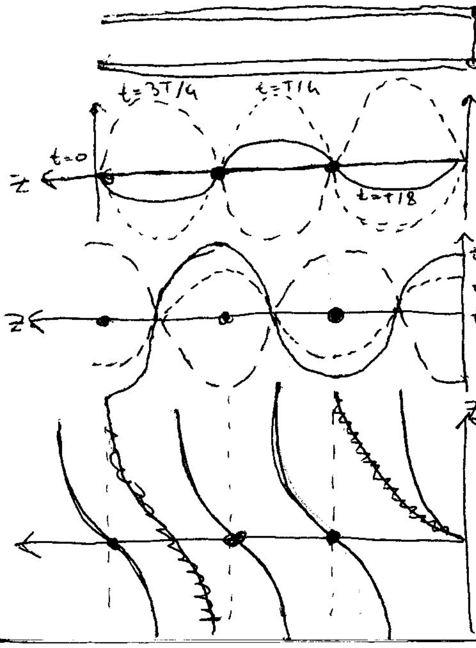
HALADÓ HULLÁM!

Az illesztett vezetéken a csúcsérték állandó $\underline{U(x) = |U^+|}$!!!

$$VSWR = \sigma = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1+|r|}{1-|r|} = 1 \Rightarrow \text{illesztett}$$

+ VSWR

3. VÉGÉN RÖVIDREZÁRT TÁVVEZETÉK



z x (reaktancia) tinta képződés.

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{U}(z) &= \bar{U}_0^+\left(e^{j\beta z} + \bar{r}(0)e^{-j\beta z}\right)\\ \bar{I}(z) &= \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0}\left(e^{j\beta z} - \bar{r}(0)e^{-j\beta z}\right)\end{aligned}}$$

$$\bar{r}(0) = \frac{\bar{Z}_2 - Z_0}{\bar{Z}_2 + Z_0} = -1$$

$$\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x \qquad \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin x$$

$$\bar{U}(z) = \bar{U}_0^+\left(e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}\right)$$

$$\boxed{\bar{U}(z) = \cancel{\bar{U}_0 2j}\; j2\bar{U}_0^+\sin(\beta z)}$$

$$\boxed{\bar{I}(z) = \frac{\bar{U}_0^+}{Z_0}\left(e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}\right) = \frac{2\bar{U}_0^+}{Z_0}\cos(\beta z)}$$

$$u(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\bar{U}(z)e^{j\omega t}\right\} \qquad + VSWR$$

$$VSWR = \sigma = \frac{1+|r|}{1-|r|} = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1+1}{1-1} \Rightarrow \infty$$

$$u(z,t) = \mathrm{Re}\left\{ j 2 \bar{U}_0^+ \sin\beta z \, e^{j\omega t} \right\} = \quad // \; j = e^{j90^\circ}$$

$$\overset{\varphi^+=0}{=} 2 \bar{U}_0^+ \sin\beta z \; \mathrm{Re}\left\{ e^{j(\omega t + 90^\circ)} \right\} = 2 \bar{U}_0^+ \sin\beta z \cos(\omega t + 90^\circ)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(z,t) &= -2 U_0^+ \sin\beta z \, \sin\omega t \\ i(z,t) &= 2 \frac{U_0^+}{Z_0} \cos\beta z \, \cos\omega t \end{aligned}}$$

} Ezeket nemrég ábrázoltuk (előző oldal)

90°-os fáziskülönbség van.

<u>Állóhullám:</u>

Van egy helyfüggvényünk, megszorozva egy időfüggvénnyel:

$f(z)\cos\omega t$ $\quad$ $f(z)$-t $\cos\omega t$ „<u>lélegezteti</u>": hol 0-s, hol 1-es, stb. szorzótényezőt ad neki. Csak ez a tényező változik, a fv. alakja nem (helyben marad, sosem lesz belőle haladó hullám.)

<u>Impedancia:</u>

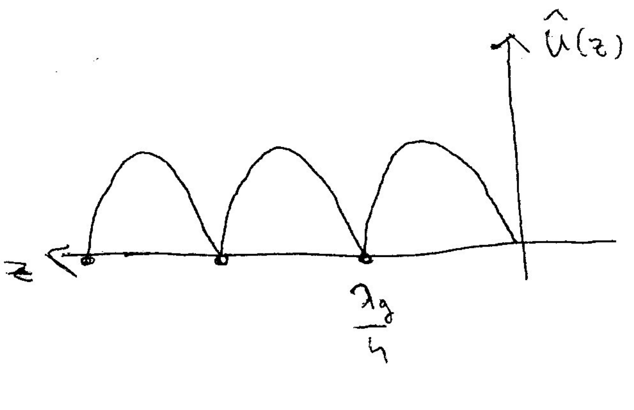
$$\boxed{\bar{Z}(z) = \frac{\bar{U}(z)}{\bar{I}(z)} = \frac{\cancel{\bar{U}_0^+ e^{j\beta z}} \; j 2 U_0^+ \sin\beta z}{\frac{2 U_0^+}{Z_0} \cos\beta z} = j Z_0 \,\mathrm{tg}\, \beta z}$$

A bemeneti impedancia tiszta képzetes j miatt. A j azért van ott, mert az időbeli lefolyásban 90°-os fáziskül. tg oka: állóhullám helyfüggése. (Ábrázolás az előző oldalon.) Ahol pozitív a reaktancia, ott induktivitást állítunk elő, ahol negatív, ott kapacitást.

A végén rövidrezárt tápvezetéket vezetékcsonknak is nevezzük, és reaktanciát állítunk vele elő.

FONTOS, mert tiszta reaktanciát tudunk vele előállítani

<u>$\hat{U}$ csúcsértéke helyfüggése:</u>



<u>Energetikailag:</u>

lezárás tükörképe $P_z = 0$

nem vesz fel hatásos telj.-t

A tápvez. is ideális, az (nem) se vesz fel hatásos teljesítményt.)

4.) OHMOS LEZÁRÁS, DE NEM ILLESZTETT ($R_2 \neq Z_0$)

- Elég bonyolult ahhoz, hogy hely-idő függvényre ne is gondolhassunk. A csúcsérték helyfüggésének meghatározására törekszünk.

$$\overline{U}(z) = \overline{U}_0^+ \left(e^{j\beta z} + \overline{r}(0)\, e^{-j\beta z}\right) \qquad \overline{r}(0) = \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0}$$

$e^{j\beta z} = \cos\beta z + j\sin\beta z \qquad e^{-j\beta z} = \cos\beta z - j\sin\beta z$

valós, de nem feltétlenül pozitív!

$$\overline{U}(z) = \overline{U}_0^+ \left(\cos\beta z + j\sin\beta z + r(0)\cos\beta z - j\, r(0)\sin\beta z\right) =$$

$$= \overline{U}_0^+ \left((1+r(0))\cos\beta z + j(1-r(0))\sin\beta z\right)$$

$$\boxed{|\overline{U}(z)|} = U(z) = U_0^+ \sqrt{(1+r(0))^2\cos^2\beta z + (1-r(0))^2\sin^2\beta z} =$$

$$= U_0^+ \sqrt{(1+r^2(0) + 2r(0)(\cos^2\beta z - \sin^2\beta z)} =$$

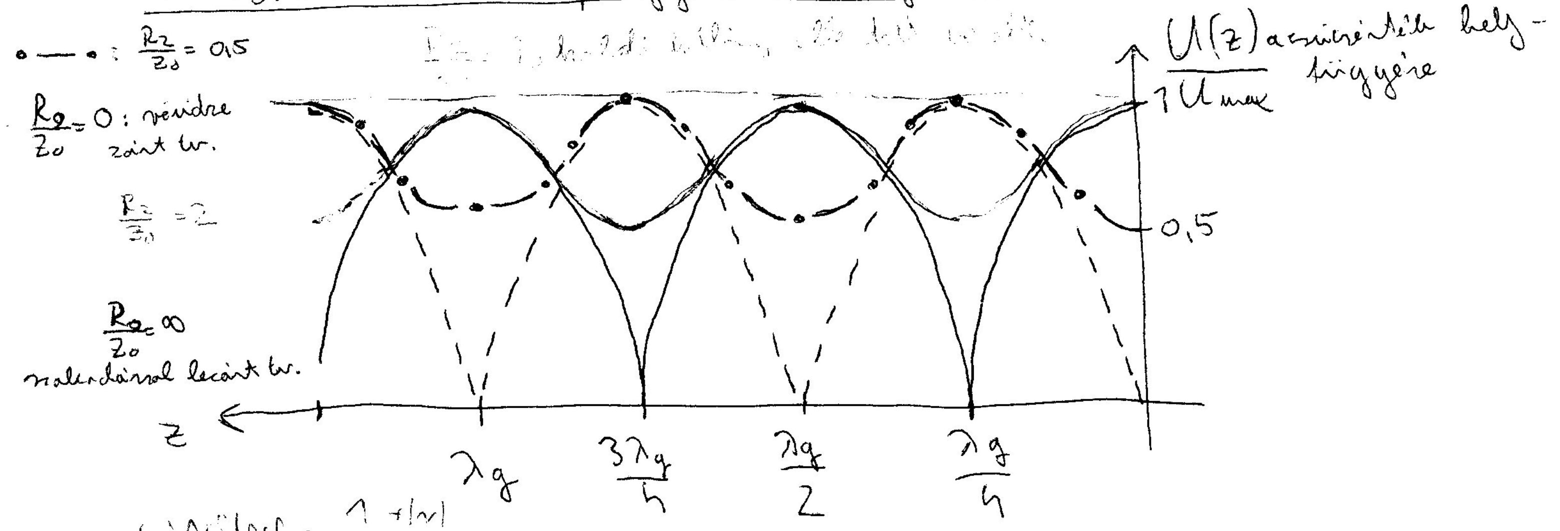
$$= U_0^+ \sqrt{1 + r^2(0) + 2r(0)\cos 2\beta z}$$

$\boxed{\text{Csúcsérték}}$ maximális, ahol $\cos 2\beta z = \pm 1$ $(+1: |r(0)| > 0\ ;\ -1: |r(0)| < 0)$

$$\left.U(z)\right|_{max} = U_0^+ (1 + |r(0)|)$$
$$\left.U(z)\right|_{min} = U_0^+ (1 - |r(0)|)$$

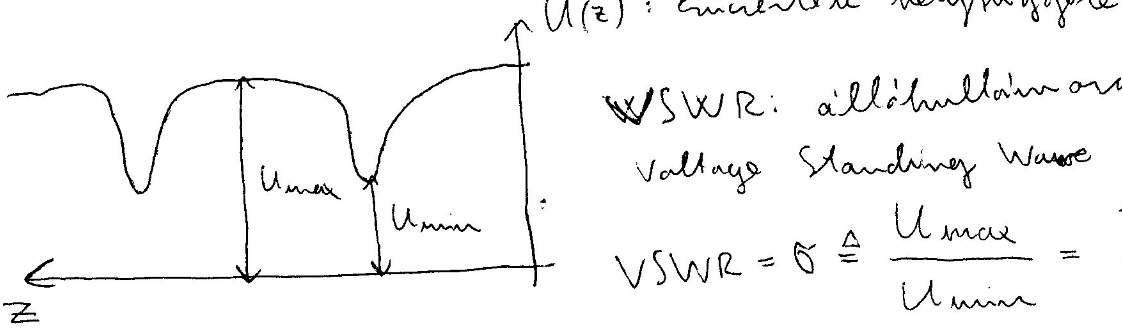
$|r(0)| > 0$-ra, $|r(0)| < 0$-ra az előjelek megfordulnak!

