Fizika 1i, 2018 őszi félév, 2. gyakorlat

Szükséges előismeretek: differenciálszámítás, deriválási szabályok (összeg, szorzat, hányados deriváltja, láncszabály); integrálszámítás, határozatlan és határozott integrál, területszámítás; kinematika: elmozdulásvektor, pillanatnyi sebesség és átlagsebesség, relatív sebesség, gyorsulás, egyenletes mozgás, egyenletesen gyorsuló mozgás, ferde hajítás;

Jelölések

helyvektor: $\vec{\boldsymbol{r}}$

sebességvektor: $\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}$

gyorsulásvektor: $\vec{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}$.

Feladatok

Differenciál- és integrálszámítás

F1. Határozzuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $y(t) = A\sin(\omega t)\cos(\omega t)$,

b) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\sin x} + x\right)$,

c) $g(x) = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

F2. Derékszögű háromszög oldalhosszúságainak négyzetösszege 50 cm^2. Mekkoránák válasszuk az oldalakat, hogy a háromszög területe maximális legyen?

F3. Adjuk meg a $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 12$ polinom szélsőértékeit és vázoljuk a függvényt!

F4. Számítsuk ki az $y = \sqrt{x}$ egyenletű parabolának az x tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest térfogatát az $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ határok között!

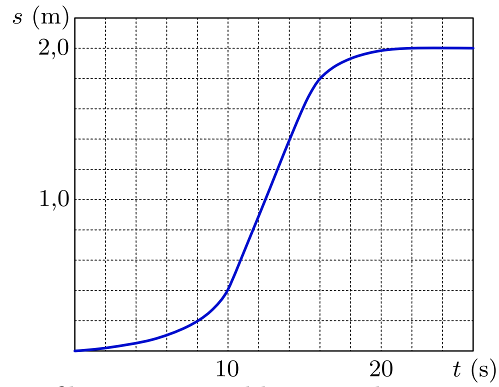
F5. Egy test nyugalomból indulva egy egyenes mentén mozog úgy, hogy gyorsulása zérus értékről időben egyenletesen növekszik, másodpercenként 2 $\mathrm{m/s^2}$ értékkel. Mekkora a test sebessége az indulást követően 4 másodperc után?

Pillanatnyi sebesség és átlagsebesség

F6. Egyenes vonalban mozgó test a teljes útjának felét v_0 sebességgel tette meg; a maradék út megtételéhez szükséges idő felében v_1, másik felében pedig v_2 sebességgel mozgott. Mekkora a test egész útra számított átlagsebessége?

F7. Egy egyenes vonalban haladó autó nyugalomból indul $a = 5{,}0$ $\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással, majd bizonyos ideig állandó sebességgel mozog, végül $-5{,}0$ $\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással lassítva megáll. A mozgás teljes ideje $\tau = 25$ s. Az autó teljes útra számított átlagsebessége $\langle v \rangle = 72$ km/h. Milyen hosszú ideig mozgott az autó egyenletes sebességgel?

F8. Egy pontszerű test egyenes vonalban mozog végig azonos irányban. A megtett s utat a t idő függvényében az alábbi *ábra* mutatja.



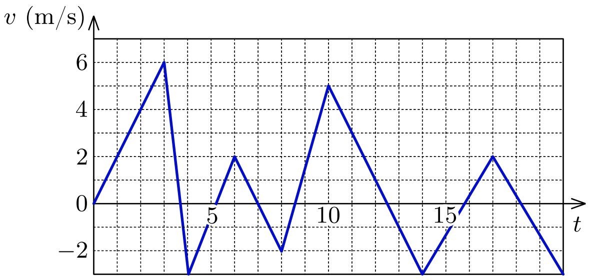
A grafikon segítségével határozzuk meg:

a) a test átlagsebességét a mozgás teljes ábrázolt időtartamára;

b) a test legnagyobb sebességét;

c) azt a t_0 időpillanatot, amikor a test pillanatnyi sebessége éppen megegyezik a mozgás első t_0 időtartamára vonatkozó átlagsebességével.

F9. Egyenes vonalban haladó, pontszerű test az origóból indul, sebességét az idő függvényében az alábbi grafikon szemlélteti. Mikor van a test a legtávolabb az origótól? Mekkora ez a legnagyobb távolság?



Relatív mozgás

F10. Egy motorcsónak folyásirányban haladva az A pontban megelőz egy, a folyón lefelé sodródó ladikot. $T = 60$ perccel később a motorcsónak megfordul, és valamennyi idő múlva újra a ladikhoz ér, amely $d = 6{,}0$ km-re sodródott az A ponttól. Feltételezve, hogy a motorcsónak folyóhoz viszonyított sebességének nagysága állandó, határozzuk meg a folyó sebességét!

F11. Három kicsi csiga egy 60 cm oldalú szabályos háromszög egy-egy csúcspontjában helyezkedik el. A csigák 5 cm/perc nagyságú sebességgel elindulnak: az első csiga a második felé, a második a harmadik felé, a harmadik pedig az első irányába. A csigák mozgásuk közben mindvégig állandó nagyságú sebességgel a kiszemelt társ irányába haladnak. Mennyi idő múlva és mekkora út megtétele után találkoznak?

