1. feladat (4+9=13 pont)
a) Ismertesse az algebra alaptételét! (Komplex polinomokra.)
b) Számolja ki a $z^4 - (2-3i)z^3 - 6iz^2 = 0$ egyenlet megoldásait!

Mo. *a*) Minden legalább elsőfokú komplex (egyváltozós) polinomnak van (komplex) gyöke. **(4p)** (Vagy: Minden legalább elsőfokú komplex polinom felírható elsőfokú gyöktényezők szorzataként **(4p)** , és a gyöktényezők száma (multiplicitással számolva) megegyezik a polinom fokával.)
b) $z^4 - (2-3i)z^3 - 6iz^2 = z^2(z^2 - (2-3i)z - 6i) = 0$ **(2p)** , ha $z = 0$ **(1p)** , vagy
$$z = \frac{2-3i+\sqrt{(2-3i)^2+24i}}{2} = \frac{2-3i+\sqrt{(2+3i)^2}}{2} = \frac{2-3i\pm(2+3i)}{2},\ \textbf{(4p)}$$
tehát ha $z = 2$ vagy $z = -3i$. **(2p)**

---

2. feladat (4+10=14 pont)
a) Mi a (sorozatokra vonatkozó) rendőrelv? (Bizonyítás nélkül mondja ki a tételt!)
b) Határozza meg az $a_n = \left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n+3}$ sorozat határértékét!

Mo. *a*) Ha $\forall n \geq N$ esetén $a_n \leq c_n \leq b_n$, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$. **(4p)**
b) $a_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}} \left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^3$ **(1p)** . Itt a második tényező 1-hez tart **(1p)**
, az elsőhöz pedig tudjuk, hogy $\left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2} = \dfrac{\left(1-\frac{3}{2n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{n^2}} \to \dfrac{e^{-3/2}}{e^{-1/2}} = e^{-2}$ **(3p)**
így elég nagy n, és $0 < \varepsilon < e^{-2}$ esetén
$$1 \leftarrow \sqrt[n]{e^{-2}-\varepsilon} \leq \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^n \leq \sqrt[n]{e^{-2}+\varepsilon} \to 1, \qquad \textbf{(3p)}$$
így a rendőrelv miatt $a_n \to 1$ **(2p)**

---

3. feladat (8+10=18 pont)
a) Mondja ki és bizonyítsa be a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabályt!
b) Adja meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (3x+5)e^{x^2+7x-2}$ függvény monoton! Milyen lokális szélsőértékhelyei vannak a függvénynek?

Mo. *a*) $(fg)' = f'g + fg'$ **(2p)** (Ahol f és g deriválható.)

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = && \textbf{(2p)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = && \textbf{(3p)}\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

Az első határérték számításánál felhasználtuk, hogy ha g deriválható egy pontban, akkor ott folytonos is. **(1p)**

b) $f'(x) = 3e^{x^2+7x-2} + (3x+5)(2x+7)e^{x^2+7x-2} = (6x^2+31x+38)e^{x^2+7x-2} = 0$ **(3p)** , ha $x = \frac{-31\pm 7}{12}$ **(2p)** , így a függvény monoton növő a $\left(-\infty, \frac{-19}{6}\right]$ és $[-2,\infty)$ intervallumon, és monoton csökkenő a $\left[\frac{-19}{6}, -2\right]$ intervallumon. **(3p)** . Az $x = \frac{-19}{6}$ pontban lokális maximum, az $x=-2$ pontban lokális minimum van **(2p)** .

---

4. feladat (4+11=15 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy intervallumon differenciálható függvény invertálható legyen! (Bizonyítás nélkül.)
b) $f(x) = 2 - \arcsin\left(\dfrac{3}{x^2}\right)$
Adja meg f értelmezési tartományát és deriváltját! Határozza meg a legbővebb -2 pontot tartalmazó nyílt intervallumot, amelyen a függvény invertálható, és adja meg itt a függvény inverzét!