A csúcsérték helyfüggése diagramon:



+ VSWR $= \frac{1+|r|}{1-|r|}$

Állóhullám arány:



VSWR: állóhullámarány, Voltage Standing Wave Ratio

$$VSWR = \sigma \triangleq \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1+|\bar{r}|}{1-|\bar{r}|}$$

VSWR az illesztettségre jellemző. Ha 1, akkor illesztett. $1 \le VSWR \le \infty$ $\rightarrow r=0$

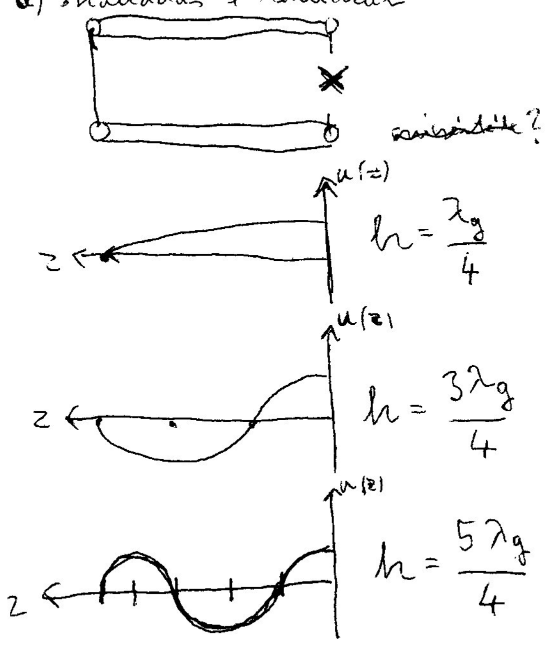
21. ISMERTESSE AZ IDEÁLIS TÁVVEZETÉK SZAKASZBÓL KÉSZÜLT REZGŐRENDSZERT ÉS TULAJDONSÁGAIT!

1. BEVEZETŐ

A rövidzárral vagy szakadással lezárt ideális vezetékszakaszon állóhullámok alakulnak ki, a feszültségnek és az áramnak félhullámhossznyi távolságban csomópontjai vannak. A feszültség csomópontjainak helyén $u=0$, tehát ott a vezeték rövidrezárható. Az áram csomópontjainak helyén $i=0$, tehát ott a vezeték megszakítható. Az így keletkezett vezetékszakaszon a létrehozott rezgés (elméletben korlátlan ideig) fennmarad.

2. A TÁVVEZETÉK MINT REZGŐKÖR

a) szakadás + rövidzár



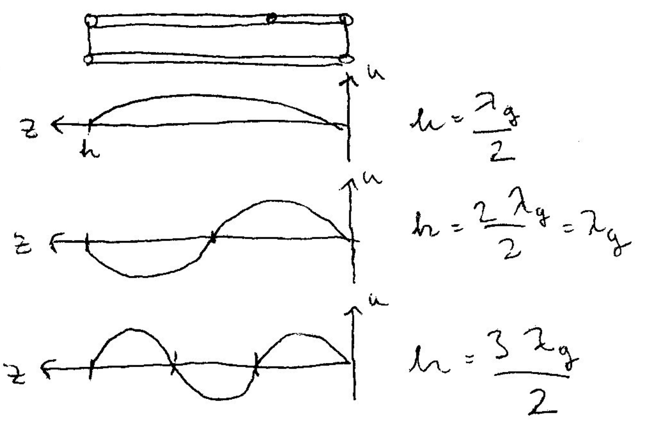
A rezgési hullámhosszak így* meghatározhatók: Az egyik végén nyitott, másik végén zárt vezetékszakasz hossza tehát $\frac{\lambda_g}{4}$ páratlan számú többszörösére:

$$\boxed{h=(2n+1)\frac{\lambda_g}{4}}$$

~~rövidzár~~

*: A szakadásnál a feszültség maximális, a rövidzárnál nulla.

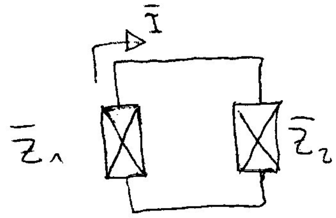
b) Mindkét végén rövidrezárt távvezeték szakasz.



$$h = n\frac{\lambda_g}{2}$$

(λ_g egész számú többszöröse)

3. A REZGÉS FELTÉTELE ÉS A REZONANCIA FREKVENCIA



$\bar I(\bar Z_1+\bar Z_2)=0$ (Koncentrált paraméterű feladat)

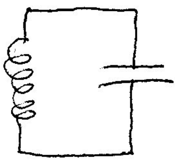
$\bar I \neq 0$: triviálistól különböző megoldást keresünk. → sajátrezgést adja.

A REZGÉS FELTÉTELE

$$\boxed{\bar Z_1+\bar Z_2=0}$$

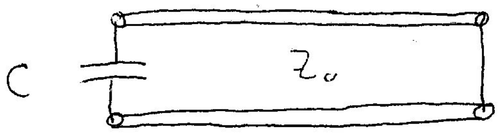
(általánosabban a det = 0)

Nézzük meg hogy kijön-e így a Thompson-képlet:



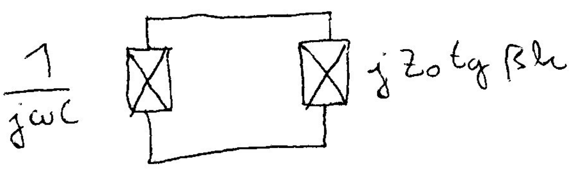
$$j\omega L+\frac{1}{j\omega C}=0 \Rightarrow \frac{1}{\omega C}=\omega L \qquad \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pl.: Egyik végén rövidrezárt, másik végén kapacitással lezárt távvezeték.



Hogy lehet visszavezetni ezt a $\bar Z_1+\bar Z_2=0$ egyenletre? : A bemeneti impedanciával!

$$\bar Z(z)=Z_0\frac{\bar Z_2+jZ_0\operatorname{tg}\beta z}{Z_0+\bar Z_2\, j\operatorname{tg}\beta z} \Rightarrow Z_{be}=jZ_0\operatorname{tg}\beta h$$



$$\frac{1}{j\omega C}+jZ_0\operatorname{tg}\beta h=0$$

$$\frac{1}{\omega C}=Z_0\operatorname{tg}\beta h \qquad /\ \beta=\frac{\omega}{v}$$

$$\cancel{\omega_0=\frac{1}{CZ_0\operatorname{tg}\beta h}} \qquad \frac{1}{\omega C}=Z_0\operatorname{tg}\frac{\omega h}{v}$$

Ez egy transzcendens egyenlet, numerikusan lehet megoldani, ha $\omega=?$, ha $h=?$ Akkor viszont megoldható.

23. ISMERTESSE A SÍKHULLÁMOKRA VONATKOZÓ EGYENLETEKET ÉS TULAJDONSÁGAIT! ISMERTESSE A TÁVVEZETÉK ANALÓGIÁT!

M.E. írás ($J=0$) → VEKTORIÁLIS H.E. (levezetéssel) → Descartes koordinátákban skalár-komponensekre bontjuk a V.H.E.-et. → SÍKHULLÁM DEF! → csak E_y van, → 3 TULAJDONSÁG ($v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, $E \perp H \perp$ terj., $Z_0 = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$) → ANALÓGIA, paraméterekkel

1. BEVEZETŐ

Itt már a Maxwell egyenletek teljes alakját használjuk, nincs lehetőség egyszerűsítésekre.

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad \text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{div}\,\bar{B} = 0 \qquad \text{div}\,\bar{D} = \rho$$

$$\bar{D} = \varepsilon\bar{E} \qquad \bar{B} = \mu\bar{H} \qquad \bar{J} = \sigma\bar{E} \qquad w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

2. A VEKTORIÁLIS HULLÁMEGYENLET

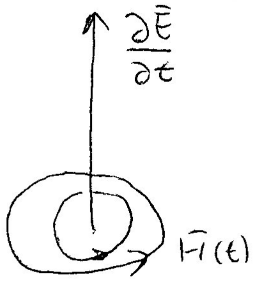
Az első M.E.:

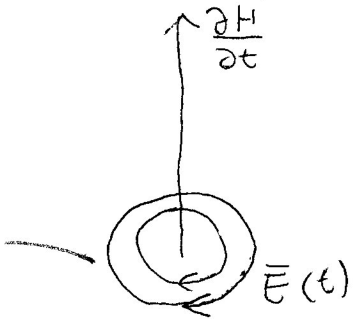
$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \varepsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

J → vezetőség, $\sigma \neq 0$, $\bar{J} = \sigma\bar{E}$
J → gerjesztés (antenna), külső

Vizsgáljuk a vezetőségmentes ($\sigma = 0$), gerjesztetlen közeget, ekkor:

$$\text{rot}\,\bar{H} = \varepsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad\qquad \text{rot}\,\bar{E} = -\mu\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$





Egyik mennyiség a másikat gerjeszti, ez teszi lehetővé az E.M. hullámok terjedését: $E(t) \to H(t) \to E(t) \to \ldots$

Valahogy szeretnénk kiküszöbölni $\bar{H}$-t, képezzük a 2. M.E. rotációját:

$$\text{rot rot}\,\bar{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\bar{H}$$

(* rot. képzés hely-koord. szerinti deriv. felcserélhető az idő szerintivel.)

rot H helyére beírhatjuk az első egyenletet:

$$\text{rot rot}\,\bar{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

Vektorpotenciálnál már volt, hogy $\text{rot rot}\,\bar{E} = \underbrace{\text{grad div}\,\bar{E}}_{0,\ \text{div}\,\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},\ \rho = 0} - \Delta\bar{E}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\bar{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}} \quad \text{VEKTORIÁLIS HULLÁMEGYENLET}$$

(ITT MÉG COULOMB MÉRTÉK), de különben nincs értelme

NINCS SZEMLÉLETES JELENTÉSE, A TÖBBI LEVEZETÉSHEZ JÓ KIINDULÓ PONT, ALAP DOLOG

Ehhez hasonlót már láttunk skalárisan, amikor a két távíró egyenletből ~~kiküszöböljük~~ kiküszöböljük az áramot: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Röviden látni fogjuk hogy az analógia fennáll.

A vektoriális hullámegyenletnek nincs szemléletes jelentése, a további egyenletekhez egy kiindulópont.

3. SÍKHULLÁMOK EGYENLETEI

A vektoriális hullámegyenlet legegyszerűbb megoldása a síkhullámok.

Bontsuk fel komponenseire, (mégpedig skalár komponensekre) a vektoriális hullámegyenletet. Ezek E_x, E_y, E_z skalár komponensek. Kizárólag Descartes koordinátákban!

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\} \quad \Delta \bar{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

SÍKHULLÁM DEFINÍCIÓ: ! pontosan: A síkhullám olyan hullám, hogy két térbeli koordinátától is független a hullámtér. Röviden, matematikai alakban, ha a hullám z irányba terjed: $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

Szemléletesen: Egy rögzített időpontban egy az xy síkon minden pontban ugyanakkora az elektromos térerősség.

Ekkor az egyenleteink lényegesen egyszerűsödnek:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$\rho = 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

E_z ha egyáltalán van, helyfüggetlen. A további vizsgálatainkhoz $E_z = 0$-t választunk.

Egyelőre csak E_x legyen. Ha E_y is van: polarizációs kérdésről beszélünk. Így az alábbi egyenlet marad meg:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Ennek az egyenletnek minden $E_x = f(z - vt)$ alakú függvény megoldása.

<u>Biz:</u>

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}$$

: A belső függvényben z-nek nincs szorzója, t-nek viszont van, ha ezzel leosztunk, akkor egyenlőek.