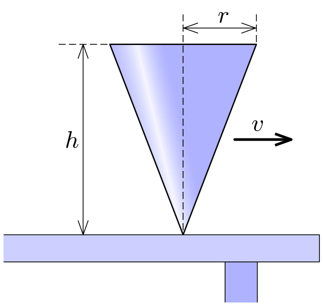
F12. Két utasszállító repülőgép ugyanabban a magasságban halad vízszintesen, egyenes vonalban, $v_1 = 800$ km/h, illetve $v_2 = 600$ km/h állandó sebességgel úgy, hogy pályájuk egymásra merőleges. Ahogy a repülők közelednek egymáshoz, egy adott időpillanatban mindkét gép $L = 20$ km-re van a pályák egyenesének metszéspontjától. Határozzuk meg a repülőgépek legkisebb távolságát a további mozgásuk során!

Hajítások és szabadesés

F13. Milyen magasról esett le az a kezdősebesség nélkül elengedett test, amely mozgásának utolsó másodpercében 50 m utat tett meg? (A légellenállást hanyagoljuk el, $g = 9{,}8$ m/s^2.)

F14. Két pontszerű test indul azonos pontból vízszintes irányban, egymással ellentétes $v_{10} = 3{,}0$ m/s és $v_{20} = 4{,}0$ m/s nagyságú sebességgel. Mekkora távolságra lesznek egymástól a testek abban a pillanatban, amikor sebességvektoruk közötti szög 90°? A nehézségi gyorsulás $g = 9{,}8$ m/s^2.

F15. Egy kúp alakú búgócsiga magassága h, alapkörének sugara r. A játékot sima asztallapon gyors forgásba hozzuk az *ábrán* látható helyzetben, és az asztal széle felé indítjuk. Legalább mekkora legyen a búgócsiga középpontjának v sebessége, hogy az asztal szélébe a kúp alkotója ne csapódjon be? (A búgócsiga forgástengelye mindvégig függőleges marad.)

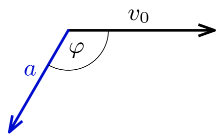


F16. Két pontszerű testet egyszerre hajítunk el azonos $v_0 = 25$ m/s nagyságú kezdősebességgel ugyanabból a pontból: az egyiket függőlegesen felfelé, a másikat a vízszinteshez képest felfelé, $\alpha = 60°$-os szögben. A légellenállást elhanyagolva határozzuk meg a testek távolságát az indítást követően $t = 1{,}70$ s múlva!

F17. Két pontszerű testet egyszerre hajítunk el az azonos magasságban lévő, egymástól d távolságra lévő A és B pontból. Az egyik (A pontból induló) test függőlegesen felfelé indul v_1 sebességgel, míg a B pontból induló test kezdősebessége v_2 nagyságú, iránya pedig az A pont felé mutat. Mekkora minimális távolságra közelítik meg egymást a testek mozgásuk során?

(A nehézségi gyorsulás g, a légellenállást hanyagoljuk el! A testek a minimális távolság eléréséig nem esnek le a talajra.)

F18. Az *ábra* egy pontszerű test sebességét és gyorsulását mutatja a mozgás kezdőpillanatában. A test gyorsulásának iránya és nagysága állandó.



a) Mennyi idő múlva lesz a test sebességének nagysága ugyanakkora, mint a kezdőpillanatban volt?

b) Mikor lesz a sebessége minimális?

(Adatok: $a = 6$ m/s^2, $v_0 = 24$ m/s, $\varphi = 120°$)

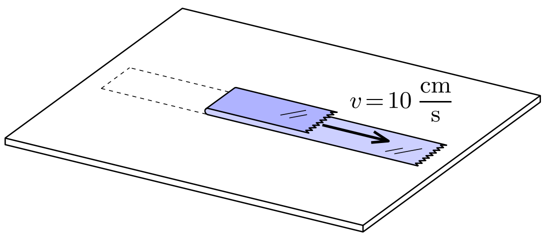
F19. Egy hosszú, a vízszinteshez képest α hajlásszögű lejtőre h magasságból függőlegesen ráejtünk egy kicsiny, rugalmas labdát. Mutassuk meg, hogy a labda egymást követő pattanási helyeinek távolsága számtani sorozat szerint növekszik, és határozzuk meg a sorozat differenciáját (különbségét)!

(Az ütközéseket tekintsük tökéletesen rugalmasnak, és a közegellenállást hanyagoljuk el!)

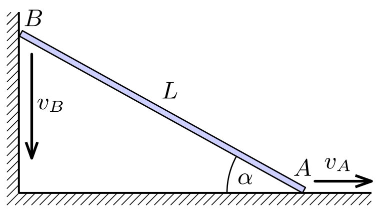
Útmutatás: Használjunk olyan koordináta-rendszert, melynek tengelyei a lejtő síkjával párhuzamosak, illetve merőlegesek!

Kényszerek

F20. Egy asztallapra felragasztunk egy bizonyos hosszúságú celluxszalagot, majd az egyik végét felhajtva, vízszintesen 10 cm/s sebességgel egyenletesen visszafelé húzzuk. Mekkora sebességgel mozog a szalag mozgásban lévő részének a közepe?

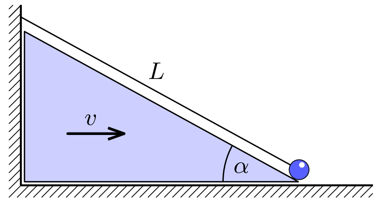


F21. Egy merev rúd egyik (A) vége a talajon, másik (B) vége pedig egy függőleges falhoz támaszkodik. Az A pontot állandó v_A sebességgel húzzuk vízszintes irányban. Mekkora a B pont sebessége abban a pillanatban, amikor a rúd vízszintessel bezárt szöge éppen α? (Tegyük fel, hogy a rúd nem válik el a faltól.)



F22. Egy merev rúd A és B végpontjának pillanatnyi sebességvektora egy adott időpillanatban $\boldsymbol{v}_A$ és $\boldsymbol{v}_B$. Adjuk meg ugyanekkor a rúd B-hez közelebbi harmadolópontjának sebességvektorát!

