

FODOR GYÖRGY

JELEK ÉS RENDSZEREK

EGYETEMI TANKÖNYV



Műegyetemi Kiadó, 2006

Előszó

A valóságos fizikai, kémiai, műszaki, gazdasági folyamatokat *modellek* segítségével írjuk le. A modellalkotás során leegyszerűsítjük a jelenségeket, miáltal lehetővé tesszük a folyamatokban részt vevő mennyiségek értelmezését és azok kapcsolatainak leírását. Az egyszerűsítés szükségszerűen oda vezet, hogy a modell nem írja le kifogástalanul a folyamatokat. Nagyon nehéz és nem egyértelműen megoldható feladat olyan modellt alkotni, amely a vizsgált folyamatot elfogadható mértékig helyesen és ugyanakkor a rendelkezésre álló eszközökkel kezelhető módon írja le.

A következőkben a valóságos folyamathoz tartozó modell előállításával nem foglalkozunk, hanem a modellt adottnak tekintjük. Az előforduló változók ennek megfelelően sokféle fizikai, gazdasági, stb. mennyiséget jelenthetnek. Célunk egyrészt a különféle modellek közötti kapcsolatok feltárása, másrészt az adott változók ismeretében a keresett változók számítása. Csak érintőlegesen foglalkozunk a fordított feladattal, amikor bizonyos tulajdonságú modell előállítására törekszünk.

Mivel nem foglalkozunk a folyamatok valódi tartalmával, ezért a tárgyalt fogalmak és módszerek meglehetősen általánosak. Ennek ellenére sok olyan folyamat van, amely az itt tárgyalt módszerekkel csak pontatlanul vagy akár egyáltalában nem írható le. Az általánosságunk viszont az az ára, hogy a tárgyalt folyamatok és a bennük szereplő változók elvontak. Amikor a továbbiakban arról beszélünk, hogy egy u gerjesztőjel hatására (esetleg sok közbülső jel közvetítésével) milyen y válaszjel jön létre, akkor az Olvasó érdeklődése és ízlése szerint gondolhat egy erő hatására fellépő más erőre, elmozdulásra vagy elektromos feszültségre, elektromos áram hatására létrejövő elektromos feszültségre vagy hőmérséklet-változásra, pénzbefektetéshez tartozó árukészletre és így tovább.

A könyv által tárgyalt anyagot 4 részre bontottuk (pl. 2. Analízis az időtartományban). Mindegyik rész néhány fejezetre oszlik (pl. 2.2. A rendszeregyenlet). Az egyes fejezetek szakaszokra vannak bontva (például: 2.2-2. A rendszeregyenlet megoldása). Az egyes szakaszok az áttekintés megkönnyítése céljából pontokra tagolódnak (pl. 2.2-2.2. Az impulzusválasz számítása). A legtöbb pont illusztratív példákat is tartalmaz. Az ábrák és képletek számozása egy fejezeten belül folytonos, a szakaszon belüli hivatkozásnál a fejezet számát elhagytuk (pl. a 2.1-4. ábrára a 2.1. fejezeten belül, mint 4. ábra hivatkozunk). Minden szakasz feladatokkal és azok megoldásával zárul (pl. 2.2-2.F. és 2.2-2.M. pont). A feladatok az elméleti rész és a mintapéldák alapján megoldhatók, a nehezebb feladatokhoz "útmutatás" is tartozik. A feladatok egy része kiegészítés az elméleti részhez.

A fontosabb fogalmak (pl. definíciók) és képletek keretbe vannak foglalva. Némi túlzással azt állíthatjuk, hogy ezek alkotják a mondanivalót, minden más csak magyarázat, kiegészítés, illusztráció. A képletszámmal ellátott összefüggések ugyancsak hasznos információkat tartalmaznak, a számmal nem ellátottak csak közbülső lépéseket jelentenek.

A csillaggal (*) jelölt pontok, példák és feladatok kihagyhatók a lényeges mondanivaló megértésének veszélyeztetése nélkül.

Feltételezzük, hogy az olvasó tisztában van a lineáris algebra alapjaival (mátrix fogalma, alpműveletek mátrixokkal, lineáris egyenletrendszer, komplex számok algebrája), valamint a differenciál- és integrálszámítás alapfogalmaival. Az ezen túlmenő és felhasznált matematikai apparátust tárgyalni fogjuk a teljesség és a matematikai szigorra való törekvés mellőzésével. A számítástechnikai apparátust csak a fogalmi szintig tárgyaljuk, mellőzzük a mélyebb algoritmikus megfontolásokat és a programozási technikákat.

* * *

Az áttekintés érdekében megadjuk az egyes részek tartalmát.

1. Alapfogalmak. (A jel, a rendszer, a hálózat értelmezése, ezek fontosabb osztályainak áttekintése.)

2. Analízis az időtartományban. (A rendszer jellemzése az impulzusválaszával, a rendszeregyenletével, az állapotváltozós leírásával, a jelfolyam hálózatával, jelfolyam gráfiával, nemlineáris rendszerek analízise.)

3. Analízis a frekvenciatartományban. (A szinuszos és a periodikus gerjesztéshez tartozó válasz, a jel leírása a frekvenciatartományban, a rendszer és a hálózat jellemzése az átviteli karakterisztikájával, a rendszer válaszáinak számítása a Fourier-transzformáció alkalmazásával.)

4. Analízis a komplex frekvenciatartományban. (Jelek leírása a komplex frekvenciatartományban, a rendszer és a hálózat jellemzése az átviteli függvényével, a rendszer válaszáinak számítása a Laplace-transzformáció alkalmazásával. Kapcsolatok a folytonos és a diszkrét idejű rendszerek között.)

A függelékben a MATLAB programcsomag néhány, az előszóban tárgyalt mennyiség és függvény számítására szolgáló utasítás ismertetését tartalmazza.

Az 1. és a 2. rész zárt egységet képez, amelyre a többi támaszkodik. A 3. és a 4. rész bármelyike kihagyható, sorrendjük felcserélhető.

A könyv a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Műszaki Informatika szakán az alapképzés keretében a 4. félévben oktatott "Jelek és rendszerek" tantárgy tananyagát tartalmazza.

Ajánlható e könyv továbbá mindazoknak, akik meg akarnak ismerkedni a rendszerelmélet, a hálózatelmélet és a jelfeldolgozás elméleti alapjaival.

* * *

Köszönöm mindazoknak, akik segítségemre voltak e könyv előkészítésében és megírásában. Pávó József a második kiadás, néhai Trón Tibor az első kiadás gondos lektorálását végezte, Barbarics Tamás az ábrákat készítette és a szöveget szerkesztette, Benkő Péter Tamás, Bilicz Sándor, Fejérváriné Führer Livia és Székely Ádám a példákat ellenőrizte. Feleségem szeretete és türelme nélkül ez a könyvem sem készülhetett volna el.

Budapest, 2006. február

dr. Fodor György

TARTALOMJEGYZÉK

Rendszeresen használt jelek és rövidítések.....	XV
1. Alapfogalmak.....	1
1.1. Jelek.....	3
1.1-1. Jelek osztályozása.....	3
1.1-1.1. Változó és jel.....	3
1.1-1.2. Folytonos idejű és diszkrét idejű jelek.....	4
1.1-1.3. Folytonos értékű és diszkrét értékű jelek.....	5
*1.1-1.4. Determinisztikus és sztochasztikus jelek.....	6
1.1-1.F. Feladatok.....	7
1.1-1.M. Megoldások.....	8
1.1-2. Néhány diszkrét idejű jel.....	8
1.1-2.1. Diszkrét idejű jelek leírása.....	8
1.1-2.2. Az egységugrás.....	11
1.1-2.3. Az eltolt diszkrét idejű jel.....	11
1.1-2.F. Feladatok.....	12
1.1-2.M. Megoldások.....	12
1.1-3. Néhány folytonos idejű jel.....	13
1.1-3.1. Folytonos idejű jelek leírása.....	13
1.1-3.2. Az egységugrás és a Dirac-impulzus.....	14
1.1-3.3. A jel deriváltja.....	16
1.1-3.F. Feladatok.....	19
1.1-3.M. Megoldások.....	19
1.1-4. Jelek néhány osztálya.....	20
1.1-4.1. Belépő jelek.....	20
1.1-4.2. Páros és páratlan jelek.....	20
1.1-4.3. Véges tulajdonságú jelek.....	21
1.1-4.4. Ablakozott jelek.....	23
1.1-4.F. Feladatok.....	23
1.1-4.M. Megoldások.....	24
1.2. Rendszerek.....	25
1.2-1. A rendszer fogalma.....	25
1.2-1.1. Egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer.....	25
1.2-1.2. Sok-gerjesztésű, sok-válaszú rendszer.....	26
1.2-1.F. Feladatok.....	27
1.2-1.M. Megoldások.....	28

1.2-2. Rendszerek osztályozása	28
1.2-2.1. Az osztályozás szempontjai	28
1.2-2.2. Lineáris rendszerek	29
1.2-2.3. Invariáns rendszerek	29
1.2-2.4. Kauzális rendszerek	30
1.2-2.5. Stabilis rendszerek	31
1.2-2.6. Memóriamentes rendszerek	31
1.2-2.F. Feladatok.....	32
1.2-2.M. Megoldások	32
1.3. Hálózatok.....	33
1.3-1. A hálózat fogalma	33
1.3-1.1. Komponensek összekapcsolása	33
1.3-1.2. A rendszer és a hálózat kapcsolata	34
1.3-2. Hálózatok néhány osztálya	34
1.3-2.1. Jelfolyam hálózatok	34
*1.3-2.2. Néhány további hálózattípus	36
2. Analízis az időtartományban.....	39
2.1. Az impulzusválasz és alkalmazásai.....	41
2.1-1. Diszkrét idejű rendszer impulzusválasza	41
2.1-1.1. Az impulzusválasz definíciója	41
2.1-1.2. A válasz számítása	42
2.1-1.3. Gerjesztés-válasz stabilitás	46
*2.1-1.4. Az ugrásválasz és alkalmazásai	47
2.1-1.F. Feladatok.....	47
2.1-1.M. Megoldások	48
2.1-2. Folytonos idejű rendszer impulzusválasza	50
2.1-2.1. Az impulzusválasz definíciója	50
2.1-2.2. A válasz számítása	51
2.1-2.3. Gerjesztés-válasz stabilitás	55
2.1-2.4. Az ugrásválasz és alkalmazásai	56
2.1-2.F. Feladatok.....	57
2.1-2.M. Megoldások	59
2.2 A rendszeregyenlet.....	61
2.2-1. A rendszeregyenlet fogalma	62
2.2-1.1. A rendszeregyenlet általános alakja.....	62
2.2-1.2 A diszkrét idejű rendszeregyenlet.....	62
2.2-1.3 A folytonos idejű rendszeregyenlet	65
2.2-1.F. Feladatok.....	68
2.2-1.M. Megoldások	69
2.2-2. A rendszeregyenlet megoldása	70
2.2-2.1. Általános megfontolások	70
2.2-2.2. Az impulzusválasz számítása.....	71

*2.2-2.3. Szabad és gerjesztett összetevőre bontás.....	75
2.2-2.F. Feladatok.....	82
2.2-2.M. Megoldások.....	82
2.2-3. A gerjesztés-válasz stabilitás.....	84
2.2-3.1. A rendszeregyenlet sajátértékei.....	84
2.2-3.2. A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete.....	85
2.2-3.F. Feladatok.....	89
2.2-3.M. Megoldások.....	89
2.3. Az állapotváltozós leírás.....	91
2.3-1. Alapfogalmak és alapegyenletek.....	91
2.3-1.1. Az állapotváltozó fogalma.....	91
2.3-1.2. Diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírása.....	92
2.3-1.3. Folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírása.....	94
*2.3-1.4. Új állapotváltozók bevezetése.....	96
*2.3-1.5. Az állapotváltozós leírás és a rendszeregyenlet kapcsolata.....	97
2.3-1.F. Feladatok.....	100
2.3-1.M. Megoldások.....	100
2.3-2. Az állapotváltozós leírás megoldása összetevőkre bontással.....	101
2.3-2.1. Általános megfontolások.....	101
2.3-2.2. A szabad összevő számítása.....	102
2.3-2.3. A gerjesztett összetevő számítása.....	104
2.3-2.4. A kezdeti feltételek érvényesítése.....	106
2.3-2.5. Az impulzusválasz számítása.....	110
*2.3-2.6. Többszörös sajátértékek esete.....	113
*2.3-2.7. Sajátfüggvényével gerjesztett rendszer.....	114
2.3-2.F. Feladatok.....	116
2.3-2.M. Megoldások.....	117
2.3-3. Az állapotváltozós leírás megoldása mátrixfüggvényekkel.....	118
2.3-3.1. Általános megfontolások.....	118
2.3-3.2. A megoldás formulája.....	118
2.3-3.3. Az impulzusválasz kifejezése.....	120
2.3-3.4. Mátrix sajátértékei.....	120
2.3-3.5. Mátrix függvénye egyszeres sajátértékek esetén.....	122
*2.3-3.6. Mátrix függvénye többszörös sajátértékek esetén.....	124
*2.3-3.7. Az állapotegyenlet szétcsatolása.....	126
2.3-3.8. Folytonos idejű válasz közelítő számítása.....	129
2.3-3.F. Feladatok.....	130
2.3-3.M. Megoldások.....	132
2.3-4. Aszimptotikus stabilitás.....	133
2.3-4.1. Az aszimptotikus stabilitás feltételei.....	133
*2.3-4.2. A rendszeregyenlet és az állapotmátrix sajátértékei.....	134
2.3-4.3. Aszimptotikus stabilitás és gerjesztés-válasz stabilitás.....	135
2.3-4.F. Feladatok.....	136
2.3-4.M. Megoldások.....	137

2.4. Jelfolyam hálózatok.....	139
2.4-1. Általános törvények.....	139
2.4-1.1. Elemi komponensek.....	139
2.4-1.2. Összekapcsolási szabályok és kényszerek.....	141
*2.4-1.3. Sokváltozós lineáris komponens helyettesítése.....	142
2.4-1.F. Feladatok.....	143
2.4-1.M. Megoldások.....	143
2.4-2. Az állapotváltozós leírás előállítása.....	144
2.4-2.1. Elemi megfontolások.....	144
2.4-2.2. A hálózat regularitása.....	147
2.4-2.3. A hálózat stabilitása.....	148
2.4-2.4. A rendszeregyenlet előállítása.....	149
2.4-2.F. Feladatok.....	151
2.4-2.M. Megoldások.....	153
2.4-3. Az egyenletek realizálása.....	155
2.4-3.1. A feladat megfogalmazása.....	155
2.4-3.2. Az állapotváltozós leírás realizálása.....	156
2.4-3.3. A rendszeregyenlet realizálása.....	157
2.4-3.F. Feladatok.....	157
2.4-3.M. Megoldások.....	158
2.5. Nemlineáris rendszerek.....	159
2.5-1. Állapotváltozós leírás.....	159
2.5-1.1. A nemlineáris rendszer fogalma.....	159
2.5-1.2. A rendszer állapotváltozós leírása.....	160
2.5-1.3. Nemlineáris jelfolyam hálózat.....	161
2.5-1.4. Egyensúlyi állapotok.....	163
2.5-1.5. Az egyensúlyi állapot stabilitása.....	164
2.5-1.F. Feladatok.....	166
2.5-1.M. Megoldások.....	167
2.5-2. Az állapotegyenlet megoldása.....	169
2.5-2.1. Általános megfontolások.....	169
2.5-2.2. Linearizálás az egyensúlyi állapotban.....	170
2.5-2.3. Tartományonkénti linearizálás.....	172
2.5-2.4. A diszkrét idejű állapotegyenlet megoldása.....	178
2.5-2.5. A folytonos idejű állapotegyenlet megoldása.....	179
*2.5-2.6. Stabilitásvizsgálat.....	182
2.5-2.F. Feladatok.....	187
2.5-2.M. Megoldások.....	188
3. Analízis a frekvenciatartományban.....	191
3.1. Állandósult válasz.....	193
3.1-1. Szinuszos válasz.....	193
3.1-1.1. A szinuszos jel.....	193
3.1-1.2. Szinuszos jel komplex leírása.....	196