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

: Ugyanez négyzetben.

$$\Rightarrow \frac{1}{v^2} = \varepsilon\mu \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$ (1)

síkhullám 1-es terjedési sebessége.

a)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}{\sqrt{\varepsilon_r}} =$$

// μ_r-t vehetjük egynek, hiszen az olyan anyagok ahol $\mu_r \neq 1$ (acél, nikkel, króm stb.) jó vezetők. Ilyenekben az em. hullám gyorsan lecsillapodik. (J-hez képest $\frac{\partial D}{\partial t}$ elhanyagolható; kérdőfeltételeinknek értelmét vesztik.)

$c = 2{,}997 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$$\boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}}$$

el. mágn. hullám terjedési seb. vákuumban (fénysebesség).

b) Határozzuk meg a villamos térerősséghez tartozó mágneses térerősséget! $H = ?$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

A második M.E.-ből célszerű, itt ugyanolyan egyszerű formában jelenik meg a H.

$$\operatorname{rot} \bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x}=0 & \frac{\partial}{\partial y}=0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

// Ez tulajdonképpen egy vektori szorzás $[0 \; 0 \; 1] \Rightarrow \bar{k}$]

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} \qquad E_x \cdot f(z - vt)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \cdot \bar{k} \times E$$

$$-\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} \bar{k} \times E \qquad // \; \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}$$

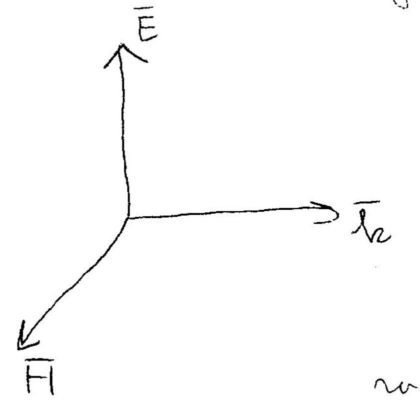
$$\bar{H} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{1}{\mu}\,\bar{k} \times \bar{E} + \underbrace{\bar{H}(\text{id. fgtl})}_{\text{integrálási konstans}}$$

// mindkét oldalt idő szerint ~~deriváljuk~~ integráljuk (egyszerűsítünk $\frac{\partial}{\partial t}$-vel)

↳ az integrálás után fellépő ~~konstans~~ (időfüggetlen $\bar{H}$. Hullámterjedésben nem játszhat szerepet.

$$\boxed{\bar{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\;\bar{k} \times \bar{E}}$$

Síkhullám 2-es tulajdonsága: $\bar{E} \perp \bar{H}$ ~~[illegible]~~



$\boxed{\text{$\bar{E}$ merőleges $\bar{H}$-ra és mindkettő merőleges a terjedés irányára.}}$

Az xy sík a terjedési irányra merőleges, az a transzverzális sík.

A síkhullám 3-as tulajdonsága

Az E és H abs. értékét $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ kapcsolja össze:

$$\boxed{\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \text{ : vákuumra vonatkoztatva:}$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega \approx 120\pi$$

A közeg hullámellenállása

$c = 2{,}997 \cdot 10^8$ $\qquad$ $c = 3 \cdot 10^8$

4. A TÁVVEZETÉK ANALÓGIA (SÍKHULLÁM VESZTESÉGES KÖZEGBEN)

$$\text{rot}\, \bar{H} = \underbrace{\sigma \bar{E}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad \text{rot}\, \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \qquad \bar{j} = \sigma \bar{E}$$

↳ Itt jelenik meg a vezetés!

- Itt speciálisan E_x, H_y komponensek vannak. Az így kapott egyenletek megfelelnek a távíró egyenleteknek:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \qquad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \qquad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \qquad -\frac{\partial i}{\partial z} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}$$

Az analóg mennyiségek: ↗ Ezek erő természetesen homogénsége mennyiségek.

u	i	R	L	G	C
E	H	$\emptyset$	μ	σ	ε

Két mennyiség akkor analóg, ha azonos diff.-egyenleteknek és azonos peremfeltételeknek tesz eleget!

$\boxed{\text{vonalirány} \to \text{térirány}}$ ← Perem felt. megfeleltetése van. Ezek teljesülnek is.

~~2~~ 4. ISMERTESSE A SÍKHULLÁMOK VISELKEDÉSÉT IDEÁLIS ÉS VESZTESÉGES SZIGETELŐBEN, A SÍKHULLÁMOK POLARIZÁCIÓJÁT!

* Szemléletes def: Ha a terjedés iránya z, egy rögzített időpillanatban az xy síkon minden pontban ugyan akkora az elektromos térerősség.

1 BEVEZETÉS

MATEMATIKAI DEF.: A síkhullám olyan hullám, hogy két térbeli koordinátától is független a kialakuló tér.*

Ekkor a vektoriális hullámegyenlet egy skalár-egyenletté egyszerűsödik: $\boxed{\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}}$

Ennek minden $E_x = f(z - vt)$ alakú függvény megoldása. $\Rightarrow$ E_x egy haladó hullám. Ebből levezethető tulajdonságok:

1: $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ 2: $E \perp H \perp$ terj. irány 3: $\dfrac{E}{H} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

A távvezeték analógia:

TV	u	i	R'	G'	L'	C'
EM	E	H	0	σ	μ	ε

Így a terjedési tényező:

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \Rightarrow \bar{\gamma}_{sh} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \Rightarrow \bar{Z}_{0\,sh} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

VESZTESÉGES KÖZEG (ÁLTALÁNOS ESET): $\alpha \neq 0$ $\bar{Z}_0$: komplex, $\sigma \neq 0$

Egy villamos térerősség komponens a következőképp terjed:

$$\boxed{E_x = E_x(0)\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)}$$: csillapodva haladó hullám

A hullámimpedancia exponenciális alakban: $\bar{Z}_0 = Z_0 e^{j\varphi}$

A mágneses komponens terjedése:

$$H_y = \frac{E_x(0)}{Z_0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \varphi)$$

$\Rightarrow$ komplex hullámimpedancia hatása: E és H nem minden pontban, hanem egymáshoz képest elcsúszva terjed.

Komplex permittivitás: (Szinuszos eset)

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \sigma \bar{E} + j\omega \varepsilon \bar{E} = j\omega \varepsilon_{kompl.} \bar{E}$$

Az első M.E.-et tovább ideális szigetelőre ~~ha~~ hasonló formába hozzuk.

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = j\omega \underbrace{\varepsilon\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)}_{} E$$

$$\varepsilon_{kompl.} = \varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{\text{vezetési áramsűrűség}}{\text{eltolási áramsűrűség}} = \frac{\sigma E}{\omega \varepsilon E} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

csak a nagyságát számít, j elhanyagolható!

$$\varepsilon_{kompl.} = \varepsilon(1 - j\,\mathrm{tg}\,\delta)$$

2. SÍKHULLÁM IDEÁLIS KÖZEGBEN $\sigma = 0$, $\alpha = 0$, Z_0: valós

A fajlagos vezetőképesség zérus: $\sigma = 0$.

Ekkor az egyenleteink így módosulnak:

$$\bar{\gamma} = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Ekkor $\bar{\gamma}$ tisztán képzetes: $\alpha = 0$ és Z_0 nem lehet komplex:

$$\boxed{E_x = E_x(0)\cos(\omega t - \beta z)} \qquad \boxed{H_y = \frac{E_x(0)}{Z_0}\cos(\omega t - \beta z)}$$

Ideális esetben a permittivitás is tisztán valós.

3. SÍKHULLÁM VESZTESÉGES KÖZEGBEN (LÉNYEGÉBEN MÁR VOLT)

A távvezeték analógia és a komplex permittivitás alapján is számítható

$$\bar{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

$$\bar{\gamma} = j\omega\sqrt{\varepsilon_{kompl}\,\mu} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{kompl}}}$$

4. SÍKHULLÁMOK POLARIZÁCIÓJA

A villamos térerősség vektorának viselkedése terjedés közben.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor az elektromos térerősségnek E_x és E_y komponense is van: így a hullámegyenlet ennek érvényes:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}$$

a) lineáris polarizáció: A villamos térerősség vektorának a viselkedése hullámterjedés közben → ez a polarizáció kérdésköre.

Önmagában E_x-van csak:

$$\boxed{E_x(z,t) = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z)}$$

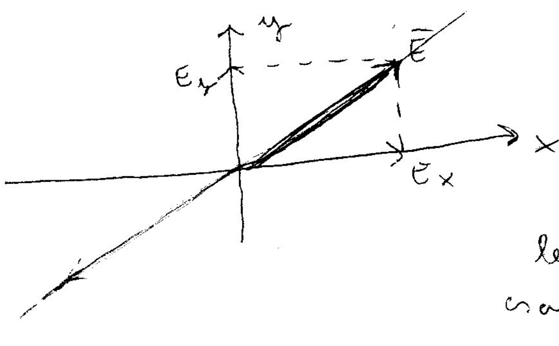
Az xy sík egy pontjában figyeljük E vektort, ha mindig x irányba mutat → lineárisan polarizált az x tengely irányban.

b) lineáris polarizáció y komponenssel:

$$\boxed{\begin{aligned} E_x(z,t) &= E_{x0}\cos(\omega t - \beta z) \\ E_y(z,t) &= E_{y0}\cos(\omega t - \beta z) \end{aligned}}$$

Nincs fáziskésés! E_x és E_y által meghatározott egyenesen mozog.

Nézzük pl. a $z=0$ helyet, $t=0$ időben:



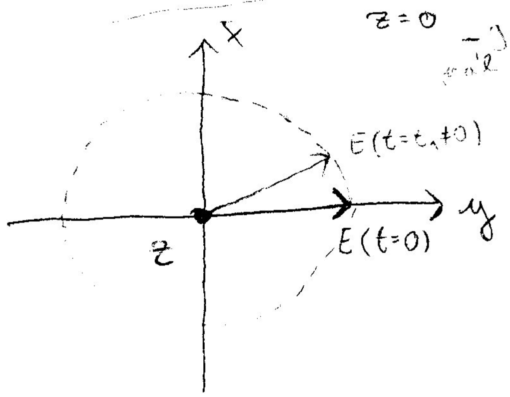
Ha elkezdjük a csökkenést, E_x és E_y fázisban csökken, így az eredő térerősség az eredeti egyenesen lesz, iránya nem változik, csak a nagysága! Az egyenes irányát az E_{x0} és E_{y0} iránya adja meg. Mint pl. Oszcilloszkópon a Lissajous-ábra: mindkét tengelyt cos térítjük, és ezek fázisban vannak → egy egyenest látunk a képernyőn. Erre azt mondta Veress, hogy ... pótolni!

c) Általános polarizáció (körpolarizáció)

$E_x(z,t)$ és $E_y(z,t)$ közt $\pm 90°$-os fáziskésés van:

$E_x(z,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$ (Fontos hogy ugyanaz az amplitúdó (E_0) különben ellipszis lesz!)

$E_y(z,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta z \pm 90°) = \mp E_0 \sin(\omega t - \beta z)$



$t=0$ pontban E_x maximális $E_y = 0$.

$E(t=0)$ és $E(t_1)$ hossza ugyanaz, hiszen E_x és E_y egy kör egyenletét adják → innen a név.

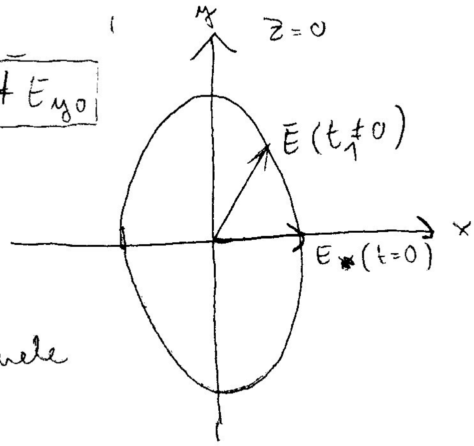
Ha az ~~irányt~~ óramutató járásával ellentétes a körüljárási irány és a terjedési irány a papír síkjából kifelé mutat ⇒ jobbra általánosan polarizált hullám (~~jobb~~ jobbkéz szabály). (-90°-nál jobbra +90°-nál balra polarizált.)

d) Elliptikus polarizáció 1

$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$ $\boxed{E_{x0} \neq E_{y0}}$

$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - \beta z \mp 90°)$

Az ellipszis ~~tengelyei~~ az x és y tengelyeken helyezkednek el.