F23. Egy pontszerű golyó az α hajlásszögű éken fekszik az *ábrán* látható módon. A golyót az ék legfelső pontjával megegyező magasságban rögzített, L hosszúságú, nyújthatatlan fonál tartja az éken. Az éket vízszintes irányban állandó v sebességgel mozgatni kezdjük.



a) Mennyi idő múlva ér a golyó az ék tetejéhez?

b) Mekkora a golyó sebességének nagysága?

c) Milyen pályán mozog a golyó?

Megoldások

F1. *a*) A szorzat deriválási szabályát alkalmazzuk:

$$y'(t) = A\omega\cos^2(\omega t) - A\omega\sin^2(\omega t) = A\omega\cos(2\omega t)\,.$$

b) A láncszabályt alkalmazzuk kétszer:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x + 1}{\mathrm{e}^{\sin x} + x}\,.$$

c) Ismét láncszabályt alkalmazva:

$$g'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}}\,.$$

F2. *1. megoldás.* Jelölje a befogókat a és b, az átfogót pedig c! Pitagorasz tételének felhasználásával a feladat követelménye így írható:

$$a^2 + b^2 + \underbrace{a^2 + b^2}_{c^2} = 50\ \mathrm{cm}^2.$$

Ebből kifejezhetjük b-t a-val, és behelyettesíthetjük a terület összefüggésébe:

$$T = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a\sqrt{25 - a^2}\,.$$

A $T(a)$ függvény szélsőértékének (jelen esetben maximumának) helyét a derivált eltűnéséből kaphatjuk meg. Ezért előbb kiszámítjuk a differenciálhányadost:

$$T'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{25-a^2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{\sqrt{25-a^2}}\,,$$

ahol felhasználtuk a szorzat deriváltjára vonatkozó összefüggést és a láncszabályt. A $T'(a) = 0$ feltételből a területet maximalizáló befogóhosszra $a = 5/\sqrt{2}$ cm adódik. (Ekkor ugyanilyen hosszú a másik befogó is, a háromszög területe pedig 6,25 cm^2.)

2. megoldás. Differenciálszámítás nélkül is megoldható a feladat, ha észrevesszük, hogy az adott ($c = 5$ cm hosszú) átfogójú derékszögű háromszögek közül a legnagyobb területűt kell megtalálnunk. Az ilyen derékszögű háromszögek átfogóval szemközti csúcsa az átfogó köré rajzolt Thalész-körön helyezkedik el, melyek közül az egyenlőszárúnak a legnagyobb az átfogóhoz tartozó magassága (és így a területe is). Innen az *1. megoldással* azonos $a = b = 5/\sqrt{2}$ cm eredmény adódik.

3. megoldás. Alkalmazzuk a mértani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget a háromszög befogóira!

$$\sqrt{ab} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{12{,}5\ \mathrm{cm}^2}\,.$$

A célunk lényegében az ab szorzat maximalizálása. A közepek között egyenlőség akkor van, ha $a = b$, ahonnan az $a = b = 5/\sqrt{2}$ cm eredményhez jutunk.

F3. A függvénynek annál az x helyen van (lokális) szélsőértéke, ahol a deriváltja eltűnik:

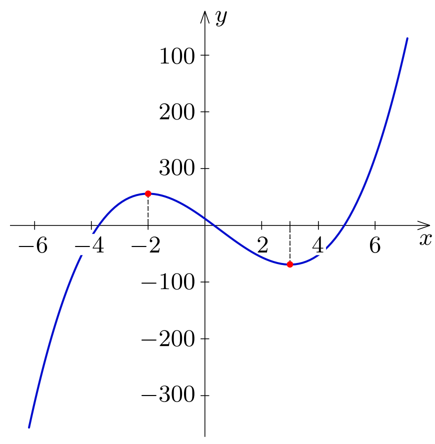
$$p'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 0\,.$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva a két gyökre $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$ adódik. Ezeken a helyeken a polinom $p(x_1) = 56$ és $p(x_2) = -69$ értékeket vesz fel.

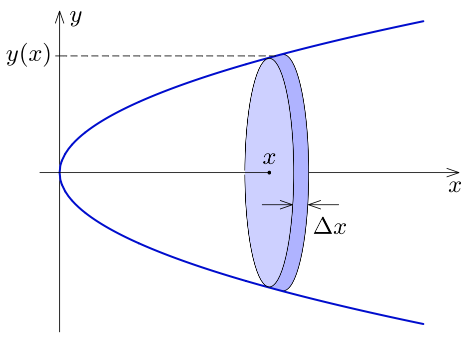
Ahhoz, hogy a függvényt vázolni tudjuk, meg kell vizsgálnunk a polinom második deriváltját:

$$p''(x) = 12x - 6\,.$$

Látszik, hogy $x < 1/2$ esetén a második derivált negatív (itt a függvény „lefelé görbül"), $x = 0$-nál nulla (itt inflexiós pontja van, azaz a görbület változik), $x > 1/2$-re pedig pozitív (a polinom grafikonja „fölfelé görbül"). Eszerint $x_1 = -2$-nél a függvénynek lokális maximuma, $x_2 = 3$-nél pedig lokális minimuma van. Mindezek alapján vázolható a polinom grafikonja:



F4. A forgástestet osszuk fel kicsiny, Δx szélességű szeletekre (korongokra)!