Mo. *a)* Ha az I intervallum minden x pontjában $f'(x) > 0$ (vagy $\forall x \in I : f'(x) < 0$), akkor f invertálható I-n. **(4p)**

b) $D_f = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$ **(2p)** . $f'(x) = \dfrac{\frac{6}{x^3}}{\sqrt{1-\frac{9}{x^4}}}$ **(3p)** . $f'(x) < 0$ ha $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ **(1p)** , tehát f invertálható a $(-\infty,-\sqrt{3})$ intervallumon **(1p)** , és itt inverze $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{3}{\sin(2-x)}}$ **(4p)** .

---

5. feladat (4+11=15 pont)*
a) Ismertesse a helyettesítéses integrálás módszerét határozatlan integrálra!
b) Megfelelő helyettesítéssel adja meg az $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{x-11}$ függvény határozatlan integrálját!

Mo. *a)* $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big)\dot\varphi(t)\,\mathrm{d}t|_{t=\varphi^{-1}(x)}$ **(3p)** Feltételek: egy I intervallumon φ invertálható és differenciálható **(1p)** , f-nek létezik primitív függvénye I-n.

b) $t = \sqrt{2x+3}$ **(1p)** behelyettesítéssel $x = \dfrac{t^2-3}{2} = \varphi(t)$, így $\varphi'(t) = t$ **(2p)** , tehát

$$\int \frac{\sqrt{2x+3}-1}{x-11}\,dx = \int \frac{t-1}{\frac{t^2-3}{2}-11}\cdot t\,dt = 2\int 1 + \frac{25-t}{t^2-25}\,dt \qquad (\mathbf{3p})$$

Itt $\dfrac{25-t}{t^2-25} = \dfrac{A}{t-5} + \dfrac{B}{t+5}$ **(1p)** , ahol $A+B=-1$ és $5(A-B)=25$ **(1p)** , így $A=2$, $B=-3$ **(1p)** , így

$$\int \frac{\sqrt{2x+3}-1}{x-11}\,dx = 2\sqrt{2x+3} + 4\ln|\sqrt{2x+3}-5| - 6\ln(\sqrt{2x+3}+5) + c \qquad (\mathbf{2p})$$

---

6. feladat (12 pont)*
Számolja ki a $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin^3 x \cos^4 x|\,dx$ integrált!

Mo. $f(x) := \sin^3 x \cos^4 x > 0$, ha $x \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$, és $f(x) < 0$, ha $x \in \big(-\frac{\pi}{3}, 0\big)$ **(2p)** , így

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\,dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \big(-f(x)\big)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx. \qquad (\mathbf{2p}).$$

$\sin^3 x \cos^4 x = \sin x(1-\cos^2 x)\cos^4 x = \sin x \cos^4 x - \sin x \cos^6 x$ **(2p)** , így

$$\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c \quad (\mathbf{3p}),$$

és

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin^3 x \cos^4 x|\,dx = \left[+\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} + \left[-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \quad (\mathbf{2p})$$

$$= +\frac{2}{5} - \frac{2}{7} - \frac{(1/2)^5}{5} + \frac{(1/2)^7}{7} \qquad (\mathbf{1p}).$$

---

7. feladat (6+7=13 pont)*
a) Milyen α esetén konvergens az $\dfrac{1}{x^\alpha}$ függvény improprius integrálja a $(0,1)$, és az $(1,\infty)$ intervallumon? (A tanult állításokat mondja ki bizonyítás nélkül!)
b) Számolja ki az $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2}{9+4x^2}\,dx$ integrált!

Mo. *a)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$. **(3p)**
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ pontosan akkor konvergens, ha $\alpha < 1$. **(3p)**
b) $\displaystyle\int \frac{2}{9+4x^2}\,dx = \frac{2}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + c$ **(4p)**
így $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2}{9+4x^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\omega}{3} = \frac{\pi}{6}$ **(3p)**

IMSC feladat (14 IMSC pont)
Hány valós zérushelye van az $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \operatorname{sh}(t^3)\,dt$ függvénynek?

Mo. $F(-1) = 0$ **(2p)** . Mivel $F'(x) = \operatorname{sh}(x^3)$ **(2p)** egyetlen zérushelye 0 **(2p)** , így legfeljebb egy pozitív és egy negatív zérushelye lehet a függvénynek **(2p)** . Mivel $F(0) < 0$ **(2p)** , és $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$ **(2p)** , így van egy pozitív zérushelye is a függvénynek **(2p)** .