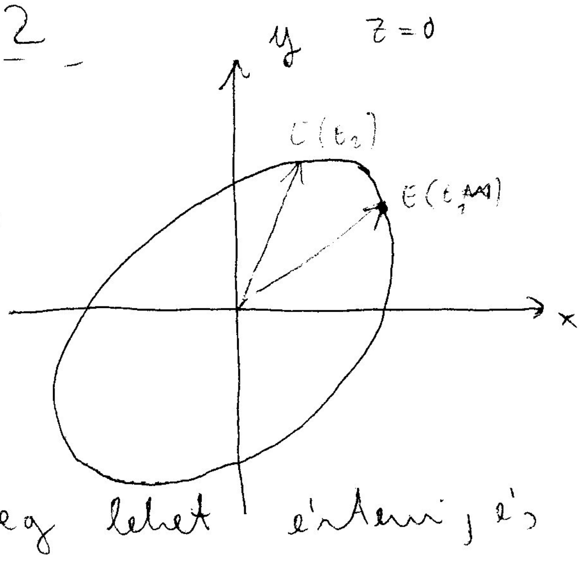


e) Elliptikus polarizáció 2

$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$

$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - \beta z - \delta)$

Itt még $E_{x0} = E_{y0}$ esetén is általános helyzetű ellipszist kapunk.



Ezt az egész polarizációt jól meg lehet érteni, és példának is jó a [illegible]

25. ISMERTESSE A SÍKHULLÁMOK VISELKEDÉSÉT VEZETŐBEN, AZ ÁRAMKISZORÍTÁS JELENSÉGÉT, A VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ELLENÁLLÁST

1. SÍKHULLÁM JÓ VEZETŐBEN: $\sigma \gg \omega\varepsilon$; $\bar{Z}_0$; $\bar\gamma$

Jó vezetőben: $\boxed{\sigma \gg \omega\varepsilon}$, azaz a vezetési áramsűrűség sokkal nagyobb mint az eltolási áramsűrűség (ha E-vel normálva legyen, $\bar{J}_{vez} = \sigma\bar{E}$, $\bar{J}_{eltolási} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ ⇒ szinuszos eset ⇒

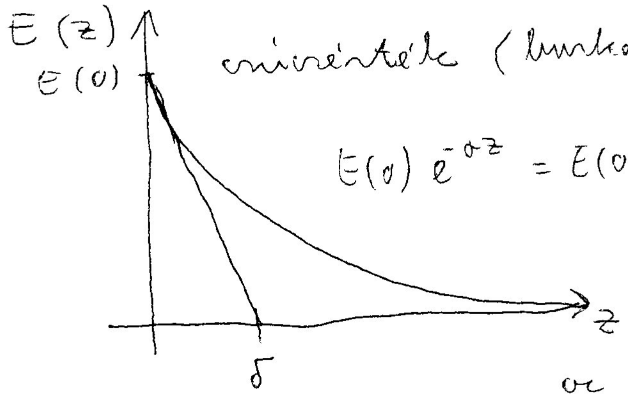
⇒ $j\omega\varepsilon\bar{E}$ ~~mindent abba értik~~).

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad \overset{\sigma \gg \omega\varepsilon}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}}$$

$$\bar\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \quad \overset{\sigma \gg \omega\varepsilon}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\bar\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma}}$$

Mivel $\boxed{\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}}$ ⇒ $\boxed{\bar\gamma = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi f\mu\sigma}} = \underbrace{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}_{\alpha} + j\underbrace{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}_{\beta}$

α: csillapítási tényező β: fázistényező



csúcsérték (burkoló) · $E(z,t) = E_0\, e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$

$$E(0)\, e^{-\alpha z} = E(0)\, e^{-\frac{z}{\delta}}$$

$\delta = \frac{1}{\alpha}$: ~~időállandó~~.

δ: "~~hosszállandó~~" behatolási mélység

A behatolási mélység ~~a gö~~ az a pont, ahol a kezdeti ~~pontba~~ pontban húzott érintő metszi a z-tengelyt, vagy a függvény δ-nél éri el az eredeti érték $\frac{1}{e}$ részét (~37%).

Így a név becsapós, mert nem csak δ-ig terjed a hullám, az egyik alkalmazásáról ered.

$\boxed{\bar\gamma = \frac{1}{\delta} + j\frac{1}{\delta}}$ ⇒ mivel $\boxed{\frac{1}{\delta} = \alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}}$ jó vezetőkre

A behatolási mélységgel kifejezhető a terjedési tényező.

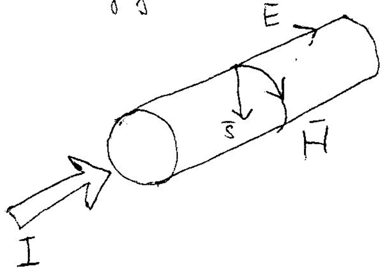
$$\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}}$$

Továbbá $\boxed{\frac{\gamma}{\sigma} = Z_0}$ hiszen $\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma}$; $Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$

-t behatolási tényező egyfajta használható; ~~amivel k~~ ami jellemzi a jó vezetőben haladó hullám csillapodását.

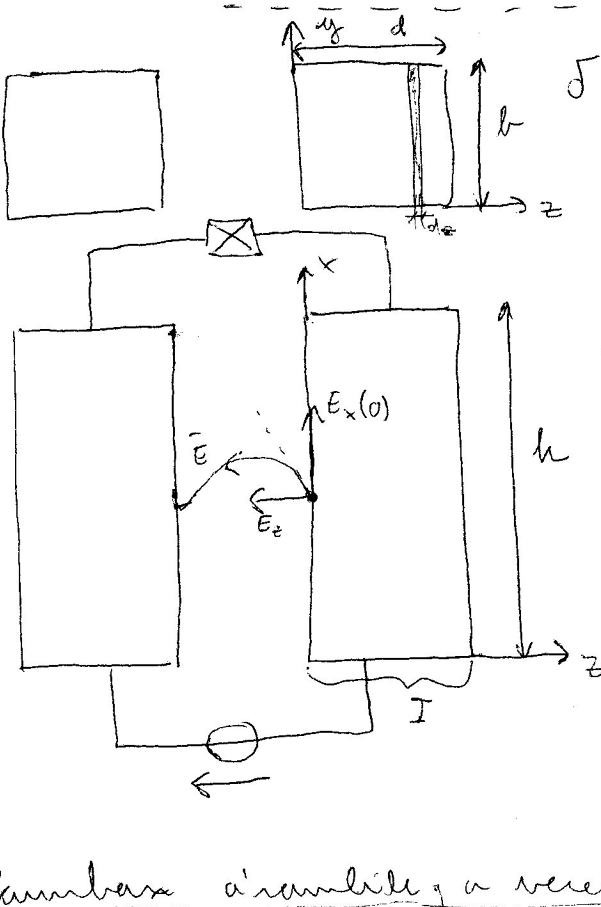
2. VEZETŐK VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ELLENÁLLÁSA

Egyenáramú ellenállást ki lehet úgy számolni,



hogy a környezetből az ellenállásba áramló ~~energiát~~ teljesítményt vizsgáljuk. Sugárirányban befelé mutató Poynting-vektort kapunk. $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$ Itt a szemlélet érdekes: az energiát csak a közeg szállítja, és a drót szerepe, hogy terelje, irányítsa az EM teret. ~~a telj~~

Nézzük az alábbi példát:



$\delta \ll d$

Téglalap keresztmetszetű jó vezető hasáb egyik végére feszültségforrás, másikra lezáró impedancia.
A két hasáb két térerősség van, van egy x irányú állandó komponens. Van egy tangenciális. Megnézzük hogy mennyi teljesítményt nyel el a vezető egy h hosszú b magasságú szakaszon. Erre a felületre integráljuk a Poynting vektort. Az energia a dielektrikumban áramlik, a vezetők feladata a tér ~~...~~ irányítása. A ~~vezet~~ irányuló tér gerjeszti a teret a vezetőben → egy síkhullám indul el z irányba, ami exponenciálisan csökken

árammal szemben!

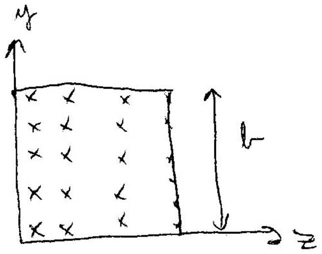
Vagyis: A z irányba induló fen. hullám

$$\boxed{E_x(z) = E_x(0)\, e^{-\alpha z}\, e^{-j\beta z}}$$ Reflexiót nem veszünk figyelembe, feltételezzük, hogy $d \gg \delta$

$$\boxed{H_y(z) = \frac{E_x(0)}{\bar{Z}_0}\, e^{-\alpha z}\, e^{-j\beta z}}$$

Szeretnénk kapcsolatba hozni a felületen kialakuló térerősséget ($E_x(0)$) az összes árammal (I).

$$\bar{I} = \int_0^\infty \sigma E_x(z)\, dA = \int_0^\infty \sigma E_x\, b \cdot dz \qquad // \; \bar{I} = \int_A \bar{J}\, dA$$



Az áramsűrűség z irányban exponenciálisan csökken, y irányban nincs csökkenés. ÁRAMKISZORÍTÁS

$$\bar{I} = \sigma b \int_0^\infty E_x(0)\, e^{-\bar{\gamma} z}\, dz = \qquad // \; e^{-\bar{\gamma} z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \quad \bar{\gamma} = \alpha + j\beta$$

$$= \sigma b\, E_x(0) \frac{1}{\bar{\gamma}} \Rightarrow \boxed{E_x(0) = \frac{\bar{\gamma}}{\sigma b}\, \bar{I}}$$

• Most nézzük meg, hogy lehet a beáramló teljesítményt számítani! $\bar{S}$

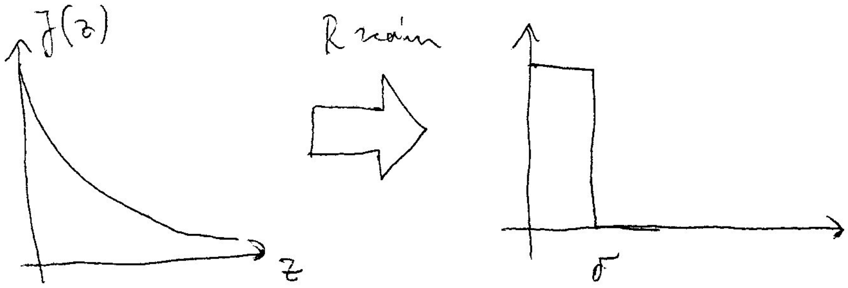
$$\int_A \bar{S}\, d\bar{A} = P + jQ = \frac{1}{2} E_x(0) H_y^*(0) \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} E_x(0) \frac{E_x^*(0)}{\bar{Z}_0}\, bh =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|E_x(0)|^2}{\bar{Z}_0^*}\, bh = \frac{\cancel{b} h}{2} \frac{|\gamma|^2 |I|^2}{\sigma^{\cancel{2}} b^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{\sigma}}{\gamma^*} = \frac{1}{2} \frac{h \bar{\gamma}}{\sigma b} |I|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (1+j) \frac{h}{\sigma b \delta} |\bar{I}|^2 \qquad // \; \bar{\gamma} = \frac{1}{\delta} + j\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta}(1+j)$$

$$P = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{h}{\sigma b \delta}}_{R} I^2$$

$R \rightarrow$ a keresztmetszet $b\delta$

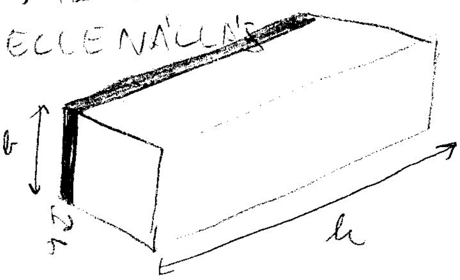


R számítás szempontjából úgy foghatjuk fel, mintha δ mélységig folyna konstans áram.

