1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2010/11 tél A3

1. Oldja meg az $y'(x) + 3x^2y(x) = x^2$ differenciálegyenletet Laplace-transzformáció alkalmazása nélkül!

MO. A homogén: $y' + 3x^2y = 0 \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = -\int 3x^2\,dx \rightsquigarrow \ln|y| = -x^3 + c \rightsquigarrow y = ce^{-x^3}$,
vagyis a homogén általános megoldása: $y_{há} = ce^{-x^3}$. **3p**

Az inhomogén az állandók variálásával: $y(x) = d(x)e^{-x^3} \rightsquigarrow d'e^{-x^3} - 3x^2de^{-x^3} + 3x^2de^{-x^3} = x^2 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow d'e^{-x^3} = x^2 \rightsquigarrow d' = x^2e^{x^3} \rightsquigarrow d(x) = \int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}e^{x^3} \rightsquigarrow y = \frac{1}{3}e^{x^3}e^{-x^3} = \frac{1}{3}$. **5p**

Így az inhomogén egy partikuláris megoldása: $y_{ip} = \frac{1}{3}$, amivel az inhomogén általános megoldása:

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}.$$ **2p**

10p

---

2. Legyen G a háromdimenziós térben az origóközéppontú R sugarú felső félgömbfelületből és az azt alulról lezáró origóközéppontú R sugarú $[x, y]$ síkbeli körlapból álló kifelé irányított zárt felület. Számítsuk ki a $v(r) = r|r|^4$, $r \in \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény felületmenti integrálját G-n!

MO. A jelölések: k a z irányú egységvektor, $\int_F v\,df$ a v felületmenti, $\int_F v\,|df|$ a v felszín szerinti integrálja. Felhasználjuk, hogy $\int_F v\,df = \int_F v_n\,|df|$, ahol v_n a v-nek a felületi normálisra eső vetülete. Legyen $v(r) = r|r|^4$, n a gömb normálisa, v_n pedig v-nek n-re eső vetülete. Mivel $n \,||\, v(r)$ így

$$v_n = |v(r)| \text{ és a félgömbön } |r| = R,$$ **3p**

tehát $\displaystyle\int_G v\,df = \int_G v_n\,|df| = \int_G |r|^5\,|df| = \int_G R^5\,|df| = R^5\int_G |df| = R^5|G| = R^5 \cdot 2R^2\pi = 2R^7\pi$ **5p**

VAGY Gauss–Osztrogradszkijjal:

$\operatorname{div} r|r|^4 = |r|^4 \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad}|r|^4 = 3\,|r|^4 + r \cdot 4\,|r|^3\,\frac{r}{|r|} = 7\,|r|^4$ ha $r \neq 0$ **3p**

(és az origóban is 0 mivel itt az $r|r|^3$ deriváltoperátora a $\mathbf{0}$ operátor: $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{r|r|^3 - \mathbf{0}\,r}{|r|} = 0$).

$$\rightsquigarrow \int_G r|r|^3\,df = \int_V 7\,|r|^4\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^{2\pi} 7\,r^4 \cdot r^2 \sin\vartheta\,d\varphi\,dr\,d\vartheta =$$

$$= 7 \cdot 2\pi\,\frac{R^7}{7}\,(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2}\;) = R^7 \cdot 2\pi \cdot 1 = 2R^7\pi.$$ **5p**

A körlapon pedig az integrál 0, mert annak normálisa: $-k \perp r \,||\, v$, hisz $r \in [x, y]$ a körlapon. **2p** **2p**

10p

---

3. Adjon meg egy olyan $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek a gradiense a $v(r) = r|r|^3$, $r \in \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény!

MO. $\operatorname{rot} v = 0$ mindenütt, mert $\operatorname{rot} v = |r|^3 \operatorname{rot} r - r \times \operatorname{grad}|r|^3 = 0$ ha $r \neq 0$, hiszen $\operatorname{rot} r = 0$ és $\operatorname{grad}|r|^3 =$
$= 3|r|^2 \cdot \frac{r}{|r|} \,||\, r$ ha $r \neq 0$ és az origóban is 0 mivel itt az $r|r|^3$ deriváltoperátora a $\mathbf{0}$ operátor $\left(\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{r|r|^3 - \mathbf{0}\,r}{|r|} = 0\right)$.