3.1-1.3. Az átviteli karakterisztika	199
3.1-1.4. Átviteli karakterisztika és rendszeregyenlet	201
3.1-1.5. Átviteli karakterisztika és állapotváltozós leírás	205
3.1-1.6. Az átviteli karakterisztika ábrázolása	207
3.1-1.F. Feladatok.....	209
3.1-1.M. Megoldások	211
3.1-2. Periodikus válasz.....	212
3.1-2.1. Általános megfontolások	212
3.1-2.2. Diszkrét idejű jel Fourier-sora	215
3.1-2.3. A diszkrét idejű periodikus válasz	219
3.1-2.4. Folytonos idejű jel Fourier-sora.....	220
3.1-2.5. A folytonos idejű periodikus válasz.....	224
3.1-2.F. Feladatok.....	226
3.1-2.M. Megoldások	228
3.2. Jelek és rendszerek spektrális leírása	231
3.2-1. A Fourier-transzformáció.....	231
3.2-1.1. A Fourier-transzformáció defíciója	231
3.2-1.2. Néhány jel spektruma	234
3.2-1.3. A Fourier-transzformáció néhány tétele	239
3.2-1.4. Speciális jelek spektruma.....	246
3.2-1.5. Sávkorlátozott folytonos idejű jelek	248
*3.2-1.6. Időkorlátozott folytonos idejű jelek.....	253
*3.2-1.7. Ablakozott jelek spektruma	254
3.2-1.F. Feladatok.....	257
3.2-1.M. Megoldások	260
3.2-2. A válasz spektrális előállítása	264
3.2-2.1. A válasz spektruma és időfüggvénye.....	264
3.2-2.2. Az átviteli karakterisztika és az impulzusválasz.....	265
*3.2-2.3. Kauzális rendszerek átviteli karakterisztikája	267
3.2-2.4. Torzításmentes jelátvitel	269
3.2-2.5. A rendszer sáv szélességei	272
3.2-2.6. A jel sáv szélességei	273
*3.2-2.7. A sáv szélesség és a jelszélesség kapcsolata	275
3.2-2.8. Moduláció	277
3.2-2.F. Feladatok.....	280
3.2-2.M. Megoldások	283
3.3. Hálózatanalízis a frekvenciatartományban.....	289
3.3-1. Általános törvények.....	290
3.3-1.1. Elemi komponensek.....	290
3.3-1.2. Összekapcsolási szabályok és kényszerek	292
*3.3-1.3. Általánosabb komponensek	293
3.3-1.F. Feladatok.....	294
3.3-1.M. Megoldások	295

3.3-2. Az átviteli karakterisztika számítása	296
3.3-2.1. Elemi megfontolások	296
3.3-2.2. Regularitás és stabilitás.....	298
3.3-2.F. Feladatok.....	299
3.3-2.M. Megoldások	299
4. Analízis a komplex frekvenciatartományban	301
4.1. Jelek leírása a komplex frekvenciatartományban	303
4.1-1. A DI és az FI Laplace-transzformáció	303
4.1-1.1. A transzformációk definíciója.....	303
4.1-1.2. Az impulzusok és az egységugrás transzformáltja	305
4.1-1.3. A transzformációk néhány tétele	306
*4.1-1.4. Periodikus jelek transzformáltja	316
*4.1-1.5. Jelek leírása a frekvencia- és a komplex frekvenciatartományban....	318
*4.1-1.6. Konvergencia és inverzió	319
4.1-1.F. Feladatok.....	322
4.1-1.M. Megoldások	323
4.1-2. A DI és az FI Laplace-transzformáció inverziója	326
4.1-2.1. A módszerek áttekintése	326
4.1-2.2. Inverz transzformáció polinomosztással.....	326
4.1-2.3. Inverz transzformáció részlettörtekre bontással	328
*4.1-2.4. Inverz transzformáció többszörös pólusok esetén	333
4.1-2.5. Nem racionális függvények inverz transzformációja	336
4.1-2.F. Feladatok.....	338
4.1-2.M. Megoldások	340
4.2. Rendszeranalízis a komplex frekvenciatartományban	343
4.2-1. Az átviteli függvény	343
4.2-1.1. Az átviteli függvény definíciója	343
4.2-1.2. Átviteli függvény és rendszeregyenlet.....	345
4.2-1.3. Átviteli függvény és állapotváltozós leírás	347
4.2-1.4. Átviteli függvény és átviteli karakterisztika	349
4.2-1.5. Gerjesztés-válasz stabilitás	350
4.2-1.6. A pólus-zérus elrendezés	352
4.2-1.F. Feladatok.....	357
4.2-1.M. Megoldások	358
4.2-2. A válasz számítása	360
4.2-2.1. Az átviteli függvény alkalmazása	360
4.2-2.2. A rendszeregyenlet megoldása	361
4.2-2.3. Az állapotváltozós leírás megoldása.....	364
*4.2-2.4. A periodikus gerjesztéshez tartozó válasz.....	364
4.2-2.F. Feladatok.....	370
4.2-2.M. Megoldások	372

4.2-3. Néhány speciális rendszer	374
4.2-3.1. Bevezetés	374
4.2-3.2. Véges impulzusválaszú rendszer	374
4.2-3.3. Mindentáteresztő rendszer	375
4.2-3.4. Minimálfázisú rendszer	378
4.2-3.5. Az átviteli függvény tényezőkre bontása	380
*4.2-3.6. Szűrők	382
*4.2-3.7. Maximálisan lapos szűrők	384
*4.2-3.8. Maximálisan lapos futási idejű mindentáteresztő szűrők	389
4.2-3.F. Feladatok	391
4.2-3.M. Megoldások	391
4.3. Hálózatanalízis a komplex frekvenciatartományban	395
4.3-1. Az átviteli függvény számítása	395
4.3-1.1. Elemi komponensek	395
4.3-1.2. Összekapcsolási szabályok és kényszerek	398
4.3-1.3. Az egyenletek közvetlen felírása	399
4.3-1.4. Az időtartománybeli egyenletek transzformációja	401
4.3-1.F. Feladatok	402
4.3-1.M. Megoldások	403
4.3-2. Az átviteli függvény realizálása	405
4.3-2.1. A realizációs feladat	405
4.3-2.2. A direkt realizációk	406
4.3-2.3. Kaszkád realizáció	407
4.3-2.F. Feladatok	409
4.3-2.M. Megoldások	410
4.4. Kapcsolatok FI és DI jelek és rendszerek között	411
4.4-1. Szimuláció	411
4.4-1.1. A feladat megfogalmazása	411
4.4-1.2. Az impulzusválasz szimulációja	413
4.4-1.3. Az átviteli függvény szimulációja	415
*4.4-1.4. Az átviteli karakterisztika szimulációja	419
*4.4-1.5. Az állapotváltozós leírás szimulációja	421
*4.4-1.6. A jelfolyam hálózat szimulációja	422
4.4-1.F. Feladatok	424
4.4-1.M. Megoldások	426
4.4-2. Mintavételezett jelek	428
4.4-2.1. A mintavételezett jel fogalma	428
4.4-2.2. A mintavételezett jel spektruma	430
4.4-2.3. A mintavételezett jel Laplace-transzformáltja	435
4.4-2.4. A mintavételezett jel rekonstrukciója	438
4.2-2.F. Feladatok	445
4.2-2.M. Megoldások	446

ML. A MATLAB[®] néhány alkalmazása rendszeranalízisre.....	447
ML-1. A rendszer megadása	447
ML-1.1. Általános elvek	447
ML-1.2. Az állapotváltozós leírás.....	448
ML-1.3. Az átviteli függvény	448
ML-1.4. Az átviteli függvény gyöktényezős alakja.....	449
ML-1.5. A rendszert jellemző adatok	449
ML-1.6. Rendszerleírás átalakítása	450
ML-1.7. Diszkrét idejű szimuláció	450
ML-1.P. Példák	451
ML-2. Impulzusválasz és ugrásválasz meghatározása	454
ML-2.1. Általános elvek	454
ML-2.2. Az impulzusválasz meghatározása	454
ML-2.3. Az ugrásválasz meghatározása	456
ML-2.4. Rendszer-identifikáció.....	456
ML-2.P. Példák	456
ML-3. A válasz számítása.....	458
ML-3.1. Általános elvek	458
ML-3.2. A gerjesztés megadása.....	458
ML-3.3. A válasz meghatározása.....	459
ML-3.P. Példák	460
ML-4. Az átviteli karakterisztika.....	461
ML-4.1. Általános elvek	461
ML-4.2. Az átviteli karakterisztika számítása	461
ML-4.3. Az átviteli karakterisztika ábrázolása.....	462
ML-4.4. Az átviteli karakterisztika pontonkénti megadása	462
ML-4.P. Példák	463
Irodalomjegyzék.....	465
Tárgymutató	467

Rendszeresen használt jelek és rövidítések

- a a_i együttható a rendszeregyenletben
 a_i együttható az átviteli karakterisztika és az átviteli függvény nevezőjében
- A **A** rendszermátrix (az állapotegyenletben $A \mathbf{x}$)
AÁ aluláteresztő
- b b_i együttható a rendszeregyenletben
 b_i együttható az átviteli karakterisztika és az átviteli függvény számlálójában
- B **B** az állapotegyenletben $B \mathbf{u}$ vagy $B u$
- C **C** a válasz állapotváltozós kifejezésében $C \mathbf{x}$ vagy $C^T \mathbf{x}$
 y_C diszkrét idejű szimulálandó jel
- d d differenciál, differenciáloperátor
- D **D** a válasz állapotváltozós kifejezésében $D \mathbf{u}$ vagy $D u$
DI diszkrét idejű, diszkrét idő
 y_D diszkrét idejű szimulált jel
- e e a természetes logaritmus alapja
- E E_x az x jel energiája
- f f folytonos idejű frekvencia
 y_f az y jel szabad összetevője
- F FÁ feluláteresztő
 \mathcal{F} Fourier-transzformáció operátora (DI és FI)
 \mathcal{F}^{-1} inverz Fourier-transzformáció operátora (DI és FI)
FIR véges impulzusválaszú (Finite Impulse Response)
- g g ugrásválasz
 y_g az y jel gerjesztett összetevője
- G GV gerjesztés-válasz (GV stabilis, GV kapcsolat)
- h h impulzusválasz
- H **H** átviteli együttható, átviteli karakterisztika, átviteli függvény
(i) $x^{(i)}(t)$ az $x(t)$ folytonos idejű jel i -edik deriváltja (illetve integrálja, ha i negatív)
 $x^{(i)}[k] = x[k - i]$ az $x[k]$ jel késleltetettje i idővel (illetve siettetje, ha i negatív)
- I **I** egységmátrix
IIR végtelen impulzusválaszú (Infinite Impulse Response)
 \mathcal{I}_m képzetes rész operátora, $\mathcal{I}_m \{z\}$ a z komplex szám képzetes része
- j $j = \sqrt{-1}$ képzetes egység

k	k diszkrét idő
K	K amplitúdó-karakterisztika K erősítés, erősítési együttható
L	L rögzített diszkrét időtartam (pl. periódusidő) L Lagrange-mátrix \mathcal{L} Laplace-transzformáció operátora \mathcal{L}^{-1} inverz Laplace-transzformáció operátora
m	m átviteli függvény számlálójának fokszáma
M	MIMO sok-gerjesztésű, sok-válaszú (Multiple Input Multiple Output) MISO sok-gerjesztésű, egy-válaszú (Multiple Input Single Output)
n	n rendszeregyenlet rendszáma n átviteli függvény nevezőjének fokszáma
N	N állapotváltozók száma, állapotváltozós leírás rendszáma N a természetes számok halmaza
p	p_i a folytonos idejű átviteli függvény pólusa p hálózati komponens bemeneti változója
P	P_x az x jel teljesítménye
q	q_i a diszkrét idejű átviteli függvény pólusa q hálózati komponens kimeneti változója
R	\mathbf{R} a valós számok halmaza \mathbf{R}_+ a pozitív valós számok halmaza \mathbf{R}_- a negatív valós számok halmaza \mathcal{R}_e valós rész operátora, $\mathcal{R}_e\{z\}$ a z komplex szám valós része
s	s a folytonos idejű komplex frekvencia (a FI Laplace-transzformáció változója) s_i a diszkrét idejű átviteli függvény zérusa
S	SÁ sáváteresztő SZ sávzáró
t	t folytonos idő
T	T rögzített folytonos időköz (pl. periódusidő)
u	u gerjesztés (adott változó)
U	U gerjesztés amplitúdója, Fourier- vagy Laplace-transzformáltja
w	w ablakozó jel (ablak)
W	W ablakozó jel Fourier- vagy Laplace-transzformáltja \mathcal{W} átviteli operátor: $y = \mathcal{W}\{u\}$ gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakja
x	x állapotváltozó
X	X állapotváltozó amplitúdója, Fourier- vagy Laplace-transzformáltja
y	y a válasz (keresett változó)
Y	Y a válasz amplitúdója, Fourier- vagy Laplace-transzformáltja

z	z a diszkrét idejű komplex frekvencia (a DI Laplace-transzformáció változója) z_i a folytonos idejű átviteli függvény zérusa
\mathcal{Z}	\mathcal{Z} a diszkrét idejű Laplace-transzformáció (z-transzformáció) operátora \mathcal{Z}^{-1} az inverz DI Laplace-transzformáció (z-transzformáció) operátora \mathbf{Z} az egész számok halmaza \mathbf{Z}_+ a pozitív egész számok halmaza \mathbf{Z}_- a negatív egész számok halmaza
δ	$\delta(t)$ Dirac-impulzus $\delta[k]$ egységimpulzus
ε	$\varepsilon(t)$ folytonos idejű egységugrás $\varepsilon[k]$ diszkrét idejű egységugrás
\mathcal{F}	\mathcal{F} diszkrét idejű körfrekvencia, a DI Fourier-transzformáció változója
Θ	Θ rögzített diszkrét idejű körfrekvencia (pl. sáv szélesség)
λ	λ sajátérték (rendszer egyenleté, állapotmátrixé)
φ	φ fázis-karakterisztika
ρ	ρ kezdőfázis
Φ	Φ nemlineáris erősítő kimeneti változóját megadó függvény
τ	τ futási idő, futási idő karakterisztika
ω	ω folytonos idejű körfrekvencia, a FI Fourier-transzformáció változója
Ω	Ω rögzített FI körfrekvencia (pl. sáv szélesség)
'	$x'(t)$ az $x(t)$ folytonos idejű jel első deriváltja $x'[k] = x[k+1]$ a DI jel siettetett megfelelője
*	konvolúció: $h * u$ a h és az u jelek konvolúciója
*	* konjugált: z^* a z komplex szám konjugáltja

1. Alapfogalmak

Bevezetésként az 1. részben megadjuk a következőkben használandó néhány alapvető fogalom értelmezését.

Az 1.1. fejezetben megadjuk a *változó* és a *jel*, a folytonos és a diszkrét idő értelmezését, bevezetünk a jelekre vonatkozó néhány alapvető műveletet, megadjuk a jelek néhány tipikus osztályát, értelmezünk néhány speciális, számunkra fontos jelet (egységimpulzus, Dirac-impulzus, a diszkrét idejű és folytonos idejű egységugrás). A későbbiekben értelmezni fogunk további műveleteket és jelosztályokat is.

