ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

I. ZÁRTHELYI

2011. márc. 10.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Írja le a $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ definícióját és ennek alapján mutassa meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 - 3n + 4000}{3n^2 - n + 1000} = 2 \qquad (N(\varepsilon) = ?)$$

D $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$: $(\varepsilon \in \mathbb{R}, N(\varepsilon) \in \mathbb{N})$
$|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ 3

$$|a_n - A| = \left| \frac{6n^2-3n+4000}{3n^2-n+1000} - 2 \right| = \left| \frac{-n+2000}{3n^2-n+1000} \right| = \quad 3$$

$$\underset{n>2000}{=} \frac{n-2000}{3n^2-n+1000} \ (2) < \frac{n-0}{3n^2-n^2+0} = \frac{1}{2n} < \varepsilon \quad (2)$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} \qquad N(\varepsilon) \geq \max\left\{2000, \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]\right\} \quad (2)$$

2. feladat (14 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorozatokat!

a) $a_n = \sqrt{4n^2 - 9} - \sqrt{4n^2 + 5n + 3}$

b) $b_n = \dfrac{5^n + n^3 (-3)^{n+1}}{3^{2n+1} + 7}$

a) $\boxed{8}$

$$a_n = \left(\sqrt{} - \sqrt{}\right) \frac{\sqrt{} + \sqrt{}}{\sqrt{} + \sqrt{}} \ (2) = \frac{\overbrace{4n^2-9-(4n^2+5n+3)}^{-5n-12}}{\sqrt{4n^2-9}+\sqrt{4n^2+5n+3}} \underset{(2)}{=}$$

$$= \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2}}}_{=\frac{n}{n}=1} \frac{-5-\frac{12}{n}}{\sqrt{4-\frac{9}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}} \longrightarrow \frac{-5-0}{\sqrt{4-0}+\sqrt{4+0+0}} = -\frac{5}{4} \quad (4)$$

b) $\boxed{6}$

$$b_n = \frac{5^n + n^3(-3)(-3)^n}{3\cdot 9^n + 7} = \underbrace{\frac{5^n}{9^n}}_{=\left(\frac{5}{9}\right)^n \to 0} \frac{1 - 3\overbrace{n^3\left(-\frac{3}{5}\right)^n}^{\to 0}}{3 + 7\underbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^n}_{\to 0}} \longrightarrow 0$$

Felhasználtuk, hogy $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$; $k \in \mathbb{N}, |a| < 1$

an1z1 110310/1.

3. feladat (15 pont)

Tekintsük az

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \sqrt{3\,a_n + 4}$$

$$(a_n) = (\,2,\ 3.16,\ 3.67\,, \dots\,)$$

rekurzióval megadott sorozatot!

Indokolja meg, hogy a sorozat konvergens és adja meg a határértékét!

Ha (a_n) konvergens:

$A = \sqrt{3A+4} \Rightarrow A^2 - 3A - 4 = 0 \Rightarrow A = -1$ vagy $A = 4$ 2

Sejtés: (a_n) monoton nő

Bizonyítás: teljes indukció

1.) $a_1 < a_2 < a_3$ teljesül

2.) Tfh. $a_{n-1} < a_n$

3.) Igaz-e ?

$\sqrt{3a_{n-1}+4} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4}$

2.) miatt: $a_{n-1} < a_n$

$\Rightarrow 3a_{n-1} < 3a_n$

$\Rightarrow 0 < 3a_{n-1}+4 < 3a_n+4$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{3a_{n-1}+4}}_{=a_n} < \underbrace{\sqrt{3a_n+4}}_{a_{n+1}}$

Tehát (a_n) mon. nő. 5

Sejtés: (a_n) felülről korlátos

Állítás: $a_n < 4$

B Teljes indukcióval

1) $a_i < 4$ $i = 1,2,3$-ra igaz

2.) Tfh. $a_n < 4$

3.) Igaz-e $a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4} < 4$

2.) miatt $a_n < 4$

$\Rightarrow 3a_n < 12$

$\Rightarrow 0 < 3a_n + 4 < 16$

$\Rightarrow \sqrt{3a_n+4} = a_{n+1} < \sqrt{16} = 4$ 4

Mivel a sorozat monoton és korlátos, így konvergens. 2

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$ jöhet csak szóba, mert $a_1 = 2$ és (a_n) mon. nő.

an1 z1 110310/2.

4. feladat (20 pont)

Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \left(\frac{2n}{5n+4}\right)^n$ b) $b_n = \left(\frac{5n+1}{2n+1}\right)^n$

c) $c_n = \left(\frac{2n+5}{2n+1}\right)^n$ d) $d_n = \left(\frac{2n+5}{2n+1}\right)^{n^2}$

a.) $\boxed{5}$

$$0 < a_n = \left(\frac{2n}{5n+4}\right)^n < \left(\frac{2n}{5n}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0, \quad 0 \to 0$$

$$\underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} \quad a_n \to 0$$

b.) $\boxed{5}$

$$b_n = \left(\frac{5n+1}{2n+1}\right)^n \geq \left(\frac{5n}{2n+n}\right)^n = \left(\frac{5}{3}\right)^n \to \infty$$

$$\underset{\text{spec. rendőrelv.}}{\Longrightarrow} \quad b_n \to \infty$$

c.) $\boxed{5}$

$$c_n = \frac{\left(1+\frac{5/2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1/2}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{e^{5/2}}{e^{1/2}} = e^2$$

d.) $\boxed{5}$

$$d_n = c_n^n \underset{n>N_1}{>} (e^2-1)^n \to \infty \underset{\text{spec. rend. elv}}{\Longrightarrow} d_n \to \infty$$

5. feladat (10 pont)

$$a_n = \frac{2^{2n+1} + (-3)^n}{2^{n+2} + 4^n} \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Adja meg a sorozat összes torlódási pontját!