Az adott x-nél lévő korong sugara $y(x)$, így térfogata $\Delta V = \pi y^2(x)\,\Delta x$. Az elemi térfogatokat összegezve, majd a felosztás finomításával összegzésről integrálra térve át:

$$V = \sum \Delta V = \sum \pi y^2(x)\,\Delta x \to \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

amely tetszőleges forgástestre igaz. Most használjuk fel, hogy $y(x) = \sqrt{x}$:

$$V = \pi \int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2\pi\,.$$

F5. A test gyorsulásának változási ütemére (idő szerinti deriváltjára) vezessük be a $w = \dot{a}$ jelölést, ennek értéke tehát a feladat szerint 2 m/s^3. Ennek segítségével a test gyorsulása az idő függvényében $a(t) = wt$ alakban írható fel. A sebességváltozást a gyorsulás-idő függvény görbe alatti területének kiszámításával (integrálással) adhatjuk meg:

$$\Delta v(t) = \int_0^t a(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t wt'\,\mathrm{d}t' = \frac{w}{2}t^2\,.$$

Mivel a test kezdősebessége nulla, ugyanekkora t idő után a sebesség is. Behelyettesítve a $t = 4$ s értéket végül $v = 16$ m/s sebesség adódik.

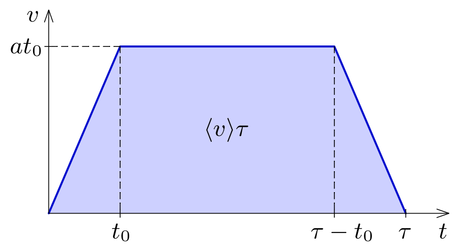
F6. Jelöljük a teljes megtett utat $2s$-sel, az út második felének megtételéhez szükséges időt pedig $2t$-vel! A feladat szövege szerint az út első, s hosszú szakaszának megtételéhez s/v_0 időre volt szükség, míg az út második felének hosszát $s = v_1t+v_2t$ alakban írhatjuk fel. Az átlagsebesség definíciója szerint:

$$\langle v\rangle = \frac{s_{\text{összes}}}{t_{\text{összes}}} = \frac{2s}{\frac{s}{v_0}+2t} = \frac{2s}{\frac{s}{v_0}+\frac{2s}{v_1+v_2}}\,.$$

Egyszerűsíthetünk s-sel, majd rövid alakítás után a következőt kapjuk:

$$\langle v\rangle = \frac{2v_0(v_1+v_2)}{2v_0+v_1+v_2}\,.$$

F7. Jelölje a gyorsítás időtartamát t_0, ezzel a teherautó legnagyobb sebessége at_0. Mivel a teherautó ugyanolyan ütemben lassít, mint amilyen ütemben növelte sebességét a mozgás kezdetén, így a lassítás időtartama is t_0. Az átlagsebesség definíciója alapján a jármű által megtett teljes út $\langle v\rangle\tau$ alakban írható fel.



Célszerű a teherautó mozgását sebesség-idő grafikonon ábrázolni, ez tartalmazza ugyanis a lehető legtöbb információt (lásd az *ábrát*). A megtett út a görbe alatti terület (trapéz) segítségével fejezhető ki:

$$\langle v\rangle\tau = \frac{\tau + (\tau - 2t_0)}{2}at_0\,,$$

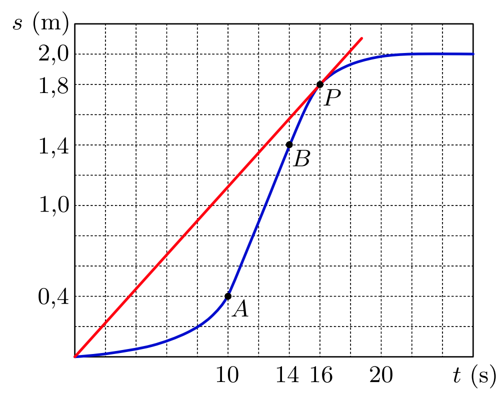
amely t_0-ra egy másodfokú egyenletté rendezhető:

$$at_0^2 - a\tau t_0 + \langle v\rangle\tau = 0\,.$$

Az adatokat behelyettesítve, majd az egyenletet megoldva t_0-ra két gyök adódik, melyek közül a fizikailag értelmes (pozitív) $t_0 = 5$ s. Ekkora tehát a gyorsítás és a lassítás ideje, a teherautó tehát $\tau - 2t_0$=15 másodpercig mozgott állandó sebességgel.

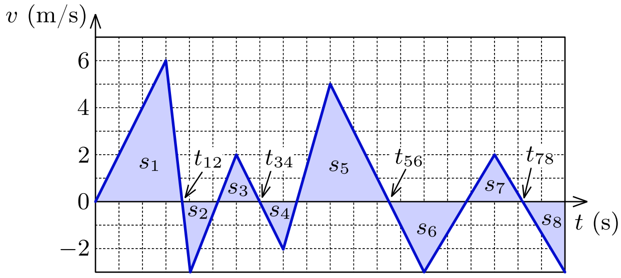
F8. *a)* A test a mozgás ábrázolt 26 másodperce alatt összesen 200 cm utat tett meg, így átlagsebessége $\langle v\rangle = 7{,}7$ cm/s.

b) A pillanatnyi sebesség akkor a legnagyobb, amikor az elmozdulás-idő grafikon a legmeredekebb. Ez hozzávetőlegesen a 12. másodpercnél történik meg. Ennek a pontnak a környezetében a függvény az *ábrán* látható AB egyenes szakasszal jól közelíthető, melynek meredeksége 100 cm/4 s = 25 cm/s.



c) A pillanatnyi sebesség az $s(t)$ grafikon adott pontbeli érintőjének meredekségével egyenlő. Az átlagsebesség az összes megtett út és az addig eltelt idő hányadosa, ez tehát az $s(t)$ grafikonon az origóból kiinduló, adott ponthoz húzott szelő meredeksége. A keresett időpillanatban tehát az origóból húzott szelő és az érintő egybeesik (piros vonal), ez az *ábrán* látható P pontra igaz. Az átlagsebesség tehát $t_0 = 16$ s időpillanatban egyezik meg a pillanatnyi sebességgel.