A jeleket a 2. részben a folytonos, illetve a diszkrét idő függvényének tekintjük (időtartománybeli leírás), a 3. részben a folytonos vagy a diszkrét idejű körfrekvencia függvényének (frekvenciartománybeli leírás), míg a 4. részben a folytonos, illetve a diszkrét idejű komplex frekvencia függvényének (komplex frekvenciartománybeli leírás).

Az 1.2. fejezetben megadjuk a *rendszer* értelmezését és a rendszerek néhány osztályát. Megadjuk azt a *rendszerosztályt*, amelynek tárgyalására a továbbiakban (a 2.5. fejezet kivételével) szorítkozni fogunk: ez a *lineáris, invariáns rendszer*, amelyet ezért gyakran csak „rendszer”-nek nevezünk. A 2.5. fejezetben foglalkozunk a nemlineáris és a variáns rendszerekkel. Többnyire kauzális rendszerek vizsgálatára szorítkozunk. A 3. és a 4. részben kizárólag *lineáris, invariáns rendszerekről* lesz szó, mert variáns vagy nemlineáris rendszert nem, vagy csak nagyon speciális esetekben lehet a frekvenciartományokban leírni.

Az 1.3. fejezetben megadjuk a *hálózat* értelmezését és a hálózatok néhány osztályát. A részletes tárgyalás során csak a jelfolyam hálózatokkal foglalkozunk. Ha a hálózat adott, akkor a feladat a hálózat által reprezentált rendszer egy matematikai leírásának előállítása (hálózatanalízis), míg ha az utóbbi adott, akkor a feladat a rendszer egy hálózati reprezentációjának meghatározása (hálózatszintézis). Főként a hálózatanalízissel foglalkozunk. Mindkét feladat megoldható az időtartományban, a frekvenciartományban és a komplex frekvenciartományban, de ezek hatékonysága a feladat jellegétől és az alkalmazott módszertől függően nagyon különböző.

Ennek a résznek a lényege a következőkben foglalható össze.

A *rendszer* a rá ható *gerjesztéseit* (bemeneti jeleit, inputjait) átalakítja a *válaszaiba* (kimeneti jeleibe, outputjaiba). Egy rendszer jellemezhető valamelyik explicit vagy implicit *matematikai leírásával* vagy valamelyik *hálózati reprezentációjával*.

Gyakorlati szempontból a rendszer egy létező vagy megvalósítandó *objektum* egy egyszerűsített leírása. Nem foglalkozunk sem a valóságos objektumok modellezésének módszereivel, sem a rendszer megvalósításának technikáival, hiszen ahhoz el kellene mélyedni a mechanikai, termikus, villamos, gazdasági, stb. folyamatok elméletében.

Ennek következtében a továbbiakban tárgyaltak meglehetősen általános érvényűek, de absztraktak is.

Megjegyezzük végül, hogy a változó, a jel, a rendszer, a hálózat és még néhány további, általunk használt fogalom néha más értelemben is használatos. Így például egyesek az objektumot nevezik rendszernek és az általunk rendszernek nevezettet pedig absztrakt rendszernek. A továbbiakban alkalmazottaktól eltérő jelölések is használatosak az irodalomban. A fontosabb eltérő kifejezéseket és jelöléseket meg fogjuk említeni.

1.1. Jelek

Ebben a fejezetben megadjuk a *változó* és a *jel* értelmezését (1.1-1. szakasz), tárgyaljuk a jelek megadásának néhány módját és a rájuk vonatkozó legfontosabb műveleteket (1.1-2. és 1.1-3. szakasz), továbbá a jelek néhány osztályát (1.1-4. szakasz). Ezeket a fogalmakat rendszeresen fogjuk használni a következő részekben.

1.1-1. Jelek osztályozása

1.1-1.1. Változó és jel

A folyamatok mérhető mennyiségeit *fizikai mennyiségeknek* nevezzük. A „fizikai” mennyiség nem csak fizikai folyamatokat, hanem kémiai, biológiai, gazdasági, stb. folyamatokat is jellemezhet. A továbbiakban nem foglalkozunk a mennyiség valódi tartalmával, csak annak absztrakt (matematikai) tartalmával.

Egy *változó* egy fizikai mennyiség matematikai leírása. A változóra alkalmazott jelek például s , u , x .

A továbbiakban egy változó valamely fizikai mennyiségnek egy alkalmas mértékegységben kifejezett számértékét jelenti.

Példaként legyen egy test s helyzetének a t időtől való függése a következő alakban adott:

$$s(t) = S \cos(\omega t + \rho) = (2 \text{ m}) \cdot \cos\left(50 \frac{\text{krad}}{\text{s}} t + 0,4\right) \Rightarrow s(t) = 2 \cos(50 t + 0,4).$$

A második, rövid alak úgy adódik, hogy megállapodunk abban, hogy s a méter (m), t a milliszekundum (ms), ω a kiloradián per másodperc (krad/s) és ρ a radián (rad) mértékegységben kifejezett számértéket jelöli. A továbbiakban a mennyiségek fizikai tartalmával és választott mértékegységével nem foglalkozunk. A változó tehát valamely mennyiségnek rögzített mértékegységre vonatkozó számértékét jelöli, mint a fenti rövid alakban.

Egy változó lehet az idő függvénye (például a hőmérséklet egy rögzített pontban), függhet egy vagy több térbeli változótól (mint egy üzenet egy hangszalagon vagy egy kép) és lehet az időnek és a helynek egyaránt a függvénye (mozgókép). A következőkben arra az esetre szorítkozunk, amikor a változó *egyetlen* független változó által meghatározott, amelynek neve *idő*, bármi is legyen e változó fizikai jelentése. A folytonos idő jele t ($t \in \mathbf{R}_+$), a diszkrét idő jele k ($k \in \mathbf{Z}$).

Egy *jel* a változó azon részének matematikai leírása, amely a számunkra lényeges információt hordozza.

Az u változó és az x jel kapcsolatának megvilágítására legyen az u folytonos idejű változó kifejezése

$$u(t) = a(t) \cos \mathcal{G}(t).$$

A változó által hordozott jel lehet például

- 1) maga a változó: $x_1(t) = u(t)$;
- 2) a szinuszos mennyiség burkolója: $x_2(t) = a(t)$;
- 3) a szinuszos mennyiség fázisa: $x_3(t) = \mathcal{G}(t)$;
- 4) a szinuszos mennyiség körfrekvenciája: $x_4(t) = \mathcal{G}'(t)$.

A változó és a jel közötti fogalmi különbség nem lényeges, ezért a továbbiakban ezeket megegyező értelemben fogjuk használni.

1.1-1.2. Folytonos idejű és diszkrét idejű jelek

Egy x jel rendszerint a t változó minden valós értékére értelmezett, ilyenkor t a folytonos idő. Az x folytonos idejű jel (FI jel) megadásának módja

$$x = x(t), \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{vagy} \quad -\infty < t < \infty \quad (1.1-1)$$

Itt \mathbf{R} a valós számok halmazát jelöli. Példaként megadunk két tipikus FI jelet:

$$x_1(t) = X_1 \cos \omega t, \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{vagy} \quad -\infty < t < \infty;$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbf{R}, \quad \text{vagy} \quad -\infty < t < 0, \\ 1, & t \in \mathbf{R}_+, \quad \text{vagy} \quad 0 < t < \infty. \end{cases}$$

A negatív, illetve a pozitív valós számok halmazát \mathbf{R}_- , illetve \mathbf{R}_+ jelöli. Az x_1 jel folytonos függvénye a t időnek, míg az x_2 jel nem folytonos, mert a $t = 0$ helyen véges szakadása (ugrása) van. Az $x_2(0)$ érték nem definiált, ez többnyire érdektelen. Ha a szakadásos függvényt a t_i szakadási helyén is értelmezni akarjuk, akkor több lehetőség szokásos, mint például

$$x(t_i) = x(t_i - 0), \quad x(t_i) = x(t_i + 0), \quad x(t_i) = \frac{x(t_i - 0) + x(t_i + 0)}{2}, \quad (1.1-2)$$

vagyis a bal oldali határérték, a jobb oldali határérték, e két határérték számtani közepe. Mindhárom értelmezés a folytonossági helyeken a helyettesítési értéket adja.

Bizonyos típusú jelek csak a független változó diszkrét értékeire értelmezettek. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a k független változónak, a diszkrét időnek csak az egész értékei fordulnak elő. Az x diszkrét idejű jel (DI jel) megadásának módja

$$x = x[k], \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{vagy} \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.1-3)$$

Itt \mathbf{Z} a valós egész számok halmazát jelöli. Két tipikus DI jel

$$x_1[k] = X_1 \cos \vartheta k, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ vagy } k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots;$$

$$x_2[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z} \text{ vagy } k = \dots, -2, -1, \\ 1, & k \in \mathbf{N} \text{ vagy } k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

A negatív, illetve a pozitív egész számok halmazát \mathbf{Z}_- , illetve \mathbf{Z}_+ jelöli, míg \mathbf{N} a természetes (nem-negatív egész) számok halmazát. A következőkben olyan DI jelekre szorítkozunk, amelyek k véges értékeire korlátosak. Ezzel kizártuk például az $1/k$ jelet, de nem zártuk ki a k^2 vagy a 2^k nem korlátos DI jelet.

A k -adik diszkrét időpontra a k -adik ütem elnevezést is használjuk.

A $t \in \mathbf{R}$ illetve a $k \in \mathbf{Z}$ megadását gyakran elhagyjuk, mert az $x(t)$ illetve az $x[k]$ jelölés vagy a szöveggörnyezet is egyértelműen mutatja, hogy FI vagy DI jelről van-e szó.

Egy DI jel gyakran egy FI jel által meghatározott. Egy gyakori eset, amikor az $x[k]$ értékek egy $v(t)$ jel értékei (mintái) a $t=t_k$ időpontokban, azaz

$$x[k] = v(t_k), \quad k \in \mathbf{Z}; \quad t_{k+1} > t_k.$$

Az esetek többségében a mintavétel egyenletes, azaz $t_k = kT$, ahol T az adott mintavételi periódusidő. Az $x[k]$ és a $v(t)$ néhány további tipikus kapcsolata:

$$x_1[k] = \max v(t), \quad (k-1)T < t < kT; \quad x_2[k] = \frac{1}{T} \int_{(k-1)T}^{kT} v(t) dt; \quad x_3[k] = \frac{1}{kT} \int_0^{kT} v(t) dt, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Általános esetben nehéz, felesleges vagy lehetetlen egy olyan FI jelet értelmezni, amelyből a DI jel származtatható. Például a kockadobás eredményei egy diszkrét idejű jelet határoznak meg, k a dobás sorszám, nincs értelme annak a kérdésnek, hogy mennyi a kockadobás „eredménye” két dobás között. Ha k a dobozok sorszámát és $x[k]$ a k -adik doboz által tartalmazott mennyiséget (tömeg, darabszám) jelenti, akkor a „ k diszkrét időpontok” közötti „ t folytonos idő” értelmezhetetlen, a k változó fizikailag nem is idő jellegű.

Amikor valódi folyamatokat modellezünk, akkor gyakran alkalmazunk DI modellt FI folyamatra vagy fordítva.

1.1-1.3. Folytonos értékű és diszkrét értékű jelek

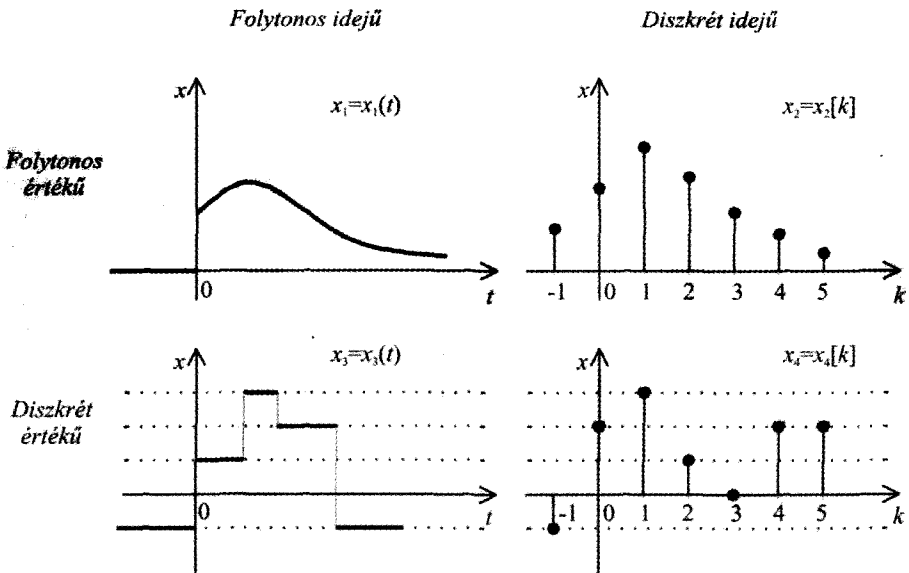
Egy x jel *folytonos értékű*, ha x bármilyen valós vagy komplex szám lehet - esetleg bizonyos megszorításokkal. Ilyen megszorítás lehet, hogy x csak valós és pozitív értékű lehet, az x nem lehet nagyobb egy felső korlátnál, stb.

Egy x jel *diszkrét értékű*, más néven *kvantált*, ha x csak bizonyos a_0, a_1, a_2, \dots valós vagy komplex értékeket vehet fel. Ezek az a_i értékek lehetnek tetszőlegesek vagy követhetnek bizonyos szabályszerűségeket (például $a_i = i$ vagy $a_i = 2^i$).

Bizonyos mennyiségek eleve diszkrét értékűek (például darabszám), másokat folytonos értékűeknek tekintünk (sebesség, hőmérséklet). Az utóbbiak mért értékei is diszkrét értékűek a mérés módja és a kerekítés által meghatározottan.

Mind a folytonos értékű, mind a diszkrét értékű jel lehet folytonos idejű vagy diszkrét idejű. A négy lehetőséget szemlélteti az 1. ábra.

A folytonos idejű és folytonos értékű jeleket szokásos analóg jeleknek, a diszkrét idejű és diszkrét értékű jeleket szokás digitális jeleknek nevezni. Ezeknek a kifejezéseknek azonban más jelentésük is használatos.



1.1-1. ábra Jelek négy alapvető típusa; a továbbiakban folytonos értékű jelekre szorítózunk (felső sor)

A következőkben csak folytonos értékű jelekkel foglalkozunk, vagyis figyelmen kívül hagyjuk az esetleges kvantálást. Az alábbi rövidítéseket fogjuk használni:

FI jel: folytonos idejű, folytonos értékű jel;

DI jel: diszkrét idejű, folytonos értékű jel.

Sok valódi folyamat kielégítő pontossággal leírható folytonos értékű jelként. A kvantálás hatását gyakran zajként veszik figyelembe. Ezzel a kérdéssel a továbbiakban nem foglalkozunk.

*1.1-1.4. Determinisztikus és sztochasztikus jelek

Egy jelet *determinisztikus jelnek* nevezünk, ha értéke minden időpontban (kielégítő pontossággal) ismert vagy meghatározható. Ez rendszerint azt jelenti, hogy a jel (kielégítő pontossággal) megismételhető folyamatot ír le. Lehetséges és hasznos bevezetni egy $x[k]$ illetve $x(t)$ jelet, mert az minden k_i illetve t_i időpontban értelmezett és ugyanazt jelenti.

Egy adott tömeggel mindig ugyanazt az állandó erőt hozhatjuk létre, ha azt mindig azonos módon alkalmazzuk (például lassan kell letennünk, nem szabad ejtenünk vagy dobnunk, a gravitációnak változatlanul kell lennie, stb.). Egyszerűen állíthatunk elő egy szinuszos feszültséget ugyanazzal az amplitúdóval és frekvenciával, de ezek a feszültségek csak akkor jelentenek azonos jelet, ha a kezdőfázisuk is megegyezik.