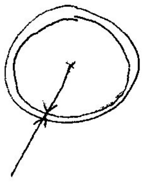
$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu \sigma}}$$

$$\boxed{R = \frac{h}{\sigma b \delta}}$$

VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ELLENÁLLÁS



Hengeres vezetőnél:



$\delta << r_0$ A gyűrű területe számít

Ugyanúgy számítjuk a váltakozó áramú ellenállást, mint a gyűrű egyenáramú ellenállását.

~~27.~~ 27. ISMERTESSE A HERTZ DIPÓLUS EM. TERÉT!

1. EM. HULLÁMOK GERJESZTÉSE

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad \text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \text{div}\,\bar{B} = 0 \qquad \text{div}\,\bar{D} = \varrho$$

↳ ~~Itt~~ a $\bar{j}$ nem a vezetőképes közegben terjedő hullámterjedéshez köthető, hanem adott gerjesztésről van szó.

Hasonlóan a $\text{div}\,\bar{D} = \varrho$ egyenletben a ϱ is adott gerjesztés. (A töltés villamos teret, az áram mágneses teret kelt)

Ezeknek az egyenleteknek a megoldását keressük,

$\text{div}\,\bar{B} = 0$ megoldása $\boxed{\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A}}$, hiszen $\text{div rot}\,\bar{A} = 0$.

Ezt behelyettesítve a II. Maxwell-e.-be:

$$\text{rot}\,\bar{E} = -\text{rot}\,\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

// rot ⇔ $\frac{\partial}{\partial t}$ felcserélhető, mert az egyik idő, a másik hely szerinti deriváltat jelent.

$$\text{rot}\left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\text{grad}\,\varphi \qquad // \text{ rot grad}\,\bar{V} = 0$$

SEGÉDMENNYISÉGEK ⇒ TÉR

$$\boxed{\bar{E} = -\text{grad}\,\varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}}$$

A két bevezetett egyenletben a közös, hogy ha megvannak a segédmennyiségek, akkor azokból a tér kiszámolható. ⇒ $\varphi, \bar{A} \Rightarrow \bar{E}, \bar{B}$

Egy vektortéret a rotációja és a divergenciája együtt határozza meg ⇒ a divergencia megválasztása, a mértékválasztás még hátra van.

Helyettesítsük be az I. M.E.-be a két egyenletet, ekkor:

($\Delta \bar{A}$ = grad div $\bar{A}$ − rot rot A)

$$\text{grad div}\,\bar{A} - \Delta \bar{A} = -\varepsilon\mu\,\text{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \mu \bar{J}$$

rot rot A = ..

Most végezzük el mértékválasztást: $\boxed{\text{div}\,\bar{A} = -\varepsilon\mu\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}}$ ⇒

⇒ LORENTZ MÉRTÉK, amely a választásnál kiesik a φ:

$$\boxed{\Delta \bar{A} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J}}$$

: INHOMOGÉN HULLÁMEGYENLET VEKTORPOTENCIÁLRA VONATKOZTATOTT ~~F~~ GERJESZTÉS ⇒ SEGÉDmennyiségek

Ha $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta \bar{A} = -\mu \bar{J} \Rightarrow$ Vektoriális Poisson vektorpotenciálra vonatkozó

Ha $\bar{J} = 0 \Rightarrow \Delta \bar{A} = \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \Rightarrow$ Homogén hullámegyenlet

$$\varepsilon \operatorname{div} \bar{E} = \rho \Rightarrow \varepsilon \operatorname{div}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = \rho$$

$$-\varepsilon \Delta \varphi - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{A} = \rho$$ / Lorentz-mérték: $\operatorname{div} \bar{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

$$\boxed{\Delta \varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Skalárpot.-ra érvényes inhomogén hullámegyenlet.

$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ Poisson-egy. $\rho = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$: Homogén H-egyenlet

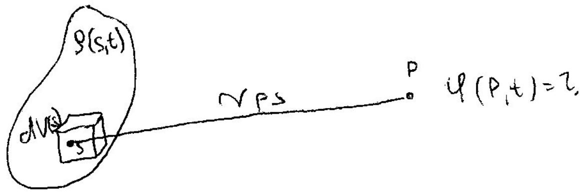
Ha megoldjuk a vektor pot-ra, skalár pot.-ra az inhomogén hullámegyenletet, akkor a $\bar{E}$ és $\bar{B}$ számolható.

b) A Hullámegyenletek megoldása, retardált potenciál

$$\varphi(P,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho\left(S, t - \frac{r_{PS}}{v}\right)}{r_{PS}} \, dV_S$$

RETARDÁLT POTENCIÁL

A potenciált úgy kapjuk meg, hogy a töltést egy korábbi pillanatban vesszük meg: Annyival korábban, mint amennyi ideje a hullámnak szüksége van, hogy az r_{PS}-t befussa.



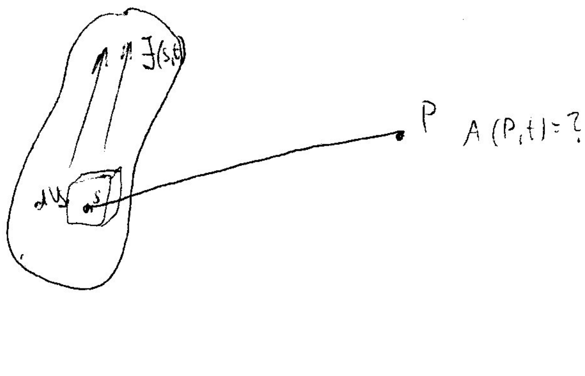
$\rho(s,t)$: A térfogatban van egy s-től, t-től függő töltés.

A töltés változásának hatásának időre van szüksége, hogy eljusson a P-pontba. A pot. változás is hullámszerűen terjed.

⇒ RETARDÁLT (késleltetett potenciál)

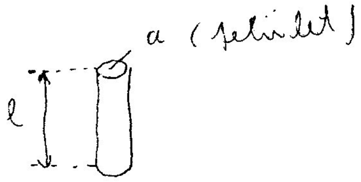
Ugyanez igaz a vektorpotenciálra és az áramsűrűségre is:

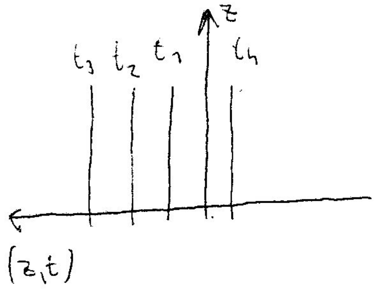
$$A(P,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}\left(S, t - \frac{r_{PS}}{v}\right)}{r_{PS}} \, dV_S$$

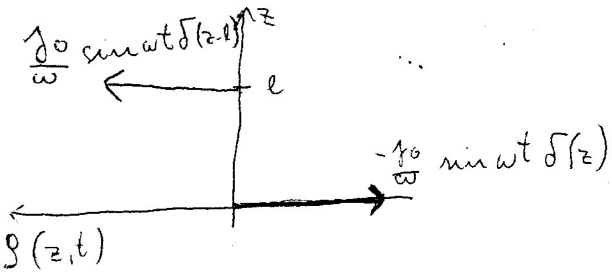


2. A HERTZ DIPÓLUS

A Hertz-dipólus rövid, l hosszúságú vezetékdarab, amelyen bizonyos szinuszos időfüggésű áram folyik, amelynek értéke a vezeték hossza mentén állandó. Tehát a vezeték hossza által kisebb a az adott frekvenciához tartozó hullámhossznál.







J értéke rögzített időpontban konstans, időben szinuszosan változik.

$$J(z,t) = \begin{cases} J_0 \cos \omega t & 0 < z < l \\ \varnothing & \text{egyébként.} \end{cases}$$

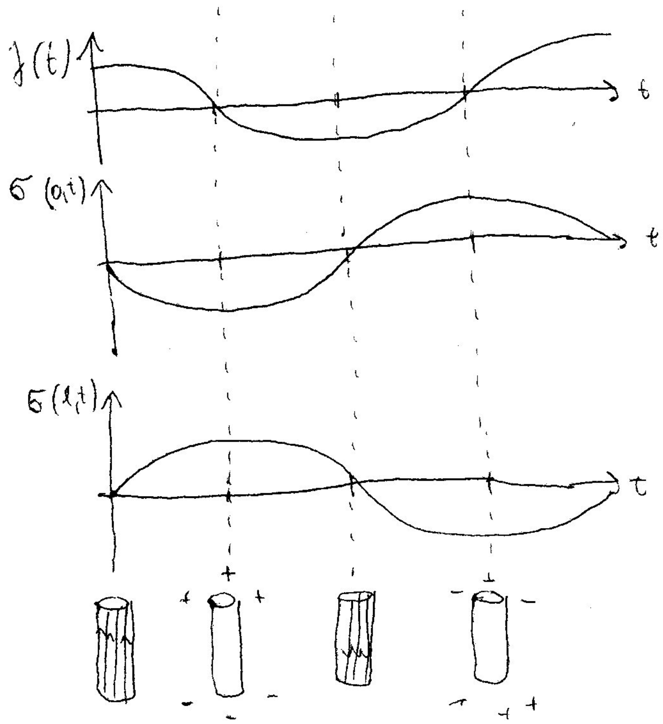
A töltéssűrűséget a folytonossági feltétellel számítjuk ki:

$$\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial z} \text{ [illegible]}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} J_0 \cos \omega t \left(\varepsilon(z) - \varepsilon(z-l)\right) = -J_0 \cos \omega t \left(\delta(z) - \delta(z-l)\right)$$

Idő szerinti deriválás itt omegával való osztást jelent:

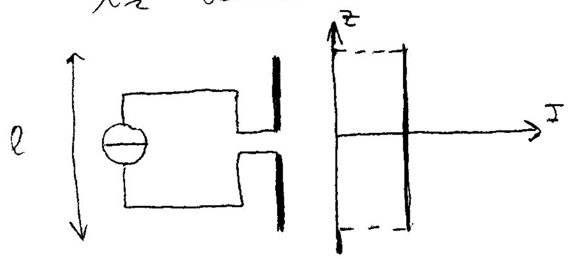
$$\rho = -\frac{J_0}{\omega} \sin \omega t \; \delta(z) + \frac{J_0}{\omega} \sin \omega t \; \delta(z-l)$$

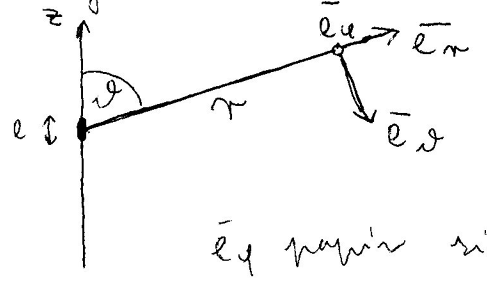


Az egyenletekből fontosabb, hogy legyen róla egy képünk fizikailag.

b) Hertz-dipólus teljes tere

Az alábbi modellt használjuk:





$\bar e_\varphi$ papír síkjába befelé mér.

