SAS PÉTER ISTVÁN
YRWPU9

7. Gyakorlat
Ellenőrző kérdések

1, Adja meg az autoregresszív (AR) és mozgóátlag (MA) folyamatok diszkrétidejű modelljének definícióját. Adja meg a diszkrétidejű ARX és ARMAX modellek értelmezését ezek általánosításaként.

a, $A(q)\cdot y(t) = e(t) \longrightarrow AR$ $\qquad A(q) = 1 + a_1\cdot q^{-1} + \ldots + a_{na}\cdot q^{-na}$

fehér zaj frekvencia spektruma konstans

$y(t) + a_1\cdot y(t-1) + \ldots + a_{na}\cdot y(t-na) = e(t)$

b, $y(t) = C(q)\cdot e(t) \longrightarrow MA$ $\qquad C(q) = 1 + c_1\cdot q^{-1} + \ldots + c_{nc}\cdot q^{-nc}$

$y(t) = e(t) + c_1\cdot e(t-1) + \ldots + c_{nc}\cdot e(t-n_c)$

c, Külső jel $\rightarrow X$

$B(q)\cdot u(t) = b_1\cdot u(t) + b_2\cdot u(t-1) + \ldots + b_{nb}\cdot u(t-n_b+1)$

d, ARX: $A(q)\cdot y(t) = B(q)\cdot u(t-n_k) + e(t)$

holt idő

e, ARMAX:
$$A(q)\cdot y(t) = B(q)\cdot u(t-n_k) + C(q)\cdot e(t)$$
$$\Downarrow$$
$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}\cdot u(t-n_k) + \frac{C(q)}{A(q)}\cdot e(t) = \frac{B(q)\cdot q^{-nk}}{A(q)}\cdot u(t) + \frac{C(q)}{A(q)}\cdot e$$

2, Vezesse le, hogy a $D(z) = \frac{b_1\cdot z + b_2}{z^2 + a_1\cdot z + a_2} = \frac{b_1\cdot z^{-1} + b_2\cdot z^{-2}}{1 + a_1\cdot z^{-1} + a_2\cdot z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$ átviteli függvényű diszkrétidejű rendszer identifikációja $y(t) = \varphi^T(t)\,\vartheta$ alakú lineáris paraméter becslési feladatra vezet a $q^{-k}x(t) = x(t-k)$ eltolásoperátor bevezetésével. Adja meg a rendszerhez tartozó $\varphi^T(t)$ és ϑ felépítését.

$y(t) + a_1\cdot y(t-1) + a_2\cdot y(t-2) = b_1\cdot u(t-1) + b_2\cdot u(t-2)$

$y(t) = -a_1\cdot y(t-1) - a_2\cdot y(t-2) + b_1\cdot u(t-1) + b_2\cdot u(t-2) \Rightarrow y(t) = -a_1\cdot q^{-1}\cdot y(t) - a_2\cdot q^{-2}\cdot y(t) + b_1\cdot q^{-1}\cdot u(t) + b_2\cdot q^{-2}$

$y(t) = \varphi^T(t)\cdot\vartheta \longrightarrow$ lineáris paraméter becslési feladat

$$\varphi^T(t) = [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad u(t-1) \quad u(t-2)] \qquad \vartheta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

SAS PÉTER ISTVÁN
YRWPU9

Levezetés

$$(1+a_1\cdot z^{-1}+a_2 z^{-2})\cdot Y=(b_1\cdot z^{-1}+b_2\cdot z^{-2})\,U$$

$$y(t)+a_1\cdot y(t-1)+a_2\cdot y(t-2)=b_1\cdot u(t-1)+b_2\cdot u(t-2)$$

bevezetve a $q^{-\ell}\,x(t)=x(t-\ell)$ eltolásoperátort

$$A(q)=1+a_1\cdot q^{-1}+a_2\cdot q^{-2}\qquad B(q)=b_1+b_2\cdot q^{-1}$$

$$A(q)\cdot y(t)=B(q)\cdot u(t-\underset{\uparrow\text{holtidő}}{1})$$

$$y(t)=-a_1\cdot y(t-1)-a_2\cdot y(t-2)+b_1\cdot u(t-1)+b_2\cdot u(t-2)$$
$$y(t)=\varphi^T(t)\cdot\vartheta$$
$$\varphi^T=[-y(t-1)\;\;-y(t-2)\;\;u(t-1)\;\;u(t-2)]\qquad \vartheta=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

lineáris paraméter becslési probléma

3, Adja meg az $y(t)=\varphi^T(t)\cdot\vartheta$ lineáris paraméterbecslési feladat $V(\vartheta,t)$ veszteségfüggvényét, a lineáris paraméterbecslési feladat általános megoldásának 2 alakját és az abban szereplő kifejezések értelmezését. Mennyiben változik a megoldás W súlyozó mátrix előírása esetén?