Ha nem tudjuk a jelet megismételni, mert az azonosnak tűnő eljárás különböző eredményekre vezet, akkor a jelet *sztochasztikus jelként* célszerű kezelni. Ebben az esetben nem az $x[k]$ vagy $x(t)$ érték érdekel bennünket - hiszen azt nem is tudhatjuk előre - hanem annak statisztikus tulajdonságai, például az átlaga (várható értéke, középértéke). Ilyen statisztikus jellemzők vagy a folyamat modelljének ismeretében elméleti úton határozhatók meg, vagy kellő számú tapasztalati adat ismeretében a matematikai statisztika módszereivel. Előfordulhat, hogy a jelet még statisztikus módszerekkel sem tudjuk jellemezni.

Tipikus sztochasztikus jel egy dobókocka dobásának eredményei (1, 2,..., 6). Az eredmények egy $x_i[k]$ sorozata (egy diszkrét idejű és diszkrét értékű jel) nem ismételtető. Ha a dobókocka „szabályos”, akkor előre tudhatjuk, hogy a 10-edik dobás eredményének, vagyis az $x_i[10]$ középértéke 3,5. Ugyanez igaz bármely $x_i[k_p]$ értékre.

Ha nem tudjuk, hogy kockánk szabályos-e, akkor nagyon sok (elméletileg végtelenül sok) azonos fajtájú kocka kísérleti vizsgálatára van szükségünk, hogy a vizsgált fajtájú kocka statisztikus tulajdonságait fel tudjuk tární. Bizonyos esetekben a vizsgált kockafajta egyetlen példányának vizsgálata is célravezető lehet.

Sok gyakorlati esetben a jel egy determinisztikus és egy sztochasztikus jel összege. Tipikus eset, amikor a hasznos jelet determinisztikusnak, a hozzá adódó zajt sztochasztikus jelként írjuk le. Ezek szétválasztása (a zaj kiszűrése) statisztikai módszerekkel lehetséges.

A folyamatnak determinisztikus vagy sztochasztikus jelként történő leírása lehet kényszerű, de lehet választásunk következménye is. A fizikából ismert, hogy sok jelenséget leírhatunk determinisztikusan és statisztikusan is.

A továbbiakban csak determinisztikus jeleket és hatásaikat vizsgáljuk. Sok, ezekre bevezetett módszer alkalmazható sztochasztikus jelek vizsgálatára is.

1.1-1.F. Feladatok

Sem itt, sem a továbbiakban nem adjuk meg, hogy a jel milyen fizikai mennyiséget vagy annak egy választott mértékegységre vonatkozó számértékét jelenti, és hogy a t folytonos idő milyen mértékegységben értendő.

F-1. Egy folytonos idejű, determinisztikus jelet a következő függvény írja le:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbf{R}_-, \\ e^{-0,4t}, & t \in \mathbf{R}_+. \end{cases}$$

Adja meg e folytonos idejű jel által meghatározott

$$u[k] = x(kT+0), \quad v[k] = \frac{3x(kT+0) + x(kT-T+0)}{4}; \quad T = 0,5$$

diszkrét idejű jeleket!

F-2. Legyen $x(t)$ az előző feladat szerinti FI jel. Határozza meg az

$$y[k] = \frac{1}{T} \int_{kT-T}^{kT} x(t) dt, \quad k \in \mathbf{Z}$$

által definiált DI jelet, ha $T = 0,5$.

***F-3.** Milyen típusú jellel írná le lakásának energiafogyasztását, ha

- w_a a valóságos fogyasztás?
- w_b a fogyasztásmérő által mutatott érték?
- w_c a számláján megjelenő fogyasztás?

1.1-1.M. Megoldások

M-1. Rövid számolással adódik, hogy ($e^{-0,2} = 0,819$)

$$u[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ (0,819)^k, & k \in \mathbf{N}; \end{cases} \quad v[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ 0,75, & k=0, \\ 0,864(0,819)^{k-1}, & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases}$$

M-2. Az integrál számításával adódik, hogy

$$y[k] = \begin{cases} 0, & k = \mathbf{Z}_-, \quad k=0, \\ 0,906(0,819)^k, & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases}$$

***M-3.** A w_a folytonos idejű, folytonos értékű (ha eltekintünk az energia kvantált természetétől). A w_b folytonos idejű, diszkrét értékű (a fogyasztásmérő meghatározott számú számjegyet jelez). A w_c diszkrét idejű és diszkrét értékű. Egy ütem például egy hónap, de ez folytonos időben nem pontos időköz.

A fogyasztásmérő és a számlázó elfogadható működése esetén a három jel között szoros kapcsolat van.

1.1-2. Néhány diszkrét idejű jel

1.1-2.1. Diszkrét idejű jelek leírása

Különböző eljárások vannak diszkrét idejű jelek, vagyis számsorozatok megadására. Ha az ellenkezőjét nem hangsúlyozzuk, akkor következőkben a jel valós értékű. Ha u és v egyaránt valós értékű jel, akkor $w = u + jv$ komplex értékű jel (a továbbiakban $j \equiv \sqrt{-1}$ a képzetes egység jele, erre a matematikában az i jel használatos).

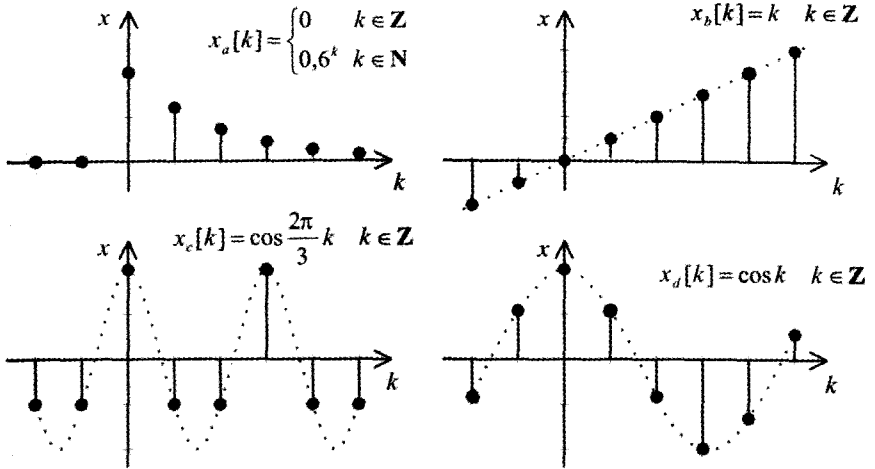
Gyakran egy *képlet* adja meg az x jel értékét a k bármely egész értékére. Három egyszerű példa:

$$x_a[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ Aq^k, & k \in \mathbf{N}; \end{cases} \quad x_b[k] = Ak, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad x_c[k] = A \cos \vartheta k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

E jelek grafikonja a 2. ábrán látható. A szaggatott vonalú görbe - amely a minden valós k -ra értelmezett függvényt mutatja - felesleges, de gyakran segíti az ábrázolt függvény felismerését vagy az ábra vázlatos elkészítését.

A *grafikus ábrázolás* a jel megadásának egy további módja, amely azonban korlátozott pontosságú és természetesen nem tartalmazza a valamennyi k értékre vonatkozó információt. Az ábra hiányzó része gyakran kitalálható. Ez a helyzet például, ha vélhetően $x[k]$ állandó (speciálisan nulla) k nagy negatív vagy nagy pozitív értékeire.

A $\cos \vartheta k$ vagy $\sin \vartheta k$ csak akkor periodikus függvénye a k diszkrét időnek, ha $\vartheta / 2\pi$ racionális, tehát $\vartheta / 2\pi = M / L$; ($M, L \in \mathbf{Z}_+$), és ekkor L a diszkrét periódusidő (rendszerint L legkisebb értékét választjuk). Ebből következően $u[k] = \cos 2k$ nem periodikus, de $w[k] = \cos(4\pi k/3)$ periodikus $L = 3$ periódusidővel (de $L_2 = 9$ is periódusideje a jelnek). Periodikus jelekkel a 3.1. fejezetben foglalkozunk majd részletesebben.



1.1-2. ábra. Egyszerű képlettel leírt diszkrét idejű jelek grafikus megadása

Megadhatunk egy DI jelet egy rá vonatkozó *rekurzív összefüggéssel* is. Két példa:

$$y_a[k+1] = 3y_a[k], \quad k \in \mathbf{N}, \quad y_a[0] = 2;$$

$$y_b[k+1] = (k+1)y_b[k], \quad k \in \mathbf{N}, \quad y_b[0] = 2.$$

Az adott értékből indulva „lépésről lépésre” számíthatjuk a többi értéket. Így például

$$k=0: y_b[1] = (0+1) \cdot 2 = 2,$$

$$k=1: y_b[2] = (1+1) \cdot 2 = 4,$$

$$k=2: y_b[3] = (2+1) \cdot 4 = 12,$$

és így tovább. Hasonló módon számítható $y_a[k]$ is. Könnyen belátható, hogy $k \in \mathbf{Z}$ minden értékére $y_a[k] = 2(3)^k$. Némi fejtöréssel hasonló képlet található az $y_b[k]$ jelre.

A DI jel egy véges hosszúságú szegmense megadható értékeinek *felsorolásával* is a következő alakban:

$$x_p[k] = \{x_p[0]; x_p[1]; \dots; x_p[L]\}; \quad x_q[k] = \{x_q[0]; x_q[1]; x_q[2]; \dots\}. \quad (1.1-4)$$

Az x_p jel véges idejű, éspedig $L+1$ ütem hosszúságú. Konkrét számértékeket választva

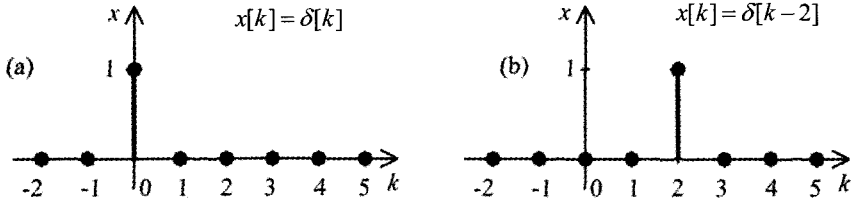
$$x_p[k] = \{1,5; 1,8; 1,2; 0,9\}; \quad x_q[k] = \{1,5; 1,8; 1,2; 0,9; \dots\}.$$

Ezek szerint $x_p[0] = x_q[0] = 1,5$; $x_p[1] = x_q[1] = 1,8$; $x_p[2] = x_q[2] = 1,2$; $x_p[3] = x_q[3] = 0,9$. Ha $k = 4, 5, 6, \dots$, akkor $x_p[k] = 0$, míg $x_q[k]$ értékeit ez a leírás nem adja meg. Az előzőkben hallgatólagosan feltételeztük, hogy $x_p[k] = 0$, $x_q[k] = 0$, ha $k \in \mathbf{Z}$. Ha ez nincs így, akkor meg kell valamilyen módon jelölni a $k=0$ (vagy valamilyen más rögzített k) ütemhez tartozó értéket. Ez a leírásmód nagyon célszerű számítógépes tárolásra, de a továbbiakban nem fogjuk használni.

Ezzel egyenértékű általános (képletet nem igénylő) leírásmód alkalmazásához bevezetünk egy speciális DI jelet.

A diszkrét idejű egységimpulzus jele $\delta[k]$, értelmezése (3a ábra);

$$\delta[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ 1, & k = 0, \\ 0, & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases} \quad (1.1-5)$$



1.1-3. ábra. (a) Az egységimpulzus és (b) az eltolt (2 ütemmel késleltetett) egységimpulzus ábrája

Ebből már következik az i ütemmel eltolt egységimpulzus értelmezése (3b ábra):

$$\delta[k-i] = \begin{cases} 0, & -\infty < k \leq i-1, \quad i+1 \leq k < \infty; \\ 1, & k = i; \quad k, i \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (1.1-6)$$

Bármely DI jel megadható eltolt egységimpulzusok szuperpozíciójaként. Így például az előzőekben szereplő x_a , x_b , x_p és x_q jelek egy más megadása:

$$x_a[k] = \sum_{i=0}^{\infty} A q^i \delta[k-i] = A \delta[k] + A q \delta[k-1] + A q^2 \delta[k-2] + \dots,$$

$$x_b[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A i \delta[k-i] = \dots - 2 A \delta[k+2] - A q \delta[k+1] + A \delta[k-1] + 2 A \delta[k-2] + \dots,$$

$$x_p[k] = 1,5 \delta[k] + 1,8 \delta[k-1] + 1,2 \delta[k-2] + 0,9 \delta[k-3],$$

$$x_q[k] = 1,5 \delta[k] + 1,8 \delta[k-1] + 1,2 \delta[k-2] + 0,9 \delta[k-3] + \dots$$

A DI jelet - vagyis a jel $x[k]$ értékét egy tetszőleges k ütemre - kifejezhetjük a jel $x[i]$ értékeivel az egységimpulzus felhasználásával a következő alakban:

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \delta[k-i], \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1.1-7)$$

Első pillantásra ez az $x[k] = x[k]$ azonosság egy körülményes formájának tűnik. Később látni fogjuk, hogy mire használható ez az alak, továbbá hogy (7) a $\delta[k]$ egységimpulzus és $x[k]$ konvolúciója. (2.1-1.2. pont).

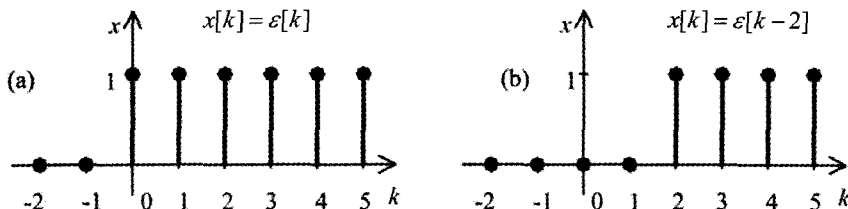
1.1-2.2. Az egységugrás

A diszkrét idejű *egységugrás* jele $\varepsilon[k]$, értelmezése (grafikonja a 4a ábrán látható):

$$\varepsilon[k] = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{Z}, \\ 1, & k \in \mathbf{N}. \end{cases} \quad (1.1-8)$$

Az eltolt egységugrás kifejezése (4b ábra)

$$\varepsilon[k-i] = \begin{cases} 0, & -\infty < k \leq i-1, \\ 1, & i \leq k < \infty; \quad k, i \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (1.1-9)$$



1.1-4. ábra. (a) A diszkrét idejű egységugrás és (b) az eltolt (2 ütemmel késleltetett) egységugrás

Az egységugrás kifejezhető az egységimpulzussal:

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k-i] \equiv \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \dots \quad (1.1-10)$$

Az egységimpulzus a következő módon fejezhető ki az egységugrással:

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]. \quad (1.1-11)$$

Az eltolt egységugrás felhasználásával tömör alakban megadhatunk olyan jeleket, amelyek szakaszonként leírhatók elemi függvényekkel. Így például

$$x[k] = \begin{cases} 0, & -\infty < k \leq -1, \\ 2^k, & 0 \leq k \leq 5, \\ 2^{10-k}, & 6 \leq k < \infty \end{cases} \quad x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]\} 2^k + \varepsilon[k-6] 2^{10-k}.$$

ugyanazt a jelet írja le, a második alak egyszerűbb.

A $w[k; k_1, k_2] \equiv \varepsilon[k-k_1] - \varepsilon[k-k_2]$ jel a (derékszögű vagy állandó) *ablak*. Az *ablak* értéke nulla, ha $k \leq k_1 - 1$ és ha $k \geq k_2$.