F9. A sebesség-idő függvény görbe alatti területe megadja az elmozdulást. Ha az origótól mért távolság maximális, akkor annak változási üteme (a sebesség) nulla. Azt kell tehát eldöntenünk, hogy az *ábrán* látható háromszögek közül az első n darab területének (előjeles) részösszege mekkora n-re maximális.



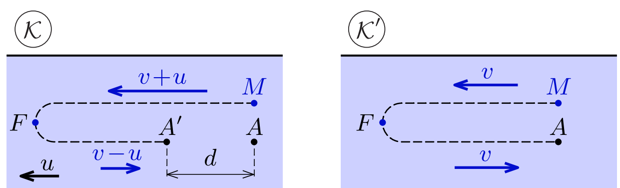
A háromszögek méretéből látszik, hogy a pontszerű test sosem tér vissza az origóba, mindig a pozitív féltengelyen mozog. Ezért bizonyos, hogy az *ábrán* jelzett t_{12}, t_{34}, t_{56} vagy t_{78} időpillanatok valamelyikében lesz az origótól mért távolság maximális (hiszen közvetlenül ezek után a távolság csökkenni kezd). A területeket megbecsülve gyorsan kiderül, hogy $t_{56} = 12{,}5$ s a keresett időpillanat.

A maximális távolság meghatározásához nem kerülhetjük meg az első öt háromszög területeinek meghatározását. A magasságok és alapok hosszának leolvasásával (vagy kiszámolásával) a következőket kapjuk:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
11 m	$-2{,}3$ m	1,8 m	$-1{,}6$ m	9,8 m

Ezek összege 18,7 m, ekkora tehát a legnagyobb eltávolodás az origótól.

F10. *1. megoldás.* Érdemes az eredeti, parthoz rögzített $\mathcal{K}$ koordináta-rendszer helyett a folyóval együttmozgó $\mathcal{K}'$ koordináta-rendszert használni. Ennek előnye, hogy innen szemlélve a folyó és a rajta sodródó ladik egyhelyben áll, a motorcsónak pedig mindkét irányban ugyanakkora nagyságú sebességgel mozog (lásd az *ábrát*). A $\mathcal{K}'$ rendszerben a motorcsónak ugyanakkora utat tesz meg az A ladiktól az F fordulópontig, mint vissza, ezért az út első és második feléhez szükséges idő megegyezik, összesen 2 óra. Visszatérve a $\mathcal{K}$ rendszerbe azt mondhatjuk, hogy a ladik 2 óra alatt sodródott lefelé $d = 6$ km-t, így a folyó sebessége 3 km/h.



2. megoldás. Az eredeti, parthoz rögzített vonatkoztatási rendszerben is megoldható a feladat. Jelöljük a folyó sebességét u-val, a motorcsónak vízhez viszonyított relatív sebességét v-vel ($v > u$). Amikor a motorcsónak folyásirányban halad, parthoz viszonyított sebessége $v + u$, folyásiránnyal szemben pedig $v - u$. A motorcsónak a ladik elhagyásától az F fordulópontig T ideig mozog, a visszaút időtartamát jelölje T'. A motorcsónak visszaérkezéséig a ladik

$$d = u(T + T')$$

utat tesz meg, ami másképpen felírva a motorcsónak által folyón lefelé, illetve felfelé megtett utak különbsége:

$$d = (v + u)T - (v - u)T' .$$

E két egyenletből $T = T' = 1$ óra adódik, ezt az első egyenletbe visszaírva a folyó sebességére végül $u = d/(2T) = 3$ km/h adódik. Érdekes, hogy a motorcsónak sebességét a megadott adatokból nem határozhatjuk meg.

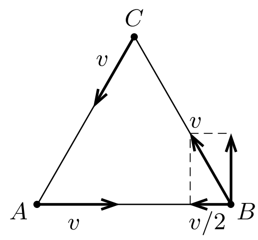
F11. *1. megoldás.* Jelöljük a csigákat A, B és C betűkkel. Bontsuk fel a B jelű csiga sebességvektorát az *ábrán* látható módon az A jelű csiga felé mutató és erre merőleges komponensekre. Ekkor ez a két csiga

$$v + \frac{v}{2} = \frac{3v}{2} = 7{,}5\ \frac{\text{cm}}{\text{perc}}$$

sebességgel közeledik egymás felé, tehát a köztük lévő, kezdetben 60 cm-es távolságot

$$\frac{60\ \text{cm}}{7{,}5\ \text{cm/perc}} = 8\ \text{perc}$$

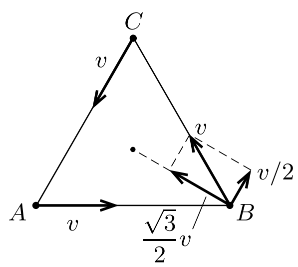
alatt teszik meg, ennyi idő múlva találkoznak. Ezalatt az idő alatt mindegyik csiga 5 cm/perc sebességgel halad, tehát a találkozásig 40 cm utat tesznek meg.