~~$E_r = I_0 l$~~ A Hertz dipólus pontszerű (absztrakció) nyomatéka $I_0 l$, $l \ll \lambda \Rightarrow$ helyfüggetlen áramerősség.

$r \gg l$:

Így a teljes tér:

$$E_r = \frac{I_0 l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{2}{r^2}\left[1-\frac{j}{\beta r}\right]\cos\vartheta\, e^{-j\beta r}$$

$$E_\vartheta = \frac{I_0 l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{j\beta}{r}\left[1-\frac{1}{\beta^2 r^2}-\frac{j}{\beta r}\right]\sin\vartheta\, e^{-j\beta r}$$

$$E_\varphi = 0$$

$$H_r = 0 \qquad H_\vartheta = 0$$

$$H_\varphi = \frac{I_0 l}{4\pi}\,\frac{j\beta}{r}\left[1-\frac{j}{\beta r}\right]\sin\vartheta\, e^{-j\beta r}$$

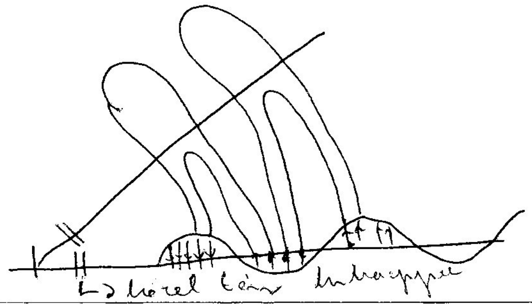
A földgömb példájával:

A villamos térnek a magán és a hosszúsági körökön van ~~nagysága~~ komponense, a mágneses térnek a szélességi körökön.

Közeltér: $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^2}$ Sugárzó tér, távoltér: $\frac{1}{r}$

statikus ↑ indukciós ↑

Erővonalak képe



~~28.~~ ISMERTESSE A HERTZ DIPÓLUS TÁVOLI TERÉT, AZ ANTENNA JELLEMZŐKET!

1. HERTZ-DIPÓLUS TÁVOL TERE

Teljes tér $\xrightarrow{\frac{1}{r^2},\ \frac{1}{r^3}\text{ kiesik}}$ távoltér (komplex) → távoltér (valós idő) → összevetés: $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ → átlagolt teljesítménysűrűség Poynting vektor → sugárzási ellenállás

A dipólus teljes tere:

$$E_r = \frac{I_0 l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{2}{r^2}\left[1 - \frac{j}{\beta r}\right]\cos\vartheta\, e^{-j\beta r}$$

$$E_\vartheta = \frac{I_0 l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{j\beta}{r}\left[1 - \frac{1}{\beta^2 r^2} - \frac{j}{\beta r}\right]\sin\vartheta\, e^{-j\beta r}$$

$$H_\varphi = \frac{I_0 l}{4\pi}\,\frac{j\beta}{r}\left[1 - \frac{j}{\beta r}\right]\sin\vartheta\, e^{-j\beta r}$$

$$E_\varphi,\ H_r,\ H_\vartheta = 0$$

Távoltér esetén az $\frac{1}{r}$-es komponensek képest elhanyagolható az $\frac{1}{r^2}$-es, és $\frac{1}{r^3}$-ös komponens, ezért távoltérnél 0-nak vehetjük. Ekkor az egyenletek:

$$\boxed{E_\vartheta = \frac{I_0 l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{j\beta}{r}\sin\vartheta\, e^{-j\beta r}}$$

$$H_\varphi = \frac{I_0 l}{4\pi}\,\frac{j\beta}{r}\sin\vartheta\, e^{-j\beta r} \qquad E_\varphi, E_r, H_r, H_\vartheta = 0$$

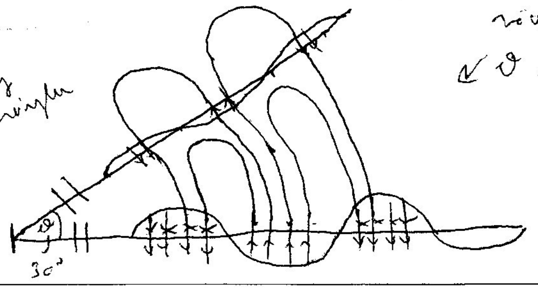
A továbbiakban új kezdőfázist választunk → a j-t elhagyjuk.
Valós hely-idő függvényt kapunk, gömbkoordináta-rendszerben:

$$E_\vartheta(r,\vartheta,t) = \frac{I_0 l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{\beta}{r}\sin\vartheta\cos(\omega t - \beta r) = E_{\vartheta 0}\cos(\omega t - \beta r)$$

$$H_\varphi(r,\vartheta,t) = \frac{I_0 l}{4\pi}\,\frac{\beta}{r}\sin\vartheta\cos(\omega t - \beta r) = H_{\varphi 0}\cos(\omega t - \beta r)$$

$\times H_\varphi$

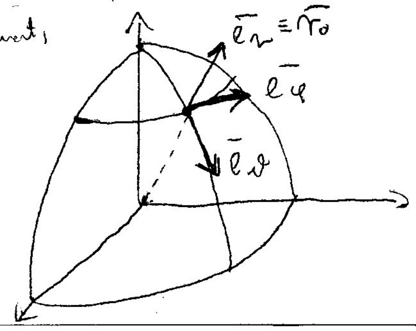
$\vec{S}$ Poynting vektor r irányban mutat!



rögzített időpillanat,

↙ ϑ nől

E_ϑ



2. A TÁVOLTÉR TULAJDONSÁGAI

A ϑ, φ indexet elhagyjuk.

$$E = \frac{I_0 l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\;\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}}_{\beta}\;\frac{1}{r}\sin\vartheta$$

// Ez a csúcsértéke: $\cos(\omega t - \beta r) = 1$

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2} I_0 \frac{l}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{r}\sin\vartheta \qquad H_0 = \frac{1}{2} I_0 \frac{l}{\lambda}\frac{1}{r}\sin\vartheta}$$

Az antenna egyik komponense se függ φ-től $\Rightarrow$ forgásszimmetrikus tér

Ha r nagyon nagy (több 100 km), akkor minden emberi léptékű magassághoz tartozó ϑ olyan kicsi lesz, hogy a dipólusantenna által keltett hullámok síkhullámnak tekinthetők. A gömbhullámokat csak kis felületen nézzük.

1) $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 2) $E \perp H \perp$ terj. irány 3) $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$

3. AZ ANTENNA ÁLTAL ELSUGÁRZOTT TELJESÍTMÉNY

$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$ Valós hely-idő függvényekkel számolunk.

$$\bar{E}_\vartheta(r,\vartheta,t) = \frac{1}{2} I_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{l}{\lambda}\frac{1}{r}\sin\vartheta\,\cos(\omega t - \beta r)$$

$$H_\varphi(r,\vartheta,t) = \frac{1}{2} I_0 \frac{l}{\lambda}\frac{1}{r}\sin\vartheta\,\cos(\omega t - \beta r)$$

$$S(r,\vartheta,t) = E_\vartheta \cdot H_\varphi = \frac{1}{4} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2}\sin^2\vartheta\;\underbrace{\cos^2(\omega t - \beta r)}_{\text{időátlaga } \frac{1}{2}}$$

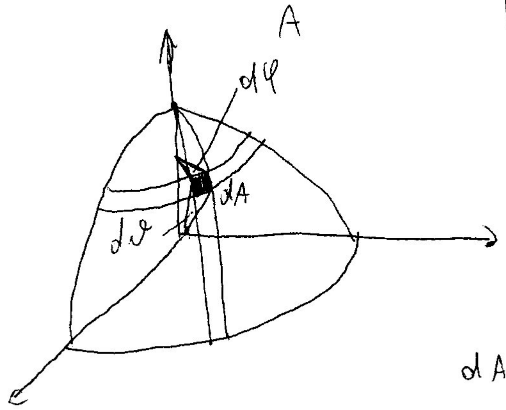
időátlaga:

$$\boxed{S(r,\vartheta) = \frac{1}{8} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2}\sin^2\vartheta}$$

Ugyanez a csúcsértékekből is komplex Poynting-vektorral.

$\Rightarrow$ Az antenna a teljesítményének javát a $90°$-körüli szögeknél adja le (itt a legsűrűbbek a Poynting-vektor vonalai). Elvben a Hertz-dipólus az antenna tengelyének irányában nem sugároz, hiszen $\sin^2 0° = 0$

$$P = \oint_A \bar{S}\, d\bar{A} = \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{8} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \right)$$



$d\varphi$: szélességi kör mentén határozza meg : $r' = r \sin\vartheta$

$d\vartheta$: gömb mentén határozza meg.

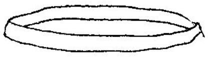
$$r' = r \cdot \sin\vartheta$$

$$dA = r \sin\vartheta \, d\varphi \cdot r \, d\vartheta = r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

ϑ-nak azért elég π-ig mennie, mert φ 2π-ig megy, így is letapogatjuk az egész gömböt.

$$P = \oint_A \bar{S}\, d\bar{A} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{8} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \; r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

φ-t kiküszöbölhetjük ha egy egész gyűrűt veszünk:



$\cancel{A} = 2\pi r \cdot \sin\vartheta \cdot r \, d\vartheta = A_{gyűrű}$

$$P = \frac{2\pi}{8} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}_{4/3} = \qquad \Big/ \int f'(x) f^n(x)\, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}$$

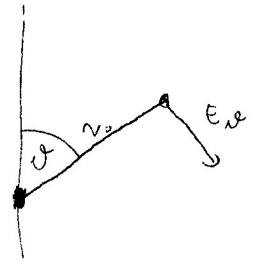
$$= \frac{\pi}{3} I_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}\, 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 = P} \qquad P = \frac{1}{2} R I^2$$

csúcsérték, azért az $\frac{1}{2}$

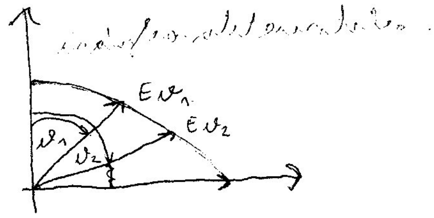
$\Rightarrow$ $\boxed{R_s = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2}$: Sugárzási ellenállás: képzeletbeli, fiktív ellenállás (nem az antenna ellenállása!), amin ha az antenna áramát vezetnénk ugyanannyi teljesítményt venne fel, mint amennyit az antenna elsugároz. Így a segítségével ki tudjuk számítani az antenna által elsugárzott teljesítményt.

4. IRÁNYKARAKTERISZTIKA

E_ϑ irányfüggését (távoltérben) fejezi ki.
Adott r-nél kell mérnünk, hogy a távolság-függés kiessen:



polárdiagramban: $\Longrightarrow$



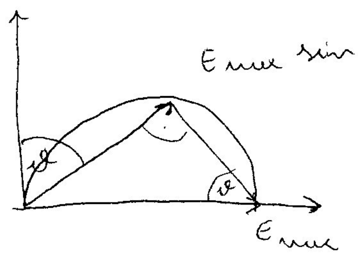
$$E_\vartheta = \frac{1}{2} I_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \frac{l}{\lambda}\, \frac{1}{r} \sin\vartheta$$

$$E(\vartheta = 90°) = \frac{1}{2} I_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \frac{l}{\lambda}\, \frac{1}{r} = E_{max}$$

$$\Bigg\} \; E_\vartheta(\vartheta) = E_{max} \sin\vartheta$$

↳ irány szerinti maximum.