Veszteség függvény: $V(\vartheta,t)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}[y(t)-\varphi^T(t)\cdot\vartheta]^2$ $\quad t=1,\dots,N\;\; y(t)=\varphi^T(t)\vartheta$

$$\frac{\partial V}{\partial\vartheta}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\frac{1}{N}\cdot\sum_{t=1}^{N}\left[\underbrace{\frac{1}{2}y^2(t)}_{=\phi,\text{ a deriválás miatt}}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot y(t)\cdot\varphi^T(t)\cdot\vartheta+\frac{1}{2}\varphi^{T^2}(t)\,\vartheta^2\right]\right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\vartheta}=-\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}y(t)\cdot\varphi(t)+\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\cdot\varphi^T(t)\cdot\vartheta=\phi\Rightarrow\text{minimum}$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta:=\left[\frac{1}{N}\cdot\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\cdot\varphi^T(t)\right]^{-1}\cdot\frac{1}{N}\cdot\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\cdot y(t)$$

$$Y=\begin{bmatrix}y(1)\\y(2)\\\dots\\y(N)\end{bmatrix}\qquad \Phi=\begin{bmatrix}\varphi(1)\\\varphi(2)\\\dots\\\varphi(N)\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

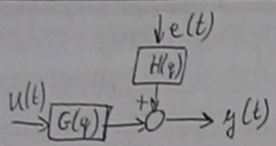
$$\Phi^T\cdot\Phi\cdot\vartheta=\Phi^T\cdot y$$

$$\vartheta=(\Phi^T\cdot\Phi)^{-1}\cdot\Phi^T\cdot y$$

Súlyozó mátrix okozta változás.

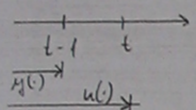
$$\vartheta = \left(\Phi^T \cdot W \cdot \Phi\right)^{-1} \Phi^T \cdot W \cdot Y$$

4., Adja meg az $y(t) = G(q)\cdot u(t) + H(q)\cdot e(t)$ rendszer esetén az optimális 1-lépéssel előretartó $\hat{y}(t|t-1)$ jóslás és az $\varepsilon(t)$ reziduál (becslési hiba) alakját. Mutassa meg az eredmény felhasználásával, mi lesz ARX modell esetén az $\hat{y}(t|t-1)$ jóslás és az $\varepsilon(t)$ reziduál alakja!



$$\hat{y}(t|t-1) = q^{-1}\cdot \tilde{H}(q)\cdot H^{-1}(q)\cdot y(t) + \left[1 - q^{-1}\cdot \tilde{H}(q)\cdot H^{-1}(q)\right]\cdot G(q)\cdot u$$

$$\tilde{H} = q\cdot (H-1) \qquad H(q) = 1 + h_1\cdot q^{-1} + \dots + h_n\cdot q^{-n} + \dots = 1 + q^{-1}\cdot \tilde{H}(q)$$



$$\boxed{\hat{y}(t|t-1) = \left[1 - H^{-1}(q)\right]\cdot y(t) + H^{-1}(q)\cdot G(q)\cdot u(t)}$$

$$\boxed{\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) = H^{-1}(q)\cdot\left[y(t) - G(q)\cdot u(t)\right]}$$

ARX modell

$$A(q)\cdot y(t) = B(q)\cdot u(t) + e(t)$$

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}\cdot u(t) + e(t)\cdot\frac{1}{A(q)} \Rightarrow \frac{B}{A} = G \text{ és } \frac{1}{A} = H \rightarrow H^{-1} = A$$

$$H^{-1}\cdot G = B \qquad 1 - H^{-1} = 1 - A$$

$$\boxed{\hat{y}(t|t-1) = \left[1 - A(q)\right]\cdot y(t) + B(q)\cdot u(t)}$$

$$\boxed{\varepsilon(t) = A(q)\cdot y(t) - B(q)\cdot u(t)}$$

5., Adja meg az ARX modell esetén az optimális $\hat{\vartheta}^{LS}$ paraméterbecslés alakját. Mutassa meg, hogy $y(t) = \varphi^T(t)\cdot\vartheta_0 + v_0(t)$ jel esetén becslési hiba léphet fel, és adja meg, mire kell törekedni ennek kiküszöbölése érdekében.