2. megoldás. Ugyanerre az eredményre juthatunk akkor is, ha a B jelű csiga sebességvektorát az *ábrán* látható módon, a csigák alkotta szabályos háromszög középpontja felé mutató és arra merőleges vektorokra bontjuk fel. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a csigák állandóan $\sqrt{3}v/2 = (\sqrt{3}/2) \cdot 5$ cm/perc sebességgel közelednek a háromszög középpontja felé (a szimmetria miatt itt találkoznak), miközben $v/2$ kerületi sebességgel körbe is járják ezt a pontot. Geometriai megfontolásokból adódik, hogy kezdetben a csigák $(\sqrt{3}/3) \cdot 60$ cm távolságra vannak a háromszög középpontjától, tehát

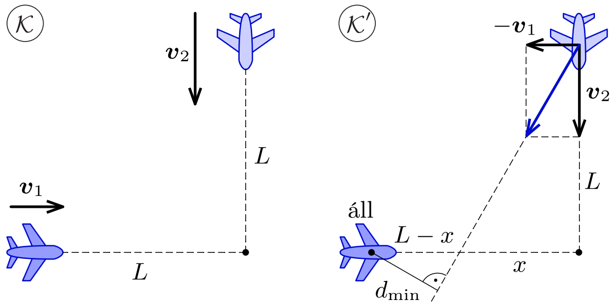
$$\frac{(\sqrt{3}/3) \cdot 60\ \text{cm}}{(\sqrt{3}/2) \cdot 5\ \text{cm/perc}} = 8\ \text{perc}$$

múlva találkoznak.



F12. Kézenfekvő gondolat, hogy a repülőgépek távolsága akkor minimális, amikor a gyorsabb gép eléri a pályák metszéspontját. Ez a feltételezés (és az így kapható 5 km-es eredmény) azonban hibás!

A helyes válaszhoz üljünk bele az egyik (az alábbi *ábrán* a lassabb, 1-es számú) repülőgéppel együttmozgó $\mathcal{K}'$ vonatkoztatási rendszerbe! Innen szemlélve az 1-es gép áll, a 2-es pedig $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ sebességgel halad.



A két gép közötti legkisebb $d_{\min}$ távolság az *ábra* jobb oldali részén látható hasonló háromszögek segítségével határozható meg. Az alábbi arányosságokat írhatjuk fel:

$$\frac{d_{\min}}{L-x}=\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\,,\qquad \frac{x}{L}=\frac{v_1}{v_2}\,.$$

Ebből a repülőgépek minimális távolsága:

$$d_{\min}=\frac{v_2-v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}L=4\ \text{km}\,.$$

F13. Jelöljük a mozgás teljes idejét t-vel, az utolsó másodperc időtartamát Δt-vel! A test esési magassága t-vel felírható:

$$h=\frac{g}{2}t^2\,.$$

A mozgás utolsó másodpercének kezdetén a szabadon eső test kezdősebessége $v_0=g(t-\Delta t)$, így a maradék Δt idő alatt megtett út:

$$\Delta s=v_0\Delta t+\frac{g}{2}\Delta t^2=g(t-\Delta t)\Delta t+\frac{g}{2}\Delta t^2\,.$$

Ebből t kifejezhető:

$$t=\frac{\Delta s}{g\Delta t}+\frac{\Delta t}{2}\,,$$

amit beírva a h magasságot megadó összefüggésbe:

$$h=\frac{g}{2}\left(\frac{\Delta s}{g\Delta t}+\frac{\Delta t}{2}\right)^2\approx 154\ \text{m}\,.$$

F14. Használjunk olyan koordináta-rendszert, melynek x tengelye vízszintes, y tengelye pedig függőlegesen lefelé mutat! Ebben a két test sebességevektorának komponensei az idő függvényében:

$$\boldsymbol{v}_1(t)=(v_{10},gt)\quad \boldsymbol{v}_2(t)=(-v_{20},gt)\,.$$

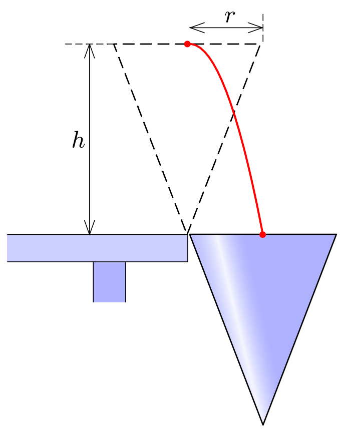
Amikor a két sebesség merőleges egymásra, a fenti két vektor skaláris szorzata nulla:

$$\boldsymbol{v}_1(t)\boldsymbol{v}_2(t)=v_{10}v_{20}-g^2t^2=0\,,$$

amiből a kérdéses időpillanatra a $t=\sqrt{v_{10}v_{20}}/g$ eredményt kapjuk. A függőleges és vízszintes mozgások függetlensége miatt a testek esésük közben mindig azonos magasságban vannak, távolságuk tehát a vízszintes irányú eltávolodásukból számolható:

$$d=(v_{10}+v_{20})t=(v_{10}+v_{20})\frac{\sqrt{v_{10}v_{20}}}{g}=2{,}47\ \text{m}\,.$$

F15. A kúp minden pontja az asztal szélének elhagyása után v kezdősebességgel a vízszintes hajítás egyenletei szerint mozog. Az esés során akkor nem ütközik bele a kúp az asztal szélébe, ha h távolsággal való süllyedés során legalább r távolságnyit elmozdul vízszintes irányban (lásd az *ábrát*).