Az iránykarakterisztikák körív alakúak:



Azért van derékszög, mert $\vartheta = 0°$-hoz E_{max} tartozik, $\sin\vartheta = \frac{\text{szemközti bef.}}{\text{átfogó}}$
A $90°$-hoz (Thálesz-tétel) miatt lesz ~~körív~~ kör alakú az ir. karakterisztika. Mivel ez forgásszimmetrikus karakterisztika, ezért tóruszt kapunk. Látható, hogy melyik irányban sugároz jól a dipólus.

Teljesítmény-iránykarakterisztika: $S(\vartheta) = S_{max} \sin^2\vartheta$

Irányhatás: Egyetlen számmal fejezi ki az iránykarakterisztikát.

$$D \triangleq \frac{S_{max}}{S_{átl}} = \frac{S_{max}}{\frac{P_{elsugárzott}}{4\pi r^2}} =$$

$$\boxed{S_{átl} = \frac{P_{elsug}}{4\pi r^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \cancel{I_0^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cancel{\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2} \frac{1}{\cancel{r^2}} \cdot 4\pi \cancel{r^2}}{\frac{1}{2} \cancel{I_0^2}\, 80\pi^2 \cancel{\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}{80\pi} \cong \frac{120\pi}{80\pi} = 1{,}5$$

Nyereség: $G \triangleq \frac{S_{max}(r)}{P_{össz} / 4\pi r^2}$ $\quad P_{össz} = P_{elsug} + P_{veszteség}$

29. ISMERTESSE A TE MÓDUSÚ CSŐTÁPVONALAKRA VONATKOZÓ ÖSSZEFÜGGÉSEKET, ERŐVONALKÉPET!

1. BEVEZETŐ, ALAPEGYENLETEK

Kellően nagy frekvenciájú ... szigetelővel kitöltött csőtáp-

Téglalap keresztmetszetű, homogén szigetelővel kitöltött csőtápvonalakban terjedő hullámok tulajdonságait vizsgáljuk. A fémfal ideális vezető ($\sigma=\infty$), a szigetelő ideális szigetelő ($\sigma=0$).

Lineáris, izotróp, ideális szigetelőkben, szinuszos időbeli változás esetén: $\bar{E}(r,t)=\mathrm{Re}\{\bar{E}(r)e^{j\omega t}\}$ $\bar{H}(r,t)=\mathrm{Re}\{\bar{H}(r)e^{j\omega t}\}$. Az $\bar{E}(r)$ és a $\bar{H}(r)$ komplex csúcsértékre értelmezett Maxwell-egyenletek:

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} \qquad \mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \qquad \mathrm{div}\,\bar{H}=0 \qquad \mathrm{div}\,\bar{E}=0$$

Az elektromos térerősség is divergenciamentes, ezért kifejezhető egy $\bar{Z}=\bar{Z}(r)$ elektromos vektorpotenciál rotációjaként:

$$\boxed{\bar{E} = \mathrm{rot}\,\bar{Z}} \qquad \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\,\bar{Z}=0$$

Erre az elektromos vektorpotenciálra is a Helmholtz-egyenlet vonatkozik (hasonlóan a mágneses vektorpotenciálhoz):

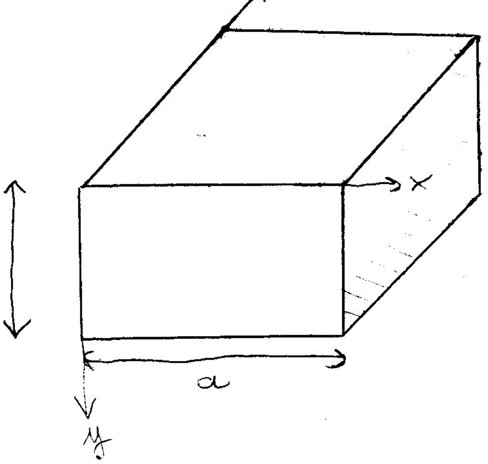
$$\boxed{\Delta\bar{Z} + \omega^2\varepsilon\mu\bar{Z} = 0}$$

ELEKTROMOS VEKTORPOTENCIÁLRA ÉRTELMEZETT ~~ALKALMAZOTT~~ VEKTORIÁLIS HULLÁM EGYENLET

II. ME. H-ra vonatkozó

Ekkor $\bar{E} = \mathrm{rot}\,\bar{Z} \Rightarrow H = -\frac{1}{j\omega\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{E}$

A vizsgált elrendezés:



A határoló fémfal ideális ~~szigetelő~~ vezető → a kielégítendő peremfeltétel: $E_t=0$

$E_y=0$, $E_z=0$ ha $x=0$ vagy $x=a$

$E_x=0$, $E_z=0$ ha $y=0$ vagy $y=b$

Az elektromos vektorpotenciálra nem vonatkozik külön peremfeltétel.

2. A TE MÓDUSOK

A transzverzális elektromos módusú hullámokat úgy kapjuk, hogy olyan megoldást keresünk, amelyre az elektromos vektorpotenciálnak csak z irányú rendezője van:

$$\boxed{Z_x = 0 \qquad Z_y = 0 \qquad Z_z(x,y,z) = F(x,y)\, e^{-\gamma z}}$$

A peremfeltételeknek eleget tevő függvény:

$$\boxed{F(x,y) = M \cos k_x x \cos k_y y}$$

, ahol M állandó,

$$k_x = m\frac{\pi}{a} \quad m = 1, 2, \dots \qquad k_y = n\frac{\pi}{b} \quad n = 1, 2, \dots$$

A TM módussal ellentétben itt az egyik módusindex 0 is lehet. $m = 0$ esetén $k_x = 0$ az erőtér x irányban nem változik, $n = 0$ esetén $k_y = 0$, az erőtér y irányban nem változik.

Így az elektromos térerősség komplex amplitúdójának $E = \text{rot}\, Z$ és egyszerűbb levezetés szerint komponensei rendezői:

$$E_x(x,y,z) = -k_y M \cos k_x x \sin k_y y\, e^{-\gamma z}$$ ← y szerinti der

$$E_y(x,y,z) = k_x M \sin k_x x \cos k_y y\, e^{-\gamma z}$$ ← x szerinti der

$$E_z(x,y,z) = 0$$

$E_x = 0$, $E_z = 0$ ha $y = 0$ és $y = b$

$E_y = 0$, $E_z = 0$ ha $x = 0$ és $x = a$

A mágneses térerősség rendezői $\text{rot}\, E = -j\omega\varepsilon\mu H$ alapján:

$$H_x(x,y,z) = j\frac{k_x \gamma}{\omega\mu} M \sin k_x x \cos k_y y\, e^{-\gamma z}$$

$$H_y(x,y,z) = j\frac{k_y \gamma}{\omega\mu} M \cos k_x x \sin k_y y\, e^{-\gamma z}$$

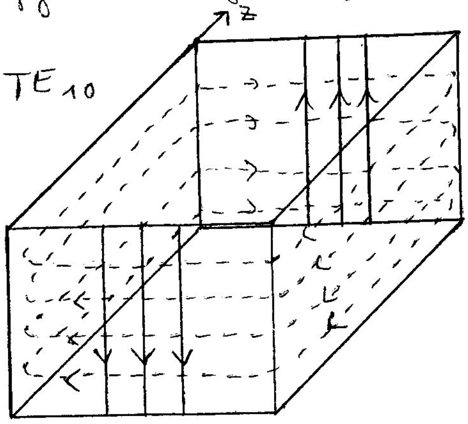
$$H_z(x,y,z) = j\frac{k_x^2 + k_y^2}{\omega\mu} M \cos k_x x \cos k_y y\, e^{-\gamma z}$$

$$\gamma_{mn} = \alpha_{mn} + j\beta_{mn}$$

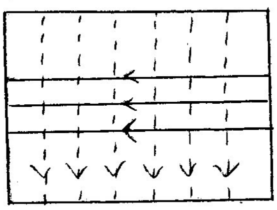
3. TE MÓDUSOK ERŐVONALKÉPE

A TE módusok esetén az E-vonalak a keresztmetszet síkjában vannak, a másik vektornak van z-irányú összetevője is. A H vonalak zártak. Az E vonalak vagy zártak, vagy a falon erednek és végződnek a falra merőlegesen. Az E és H vektorok mindenütt merőlegesek egymásra, irányuk olyan, hogy a Poynting vektor S_z összetevője mindenütt pozitív.

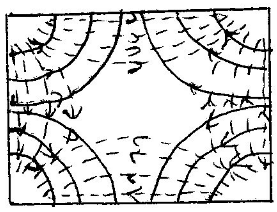
TE_{10}



TE_{01}

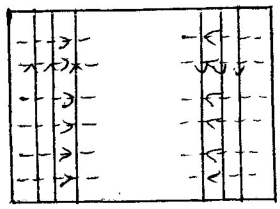


TE_{11}

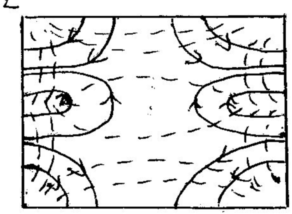


ortogonális görbesereg $B \perp H$ sakkal ~~tejesen~~ pl. a fallal a H, amivel E merőlegesen lép ki!

TE_{20}



TE_{12}



4. Teljesítményáramlás: A csillapítatlan hullám által a z tengely irányában szállított P_{TE} hatásos teljesítmény:

$$P_{TE} = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2}{8 \omega \mu} a b M^2$$

30. ISMERTESSE A TM MODUSÚ CSŐTÁPVONALRA VONATKOZÓ ÖSSZEFÜGGÉSEKET, ERŐVONAL KÉPEKET!

1. BEVEZETÉS, HELMHOLTZ-EGYENLET

Kellően nagy frekvenciájú (kellően kis hullámhosszú) EM. hullámok terjedhetnek egy fémfalú cső belsejében. Szemléletesen: a cső falában folyó áramot a szigetelőben fellépő eltolási áram vezeti vissza.

A téglalap keresztmetszetű, homogén szigetelővel kitöltött csőtápvonalban terjedő hullámok tulajdonságait fogjuk vizsgálni.

Az ε, μ -vel jellemzett lineáris, izotróp ideális szigetelőben, ~~felle~~ szinuszos időbeli változás esetén fellépő térerősségek: $\bar{E}(r,t) = Re\{\bar{E}(r)e^{j\omega t}\}$ $\quad \bar{H}(r,t) = Re\{\bar{H}(r)e^{j\omega t}\}$.