$$\hat{\vartheta}^{LS} = \left(\Phi^T\cdot\Phi\right)^{-1}\cdot\Phi^T\cdot Y = \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\cdot\varphi^T(t)\right]^{-1}\cdot\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\cdot y(t)$$

Ha $y(t) = \varphi^T\vartheta_0 + v_0(t)$, akkor

$$\hat{\vartheta}^{LS} = \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\cdot\varphi^T(t)\right]^{-1}\cdot\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[\varphi(t)\left(\varphi^T(t)\cdot\vartheta_0 + v_0(t)\right)\right] = \vartheta_0 + \underbrace{\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\cdot\varphi^T(t)\right]^{-1}\cdot\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\cdot}_{\text{becslési hiba}}$$

$\hat{\vartheta}^{LS} \rightarrow \vartheta_0 \Leftarrow N\rightarrow\infty$ és $\hat{\vartheta}^{LS}$ ϑ_0 közelében kell legyen, ehhez az szükséges, hogy $\varphi(t)$ és $v_0(t)$ függetlenek legyenek

6., ARX modell esetén az optimális $\hat{\vartheta}^{LS}$ paraméterbecslés

$$\hat{\vartheta}^{LS} = sol\left\{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\left[y(t)-\varphi^T(t)\cdot\vartheta\right]=\emptyset\right\}$$

alakban is felírható. Mutassa meg, hogy milyen módosítást végzünk ezen a $\xi(t)$ segédváltozó értelmezésekor. Adja meg a segédváltozós módszer (IV) ebből következő $\hat{\vartheta}^{IV}$ paraméterbecslésének alakját. Adja meg a segédváltozóval szemben támasztott két követelményt, ha a jel $y(t)=\varphi^T(t)\cdot\vartheta_0+v_0(t)$ alakú.

$$\hat{\vartheta}^{IV} = sol\left\{\frac{1}{N}\cdot\sum_{t=1}^{N}\xi(t)\left[y(t)-\varphi^T(t)\cdot\vartheta\right]=\emptyset\right\}$$

$$\hat{\vartheta}^{IV} = \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\xi(t)\cdot\varphi^T(t)\right]^{-1}\cdot\frac{1}{N}\cdot\sum_{t=1}^{N}\xi(t)\cdot y(t)$$

Elvárások: a, $\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\xi(t)\cdot\varphi^T(t) \Rightarrow$ invertálható
nem szinguláris

b, $\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\xi(t)\cdot v_0(t)=\emptyset$

$\Rightarrow$ $\xi(t)$ korrelált $\varphi(t)$ megfigyelésekkel és korrelálatlannak a $v_0(t)$ zajjal

7., Adja meg ARMAX modell alakját, és alkalmazása esetén az $\hat{y}(t|t-1)$ jóslás és az $\varepsilon(t)$ reziduál alakját. Milyen numerikus módszert használ a System Identification Toolbox az ARMAX modell paramétereinek meghatározására?

$$A(q)\cdot y(t) = B(q)\cdot u(t) + C(q)\cdot e(t)$$

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}\cdot u(t) + \frac{C(q)}{A(q)}\cdot e(t) := G(q)\cdot u(t) + H(q)\cdot e(t)$$

$$\boxed{\hat{y}(t|t-1) = \frac{B(q)}{C(q)}\cdot u(t) + \left[1-\frac{A(q)}{C(q)}\right]\cdot y(t)}$$

$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{A(q)}{C(q)}\cdot y(t) - \frac{B(q)}{C(q)}\cdot u(t)}$$

SIT az ARMAX modell meghatározására kvázi-Newton módszert alkalmaz.

8., 9, 10, Szövege:

Egy ismeretlen rendszerre zárt szabályozási körben adatgyűjtést végezve rendelkezésre állnak a szokásos $u(t)$ és $y(t)$ $t=1\ldots N$ bemenő és kimenő-jelei az y és u vektorokban oszlopfolytonosan. A rendszer

$$D(z) = \frac{b_1\cdot z^2+b_2\cdot z+b_3}{z^3+a_1 z^2+a_2\cdot z+a_3}$$

diszkrétidejű lineáris modelljét a System Identification Toolbox th.... = ... (z,nn) függvényhívással akarjuk meghatározni.