(De persze kiszámítható koordinátánként a rot $v = \nabla \times v$ formulából is.) Tehát

mindenütt van potenciál. **3p**

Így pl. egy, az origót az r ponttal összekötő $s(t) = r\,t$, $0 \le t \le 1$ egyenletű szakasz mentén vonalintegrálva (persze $\dot{s}(t) = r$):

$$u(r) = \int_0^1 v(rt) \cdot r\,dt = \int_0^1 rt|rt|^3 \cdot r dt = \int_0^1 |r|^5t^4dt = |r|^5\int_0^1 t^4dt = |r|^5\frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{|r|^5}{5}.$$ **7p**

(De persze kiszámítható az

$$u_x = v_1,\; u_y = v_2,\; u_z = v_3$$

parciális differenciálegyenletrendszerből is, ahol nyilván $v = (v_1, v_2, v_3)$)

10p

Folytatás a következő oldalon.

4. Létezik-e az $f(z) = \dfrac{z^4}{z-4}$ függvény 100. deriváltja az origóban? Ha igen, számítsa ki!

MO. Akárhányszor deriválható mert itt hatványsorba fejthető:

$$f(z) = \frac{z^4}{z-4} = -\frac{z^4}{4-z} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{z^4}{1-\frac{z}{4}} = -\frac{z^4}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+4}\,4^{-(n+1)} = -\sum_{n=4}^{\infty} z^n\,4^{-n+3}. \qquad \textbf{5p}$$

Ez a hatványsor szükségképpen a függvény Taylor-sora, **2p**

$$\text{így}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n = -\sum_{n=4}^{\infty} z^n\,4^{-n+3} \rightsquigarrow \frac{f^{(100)}(0)}{100!}z^{100} = -4^{-97}z^{100} \rightsquigarrow f^{(100)}(0) = -4^{-97}\,100! \qquad \textbf{3p}$$

10p

---

5. Legyen K egységnyi sugarú, origóközéppontú pozitívan irányított kör. Mennyi az $\displaystyle\int_K z^5 e^{\frac{1}{z^2}}\,dz$ integrál értéke?

MO.

$$e^z \text{ Taylor-sora: } e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \rightsquigarrow \qquad \textbf{1p}$$

$$\rightsquigarrow e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{6}\frac{1}{z^6} + \frac{1}{24}\frac{1}{z^8} + \ldots \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow z^5 e^{\frac{1}{z^2}} = z^5 + z^3 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{z^3} + \ldots \rightsquigarrow \qquad \textbf{3p}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname*{Res}_{z=0} z^5 e^{\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{6} \rightsquigarrow \qquad \textbf{3p}$$

$$\rightsquigarrow \int_K z^5 e^{\frac{1}{z^2}}\,dz = 2\pi j\cdot\frac{1}{6} = \frac{\pi j}{3} \qquad \textbf{3p}$$

10p

---

6. Tegyük fel, hogy a V háromdimenzióbeli térrészre és annak zárt F határfelületére fennállnak a Gauss-Osztrogradszkij tétel feltételei. Melyik igaz, melyik nem? (Jelölések: $\int_F v\,df$ a v felületmenti, $\int_F v\,dV$ a v térfogati integrálja, $|V|$ a V térfogata, $|F|$ a F felszíne.)

(a) $\displaystyle\int_F \operatorname{rot} r\,df = \int_V \operatorname{div} r\,dV$

(b) $\displaystyle\int_F r\,df = 3|V|$

(c) $\displaystyle\int_F r\,df = \int_V \operatorname{div} r\,dV$

(d) $\displaystyle\int_F r\,df = \int_V \operatorname{rot} r\,dV$

(e) $\displaystyle\int_F \operatorname{rot} r\,df = 0$

MO.

(a) Nem igaz: $\operatorname{rot} r = 0$, $\operatorname{div} r = 3$ $\rightsquigarrow$ baloldal 0, jobboldal $3|V|$ **2p**

(b) Igaz: lásd (a) **2p**

(c) Igaz: Gauss-Osztrogradszkij **2p**

(d) Nem igaz: jobboldal 0 (vektor), baloldal $\neq 0$ (lásd (b)) (skalár) **2p**

(e) Igaz: $\operatorname{rot} r = 0$ **2p**

10p