Az $\bar{E}(r)$ és $\bar{H}(r)$ komplex amplitúdókra vonatkozó Maxwell-egyenletek:

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} \qquad \mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \qquad \mathrm{div}\,\bar{H} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\bar{E} = 0$$

$(\sigma = 0 \Rightarrow \bar{J} = 0)$ $\qquad (\rho = 0)$

A mágneses indukció kifejezése $\bar{A}$ (mágneses) vektorpotenciállal. Ezt behelyettesítve II. M.E.-be:

$$\bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A} \Rightarrow \bar{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\bar{A}$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega\,\mathrm{rot}\,\bar{A} \Rightarrow \mathrm{rot}(\bar{E} + j\omega\bar{A}) = 0$$

Ekkor bevezethető az $\bar{E} + j\omega\bar{A} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ definícióval egy φ skalárpotenciál: $\bar{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi - j\omega\bar{A}$. Ezt behelyettesítve az I. M.E.-be:

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\bar{A}\right) = -j\omega\varepsilon(+\mathrm{grad}\,\varphi + j\omega\bar{A}) \qquad // \mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta$$

$$\frac{1}{\mu}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{A} - \Delta\bar{A}) = -j\omega\varepsilon(\mathrm{grad}\,\varphi + j\omega\bar{A})$$

div $\bar{A}$-ra válasszuk a Lorentz-mértéket: $\mathrm{div}\,\bar{A} = -j\omega\varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\varphi$

Ekkor: $\boxed{\Delta\bar{A} + \omega^2\varepsilon\mu\bar{A} = 0}$: HELMHOLTZ EGYENLET

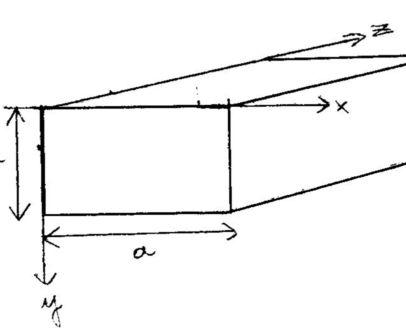
$\bar{A} = \bar{A}(r)$ ismeretében $\bar{E}(r)$ és $\bar{H}(r)$ kifejezhető:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\bar{A} \qquad \bar{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\mathrm{rot}\,\bar{H}$$

~~2. A TM MÓDUSOK~~

~~Vizsgáljuk~~

A vizsgált elrendezés:



Terjedés iránya a z-tengely, a szigetelő ideális ($\sigma = 0$) ε és μ jellemzők. A határoló fémfal ideális vezető ($\sigma = \infty$), ezért a kielégítendő peremfeltétel $E_t = 0$, vagyis:

$E_y = 0$, $E_z = 0$, ha $x = 0$ vagy $x = a$

$E_x = 0$, $E_z = 0$, ha $y = 0$ vagy $y = b$

A mágneses vektorpotenciálra nem vonatkozik peremfeltétel.

2. A TM MÓDUSOK

Vizsgáljuk meg, hogy van-e ~~az előző~~ olyan megoldása a Helmholtz-egyenletnek, amikor a mágneses vektorpotenciálnak csak z-irányú rendezője van:

$A_x = 0$ $\quad A_y = 0$ $\quad A_z(x,y,z) = F(x,y)\, e^{-\gamma z}$

ahol $F(x,y)$ ismeretlen függvény, $\gamma = \alpha + j\beta$ ismeretlen terjedési együttható. (csillapítási e.h., fázis e.h.)

Így a Helmholtz-egyenlet egyetlen A_z-re vonatkozó egyenletre egyszerűsödik:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon \mu A_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} e^{-\gamma z} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} e^{-\gamma z} + \gamma^2 F e^{-\gamma z} + \omega^2 \varepsilon \mu F e^{-\gamma z} = 0 \qquad // : e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \underbrace{\left(\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu\right)}_{k^2} F = 0 \qquad // \boxed{k^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu}$$

Mágneses térerősséget a $\mu \bar{H} = \mathrm{rot}\, \bar{A}$-val fejezzük ki.

$$\mu \bar{H} = \mathrm{rot}\, \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & F e^{-\gamma z} \end{vmatrix} = \bar{e}_x \frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z} - \bar{e}_y \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z}$$

$$\Rightarrow H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z}, \qquad H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z}, \qquad H_z = 0$$

Az elektromos térerősséget kifejezhetjük a mágneses térerősséggel: $j\omega \varepsilon \bar{E} = \text{rot}\, \bar{H}$

$$\text{rot}\, \bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z} & -\frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{e}_x \, \frac{-\gamma}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z} + \bar{e}_y \frac{-\gamma}{\mu}\frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z} + \bar{e}_z \frac{1}{\mu} \underbrace{\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)}_{k^2 F} e^{-\gamma z}$$

A zárójeles kifejezés $k^2 F$, hiszen $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k^2 F = 0$, ezért a

$$E_x = \frac{-\gamma}{j\omega\varepsilon\mu} \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z}$$

$$E_y = \frac{-\gamma}{j\omega\varepsilon\mu} \frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z}$$

$$E_z = \frac{k^2}{j\omega\varepsilon\mu} F e^{-\gamma z} = \frac{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2}{j\omega\varepsilon\mu} F e^{-\gamma z}$$

Látható hogy E_z arányos az $A_z = F e^{-\gamma z}$ összetevővel. $\Rightarrow$ A Helmholtz egyenlet olyan megoldását keressük, ami a peremen 0 értékű. A parciális differenciálegyenletet a változószeparációs eljárással: $F(x,y) = X(x)\, Y(y)$

Ekkor: $F(x,y) = \mu M \sin k_x x \sin k_y y$

M: ismeretlen állandó, pl. átvitt teljesítmény ismeretében határozható meg.

$k_x = m\frac{\pi}{a}$ $m = 1, 2, \dots$; $k_y = n\frac{\pi}{b}$ $n = 1, 2 \dots$

Hiszen biztosítani kell hogy F az $x = a$ és $y = b$ peremen 0 legyen.

n és m módusindexek, egyik se lehet 0 mert az $F=0$ triviális megoldást eredményezi. Rögzített m, n index-párhoz tartozó hullámot TM_{mn} módusnak nevezzük.

TM módus mágneses térerősségének komplex amplitúdói:

$$H_x(x,y,z) = k_y M \sin k_x x \cos k_y y\, e^{-\gamma z}$$

$$H_y(x,y,z) = -k_x M \cos k_x x \sin k_y y\, e^{-\gamma z}$$

$$H_z(x,y,z) = 0$$

Elektromos térerősség komplex amplitúdói:

$$E_x(x,y,z) = j\frac{k_x \gamma}{\omega \varepsilon} M \cos k_x x \sin k_y y\, e^{-\gamma z}$$

$$E_y(x,y,z) = j\frac{k_y \gamma}{\omega \varepsilon} M \sin k_x x \cos k_y y\, e^{-\gamma z}$$

$$E_z(x,y,z) = -j\frac{k_x^2 + k_y^2}{\omega \varepsilon} M \sin k_x x \sin k_y y\, e^{-\gamma z}$$

$k_x = m\frac{\pi}{a}$, $m = 1, 2, \dots$

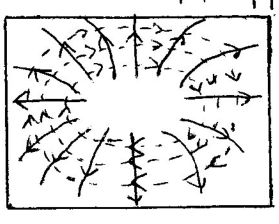
$k_y = n\frac{\pi}{a}$, $n = 1, 2, \dots$

$E_x = 0$ az $y=0$ és $y=b$ peremen, $E_y = 0$ az $x=0$ és $x=a$ peremen, $E_z = 0$ az összes peremen ($y=0$, $x=0$, $x=a$, $y=b$)

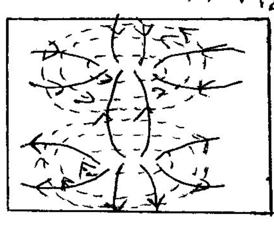
3 Erővonalképek:

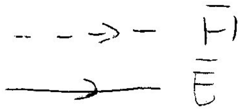
A TM módusok esetében a H vonalak a keresztmetszet síkjában vannak. Az erővonalak megrajzolásánál a következőket vegyük figyelembe: H vonalak zártak. E vonalak vagy zártak, vagy a falon erednek és végződnek a falra merőlegesen. $E \perp H$ -ra irányuk olyan hogy a Poynting vektor S_z összetevője mindenhol pozitív.

TM11



TM12





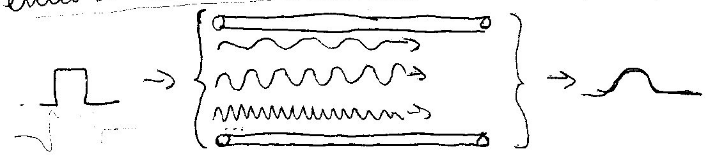
4. Teljesítményáramlás: A csillapítatlan hullám által a z tengely irányában szállított P_{TM} hatásos teljesítmény: (S_z keresztmetszetre vett integrálja:

$$P_{TM} = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2}{8 \omega \varepsilon} a b M^2$$

31) ISMERTESSE A CSŐTÁPVONALAKBAN HALADÓ HULLÁM DISZPERZIÓS EGYENLETÉT ÉS A HATÁRHULLÁMHOSSZ FOGALMÁT!

1. A DISZPERZIÓ, DISZPERZIÓS ÖSSZEFÜGGÉS, DISZPERZIÓS GÖRBE

Nézzük az alábbi gondolatkísérletet: Ha valamilyen impulzust szeretnénk átvinni a hullámvezetőn, akkor ennek a Fourier-sorba fejtett alakját állítjuk elő, mint végtelen sok szinuszos frekvencia összegét. Az impulzust akkor tudjuk a túloldalon is érzékelni, ha ugyanannyi idő alatt ér oda minden ~~de~~ egyes komponens, vagyis ha a fázissebesség frekvenciafüggetlen. Ekkor a fázistényező egyenesen arányos a frekvenciával, ekkor a hullámvezető diszperzió mentes.



: A DISZPERZIÓ HATÁSA

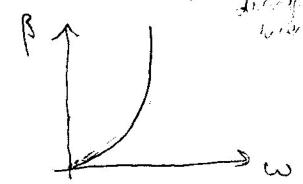
Diszperziós összefüggésnek a terjedési tényező és a frekvencia, szűkebb értelemben a fázistényező (β) és a (kör) frekvencia (ω) kapcsolatát értjük.

Pl.: Távvezeték: $\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$

Síkhullám: $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$

ideális SH: $\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \Rightarrow \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ $\quad v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Diszperziós görbe: A $\beta(\omega)$ függvény, pl.:



2. A CSŐTÁPVONALBAN HALADÓ HULLÁM DISZPERZIÓS EGYENLETE

$$\cancel{\gamma^2_T}\quad k^2 \triangleq \omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2$$

$$k_x^2 + k_y^2 = \omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2 \Rightarrow \gamma^2 = k_x^2 + k_y^2 - \omega^2\varepsilon\mu$$

$$\gamma^2 = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\varepsilon\mu$$

$$\boxed{\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\varepsilon\mu}}$$

DISZPERZIÓS EGYENLET

m, n: módusindexek

a, b: téglalap keresztmetszetű csőtápvonal paraméterei.

3. HATÁRFREKVENCIA, HATÁRHULLÁMHOSSZ

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \omega^2 \mu \varepsilon}$$

Ha $k_x^2 + k_y^2 < \omega^2 \mu \varepsilon \Rightarrow \gamma = j\beta$ csillapítatlan $\Rightarrow$ energiaszállításra alkalmas

Ha $k_x^2 + k_y^2 > \omega^2 \mu \varepsilon \Rightarrow \gamma = \alpha$ csillapodó.

Ha $k_x^2 + k_y^2 = \omega_h^2 \varepsilon \mu$ határhelyzet

$\omega > \omega_c$ ok
$f > f_c$ ok
$\lambda < \lambda_c$

Vizsgáljuk meg ezt a határhelyzetet:

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = (2\pi f_h)^2 \varepsilon \mu \qquad // \ \omega_h = 2\pi f_h$$

$$f_{h,m,n} = \sqrt{\frac{\left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2}{4\pi^2 \varepsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}{4 \varepsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}{4 \varepsilon_r \mu_r}}\, c$$

A határhullámhossz kifejezése:

$$\lambda_{h,m,n} = \frac{c}{f_{h,m,n}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}{4 \varepsilon_r \mu_r}}\, c} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

A határhullámhossz megadja az m, n módusokhoz tartozó, csillapítás nélkül még éppen átvihető hullám (szabadtéri hullámhosszát), a határhullámhosszt.
$\hookrightarrow \lambda = \frac{c}{f}$

csillapíthatatlanul terjedhetnek azok a módusok, akkor:

$$\lambda < \lambda_{h,mn} \quad \text{és} \quad f > f_{h,mn}$$

A csillapítatlan hullám csőtápvonalban mért hullámhossza: $\Lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}}$

$$\beta^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\underbrace{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}_{\text{szabadtéri hullámhossz}} \varepsilon_r - \underbrace{\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2}_{\text{vezetett hullámhossz}} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$