Megoldás:

tharx = arx(z,nn)

$z = [y\ u]$

$n_a = 3$

$n_b = 2$

$n_k = 1$

$nn = [n_a\ n_b\ n_k]$

tharx = arx(z,nn)

[A,B] = th2poly(tharx)

thiv4 = iv4(z,nn)

$z = [y\ u]$

$n_a = 3$

$n_b = 2$

$n_k = 1$

$nn = [n_a\ n_b\ n_k]$

thiv4 = iv4(z,nn)

[A,B] = th2poly(thiv4)

tharmax = armax(z,nn)

$z = [y\ u]$

$n_a = 3$

$n_b = 2$

$n_k = 1$

$n_c = 3 \leftarrow$ feladat kiírásból

$nn = [n_a\ n_b\ n_c\ n_k]$

tharmax = armax(z,nn

[A,B,C] = th2poly(tharmax

11.) Lassan változó munkapontok esetén egy ismeretlen SISO rendszer lineáris paraméterbecslésén alapuló $y(t) = \varphi^T(t)\vartheta$ modelljének ϑ paramétervektorát rekurzív paraméterbecsléssel akarjuk identifikálni. Jelölje $\lambda \in (0,1]$ a felejtési tényezőt. Adja meg a felejtést alkalmazó $V(\vartheta,t)$ veszteségfüggvény alakját. Adja meg a $\hat{\vartheta}(t) = [\Phi \Lambda \Phi^T]^{-1} \Phi \Lambda Y$ optimális becslésben szereplő Φ, Λ, Y értelmezését. Tudván, hogy a rekurzív megoldás $\hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + P(t)\varphi(t)\cdot[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\vartheta}(t-1)]$ alakra hozható, mi a $P(t)$ mátrix definíciója, és létezik-e rekurzív számítására zárt alak.

$$V(\vartheta,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} \lambda^{t-i} \| y(i) - \varphi^T(i)\vartheta \|^2 \rightarrow \text{veszteségfüggvény}$$

Φ, Λ és Y értelmezése:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^T(0) \\ \varphi^T(1) \\ \cdots \\ \varphi^T(t) \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \cdots \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \mathrm{diag}\left(\lambda^{t-1}\cdot I_m, \ldots, \lambda\cdot I_m, \lambda^0 \cdot I_m\right.$$

P(t) mátrix:

$$\underline{D}.\quad P(t) = \left[\sum_{i=1}^{t} \lambda^{t-i}\cdot\varphi(i)\cdot\varphi^T(i)\right]^{-1} = \left[\lambda\cdot\sum_{i=1}^{t-1}\lambda^{t-1-i}\cdot\varphi(i)\cdot\varphi^T(i) + \varphi(t)\varphi^T(t)\right]$$

$$P(t) = \left[\lambda\cdot[P(t-1)]^{-1} + \varphi(t)\cdot\varphi^T(t)\right]^{-1}$$

Létezik P(t) rekurzív számítására zárt alak.

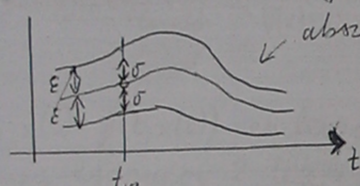
SAS PÉTER ISTVÁN
YRWPUY

12., Nulla vagy ismert $u(t)$ bemenőjel esetén a nemlineáris rendszer állapotegyenlete $\dot{x}(t)=f(t,x(t))$ alakra hozható. Legyen $\xi(t)$ az állapotegyenlet egy megoldása. Adja meg a $\xi(t)$ megoldás Ljapunov-értelemben vett stabilitásának definícióját, és a definíció illusztrációját mérnöki felfogásban egy rajzon is. Mit értünk egyenletes és aszimptotikus stabilitáson?

