ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

I. PÓTZÁRTHELYI

2012. márc. 22.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (12 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$y' = \frac{y^2+2y+3}{x\ \ln(x)}, \qquad x>1 \qquad y(e)=-1$$

Elég a megoldást implicit alakban megadni.

$y^2+2y+3=(y+1)^2+2 \geq 2 \Rightarrow$ nincs zérushelye

$$\underbrace{\int \frac{dy}{y^2+2y+3}} = \underbrace{\int \frac{dx}{x \ln x}} \qquad 2$$

$$\int \frac{1}{(y+1)^2+2}\,dy = \qquad\qquad = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y+1}{\sqrt2}\right)^2}\,dy \qquad\qquad \frac{f'}{f}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{y+1}{\sqrt2}}{\frac{1}{\sqrt2}} = \ln(\ln x)+C$$

4 3 1

$y(e)=-1$:

$$\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg} 0 = \underbrace{\ln \underbrace{\ln e}_{=1}}_{=0} + C \Rightarrow C=0$$

$$\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{y+1}{\sqrt2} = \ln(\ln x) \qquad 2$$

2. feladat (16 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$y' = \frac{1+y\ \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}, \qquad y(0)=3$$

A megoldást explicit alakban (y-ra kifejezve) adja meg!

$y' - \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\,y = \frac{1}{\mathrm{ch}x}$ lineáris elsőrendű de.

(H): $y' - \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\,y = 0$ $\qquad y_H = C\cdot\varphi(x)$ alakú, elég egy megoldást keresnünk.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\,y$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\,dx$$

an2z1p120322/1.

$$\ln y = \ln \operatorname{ch} x \implies y = \operatorname{ch} x = \varphi(x)$$

$$y_H = C \cdot \operatorname{ch} x \, , \quad C \in \mathbb{R} \qquad 6$$

$$y_{ip} = c(x) \cdot \operatorname{ch} x \qquad 1$$

$$y_{ip}' = c' \cdot \operatorname{ch} x + c \cdot \operatorname{sh} x$$

$$c' \operatorname{ch} x + \cancel{c \cdot \operatorname{sh} x} - \cancel{\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} c \cdot \operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$$c' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \implies c = \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{th} x$$

$$y_{ip} = \operatorname{th} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x \qquad 5$$

$$y_{id} = y_H + y_{ip} = C \cdot \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \qquad 2 \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 3 : \qquad 3 = C$$

$$y = 3 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \qquad 2$$

3. feladat (13 pont)

Az $u = y^3$ helyettesítéssel oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$y' = \frac{(1 + y^6) \, \ln^2(x)}{x \, y^2} \, , \qquad x > 0 \, , \quad y \neq 0$$

A megoldást elég x és y közti implicit kapcsolat alakjában megadni.

$$u = y^3 \implies u' = 3y^2 \cdot y' \qquad 2$$

A de.: $\quad y' y^2 = (1 + y^6) \dfrac{\ln^2 x}{x}$

Elvégezve a helyettesítést:

$$\frac{u'}{3} = (1 + u^2) \frac{\ln^2 x}{x} \qquad 2$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = 3 \int \frac{1}{x} \ln^2 x \, dx \qquad 2$$

$$\underset{2}{\operatorname{arctg} u} = \underset{3}{\cancel{3} \cdot \frac{\ln^3 x}{\cancel{3}}} + \underset{1}{C} \, , \qquad C \in \mathbb{R}$$

Visszahelyettesítve:

$$\operatorname{arctg} y^3 = \ln^3 x + C \qquad 1$$

4. feladat (16 pont)

$$y' = (y - x^2 + 4x)^3$$

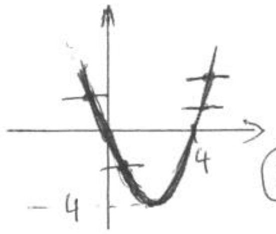
a) Rajzolja fel a fenti defferenciálegyenlet $K = 0$, -1 és $+1$ meredekséghez tartozó izoklináját, és ábrázoljon az izoklinákon néhány helyen egy-egy vonalelemet!

b) Van-e a fenti differenciálegyenlet $(x_0, y_0) = (1, -1)$ ponton átmenő megoldásának inflexiója ebben a pontban?

a.) Izoklinák: $(y - x^2 + 4x)^3 = K$ (2)

$\boxed{8}$

$K=0$: $y = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$

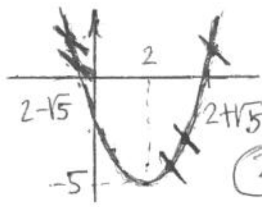


(2)

$K=-1$ $(y - x^2 + 4x)^3 = -1$

$y = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$

(Nullahelyek: $2 \pm \sqrt{5}$)

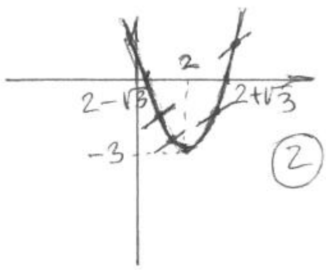


(2)

$K = 1$ $(y - x^2 + 4x)^3 = 1$

$y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$

(Nullahelyek: $2 \pm \sqrt{3}$)



(2)

b.) $y(1) = -1$

$\boxed{8}$

$$y'(1) = (y - x^2 + 4x)^3 \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = (-1-1+4)^3 = 8$$ (2)

$$y'' = 3(y - x^2 + 4x)^2 \, (y' - 2x + 4)$$ (3)

$$y''(1) = 3(y - x^2 + 4x)^2 \, (y' - 2x + 4) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1 \\ y'=8}} = 3 \cdot 2^2 \, (8-2+4) = 120$$ (1)

$y''(1) \neq 0 \implies$ nincs inflexió ebben a pontban (2)

an2z1p120322/3.