A süllyedés ideje:

$$h=\frac{1}{2}gt^2\quad\longrightarrow\quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

ezalatt a vízszintes elmozdulás vt, aminek nagyobbnak kell lennie r-nél. Innen a kezdősebességre adódó feltétel:

$$v>r\sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$

F16. Bár a két test kezdősebességének nagysága megegyezik, irányuk különböző, ezért jelöljük a kezdősebességek vektorait $\boldsymbol{v}_{10}$-lal és $\boldsymbol{v}_{20}$-lal (természetesen $|\boldsymbol{v}_{10}|=|\boldsymbol{v}_{20}|=v_0$)! Vektorokkal kifejezhetjük a két test (az eldobás helyétől mért) helyvektorát az idő függvényében:

$$\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{v}_{10}t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2\,,\qquad \boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{v}_{20}t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2\,.$$

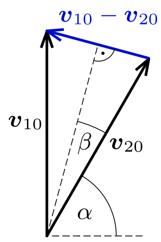
A testek távolsága t idő után:

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{r}_2(t)|=|\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20}|t\,.$$

Érdekes, hogy ez az eredmény nem tartalmazza a gyorsulást, csak a kezdősebességek vektorát! A testek tehát egymáshoz képest egyenes vonalú, egyenletes mozgást végeznek.

Már csak a $\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_{20}$ vektor nagyságának meghatározása van hátra. Ezt legegyszerűbben az *ábrán* látható szerkesztéssel tehetjük meg. A $\boldsymbol{v}_{10}$ és $\boldsymbol{v}_{20}$ vektorok egy olyan egyenlőszárú háromszöget feszítenek ki, melynek egyik szöge $2\beta = 90° - \alpha$. A háromszöget a magasság két egybevágó derékszögű háromszögre bontja, melyek egyik befogója éppen a keresett különbségvektor hosszának fele, ezért:

$$|\boldsymbol{v}_{10} - \boldsymbol{v}_{20}| = 2v_0 \sin\beta = 2v_0 \sin\left(\frac{90° - \alpha}{2}\right).$$



Tehát a testek távolsága $t = 1{,}70$ s után:

$$d = 2v_0 t \sin\left(\frac{90° - \alpha}{2}\right) = 22{,}0 \text{ m}.$$

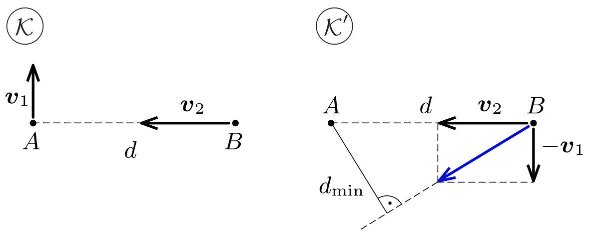
F17. Az előző feladathoz hasonlóan indulhatunk el. A testek helyvektora az idő függvényében

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{v}_1 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2, \qquad \boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{v}_2 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2.$$

A 2-es test 1-eshez viszonyított (relatív) mozgását a

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t) = (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)t$$

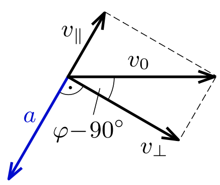
különbségvektor írja le. Az 1-es testhez képest a 2-es tehát egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ sebességgel.



A relatív mozgás vizsgálata egyenértékű azzal, hogy beleülünk az 1-es testtel együttmozgó (gyorsuló) $\mathcal{K}'$ vonatkoztatási rendszerbe (lásd az *ábrát*). A testek legkisebb távolságát az *ábra* jobb felén látható hasonló háromszögekből határozhatjuk meg:

$$\frac{d_{\min}}{d} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad \text{ebből} \quad d_{\min} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} d.$$

F18. A mozgás lényegében egy ferde hajítás, annyi szokatlansággal, hogy a gyorsulás nem függőlegesen lefelé mutat. A hajításnál látottakhoz hasonlóan járunk el: a sebességvektort felbontjuk a gyorsulással párhuzamos ($v_\parallel$) és arra merőleges ($v_\perp$) komponensekre.



A gyorsulásra merőleges sebességkomponens a mozgás során állandó marad:

$$v_\perp = v_0 \cos(\varphi - 90°) = \text{állandó},$$

míg a párhuzamos komponens időben egyenletesen változik:

$$v_\parallel = v_0 \sin(\varphi - 90°) - at.$$

a) A sebességvektor nagysága akkor lesz ugyanakkora, mint az induláskor, amikor $v_\parallel$ ellentettjére változik. Az ehhez szükséges idő:

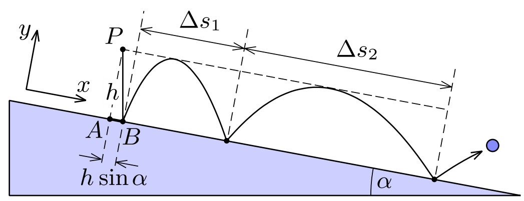
$$t_1 = \frac{2v_\parallel}{a} = \frac{2v_0 \sin(\varphi - 90°)}{a} = 4 \text{ s}.$$

b) A sebesség nagysága akkor a legkisebb, amikor a párhuzamos komponens eltűnik, ez a

$$t_2 = \frac{v_\parallel}{a} = \frac{t_1}{2} = 2 \text{ s}$$

időpillanatban valósul meg.

F19. Az *ábrán* látható, a lejtő hajlásához „illeszkedő" koordináta-rendszerből nézve a labda pattogását úgy látjuk, mintha egy vízszintes síkon $g' = g\cos\alpha$ nehézségi gyorsulású térben pattogna egy labda, melynek még egy állandó, $g\sin\alpha$ nagyságú „vízszintes" gyorsulása is van. Az y irányú mozgás azonos magasságú, tehát azonos periódusidejű pattogásokból áll, eközben a labda x irányban egyenletesen gyorsul.