D. Ljapunov-stabilitás

$\xi(t)$ megoldása $\dot{x}=f(t,x(t))$ f értelmezve van $[a,\infty]\times D \leftarrow$ nyílt halmaz

$\xi(t)$ Ljapunov-értelemben stabil megoldás, ha $\forall\, t_0 \in [a,\infty]$ és $\varepsilon > 0$ esetén $\exists\, \delta(t_0,\varepsilon) > 0$ hogy ha $|x(t_0)-\xi(t_0)| < \delta(t_0,\varepsilon)$, akkor $\forall\, t \geq t_0$ esetén $x(t)$ megoldásra teljesül $|x(t)-\xi(t)| < \varepsilon$



a., $\xi(t)$ egyenletesen stabil, ha $\delta(t_0,\varepsilon)=\delta(\varepsilon)>0$ azaz a t_0 pillanattól független.

b., $\xi(t)$ aszimptotikusan stabil, ha Ljapunov-stabil és $\forall\, t_0 \in [a,\infty]$ esetén $\exists\, \delta_1(t_0) > 0$, hogy ha $|x(t_0)-\xi(t_0)| < \delta_1(t_0)$, akkor

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)-\xi(t)| = 0$$

13., Adja meg a $V(t,x)$ pozitív definit függvény definícióját. Mi lesz a negatív definit és a negatív szemidefinit függvény értelmezése? Hol van szerepe a pozitív (negatív) definit függvényeknek? 14., is itt lett leírva

D. $V(t,x)$ pozitív definit, ha $\exists\, W(x)$ skalárértékű függvény, hogy $\forall |x| \neq 0$ esetén $V(t,x) \geq W(x) > 0$ és $V(t,0) \equiv W(0) = 0$

T1. Ha $\exists\, V(t,x)$ pozitív definit függvény hogy az állapotegyenlet $\forall\, x(t)$ megoldására teljesül $\dot{V}(t,x) = \dfrac{dV(t,x(t))}{dt} \leq 0$ (negatív szemidefinit), akkor a $\xi \equiv 0$ egyensúlyi pont Ljapunov értelemben stabil.

T2. Ha pótlólagosan a $\dot{V}(t,x) = \dfrac{dV(t,x(t))}{dt} < 0$ (negatív definit), akkor a $\xi \equiv 0$ egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis

14. feladathoz kell, az értelmezés ($\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} \leq 0$ vs < 0) a 13. feladathoz

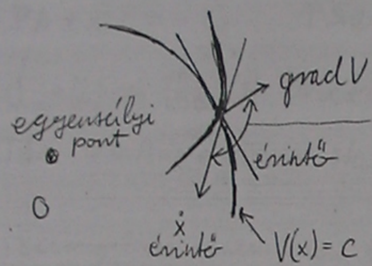
$$\dot V = \frac{dV(t,x(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot f(t,x(t)) + \frac{\partial V}{\partial t}$$ → 14. feladathoz

$$V(x) \Rightarrow \dot V = \langle \operatorname{grad} V, f\rangle = \underbrace{\langle \operatorname{grad} V, \dot x\rangle < \Phi}$$

↳ aszimptotikusan stabil

$\dot x = f(x)$ $V(x)$ pozitív definit, $V(x) = c$ konstans felületek

$$c_1 < c_2 \Rightarrow \{x : V(x) \le c_1\} \subset \{x : V(x) \le c_2\}$$



tompaszög ⟷ 0 felé halad az $x(t)$ trajektória

15, Tfh az $\dot x(t) = f(t,x(t))$ nemlineáris rendszernek $\xi \equiv 0$ egyensúlyi helyzete. Adja meg Ljapunov 2. tételét a $\xi \equiv 0$ egyensúlyi helyzet stabilitásvizsgálatához, amely kapcsolatot teremt az $\dot x(t) = A(t)\cdot x(t)$ linearizált rendszer és az $\dot x = A(t)\cdot x + f_1(t,x)$ alakra hozott nemlineáris rendszer $\xi \equiv 0$ egyensúlyi helyzetének stabilitása között.

Feltételek: (1) $\lim\limits_{x\to 0} \sup\limits_{t\ge 0} \frac{\|f_1(t,x)\|}{\|x\|} = \Phi$

(2) $A(t)$ korlátos (3) $\dot x = A(t)\cdot x$ lineáris rendszer legyen egyenletesen, aszimptotikusan stabil, mert akkor $\xi \equiv 0$ is egyenletesen és aszimptotikusan stab.

$$\dot V(t,x) = -\|x\|^2 + 2\langle P(t)\cdot f_1(t,x), x\rangle$$

ahol a skaláris szorzat tetszőlegesen kicsivé tehető $x = 0$ alkalmas környezetében, így $\dot V(t,x)$ kisebb $\Phi \Rightarrow$ negatív definit $\Rightarrow$

$\Rightarrow \xi \equiv 0$ egyensúlyi pont egyenletesen és aszimptotikusan stabil

$$P(t) = \int_t^\infty \Phi^T(\tau,t)\cdot\Phi(\tau,t)\cdot d\tau$$ a $\Phi(\tau,t)$ a linearizált $\dot x = A(t)\cdot x$ rendszer alapmátrixa

SAS PÉTER ISTVÁN
YRWPU9

15, Adja meg az $\dot{x} = A \cdot x$ időinvariáns lineáris rendszer klasszikus stabilitás fogalma és a Ljapunov-stabilitás közötti kapcsolatot. Adja meg a Ljapunov-egyenletet és a megoldására épülő $V(x)$ Ljapunov függvényt.