5. feladat (17 pont)

$$y''' - y'' - 2y' = e^{-2x} + 4$$

Határozza meg a fenti differenciálegyenlet általános megoldását!

Milyen alakban keressük a

$$y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + 5e^{x}$$

differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását! (Nem kell megkeresnie!)

$y''' - y'' - 2y' = e^{-2x} + 4$

(H): $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2$

$y_H = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ (5) $\quad C_i \in \mathbb{R}$

(I): $y_{ip} = Ae^{-2x} + Bx$ (3) (külső rez.)

$-2 \cdot \; y'_{ip} = -2Ae^{-2x} + B$

$-1 \cdot \; y''_{ip} = 4Ae^{-2x}$

$1 \cdot \; y'''_{ip} = -8Ae^{-2x}$

$(4A - 4A - 8A)e^{-2x} - 2B = e^{-2x} + 4$

$-8A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{8}$ és $-2B = 4 \Rightarrow B = -2$

$y_{ip} = -\frac{1}{8}e^{-2x} - 2x$ (4)

$y_{id} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} - 2x$ (2)

$y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + 5e^{x}$

Mivel: $y_H = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ (ugyanaz, mint az előbb)

$\Rightarrow y_{ip} = Axe^{2x} + Be^{x}$ (3)

külső rez.

6. feladat (10 pont)

Írjon fel egy olyan legalacsonyabb rendű lineáris, homogén, állandó együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldásai között szerepel a

$$-1 + 3x \quad \text{és az} \quad \mathrm{sh}(2x)$$

függvény! Írja föl az egyenlet általános megoldását is!

$-1+3x$: $\lambda_{1,2}=0$ 2

$sh2x = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$: $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$ 2

A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 \underbrace{(\lambda-2)(\lambda+2)}_{\lambda^2-4} = 0$

$\Rightarrow \lambda^4 - 4\lambda^2 = 0$ 2

A de.: $y^{IV} - 4y'' = 0$ 2

Ált. megoldás: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$ 2

7. feladat (16 pont)

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó gyökkritérium limeszes alakját!

b) Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$b1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{6n^2}, \qquad\qquad b2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{5^n \cdot \sqrt{n}}.$$

a.) T $a_n > 0$ és $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$.

$\boxed{3}$ Ha $c<1$: $\sum\limits^{\infty} a_n$ konvergens.

Ha $c>1$ vagy $c=\infty$: $\sum\limits^{\infty} a_n$ divergens.

b1.) $\sum\limits^{\infty} a_n$

$\boxed{7}$ $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{6n} = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{3}{3n}\right)^{3n}}\right)^2 \to \left(\frac{e}{e^3}\right)^2 = \frac{1}{e^4} < 1$

$\Rightarrow \sum\limits^{\infty} a_n$ konvergens

b2.) $\sum\limits^{\infty} b_n$

$\boxed{6}$ $\sqrt[n]{b_n} = \frac{3^2 \cdot \overset{\nearrow 1}{\sqrt[n]{3}}}{5 \cdot \sqrt{\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{n}}}} \to \frac{9}{5} > 1 \Rightarrow \sum\limits^{\infty} b_n$ divergens

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez, 40 pontig javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

$$f(n+1) = 7\,f(n) - 12\,f(n-1)$$

a) Határozza meg a fenti rekurzió általános megoldását!

b) Határozza meg a rekurzió

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 6$$

kezdeti értékekhez tartozó megoldását!

a) $f(n) = q^n \Rightarrow q^{n+1} = 7q^n - 12q^{n-1}$ 2 $\quad | : q^{n-1} \neq 0$

$q^2 = 7q - 12 \Rightarrow q^2 - 7q + 12 = 0 \Rightarrow q_1 = 3,\ q_2 = 4$ 3

$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 4^n$ 2

b) $f(0) = 1 : \quad C_1 + C_2 = 1$

$f(1) = 6 : \quad 3C_1 + 4C_2 = 6$ $\Big\} \Rightarrow C_1 = -2,\ C_2 = 3$

$f(n) = -2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$ 3

9. feladat (10 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$y'' = 4y, \qquad y(0) = 5, \qquad y'(0) = 0$$

$y'' - 4y = 0$

$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ 5

$y(0) = 5 : \quad c_1 + c_2 = 5$

$y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$ $\Big\} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{5}{2}$

$y'(0) = 0 : \quad 2c_1 - 2c_2 = 0$

$y = \frac{5}{2} e^{2x} + \frac{5}{2} e^{-2x}$ 5

an2 ~~z~~1p120322/6.