1.1-2.3. Az eltolt diszkrét idejű jel

Legyen $x[k]$ egy diszkrét idejű jel. Az $i \in \mathbf{Z}$ ütemmel eltolt jelle az $x^{(i)}$ jelölést fogjuk alkalmazni, vagyis

$$x^{(i)}[k] \equiv x[k-i]; \quad i \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}. \quad (1.1-12)$$

Például $u = \varepsilon^{(2)}$ jelentése $u[k] = \varepsilon[k-2]$. Többnyire $i \in \mathbf{Z}_+$, ami késleltetést jelent, a jel ábrája jobbra (pozitív k értékek felé) tolódik el. A 3. és 4. ábrán láthattunk erre példákat.

Ha $i \in \mathbf{Z}_-$, akkor a negatív késleltetés a jel siettetését (balra, negatív k értékek felé eltolását) jelenti. Speciális jelet fogunk alkalmazni az $i = -1$ ütemmel történő késleltetésre, vagyis az 1 ütemmel történő siettetésre (balra tolásra):

$$x' \equiv x^{(-1)}; \quad x'[k] \equiv x[k+1], \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1.1-13)$$

Például $v = \delta'$ jelentése $v[k] = \delta[k+1]$. Az x' ábrája megegyezik x ábrájával egy ütemmel balra tolva.

E jelölésekkel egyszerűsíthetjük az írásmunkát. Így például az egységimpulzus és az egységugrás kapcsolatait megadhatjuk a következő alakban is:

$$\varepsilon = \delta + \delta^{(1)} + \delta^{(2)} + \dots; \quad \delta = \varepsilon - \varepsilon^{(1)}; \quad \delta' = \varepsilon' - \varepsilon.$$

E jelölések egy további hasznát a folytonos idejű jelek tárgyalása után fogjuk látni: sok alapvető összefüggés megfogalmazható közös formában.

1.1-2.F. Feladatok

F-1. Válassza fel a következő DI jeleket:

$$x_a[k] = \varepsilon[k]2^k, \quad x_b[k] = \varepsilon[k]0,5^{-k}, \quad x_c[k] = \{1 - \varepsilon[-k-1]\}2^k, \\ x_d[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1] + 4\varepsilon[k-2]2^{k-2}$$

F-2. Válassza fel a $v[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-5]\}2^k$ DI jel grafikonját!

F-3. Határozza meg a következő DI jelek L periódusidejét (ha a jel periodikus):

$$u_a[k] = 3 \cos \frac{3\pi}{7} k, \quad u_b[k] = 4 \cos(0,4\pi k), \quad u_c[k] = 5 \cos(\sqrt{2}\pi k), \quad u_d[k] = 6 \cos 2k.$$

F-4. Fejezze ki az $y[k] = \sum_{i=-\infty}^0 \delta[k-i]$ jelet más formában!

1.1-2.M. Megoldások

M-1. Mind a négy alak ugyanannak a DI jelnek különböző leírása. A jel egy további alakja: $x[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1] + 4\delta[k-2] + 8\delta[k-3] + \dots$. A jel grafikonja ennek alapján könnyen felvázolható.

M-2. A jel egy másik, tömör alakja $v = 2\delta^{(1)} + 4\delta^{(2)} + 6\delta^{(3)} + 8\delta^{(4)}$. Részletesebben felírva $v[k] = 2\delta[k-1] + 4\delta[k-2] + 6\delta[k-3] + 8\delta[k-4]$. A jel grafikonja ennek alapján könnyen felvázolható.

M-3. A jel akkor periodikus, ha $\mathcal{G}/2\pi$ racionális szám. A legkisebb L értéket tekintjük periódusidőnek. (a) $L = 14$. (b) $L = 5$. A (c) és (d) feladat jelei nem periodikusak.

M-4. Két egyenértékű megoldás $y[k] = \varepsilon[-k]$, $y[k] = 1 - \varepsilon[k-1]$.

A példából és a fenti feladatok megoldásából is látható, hogy egy diszkrét idejű jel többnyire sokféle formában is megadható.

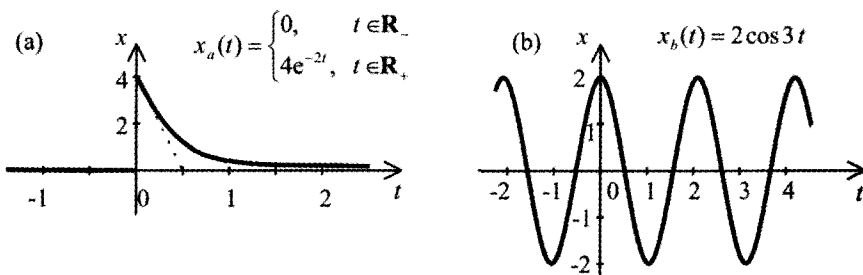
1.1-3. Néhány folytonos idejű jel

1.1-3.1. Folytonos idejű jelek leírása

Egy folytonos idejű (FI) jelet többnyire egy *képlet* segítségével írunk le, amely megadja az x jel valós vagy komplex értékét minden $t \in \mathbf{R}$ értékre (esetleg egyes pontok kivételével, ahol a jel nem értelmezett). Két egyszerű példa:

$$x_a(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbf{R}_-, \\ Ae^{-at}, & t \in \mathbf{R}_+; \end{cases} \quad x_b(t) = A \cos \omega t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

A jelek grafikonja a paraméterek ott megadott értékére az 5. ábrán látható. A *grafikus reprezentáció* egy másik módja egy jel megadásának korlátozott pontossággal és terjedelemben. Néha az ábra alapján sejthetjük a jel viselkedését a nem ábrázolt tartományban is (a t nagy negatív és nagy pozitív értékeire).



1.1-5. ábra Képlettel megadott két folytonos idejű jel grafikonja

Egy FI jel megadható a differenciálegyenletével és egy rögzített pontbeli értékével is. Két egyszerű példa:

$$\frac{dy_a(t)}{dt} = 3y_a(t) + 4e^{-2t}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad y_a(+0) = 2;$$

$$\frac{dy_b(t)}{dt} = [t+1]y_b^2(t) + 4e^{-2t}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad y_b(+0) = 2.$$

Eltérően a DI jelek rekurzív megadásmódjától, a FI jelekre nincs pontos „lépésről lépésre” módszerünk a jel meghatározására. Az első, illetve a második differenciálegyenlet által meghatározott jel pontos, illetve közelítő előállításával később még részletesen foglalkozunk (2.3-3.8. és 2.5-2.5. pont).

Egy FI jel egy szakasza *közeliően* leírható e szakaszba eső rögzített t_k értékeinek *felsorolásával* például a következő alakban:

$$x(t_k) = \{x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)\}. \quad (1.1-14)$$

Többnyire $t_0 = 0$ és $t_k = kT$, ahol T rögzített időköz. Például $T = 0,5$ esetén

$$x(t_k) = \{x(0) = 1,00; x(0,5) = 0,78; x(1) = 0,61; x(1,5) = 0,37; x(2) = 0,08\}.$$

Ebből a leírásból nincs ismeretünk $x(t)$ viselkedéséről a $t < t_0$ és a $t > t_N$ tartományban. Gyakran tudjuk, hogy itt értéke nulla. A megadott időpontok között $x(t)$ közelítőleg valamilyen interpolációs képlettel számítható, mint például

$$\begin{aligned} x(t) &\approx x(t_k), & t_k < t < t_{k+1}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \\ x(t) &\approx x(t_k) + \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} [t - t_k], & t_k < t < t_{k+1}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (1.1-15)$$

Később megismerkedünk majd nem polinom típusú interpolációs eljárással is (például a sávkorlátozott közelítés, 3.2-1.5. pont).

1.1-3.2. Az egységugrás és a Dirac-impulzus

Ebben a pontban két speciális folytonos idejű jelet értelmezzünk.

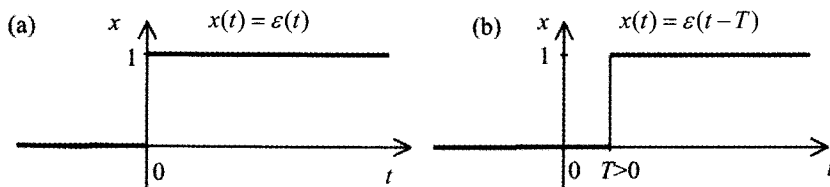
A FI *egységugrás* jele $\varepsilon(t)$, értelmezése (6a ábra)

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbf{R}_-, \\ 1, & t \in \mathbf{R}_+. \end{cases} \quad (1.1-16)$$

Az $\varepsilon(0)$ értéke érdektelen. Tekinthező nem definiálnak, rendelhetjük hozzá a 0,5 vagy az 1 vagy bármilyen más 0 és 1 közötti értéket. A 6b ábrán látható $T > 0$ esetére az

$$\varepsilon(t-T) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < T, \\ 1, & T < t < \infty \end{cases} \quad (1.1-17)$$

eltolt egységugrás grafikonja. Egy valódi fizikai mennyiség értéke nem változhat ugrásszerűen, de ha rövid idő alatt elég gyorsan változik, akkor leírása egy szakadásos jellel elfogadható közelítés lehet.



1.1-6. ábra (a) Az egységugrás és (b) az eltolt (T idővel késleltetett) egységugrás grafikonja

Eltolt egységugrások felhasználásával tömör alakban is megadhatunk szakaszonként elemi függvényekkel leírható jeleket. Például az

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t < 0, \\ t, & 0 < t < 5, \\ 10t^{-1}, & 5 < t < \infty \end{cases}$$

módon megadott jel felírható a következő alakban is:

$$x(t) = [1 - \varepsilon(t)] + [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-5)]t + \varepsilon(t-5)10t^{-1}.$$

Az itt szereplő $w(t; t_1, t_2) \equiv \varepsilon(t-t_1) - \varepsilon(t-t_2)$ jelet négyzetleges (derékszögű vagy állandó) ablaknak is nevezik.

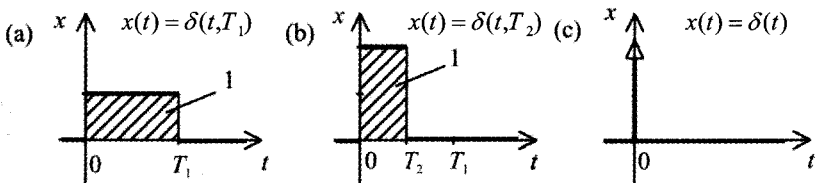
Egy másik fontos FI jel a $\delta(t, T)$ négyzetleges (vagy állandó) impulzus, amelynek szélessége T , magassága $1/T$, tehát intenzitása egységnyi (7a és b ábra):

$$\delta(t, T) = \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)}{T}. \quad (1.1-18)$$

Ez azt jelenti, hogy $\delta(t, T) = 1/T$, ha $0 < t < T$ és értéke nulla egyébként. Minél rövidebb az impulzus, annál nagyobb az amplitúdója, miközben az intenzitása (a görbe alatti terület) állandó marad: $T \times (1/T) = 1$. Ez azt jelenti, hogy a $\delta(t, T)$ integrálja egységnyi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, T) dt = 1. \quad (1.1-19)$$

Az integrál alsó határaként bármilyen $t_1 < 0$, a felső határaként bármilyen $t_2 > T$ is írható.



1.1-7. ábra. Az egységnyi intenzitású impulzus (a) T_1 hosszúsággal, (b) T_2 hosszúsággal, (c) az elhanyagolható hosszúságú Dirac-impulzus szemléltetése

Legyen $f(t)$ egy FI jel, amely mindenütt - de legalább a $[t_0, t_0+T]$ zárt intervallumban - folytonos. Az integrálszámítás középértéktétele értelmében ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0, T) dt \equiv \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \frac{1}{T} dt = f(t_0 + \eta T), \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (1.1-20)$$

Tekintsük azt az esetet, amikor T sokkal kisebb, mint az a T_0 érték, amely a vizsgált folyamat legkisebb jellemző idejének tekinthető. (Később megismerkedünk néhány jellemző idővel, mint például a rendszer legkisebb időállandója, sávszélességének reciproka, a gerjesztés valamilyen jellemző ideje.) Az olyan egységnyi intenzitású $\delta(t, T)$ impulzus, amelyre T kellően kicsi, neve *Dirac-impulzus*, jele $\delta(t)$ és értelmezése (7c ábra)

$$\delta(t) \approx \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)}{T}, \quad 0 < T \ll T_0. \quad (1.1-21)$$

Azt mondhatjuk, hogy $\delta(t)$ mindenütt nulla, kivéve a $t = 0$ helyet, ahol nagyon nagy (végtelen) úgy, hogy (19)-ből következően

$$\delta(t) = 0, t \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.1-22)$$

Ha $f(t)$ folytonos a t_0 helyen, akkor (20)-ből következik, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0). \quad (1.1-23)$$

Az $A\delta(t)$ jel grafikonja egy nyíl a $t = 0$ helyen, melynek hossza A -val arányos, felfelé mutat, ha A pozitív és lefelé, ha A negatív (7c ábra).

Gyakorlati szempontból a $\delta(t)$ Dirac-impulzus egy nagyon rövid impulzust ír le, amelynek tényleges lefolyása érdektelen, csak az intenzitása (idő szerinti integrálja) jellemzi. Ez a helyzet például egy kalapácsütés jellegű erő (az intenzitás az erő impulzusa) vagy egy rövid elektromos áramlökések (az intenzitás az elektromos töltés) esetén. Ha t térbeli koordinátát jelöl, akkor $\delta(t)$ egy megoszló erőként leírt koncentrált erőt vagy töltéssűrűségként leírt pontszerű töltést jelent. (Egyébként P. Dirac éppen az utóbbi célból vezette be.)

Matematikai szempontból a $\delta(t)$ jel nem függvény a klasszikus értelemben, hiszen nem értelmezett a $t = 0$ helyen. Az $\varepsilon(t)$ egységugrás sem értelmezett a $t = 0$ helyen, de bármilyen véges értéket elfogadhatunk erre. Ugyanezt nem tehetjük meg a Dirac-impulzusra, mert akkor (22) vagy (23) már nem lesz érvényes. A matematikusok a Dirac-impulzusra és számos vele rokon képződményre az általánosított függvény, a disztribúció vagy az operátor elnevezést használják. A rájuk vonatkozó szigorú matematikai elméletek alátámasztják azokat a szemléletesen megindokolt állításokat, amelyeket eddig tettünk, és amelyeket a következőkben még tárgyalunk. Ezek azonban nem szükségesek a szabályok megértéséhez és alkalmazásához.

Megjegyezzük, hogy a Dirac-impulzus nem csak a négyszögletes impulzusból származtatható, hanem bármilyen olyan $\delta(t, T)$ függvényből, amelyre (19) érvényes, továbbá $\delta(t, T) \rightarrow 0$, ha $T \rightarrow 0$ és $t \neq 0$.

Míg a DI jel, DI függvény és DI sorozat ugyanazt jelentik, a FI jel nem mindig függvény, hiszen lehet általánosított függvény is, mint a Dirac-impulzus. Más általánosított függvényt (például a Dirac-impulzus deriváltját) nem fogunk alkalmazni.

1.1-3.3. A jel deriváltja

Egy folytonos idejű $x = x(t)$ jel derivált jelének vagy röviden *deriváltjának* jele $x^{(1)} = x^{(1)}(t)$ vagy $x' = x'(t)$. Ha $x(t)$ differenciálható függvény, akkor $x^{(1)}(t)$ az $x(t)$ differenciálhányadosa:

$$x'(t) \equiv x^{(1)}(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (1.1-24)$$

Ha $x(t)$ folytonos, akkor a gyakorlatban előforduló esetekben legalább szakaszonként differenciálható, de $x'(t)$ nem feltétlenül folytonos. Ismeretes, hogy $x'(t)$ az $x(t)$ változási

sebességét adja meg t minden értékére, grafikusan $x'(t)$ arányos $x(t)$ grafikonjának meredekségével minden t helyen.

