ANALÍZIS(1) **VIZSGADOLGOZAT** β **változat** **2008. jan. 3.**

Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (13 pont)

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+4^{n+1}}{2^{2n}+3^n}=?$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{n+1}\,n^5}=?$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}=?$

a.) $\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+4\cdot 4^n}{4^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\dfrac{4^n}{4^n}}_{=1}\dfrac{7\left(\frac14\right)^n+4}{1+\left(\frac34\right)^n}=\dfrac{0+4}{1+0}=4$

b.) $\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n\cdot 3\cdot n^5}=\lim\limits_{n\to\infty}3\underset{\downarrow\,1}{\sqrt[n]{3}}\,\underset{\downarrow\,1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)}^5=3$

c.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{-2}{n^2}\right)^{n^2}}=\dfrac{e^1}{e^{-2}}=e^3$

2. feladat (15 pont)

$$f(x)=x^2+\frac{8}{x}$$

a) Hol konvex, hol konkáv a függvény? Hol van inflexiós pontja?

b) Írja fel az $x_0=-2$ ponthoz tartozó érintőegyenes egyenletét!

a) $f'(x)=2x-\dfrac{8}{x^2}$, $x\neq 0$ (2)

$f''(x)=2+\dfrac{16}{x^3}=\dfrac{2(x^3+8)}{x^3}$, $x\neq 0$ (2)

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$	
f''	+	0	−	∄	+	(4)
f	∪	infl. p.	∩	szak. h.	∪	(3)

b) $y_é=f(-2)+f'(-2)(x+2)=0-6(x+2)$ (4)

an1v080103/1.

3. feladat (15 pont)

a) $f(x)=(3+x^4)^{\operatorname{ch}2x}$, $f'(x)=?$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x^2}{\sin^2x}=?$

a) $\boxed{7}$ $f(x)=e^{\ln(3+x^4)\operatorname{ch}2x}=e^{\operatorname{ch}2x\cdot\ln(3+x^4)}$; $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=e^{\operatorname{ch}2x\cdot\ln(3+x^4)}\cdot\left(\operatorname{ch}2x\cdot\ln(3+x^4)\right)'=$

$=(3+x^4)^{\operatorname{ch}2x}\left(\operatorname{sh}2x\cdot2\cdot\ln(3+x^4)+\operatorname{ch}2x\dfrac{4x^3}{3+x^4}\right)$

b.) $\boxed{8}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x^2}{\sin^2x}\underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^4}\cdot2x}{2\sin x\cdot\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\underset{\downarrow\,1}{(1+x^4)}\underset{\downarrow\,1}{\cos x}}\;\underbrace{\dfrac{x}{\sin x}}_{\to1}=1$

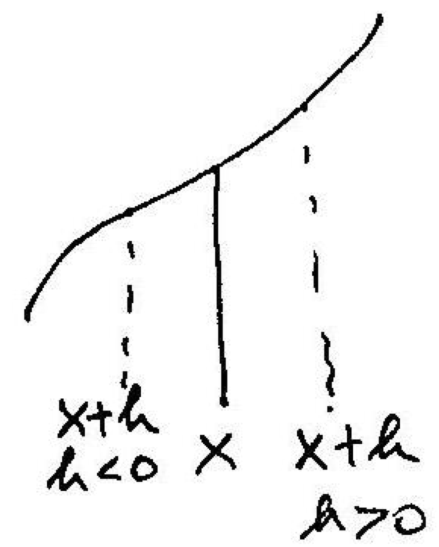
4. feladat (10 pont)

Mit állíthatunk az $I=(a,b)$ intervallumon differenciálható, monoton növő függvény deriváltjáról? Állítását bizonyítsa be!

(T) Ha f differenciálható és monoton nő az $I=(a,b)$ intervallumon, akkor $f'(x)\geq0$ I-n. (2)

Ha f monoton nő és $x\in I$:

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq0$, mert $\dfrac{+}{+}$ vagy $\dfrac{-}{-}$ alakú!



$\Rightarrow\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\geq0$ (8)

an1v080103/2.

5. feladat (8 pont)*

a) $\int \frac{1}{3x^2+9}\,dx = ?$ b) $\int \frac{5x}{3x^2+9}\,dx = ?$

a) $\boxed{3}$ $\frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C$

b.) $\boxed{5}$ $\frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2+9}\,dx = \frac{5}{6}\ln(3x^2+9)+C$

f'/f

6. feladat (13 pont)*

a) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(4x-1)^2}}\,dx = ?$

b) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{(4x-1)^2}}\,dx = ?$ $\sqrt[3]{4x-1} = t$ helyettesítéssel oldja meg!

a.) $\boxed{5}$ $\frac{1}{4}\int 4\,(4x-1)^{-2/3}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{(4x-1)^{1/3}}{\frac{1}{3}} + C$

$f'f^{\alpha}$

b.) $\boxed{8}$ $\sqrt[3]{4x-1} = t \Rightarrow x = \frac{1}{4}(t^3+1)$

$dx = \frac{3}{4}t^2\,dt$

$\int \frac{\frac{1}{4}(t^3+1)}{t^2}\,\frac{3}{4}t^2\,dt = \frac{3}{16}\int (t^3+1)\,dt =$

$= \frac{3}{16}\left(\frac{t^4}{4}+t\right)+C$

$I_b = \frac{3}{16}\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{4x-1}\right)^4 + \sqrt[3]{4x-1}\right)+C$

an1v080103/3.