$\overline{\lim}\, a_n = ?\,,\qquad \underline{\lim}\, a_n = ?$

$$\alpha_n := \frac{2\cdot 4^n + (-3)^n}{4\cdot 2^n + 4^n} = \frac{2+\left(\frac{-3}{4}\right)^n}{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} \longrightarrow \frac{2+0}{0+1} = 2 \quad 5$$

Ha $n = 4k+1$: $a_n = \alpha_n \to 2$ 1

$n = 2k$: $a_n = 0 \to 0$ 1

$n = 4k+3$: $a_n = -\alpha_n \to -2$ 1

$S = \{2, 0, -2\}$

$\overline{\lim}\, a_n = 2$; $\underline{\lim}\, a_n = -2$ 2

an1 z1 110310/3.

6. feladat (12 pont)

a) Ismertesse a numerikus sorokra kimondott minoráns kritériumot!

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

b1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 7n}{2n^4 + 4n - 5}$, b2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{5n^2 \cdot 4^n + 2^n}$

a.) $0 \le d_n \le a_n$ $\forall$ n-re és $\sum^{\infty} d_n$ divergens $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ divergens

2

b1.) $\boxed{5}$

$a_n = \frac{3n^3 + 7n}{2n^4 + 4n - 5} \ge \frac{3n^3 + 0}{2n^4 + 4n^4 - 0} = \frac{3}{6} \frac{1}{n}$

$\frac{1}{2} \sum^{\infty} \frac{1}{n}$ div $\underset{\text{min. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^{\infty} a_n$ div.

b2.) $0 < b_n = \frac{4^n}{5n^2 4^n + 2^n} < \frac{4^n}{5n^2 4^n + 0} = \frac{1}{5} \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{5} \sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. $(\alpha = 2 > 1) \underset{\text{maj. kr.}}{\Longrightarrow} \sum b_n$ konv.

an1 z1 110310/4.

7. feladat (17 pont)

a) Ismertesse a Leibniz kritériumot!

b) Abszolút vagy feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n^2+3}$$

Adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$; $c_n > 0$

$\boxed{3}$

Ha (c_n) monoton fogyóan tart 0-hoz, akkor a sor konvergens.

b.) $c_n = \frac{n}{2n^2+3} \geq \frac{n}{2n^2+3n^2} = \frac{1}{5}\frac{1}{n}$; $\frac{1}{5}\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens

$\boxed{14}$

$\underset{\text{min. kr.}}{\Longrightarrow}$ $\sum^{\infty} c_n$ divergens, tehát a sor nem abszolút konvergens. (4)

Leibniz sor-e?

$c_n = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n} \to 0} \frac{1}{2+\frac{3}{n^2}} \to 0$ (2), $\frac{3}{n^2} \to 0$

Mon. csökkenő-e?

$c_{n+1} \overset{?}{\leq} c_n$

$\frac{n+1}{2(n+1)^2+3} \overset{?}{\leq} \frac{n}{2n^2+3}$

$(n+1)(2n^2+3) \overset{?}{\leq} n(2n^2+4n+5)$

$2n^3+3n+2n^2+3 \overset{?}{\leq} 2n^3+4n^2+5n$

$0 \overset{?}{\leq} 2n^2+2n-3$ Ez pedig $\forall$ n-re igaz. (3)

Mivel $c_n \searrow 0$, ezért Leibniz sor és így konvergens (1)

Tehát a sor feltételesen konvergens. (1)

$s \approx s_{100}$ $\quad |H| \leq c_{101} = \frac{101}{2 \cdot 101^2+3}$ (3)

an1 z1 110310/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (13 pont)

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} \cdot n^4} = ?$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5n^2+4}{n^6+3n}} = ?$

a.) $\boxed{5}$ $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{5} n^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{5}}}_{\to 1} \cdot (\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^4 \to \frac{1}{25}$

b.) $\boxed{8}$ $\underbrace{\frac{1}{(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^6}}_{\to 1} = \sqrt[n]{\frac{4}{n^6+3n^6}} \leq \sqrt[n]{\frac{5n^2+4}{n^6+3n}} \leq \sqrt[n]{\frac{5n^2+4n^2}{n^6}} = \frac{\overset{\nearrow 1}{\sqrt[n]{9}}}{(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^4} \to 1$

$\underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5n^2+4}{n^6+3n}} = 1$

9. feladat (7 pont)

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1} + 2^{2n}}{5^n} = ?$ (Határozza meg a sor összegét!)

2 konvergens geometriai sor összegéről van szó.

$-2\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = -2\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^2}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1-\frac{4}{5}}$

2 2

$\underbrace{q_1 = -\frac{2}{5},\ |q_1|<1 \qquad q_2 = \frac{4}{5},\ |q_2|<1}_{3}$

an1 z1 110310/6.