Ha $x^{(1)}(t)$ legalább szakaszonként differenciálható függvény, akkor képezhetjük az $x^{(2)}(t) = \{x^{(1)}(t)\}^{(1)}$ deriváltját, és így tovább.

Ha $x(t)$ egy függvény, akkor kapcsolata $x'(t)$ deriváltjával kifejezhető a következő alakban is:

$$x(t) = \int_{t_0}^t x'(\tau) d\tau + x(t_0). \quad (1.1-25)$$

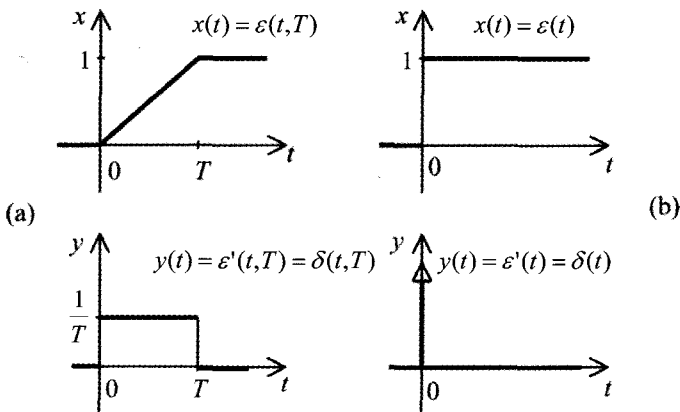
Rendszerint a $t_0 = -\infty$ választással élünk, különösen $x(-\infty) = 0$ esetén. Tekintsük (25)-öt az $x'(t)$ általánosított derivált definíciójának arra az esetre is, amikor $x(t)$ nem folytonos és ezért nem is differenciálható az ugráshelyein. Ez azt jelenti, hogy egy $x(t)$ jel deriváltja egy olyan $x'(t)$ jel, amelyből (25) alakjában rekonstruálható az eredeti $x(t)$ jel.

A 8a ábrán láthatjuk az egységugrás egy folytonos függvényű közelítését és deriváltját, amely ugrással bíró függvény. Ezekre (24) és (25) érvényes. A 8b ábra a 8a ábra speciális esetének tekinthető, amikor T nagyon kicsi. Ekkor az $x(t)$ az $\varepsilon(t)$ egységugrással és $x'(t)$ a $\delta(t)$ Dirac-impulzussal azonosítható. A $\delta(t)$ definíciójából következik, hogy

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau, \quad (1.1-26)$$

mivel $t < 0$ esetén az integrál értéke 0, míg $t > 0$ esetén az integrál értéke 1. Ebből következik, hogy az egységugrás deriváltja a Dirac-impulzus:

$$\varepsilon'(t) = \delta(t). \quad (1.1-27)$$



1.1-8. ábra Egy jel deriváltjának értelmezése: (a) folytonos jel és (b) ugrással bíró jel esetén

Szavakban megfogalmazva: az $\varepsilon(t)$ egységugrás (egy nem folytonos függvény) általánosított deriváltja a $\delta(t)$ Dirac-impulzus (egy általánosított függvény). Ez az

értelmezés összhangban van a derivált grafikus értelmezésével: az egységugrás meredeksége mindenütt nulla, kivéve a $t = 0$ helyet, ahol végtelenül nagy.

Egy nem folytonos és a végesben nem korlátos jelnek általában nincs (általánosított) deriváltja. Például az $u(t) = 1/t$ jelhez nem található olyan $u'(t)$ jel, amelyre (25) érvényes lenne. Célszerű, ha ilyen függvényeket nem alkalmazunk fizikai folyamatok leírására, vagyis nem tekintjük jelnek őket.

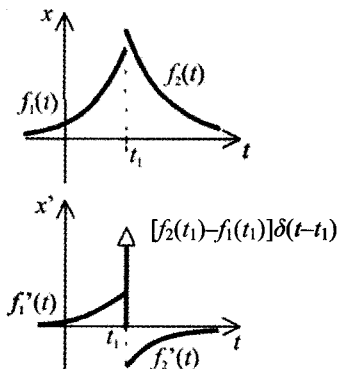
Ezzel szemben az előzőhöz hasonló módon értelmezhető a $\delta'(t) = \varepsilon^{(2)}(t)$ általánosított függvény, valamint a további általánosított deriváltak. Közelítsük ehhez a $\delta(t)$ Dirac-impulzust például a 7. ábrán látható $\delta(t, T)$ jellel. Ennek a jelnek képezhető az általánosított deriváltja. Képezzük $\delta(t, T) = [\delta(t) - \delta(t - T)]/T$ függvényt, és tekintsük ezt T nagyon kis értékénél a $\delta'(t)$ deriváltjának, az $\varepsilon^{(2)}(t)$ jelnek. Ha t térbeli koordináta, akkor $\delta'(t)$ jelenthet erőnyomatékot (mint megoszló terhelést) vagy elektromos dipólust (mint töltéssűrűséget). A következőkben a Dirac-impulzust gyakran fogjuk használni, deriváltjait azonban nem, ezért ezeket nem is részletezzük.

Tekintsünk most egy olyan $x(t)$ jelet, amely egy olyan függvénnyel írható le, amelyik mindenütt folytonos, kivéve a t_1 helyet, ahol véges ugrása van:

$$x(t) = [1 - \varepsilon(t - t_1)]f_1(t) + \varepsilon(t - t_1)f_2(t) \equiv \begin{cases} f_1(t), & -\infty < t < t_1, \\ f_2(t), & t_1 < t < \infty. \end{cases} \quad (1.1-28)$$

Feltételezzük, hogy $f_1(t)$ és $f_2(t)$ differenciálható függvény. A 9. ábrából követhető, hogy e jel általánosított deriváltja

$$x'(t) = [1 - \varepsilon(t - t_1)]f_1'(t) + [f_2(t_1) - f_1(t_1)]\delta(t - t_1) + \varepsilon(t - t_1)f_2'(t). \quad (1.1-29)$$



1.1-9. ábra. Véges ugrással bíró jel és általánosított deriváltja

Fejazzük ki most az $x'(t)$ deriváltat a szorzatra vonatkozó differenciálási szabály formális alkalmazásával az $x(t)$ jel (28) szerinti kifejezésére:

$$x'(t) = [1 - \varepsilon(t - t_1)]f_1'(t) + [1 - \varepsilon(t - t_1)]f_1(t) + \varepsilon'(t - t_1)f_2(t) + \varepsilon(t - t_1)f_2'(t).$$

Itt $[1 - \varepsilon(t - t_1)] = -\delta(t - t_1)$ és $\delta(t - t_1)f_1(t) = \delta(t - t_1)f_1(t_1)$, mivel $\delta(t - t_1) = 0$ mindenütt, kivéve a $t = t_1$ helyet. Ebből következik, hogy a formális számítás a (29) helyes eredményt adja. Az eljárás általánosítható arra az esetre, amikor a jelnek több véges ugrása van.

A fenti differenciálási szabály nem ad helyes eredményt, ha az $f_i(t)$ függvények nem folytonosak. Tekintsük például az $u(t) = \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t)$ jelet. Nyilvánvaló, hogy $u(t) = \varepsilon(t)$ és $u'(t) = \delta(t)$. A szorzatra vonatkozó szabályt az $\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t)$ jelle (nem jogosan) alkalmazva $\varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t) + \varepsilon'(t) \cdot \varepsilon(t) = 2\varepsilon(t)\delta(t)$ hibás eredmény adódik, amelynek még a jelentése sem egyértelmű.

A következőkben egy jel deriváltján mindig az előzőkben értelmezett általánosított deriváltját értjük. A differenciálható függvény általánosított deriváltja megegyezik a hagyományos értelmű differenciálhányadosával.

1.1-3.F. Feladatok

F-1. Mutassa meg, hogy $\delta_1(t)$ értelmezhető mint a

$$(a) \delta_1(t, T) = \frac{1}{T} \varepsilon(t) e^{-t/T} \quad (b) \delta_2(t, T) = \frac{T}{\pi(t^2 + T^2)}$$

jel határeseteként amikor T nagyon kicsi!

F-2. Határozza meg a következő jelek (általánosított) deriváltját:

$$(a) u(t) = \varepsilon(t) e^{-\alpha t}.$$

$$(b) v(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] e^{-\alpha t}.$$

$$(c) x(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] \sin \frac{\pi t}{T}.$$

$$(d) y(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T) + \varepsilon(t-2T) - \varepsilon(t-3T) + \varepsilon(t-4T) - \dots$$

Vázolja fel a jelet és a derivált jelet a szemléletes ellenőrzés érdekében!

F-3. Mutassa meg, hogy az előző példában meghatározott deriváltak integrálásával visszakapjuk az eredeti jelet feltételezve, hogy az integrál értéke nulla a $t = -\infty$ helyen!

1.1-3.M. Megoldások

M-1. Mindkét $\delta_i(t, T)$ integrálja egységnyi és ha T tart nullához akkor mindkettő nullához tart, kivéve a $t = 0$ helyet, ahol $\delta_i(t, T)$ végtelenhez tart.

M-2. Akár a szemlélet alapján, akár formális számítással

$$(a) u'(t) = \delta(t) - \alpha \varepsilon(t) e^{-\alpha t}. \quad (b) v'(t) = \delta(t) - \alpha [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] e^{-\alpha t} - \delta(t-T) e^{-\alpha T}.$$

$$(c) x'(t) = \frac{\pi}{T} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] \cos \frac{\pi t}{T}.$$

$$(d) y'(t) = \delta(t) - \delta(t-T) + \delta(t-2T) - \delta(t-3T) + \delta(t-4T) - \dots$$

M-3. Az (a) szerinti jel deriváltját integrálva, kapjuk

$$u(t) = \int_{-\infty}^t [\delta(\tau) - \alpha \varepsilon(\tau) e^{-\alpha\tau}] d\tau = 0, \text{ ha } t < 0; \quad u(t) = 1 - \alpha \left[\frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha} \right]_0^t = e^{-\alpha t}, \text{ ha } t > 0,$$

ami éppen az eredetileg adott $u(t)$. Hasonló a megoldás a másik három jelre, ezért nem is részletezzük.

1.1-4. Jelek néhány osztálya

1.1-4.1. Belépő jelek

Egy jelet *belépő jelnek* nevezünk, ha értéke t vagy k negatív értékeire azonosan nulla:

$\text{FI: } x(t) = 0, t \in \mathbf{R}_-; \quad \text{DI: } x[k] = 0, k \in \mathbf{Z}_-.$	(1.1-30)
---	----------

Ha egy jel felírható $x(t) = \varepsilon(t)f(t)$ vagy $x[k] = \varepsilon[k]f[k]$ alakban, ahol f tetszőleges jel, akkor x belépő jel. Megjegyezzük, hogy $\delta(t)$ vagy $\delta[k-2]$ belépő jel, de alakja nem ilyen, a (30) tehát elegendő, de nem szükséges feltétel. (A belépő jel angolul causal signal, aminek magyarázatát később látni fogjuk).

Néhány példa *nem belépő* jelekre:

$$\begin{aligned} \text{FI: } x(t) &= \varepsilon(t+1), & u(t) &= \sin \omega t, & w(t) &= \delta(t+2); \\ \text{DI: } x[k] &= 1, & u[k] &= a^{k^i}, & w[k] &= \delta[k+2] + \delta[k-2]. \end{aligned}$$

Általánosabban $x(t)$ a t_0 illetve $x[k]$ a k_0 helyen belépő jel, ha

$$\text{FI: } x(t) = 0, \text{ ha } -\infty < t < t_0; \quad \text{DI: } x[k] = 0, \text{ ha } -\infty < k < k_0. \quad (1.1-31)$$

Egy fizikai folyamatot leíró jel mindig valamilyen t_0 vagy k_0 helyen belépő jel. Néha azonban kényelmes lehet azt mondani, hogy t_0 vagy k_0 olyan régen volt, hogy negatív végtelennek tekinthető. Ekkor a jel általánosított értelemben sem belépő. Egyes feladatoknál bonyodalmakat okoz, ha a jelet nem tekintjük belépőnek.

1.1-4.2. Páros és páratlan jelek

Egy u jelet *páros jelnek* nevezünk, ha

$$\text{FI: } u(-t) = u(t), \quad \text{DI: } u[-k] = u[k]. \quad (1.1-32)$$

Egy v jelet *páratlan jelnek* nevezünk, ha

$$\text{FI: } v(-t) = -v(t), \quad \text{DI: } v[-k] = -v[k]. \quad (1.1-33)$$

A páros jelek szimmetrikusak a $t = 0$ vagy a $k = 0$ tengelyre. Néhány gyakran előforduló páros jel:

$$\begin{aligned} \text{FI: } u(t) &= 1, & u(t) &= e^{a|t|}, & u(t) &= \delta(t); \\ \text{DI: } u[k] &= \cos \vartheta k, & u[k] &= |k|, & u[k] &= \delta[k]. \end{aligned}$$

Páros jelek csak kivételesen belépők. A $\delta[k]$ és a $\delta(t)$ érdekes kivétel.

A páratlan jelek szimmetrikusak az origóra, ahol értékük nulla. Néhány gyakran előforduló páratlan jel:

$$\begin{aligned} \text{FI: } v(t) &= \sin \omega t, & v(t) &= -\delta(t+1) + \delta(t-1), \\ \text{DI: } v[k] &= k, & v[k] &= 3\delta[k+2] - 3\delta[k-2]. \end{aligned}$$

Páratlan jel nem lehet belépő is a $g(t) = 0$, illetve a $g[k] = 0$ jel kivételével.

Bármely x jel egyértelműen *felbontható* egy $x^{(e)}$ páros jel és egy $x^{(o)}$ páratlan jel összegére (a felső indexek az angol *even*, illetve *odd* szavakra utalnak):

$$x = x^{(e)} + x^{(o)} \quad (1.1-34)$$

Könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned} x^{(e)}(t) &= \frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\}, & x^{(o)}(t) &= \frac{1}{2} \{x(t) - x(-t)\}; \\ x^{(e)}[k] &= \frac{1}{2} \{x[k] + x[-k]\}, & x^{(o)}[k] &= \frac{1}{2} \{x[k] - x[-k]\}. \end{aligned} \quad (1.1-35)$$

Ha x páros jel, akkor ebből $x^{(e)} = x$, $x^{(o)} = 0$, ha x páratlan jel, akkor $x^{(e)} = 0$, $x^{(o)} = x$ következik, amint annak lennie is kell.

A 10. ábrán látható az $x(t) = \varepsilon(t)$ és az $x[k] = \{\varepsilon[k-1] - \varepsilon[k]\} \{k-1\}$ jel felbontása páros és páratlan összetevőjére.

Az itt szereplő sgn jelű páratlan „előjelfüggvény” értelmezése:

$$\text{sgn } t \equiv \begin{cases} -1, & t \in \mathbf{R}_-, \\ 0, & t = 0, \\ +1, & t \in \mathbf{R}_+; \end{cases} \quad \text{sgn } k \equiv \begin{cases} -1, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ 0, & k = 0, \\ +1, & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases} \quad (1.1-36)$$

Használatos a sgn helyett a sign jel is (mindkettő a „szignum” szóra utal).

1.1-4.3. Véges tulajdonságú jelek

Egy fizikai mennyiség értéke természetesen mindig véges. Ha a fizikai mennyiséghez kapcsolódik energia vagy teljesítmény, akkor az ugyancsak véges. A mennyiséget leíró jel azonban nem feltétlenül rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Speciális osztályokat alkotnak azok a jelek, amelyek valamilyen „véges” tulajdonsággal bírnak.