7. feladat (9 pont)*

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x-6}\,dx = ?$$

$\frac{3x+1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$ (2)

$3x+1 = A(x+2) + B(x-3)$

$x := -2:\ -5 = -5B \Rightarrow B = 1$

$x := 3:\ 10 = 5A \Rightarrow A = 2$

$I = \int\left(2\,\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+2}\right)dx = 2\ln|x-3| + \ln|x+2| + C$ (4) (3)

8. feladat (9*+3+5=17 pont)

a) *

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Hogy viselkedik az impropius integrál $\alpha > 1$ értékére? Állítását bizonyítsa be!

b) Írja le a sorok konvergenciájára vonatkozó integrálkritériumot!

c) $\alpha > 1$ esetén konvergens-e vagy divergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$$

Állítását bizonyítsa be!

a.) $\boxed{9}$ $\alpha > 1$-re az integrál konvergens. Ugyanis

$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^\omega =$

$= \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}\underbrace{\frac{1}{\omega^{\alpha-1}}}_{\to 0} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha-1}$, tehát

$\alpha-1>0$ az integrál konv.

b.) $\boxed{3}$ (T) f pozitív értékű monoton csökkenő függvény $[1,\infty)$-en és $f(k) = a_k > 0$

1.) Ha $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konv. $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$ konv.

2.) Ha $\int_1^\infty f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$ div.

an1v080103/4.

c.) $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha>1$: pozitív értékű monoton csökkenő

$\boxed{5}$ függvény és $f(k)=\frac{1}{k^\alpha}>0$

$\Longrightarrow$ alkalmazható az integrálkritérium.

Mivel $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konv. $\Longrightarrow \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$ is konv.

Pótfeladat (csak az elégséges és közepes vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Konvergens-e az alábbi sor?

a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{3n+2}{n^2+4}$ b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n+2^{2n}}{3+5^{n+1}}$

a.) $a_n=\frac{3n+2}{n^2+4} > \frac{3n}{n^2+4n^2}=\frac{3}{5}\,\frac{1}{n}$

$\boxed{5}$ $\frac{3}{5}\sum^\infty \frac{1}{n}$ div. $\xRightarrow{\text{min. kr.}}$ $\sum^\infty a_n$ div.

b.) $b_n=\frac{2^n+4^n}{3+5\cdot5^n} < \frac{4^n+4^n}{5\cdot5^n}=\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\boxed{5}$

$\frac{2}{5}\sum^\infty\left(\frac{4}{5}\right)^n$ konv. geom. sor $\left(0<q=\frac{4}{5}<1\right)$

$\xRightarrow{\text{maj. kr.}}$ $\sum^\infty b_n$ konv.

10. feladat (10 pont)

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x-5}{(x-3)^2}$$

a) $\lim_{x\to\infty} f(x)=?$, $\lim_{x\to3} f(x)=?$,

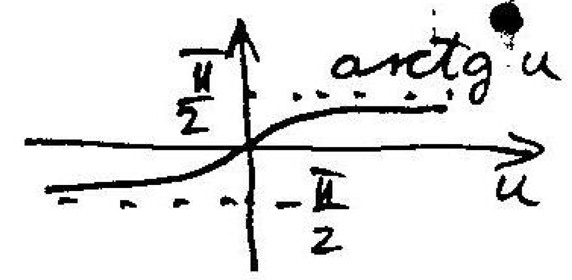
b) $f'(x)=?$, ha $x\neq3$

a.) $\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\underbrace{\frac{x-5}{(x-3)^2}}=\operatorname{arctg}0=0$ (3)

$\frac{x}{x^2}\cdot\frac{1-\frac{5}{x}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}$

$=\frac{1}{x}\to0$ $\downarrow 1$

$\lim_{x\to3}\operatorname{arctg}\frac{x-5 \;\to -2}{(x-3)^2 \;\to +0}\;\to -\infty \;=-\frac{\pi}{2}$ (3)



b) $x\neq3$:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x-5}{(x-3)^2}\right)^2}\;\frac{1\cdot(x-3)^2-(x-5)\,2(x-3)}{(x-3)^4}$$ (4)