(1) Klasszikus $\rightarrow$ $\det(sI - A) = \emptyset \Rightarrow \operatorname{Re} s_i < 0 \quad \forall i$

Ljapunov $\rightarrow$ $V(x) = \langle Px, x \rangle$ P pozitív definit, konstans

(2) $PA + A^T P = -Q \qquad P > \emptyset \quad Q > \emptyset$

(1) $\rightarrow$ (2) és (2) $\rightarrow$ (1) következnek egymásból

LTI: $\dot{x} = A \cdot x$, akkor stabil, ha $\operatorname{Re} s_i < \emptyset \quad \forall i$

vagy $PA + A^T P = -Q \quad Q > \emptyset$ és $\exists P > \emptyset$

(1) $\rightarrow$ (2) Bizonyítása $\rightarrow$ nem tudom kell-e

$$P = \int_0 e^{A^T t} \cdot Q \cdot e^{At} \cdot dt$$

$$\langle Px, x \rangle = \left\langle \int_0^\infty e^{A^T \cdot t} \sqrt{Q}\sqrt{Q} \cdot e^{A \cdot t} \cdot dt \cdot x, x \right\rangle = \int_0^\infty \| \sqrt{Q} \cdot e^{At} \cdot x \|^2 \cdot dt > \emptyset$$

$$\underbrace{\int_0^\infty e^{A^T t} \cdot Q e^{At} Ax \cdot dt}_{P \cdot A \cdot x} + \underbrace{A^T \int_0^\infty e^{A^T t} \cdot Q \cdot e^{At} \cdot x \, dt}_{A^T \cdot P \cdot x} + \underbrace{Q \cdot x}_{Q \cdot x} \overset{?}{=} \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^\infty e^{A^T t} \cdot Q \cdot \dot{x}(t) \cdot dt + A^T \int_0^\infty e^{A^T t} \cdot Q \cdot x(t) \cdot dt + Q \cdot x$$

$$\downarrow$$

$$\left[e^{A^T \cdot t} \cdot Q \cdot x(t) \right]_0^\infty + Q(x) = -Q(x_0) + Q(x) = \emptyset \quad \checkmark$$

tart $\emptyset$-hoz

$\operatorname{Re} s_i < \emptyset \Longrightarrow PA + A^T P + Q = \emptyset$

$$\Downarrow$$

$$PA + A^T P = -Q$$

17.) Legyen az $\dot{x} = f(x)$ időinvariáns nemlineáris rendszernek $\xi \equiv 0$ egyensúlyi helyzete. Adja meg az invariáns halmaz és a maximális invariáns halmaz definícióját. Adja meg a La Salle-tételt az egyensúlyi helyzet stabilitás vizsgálatához. Adja meg az aszimptotikus stabilitás feltételét a maximális invariáns halmazzal kifejezve.

D. Invariáns halmaz

Ha a trajektória teljesen a halmazban marad

E halmaz, $H \subset E$ invariáns halmaz, $M \subset E$

$M = \max \{ H \subset E : x(0) \in H \Rightarrow x(t) \in H, \forall t \}$

T. Létezzen $V(x)$ pozitív definit Ljapunov-függvény, amely $r > 0$ esetén teljesíti, hogy az $\{x : V(x) < r\} =: \Omega_r$ nyílt halmazon. $\dot{V}(x) = \langle \operatorname{grad} V, f(x) \rangle \leq 0$ negatív szemidefinit

jelölés $E = \{ x \in \Omega_r : \dot{V}(x) = 0 \}$

Legyen E maximális invariáns halmaza $M \subset E$

Akkor $\forall x(0) \in \Omega_r$ esetén $x(t) \longrightarrow M$ maximális invariáns halmazhoz

A tétel következménye, hogy $M = \{0\}$ esetén a $\xi \equiv 0$ egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis és attrakciós halmaza Ω_r.