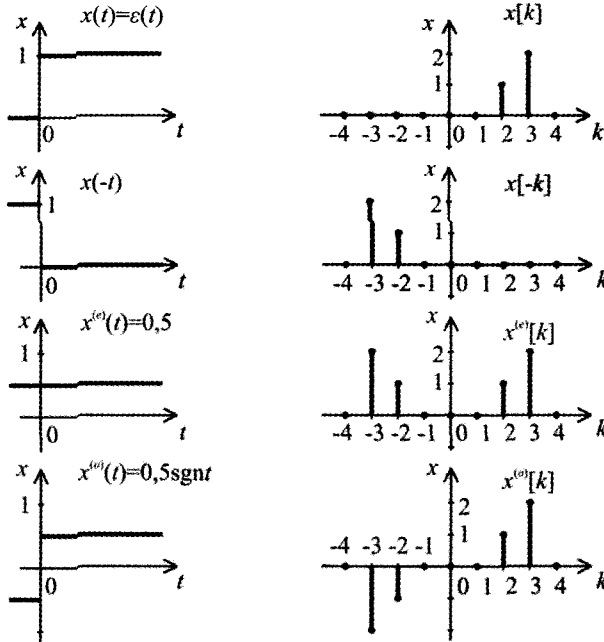
Az x jel *korlátos*, ha létezik olyan véges M érték, amelyre $|x| < M$ teljesül $t \in \mathbf{R}$ illetve $k \in \mathbf{Z}$ minden értékére.

Az x jel *véges időkre korlátos*, ha korlátos t vagy k minden véges értékére. Ilyenkor az M korlát a t illetve k értékétől függhet.

A folytonos idejű $x(t)$ jel *abszolút integrálható*, illetve a diszkrét idejű $x[k]$ jel *abszolút összegezhető*, ha a jel abszolút értékének integrálja, illetve összege véges:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty. \quad (1.1-37)$$

Az $x(t)$ jel négyzetesen integrálható, illetve az $x[k]$ jel négyzetesen összegezhető, más szóval e jelek *véges E_x energiájúak*, ha



1.1-10. ábra Egy folytonos idejű és egy diszkrét idejű jel felbontása páros és páratlan összevőjére.

$$E_x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad E_x \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 < \infty. \quad (1.1-38)$$

Az x jelnek véges P_x teljesítménye van, ha

$$P_x \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt < \infty, \quad P_x \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{k=-L}^L |x[k]|^2 < \infty. \quad (1.1-39)$$

Ha E_x véges, akkor P_x nulla. Ha P_x véges, akkor E_x végtelen.

A fenti összefüggésekben x komplex értékű is lehet.

A véges idejű jelek nulla értékűek a $t_1 < t < t_2$ illetve a $k_1 < k < k_2$ intervallumon kívül. A véges idejű korlátos jelek abszolút integrálhatók illetve összegezhetőek, véges energiájúak, nulla teljesítményűek. A véges idejű jel teljesítményét célszerűbb lehet a fentitől eltérő módon a jel energiájának és a jel hosszának hányadosaként értelmezni.

Az $\varepsilon(t)$ illetve a $\text{sgn } t$ illetve az $\varepsilon[k]$ és a $\text{sgn } k$ jelek korlátosak, nem abszolút, integrálhatók vagy összegezhetőek, végtelen energiájúak, de véges teljesítményűek.

A periodikus jelek és korlátos jelek teljesítménye véges, energiája végtelen.

Az $\varepsilon(t)e^{-2t}$ illetve az $\varepsilon[k]0,4^k$ jel korlátos, abszolút integrálható vagy összegezhető, véges energiájú és nulla teljesítményű.

Az $\varepsilon(t)e^{2t}$ és az e^{-2t} illetve az $\varepsilon[k]4^k$ és a $0,4^k$ jel nem korlátos, de véges időkre korlátos, végtelen energiájú és végtelen teljesítményű.

Az $\varepsilon(t)[1+t]^{-1}$ illetve az $\varepsilon[k](1+k)^{-1}$ jel korlátos, nem abszolút integrálható vagy nem abszolút összegezhető, de véges energiájú és nulla teljesítményű. Ilyen jeleket ritkán alkalmazunk egy folyamat leírására.

A $\delta[k]$ DI jel korlátos, abszolút összegezzhető, véges energiájú, nulla teljesítményű. A $\delta(t)$ FI jel nem korlátos, abszolút integrálható, de nem véges energiájú és teljesítményét célszerű nem értelmezettnek tekinteni. E két hasonló jellegű FI illetve DI jel tehát energiája és teljesítménye szempontjából eltérő tulajdonságú.

1.1-4.4. Ablakozott jelek

Egy fizikai mennyiség csak véges ideig figyelhető meg. Ez a következőképpen is megfogalmazható: a jelet egy „falba vágott ablakon keresztül látjuk”. A jelnek a fal által „eltakart” részét nulla értékűnek tekintjük. Az ablak nem feltétlenül egyenletesen „átlátszó”. Az ablakozott jelet gyakran az „eredeti” jel és egy ablakozó jel - röviden: *ablak* - szorzataként állítjuk elő. Mind az ablak, mind az ablakozott jel véges idejű jel.

A négyzetleges ablak jele $p(t, T)$ illetve $p[k, L]$, vagyis az ablak szélessége $2T$ illetve $2L + 1$, értelmezése

$$p(t, T) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T), \quad p[k, L] = \varepsilon[k+L] - \varepsilon[k-L-1]. \quad (1.1-40)$$

A négyzetleges ablak páros jel (a 11. ábra felső sora). Az ablak természetesen eltolható. A belépő négyzetleges ablak $p(t-T, T)$ illetve $p[k-L, L]$ alakban állítható elő. Ez nulla, ha $t < 0$ és $t > 2T$ vagy $k < 0$ és $k \geq 2L + 1$.

Legyen x egy tetszőleges DI vagy FI jel. Az „ablakon keresztül látott” jel $y = p x$, azaz $y(t) = p(t, T)x(t)$ illetve $y[k] = p[k, L]x[k]$ alakban állítható elő (11. ábra középső és alsó sora). A vázolt esetben y kevesebb információt tartalmaz, mint x . Szélesebb ablakkal rendszerint csökkenthető az információ-vesztés.

A négyzetleges ablak természetes választásnak tűnik, de nem mindig optimális. Például ha $x(t)$ folytonos jel, akkor $p(t, T)x(t)$ már nem folytonos. Ez áthidalható, ha folytonos ablakot választunk.

Egy általános $w(t, T)$ illetve $w(k, L)$ *ablak* (ablakozó jel) a következő módon definiálható:

$$w(t, T) = p(t, T)g(t), \quad w[k, L] = p[k, L]g[k], \quad (1.1-41)$$

ahol $g(t)$ illetve $g[k]$ tetszőleges, rendszerint nem-negatív jel. Példaként válasszunk olyan ablakot, amelyen keresztül a jel múltja fokozatosan elhalványodik. Két jellegzetes ilyen ablak

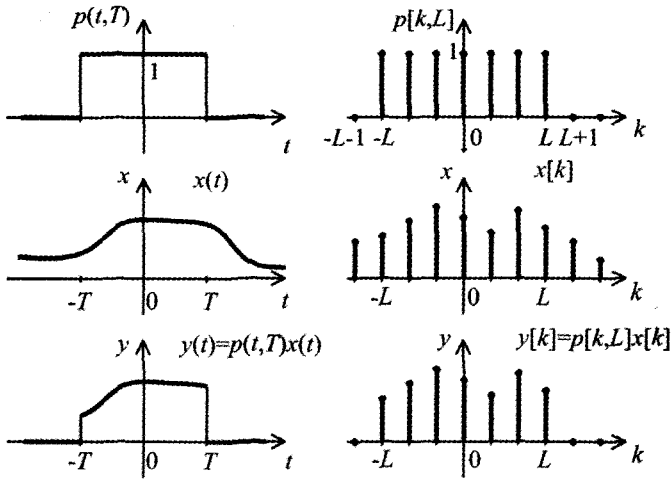
$$w(t, T) = p(t, T) \frac{t+T}{2T}, \quad w[k, L] = p[k, L] 2^{k-L}.$$

Ablakozott jelekkel később még foglalkozunk (például 3.2-1.7. pont).

1.1-4.F. Feladatok

F-1. Válassza ki az alábbi FI illetve DI jelek közül a belépőket:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-2|t|}, & v(t) &= \delta(t+1), & x(t) &= \sin 2(t-1), & y(t) &= \varepsilon(t-1) \sin 2(t-1); \\ u[k] &= \varepsilon[k-2], & v[k] &= \varepsilon[k-1]0,6^k, & x[k] &= \varepsilon[k+1] \sin 3(k+1), & y[k] &= \varepsilon[k+1] \cos 3(k+1). \end{aligned}$$



1.1-11. ábra A p négyzetleges ablak, egy tetszőleges x jel és az $y = p x$ ablakozott jel

F-2. Határozza meg az alábbi jelek páros és páratlan összetevőit:

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad v[k] = A + B k.$$

F-3. Döntse el, hogy az alábbi jelek milyen véges tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$u(t) = A \cos \omega t, \quad v(t) = A \varepsilon(t) t e^{-2t}, \quad x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t - iT),$$

$$u[k] = A \cos \vartheta k, \quad v[k] = A \varepsilon[k] k 2^{-k}, \quad x[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k - i].$$

F-4. Vizsgálja meg, hogy (41) alkalmas ablakozó jel-e, ha $g(t) = A + C \cos \omega t$ illetve ha $g[k] = A + C \cos \vartheta k$. Tetszőlegesen választhatók-e az ablakozó jelet leíró paraméterek?

1.1-4.M. Megoldások

M-1. Az $y(t)$, illetve az $u[k]$ és $v[k]$ jelek belépők. Tágabb értelemben $v(t)$ a $t = -1$ illetve $x[k]$ és $y[k]$ a $k = -1$ helyen belépő jelnek nevezhető. Az $u(t)$ és $x(t)$ még tág értelemben sem belépő jel.

M-2. Akár a szemlélet, akár az általános eljárás alapján

$$u^{(e)}(t) = A \cos \omega t, \quad u^{(o)}(t) = B \sin \omega t; \quad v^{(e)}[k] = A, \quad v^{(o)}[k] = B k.$$

M-3. Az $u(t)$ illetve az $u[k]$ és $x[k]$ korlátos és véges teljesítményű. A $v(t)$ illetve a $v[k]$ korlátos, véges energiájú, nulla teljesítményű. Az $x(t)$ jelnek nincs véges tulajdonsága.

M-4. Csak akkor alkalmas ablakok, ha g nem-negatív. Ez $A > 0, |C| \leq A$ választással biztosan igaz.

1.2. Rendszerek

Ebben a fejezetben megadjuk a rendszer definícióját (1.2-1. szakasz) és értelmezzük a rendszerek néhány speciális osztályát (1.2-2. szakasz). A továbbiakban - a 2.5. fejezet kivételével - lineáris, invariáns rendszerek tárgyalására szorítkozunk. Megemlítjük az általánosítás lehetőségét, ahol ez nem okoz nehézséget.

1.2-1. A rendszer fogalma

1.2-1.1. Egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer

Gyakorlati szempontból egy *rendszer* egy fizikai *objektum* egy modellje, amely fizikai változókkal leírható. A „fizikai” itt és a továbbiakban azt jelenti, hogy „valóságos”; a konkrét tartalma lehet fizikai, kémiai, gazdasági, stb. vagy ezek keveréke. E mennyiségek némelyike adottnak tekinthető: ezek a *gerjesztések* (bemenetek, „inputok”), mások viselkedését meg akarjuk határozni: ezek a *válaszok* (kimenetek, „outputok”), a változók egy harmadik csoportját csak azért vezetjük be, hogy le tudjuk írni a gerjesztések és válaszok kapcsolatát. Minden fizikai változót az ahhoz rendelt jellel, az objektumot egy rendszerrel írjuk le.

Elméleti szempontból a *rendszer* egy *transzformáció*, amely adottnak tekintett gerjesztésekhez meghatározott válaszokat rendel.

Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú *rendszer* egy kapcsolatot jelent, amely az adott $u = u(t)$ illetve $u = u[k]$ *gerjesztéshez* egy $y = y(t)$ illetve $y = y[k]$ *választ* rendel. Az összerendelés explicit alakja az

$$y = \mathcal{W} \{u\} \quad (1.2-1)$$

gerjesztés-válasz kapcsolat, ahol \mathcal{W} egy operátor, amely a t illetve a k időtől is függhet.

Explicit gerjesztés-válasz kapcsolat például

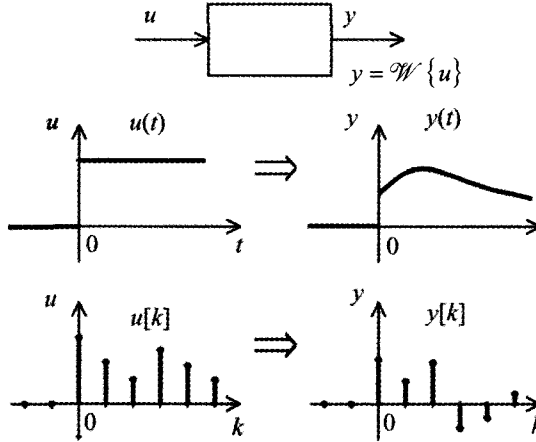
$$y(t) = 5u(t) + 7 \cos \omega t \cdot u'(t) + 4 [u(t)]^2, \quad y[k] = 4u[k] + (A + Bk)u[k-1] + 2^{u[k]}.$$

Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer általános rajzjele az 1. ábrán látható. Az ábrán egy lehetséges FI illetve DI gerjesztés-válasz párt is feltüntetünk.

A gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakja többnyire nem ismert. Egyik feladatunk éppen az, hogy ismerve a rendszer valamilyen leírását (például a később tárgyalandó állapotváltozós leírását vagy hálózati reprezentációját) meghatározzuk a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakját. Az adott gerjesztéshez tartozó válasz meghatározható a rendszer egy leírásából közvetlenül is, tehát nincs feltétlenül szükség a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakjának tényleges meghatározására.

A gerjesztés-válasz kapcsolat azt jelenti, hogy ha az u gerjesztés ismert, akkor az y válasz meghatározható. A korrekt alak az $y := \mathcal{W} \{u\}$ értékadó utasítás lenne. Ez világosan kifejezi, hogy például $y := 2u$ azt jelenti, hogy ha az u ismert, akkor az y

meghatározható. Ha viszont y ismert, akkor logikailag ugyan következtethetünk arra, hogy ezt a választ $u = y/2$ gerjesztés hozta létre, de nem jelenti azt, hogy ha a modellezett objektum kimenetére egy y mennyiséget kényszerítünk, akkor az objektum bemenetén fellépő u mennyiség $y/2$ lesz. (Suttogjunk a mikrofonba és füleljünk a hangszórónál, aztán kiabáljunk bele a hangszóróba és füleljünk a mikrofonnál!) Ez a megkülönböztetés fontos lehet a modellalkotás során, de csak nagyon ritkán van jelentősége a modell vizsgálatokor.



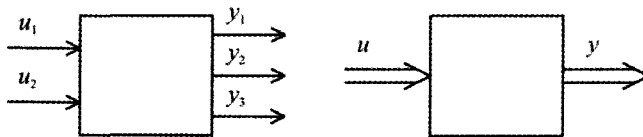
1.2-1. ábra Egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer grafikus reprezentációja, valamint egy lehetséges gerjesztés és válasz grafikonja FI illetve DI esetre

Mivel a modellalkotást nem tekintjük feladatunknak, ezért a továbbiakban az egyszerű (1) alakot fogjuk használni.