Az *ábra* P pontjából (h magasságból) elengedett labda $\Delta t = \sqrt{2h/g}$ idő alatt éri el a lejtőt, és ezalatt $h\sin\alpha$ távolságot tesz meg a „lejtő mentén" (ez az AB szakasz). Ezt követően minden egymás utáni pattanás időtartama $2\Delta t$, vagyis az elengedés után a pattanások a $\Delta t, 3\Delta t, 5\Delta t, 7\Delta t, \ldots, (2k+1)\Delta t$ időpillanatokban következnek be (itt k pozitív egész szám).

A labda lejtő menti gyorsulása mindvégig állandó ($g\sin\alpha$), tehát az egymást követő pattanások közötti távolság a négyzetes úttörvény szerint számolható:

$$\Delta s_k = \frac{1}{2} g \sin\alpha \left[(2k+1)^2 - (2k-1)^2\right] \Delta t^2$$

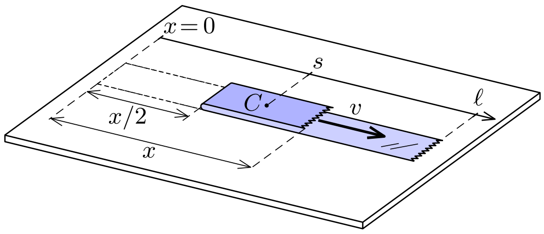
A szögletes zárójel $(2k+1)^2 - (2k-1)^2 = 8k$ módon átalakítható. Felhasználva Δt korábban meghatározott értékét végül a pattanások közötti távolságra a

$$\Delta s_k = 8kh\sin\alpha$$

eredményt kapjuk, vagyis az AB szakasz hosszának 8-szorosát, 16-szorosát, és így tovább. A pattanási helyek közötti távolságok tehát *számtani sorozatot* alkotnak, melynek differenciája $8h\sin\alpha$.

F20. Jelöljük a szalag meghúzott végének pillanatnyi elmozdulását x-szel (lásd az *ábrát*), a hajlat elmozdulása ekkor $x/2$, a mozgó rész C középpontjának elmozdulása pedig $s = \frac{3}{4}x$. Ezek szerint a középpont sebessége

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = 7{,}5\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.$$

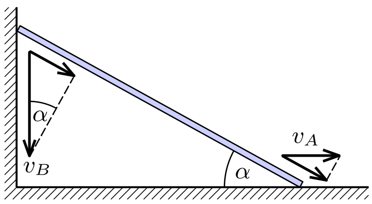


Érdemes megjegyezni, hogy a C pont nem a cellux anyagának egy adott, filctollal megjelölhető pontja (hiszen az 10 cm/s sebességgel mozogna), hanem az éppen mozgó celluxdarab középpontja, amely pillanatról pillanatra a cellux más anyagi pontjára esik.

F21. A rúd merevsége biztosít kapcsolatot az A és B pont mozgása között. Mivel a rúd hossza állandó, így az A és B pontok rúdirányú sebességkomponense meg kell, hogy egyezzen (ellenkező esetben a rúd a következő időpillanatban megnyúlna vagy összezsugorodna):

$$v_A \cos\alpha = v_B \sin\alpha\,.$$

Ebből a B pont sebessége $v_B = v_A/\tan\alpha$.



F22. Jelölje a rúd két végpontjának (időfüggő) helyvektorát $\vec{\boldsymbol r}_A$ és $\vec{\boldsymbol r}_B$, ekkor a B-hez közelebbi P harmadolópont helyvektora:

$$\vec{\boldsymbol r}_P = \vec{\boldsymbol r}_A + \frac{2}{3}\left(\vec{\boldsymbol r}_B - \vec{\boldsymbol r}_A\right) = \frac{1}{3}\vec{\boldsymbol r}_A + \frac{2}{3}\vec{\boldsymbol r}_B\,.$$

Mindkét oldalt idő szerint deriválva megkaphatjuk a P pont sebességvektorát:

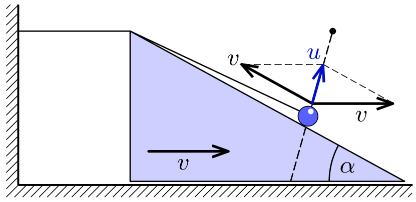
$$\vec{\boldsymbol v}_P = \frac{1}{3}\vec{\boldsymbol v}_A + \frac{2}{3}\vec{\boldsymbol v}_B\,.$$

F23. *a*) Amikor a golyó a lejtő tetejére ér, a lejtő faltól mért távolsága L. Ez az állapot az indulást követően tehát L/v idő elteltével következik be.

b) Adott idő alatt a lejtő ugyanannyival távolodik a faltól, mint amennyivel a golyó feljebb kerül a lejtőn (a fonál nyújthatatlansága miatt). A golyó tehát a lejtő legfelső pontjához ugyanakkora sebességgel közeledik, mint amekkora sebességgel mozog a lejtő. A golyó talajhoz viszonyított sebességvektorát ezért az *ábrán* látható módon szerkeszthetjük meg.

A sebesség u nagyságát a vektorok által kifeszített rombusz átlójaként számolhatjuk:

$$u = 2v\sin(\alpha/2)\,.$$



c) A *b*) részben meghatározott sebesség nagysága és iránya független attól, hogy a golyó épp hol helyezkedik el a lejtőn, tehát állandó. Ezért a golyó egyenes vonalú, egyenletes mozgással emelkedik felfelé, a vízszinteshez képest $90° - \alpha/2$ szögben.