1.2-1.2. Sok-gerjesztésű, sok-válaszú rendszer

Egy rendszernek lehet sok gerjesztése és sok válasza. Ilyen sok gerjesztésű, sok válaszú rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolatok rendszerével írható le. Jelölje a gerjesztések számát P , a válaszok számát Q , akkor a rendszert Q számú explicit gerjesztés-válasz kapcsolat írja le:

$$y_i = \mathcal{W}_i \{u_1, u_2, \dots, u_P\}, \quad i = 1, 2, \dots, Q. \quad (1.2-2)$$



1.2-2. ábra Sok-gerjesztésű, sok-válaszú rendszer szimbolikus ábrázolásai

A 2. ábrán a rendszer egy grafikus reprezentáció látható $P = 2$, $Q = 3$ esetére, és egy grafikus reprezentáció az általános esetre. Utóbbira vastag nyilakat is használnak.

Egy másféle leírás mód a következő. Foglaljuk a gerjesztéseket egy P elemű \mathbf{u} vektorba, a válaszokat egy Q elemű \mathbf{y} vektorba (oszlop mátrixba):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\rho \end{bmatrix}. \quad (1.2-3)$$

Kényelmesebb lehet a vektort nem oszlopmátrixként, hanem sormátrixként (vagyis az oszlopmátrix transzponáltjaként, T felső index) megadni:

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]^T, \quad \mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_\rho]^T.$$

A gerjesztés-válasz kapcsolatok összessége a következő alakban fejezhető ki:

$$\mathbf{y} = \mathcal{W} \{ \mathbf{u} \}, \quad (1.2-4)$$

ahol \mathcal{W} vektort eredményező, vektorra ható operátor. A (4) jelentését a (2) adja meg. A grafikus megjelenítés a 2. ábrán látható. Ez a tömör alak nem adja meg a gerjesztések és a válaszok számát.

Megjegyezzük, hogy az „egy-gerjesztésű, egy-válaszú” szokásos rövidítése SISO („single input single output”), a „sok-gerjesztésű, sok-válaszú” szokásos rövidítése MIMO („multiple input multiple output”). A SIMO és MISO rövidítések jelentése már kikövetkeztethető.

A továbbiakban többnyire egy gerjesztésű, egy válaszü rendszerekkel foglalkozunk. A fogalmi általánosítás egy gerjesztésű sok válaszü rendszerekre igen egyszerű, mert az egyes válaszok egymástól függetlenül vizsgálhatók. Lineáris rendszer esetén (l. a következő szakaszt) a gerjesztések hatása függetlenül vizsgálható. Bonyolultabb a helyzet sok-gerjesztésű nemlineáris rendszereknél.

1.2-1.F. Feladatok

F-1. Egy FI illetve DI rendszer gerjesztés-válasz kapcsolata

$$\text{FI: } y(t) = b(t)u(t) + c(t); \quad \text{DI: } y[k] = b[k]u[k] + c[k].$$

Itt $b(t)$ és $c(t)$ illetve $b[k]$ és $c[k]$ adott jelek.

Fejezze ki az $y(t)$ illetve az $y[k]$ jelet, ha $u(t) = \varepsilon(t)$ illetve ha $u[k] = \varepsilon[k]$.

Egy-gerjesztésű és egy-válaszú ez a rendszer?

F-2. Oldja meg az előző feladatot, ha

$$\begin{aligned} (a) \quad u_a(t) &= 2 \varepsilon(t); & u_a[k] &= 2 \varepsilon[k]. \\ (b) \quad u_b(t) &= \varepsilon(t-3); & u_b[k] &= \varepsilon[k-3]. \end{aligned}$$

Jelölje y az F-1. feladat megoldását. Mi a feltétele annak, hogy teljesüljön

$$\begin{aligned} (a) \quad y_a(t) &= 2 y(t); & y_a[k] &= 2 y[k]. \\ (b) \quad y_b(t) &= y(t-3); & y_b[k] &= y[k-3]. \end{aligned}$$

1.2-1.M. Megoldások

M-1. A gerjesztés-válasz kapcsolatba helyettesítve

$$y(t) = b(t)\varepsilon(t) + c(t); \quad y[k] = b[k]\varepsilon[k] + c[k].$$

A rendszernek egyetlen y válasza van. A jelölésből az következik, hogy a rendszernek egyetlen u gerjesztése van. Tekinthejtük azonban akár a b , akár a c jelet, akár mindkettőt is gerjesztésnek. Ekkor a rendszer sok- (2 vagy 3) gerjesztésű, egy-válaszú.

M-2. A gerjesztés-válasz kapcsolatba helyettesítve

$$(a) y_a(t) = 2b(t)\varepsilon(t) + c(t); \quad y_a[k] = 2b[k]\varepsilon[k] + c[k].$$

Az $y_a = 2y$ feltétel akkor és csakis akkor teljesül, ha $c = 0$.

$$(b) y_b(t) = b(t)\varepsilon(t-3) + c(t); \quad y_b[k] = b[k]\varepsilon[k-3] + c[k].$$

A második feltétel akkor és csakis akkor teljesül, ha $b = B$ és $c = C$ állandó, vagyis nem függ az időtől.

1.2-2. Rendszerek osztályozása

1.2-2.1. Az osztályozás szempontjai

A rendszerek különféle szempontok alapján osztályozhatók. Egy osztályozási szemponttól már volt szó, ez a gerjesztések és a válaszok száma. A további osztályozás során egy gerjesztésű, egy válaszó rendszerekre szorítkozunk.

A gerjesztés és a válasz determinisztikus vagy sztochasztikus jellegétől függően négyféle rendszert különböztethetünk meg. A továbbiakban *determinisztikus gerjesztésű*, *determinisztikus válaszó* rendszerek vizsgálatára szorítkozunk.

Attól függően, hogy a gerjesztés és a válasz FI vagy DI típusú, négy rendszertípust értelmezhetünk. A következőkben csak *DI gerjesztésű*, *DI válaszó* és *FI gerjesztésű*, *FI válaszó* rendszerekkel foglalkozunk. Nem tárgyaljuk tehát „vegyes” rendszereket, amelyeket a gyakorlatban analóg-digitális vagy digitális-analóg rendszereknek is neveznek.

A rendszer *gerjesztés-válasz kapcsolata* lehet *determinisztikus* vagy lehet *sztochasztikus*. Az előbbi eset tárgyalására szorítkozunk

A következő pontokban néhány olyan egy-gerjesztésű, egyválaszó rendszerek további csoportosítását tárgyaljuk, amelyek explicit gerjesztés-válasz kapcsolata

$$FI: y(t) = \mathcal{W}\{u(t)\}; \quad DI: y[k] = \mathcal{W}\{u[k]\} \quad (1.2-5)$$

alakú, tehát a gerjesztés és a válasz vagy egyaránt diszkrét idejű jel vagy egyaránt folytonos idejű. Feltételezzük továbbá hogy a gerjesztés és a válasz egyaránt determinisztikus jel, az operátor is determinisztikus. Ezeket a megszorításokat a továbbiakban nem hangsúlyozzuk. Tárgyalásunk során rendszerint még további megszorításokat is teszünk a rendszert illetően. Ennek a szempontjait részletezzük a következő pontokban.

1.2-2.2. Lineáris rendszerek

Egy rendszer akkor *lineáris*, ha az $y = \mathcal{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatában szereplő \mathcal{W} operátor lineáris, vagyis ha a rendszerre érvényes a *szuperpozíció* elve.

A linearitás a következőket jelenti. Jelölje a rendszernek az u_a , illetve az u_b gerjesztéshez tartozó válaszát y_a , illetve y_b . Ha az $u = C_a u_a + C_b u_b$ gerjesztéshez $y = C_a y_a + C_b y_b$ válasz tartozik bármely C_a és C_b esetén, akkor (és csakis akkor) a rendszer lineáris. A lineáris rendszer \mathcal{W} operátora a

$$\mathcal{W}\{C_a u_a + C_b u_b\} = C_a \mathcal{W}\{u_a\} + C_b \mathcal{W}\{u_b\} \quad (1.2-6)$$

tulajdonsággal rendelkezik. Ennek speciális eseteként lineáris rendszerre

$$\mathcal{W}\{C u\} = C \mathcal{W}\{u\} \quad (1.2-7)$$

érvényes. Ebből következik, hogy az $u = 0$ gerjesztéshez lineáris rendszer esetén $y = 0$ válasz tartozik.

Például az $y = au + b$ gerjesztés-válasz kapcsolatú rendszer akkor és csakis akkor lineáris, ha $b = 0$.

Ha a rendszer nem lineáris, akkor *nemlineáris* rendszernek nevezzük.

Fizikai objektumok sohasem lineárisak. Ha a gerjesztés, a válasz vagy más változó túlságosan nagyra válik, akkor mindig fellépnek nemlineáris hatások. Ezek lehetnek reverzibilisek vagy irreverzibilisek, esetleg katasztrófálisak (például valami eltörik). Eléggké „kis” változásokra a legtöbb objektum lineáris rendszerrel jól leírható. Egyes esetekben a nemlineáris hatás az objektum működésének lényege (például egyenirányítás), ilyenkor a lineáris közelítés természetesen nem elfogadható. Néha azonban a lineáris rendszerekre alkalmazott számítástechnika közelítőleg ilyen rendszerekre is használható (például a tartományonkénti linearizálás módszere, l. a 2.5. fejezetet).

A továbbiakban (a 2.5. fejezet kivételével) *lineáris rendszerek* tárgyalására szorítkozunk.

1.2-2.3. Invariáns rendszerek

Egy rendszer akkor *invariáns*, ha a gerjesztés *időbeli eltolása* csak egy ugyanakkora időbeli eltolást okoz a válaszban.

A rendszer invarianciája (időbeli invarianciája) a következőket jelenti. Jelölje az $u_a = u_a(t)$ illetve az $u_a = u_a[k]$ gerjesztéshez tartozó választ $y_a(t) = \mathcal{W}\{u_a(t)\}$ illetve $y_a[k] = \mathcal{W}\{u_a[k]\}$. Ha az $u_b(t) = u_a(t - \tau)$ illetve az $u_b[k] = u_a[k - i]$ időben eltoltt gerjesztéshez $y_b(t) = y_a(t - \tau)$ illetve $y_b[k] = y_a[k - i]$ válasz tartozik τ illetve i bármely értékére, akkor (és csakis akkor) a rendszer invariáns. Az invariáns rendszer \mathcal{W} operátora a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$\text{FI: } \mathcal{W}\{u(t - \tau)\} = \mathcal{W}\{u(t)\}_{t \rightarrow t - \tau}; \quad \text{DI: } \mathcal{W}\{u[k - i]\} = \mathcal{W}\{u[k]\}_{k \rightarrow k - i} \quad (1.2-8)$$

Például az $y = au + b$ gerjesztés-válasz kapcsolattal jellemzett rendszer akkor és csakis akkor invariáns, ha $a = A$, $b = B$, vagyis mindkét együttható az időtől független.

Ha a rendszer nem invariáns, akkor *variáns* rendszernek nevezzük.

Fizikai objektumok sohasem invariánsak az öregedés, a hőmérséklet-ingadozás és hasonló hatások következtében. Ezen hatások egy része (determinisztikus vagy sztochasztikus) járulékos gerjesztésként figyelembe vehető. Ennek ellenére az objektum invariáns modellje sokszor jól használható közelítést jelent ha „rövid” időtartamok vizsgálatára szorítkozunk. Vannak olyan objektumok, amelyek működésének lényege a variáns jellegük, mint például a nappal és éjjel (de nem világosban és sötétben) vagy a télen és nyáron (de nem melegben és hidegben) másként működő rendszerek

A továbbiakban (a 2.5. fejezet kivételével) *lineáris, invariáns* rendszerekkel fogunk foglalkozni. Látni fogjuk, hogy az invariáns rendszerekre kidolgozott számítási módszerek egy része DI esetben kiterjeszhető variáns rendszerekre, FI esetben azonban ez csak nagyon speciális variáns rendszerekre lehetséges.

1.2-2.4. Kauzális rendszerek

Egy rendszer akkor *kauzális*, ha az $y(t_1)$ illetve az $y[k_1]$ válasz bármely t_1 vagy k_1 esetén az $u(t)$ illetve az $u[k]$ gerjesztésnek csak olyan értékeitől függ, amelyekre $t \leq t_1$ illetve $k \leq k_1$ teljesül.

Egy kauzális rendszer válasza nem függ gerjesztésének jövőbeli értékeitől. Például az $y(t) = u(t - T)$ illetve az $y[k] = u[k - L]$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolat akkor és csakis akkor ír le kauzális rendszert, ha $T \geq 0$ vagy $L \geq 0$ teljesül. Ebből következően az $y(t) = u(t + 0,1)$ illetve az $y[k] = u[k + 1]$ gerjesztés-válasz kapcsolattal prediktor (jósoló rendszer) nem kauzális rendszer.

Egy *lineáris rendszer* akkor és csakis akkor *kauzális*, ha bármely belépő gerjesztéshez belépő válasz tartozik.

Egy lineáris, kauzális rendszer *W* operátora tehát a következő tulajdonsággal bír:

$$\text{FI: } \mathcal{W} \{ \varepsilon(t) f(t) \} = 0, t \in \mathbf{R}_-; \quad \text{DI: } \mathcal{W} \{ \varepsilon[k] f[k] \} = 0, k \in \mathbf{Z}_- . \quad (1.2-9)$$

Nemlineáris rendszerre ez a tulajdonság nem szükséges és nem is elegendő. Így például az $y = au + b$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolattal nemlineáris rendszer kauzális, noha belépő gerjesztéshez nem belépő válasz tartozik (ha a b jel nem belépő), viszont az $y(t) = u(t) \cdot u(t + 0,1)$ illetve az $y[k] = u[k] \cdot u[k + 1]$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolattal nemlineáris rendszer nem kauzális, noha (9) ki van elégítve.

Ha egy rendszer nem kauzális, akkor *akauzális* rendszernek is nevezik.

Fizikai objektumok mindig kauzálisak. Nem kauzális objektumok például megvalósítandó célt jelenthetnek: ilyenkor feladatunk egy olyan kauzális objektum létrehozása, amely valamilyen értelemben optimálisan közelíti egy akauzális rendszer működését. Látni fogjuk, hogy egy rendszer korrektnek tűnő leírása néha nem kauzális, tehát fizikai objektummal nem realizálható rendszert jelent. A kauzalitás fogalmára elsősorban ennek felderítése érdekében van szükségünk.

1.2-2.5. Stabilis rendszerek

A rendszer stabilitása bonyolult fogalom. Néhány stabilitási fogalmat később fogunk tárgyalni. Különösen nemlineáris rendszerekre nehéz a stabilitást értelmezni (részletesebben l. a 2.5. szakaszt). Lineáris, invariáns rendszerekre kétféle stabilitás-fogalom használatos, az egyiket itt adjuk meg, a másikra visszatérünk.

Egy lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor *gerjesztés-válasz stabilis* (röviden: GV stabilis), ha bármely korlátos u gerjesztéshez korlátos y válasz tartozik.

A „rendszer stabilis” kifejezés rendszerint a GV stabilitást fejezi ki. Szokták használni a „BIBO stabilis” („bounded input implies bounded output”) kifejezést is. Egy nem GV stabilis rendszer válasza bizonyos korlátos gerjesztésekre természetesen lehet korlátos, mert a definíció szerint a válasznak *bármely* korlátos gerjesztés hatására korlátosnak kell lennie.

A nem GV stabilis rendszer a *stabilitás határhelyzetében* van, ha bármely véges ideig tartó gerjesztéshez korlátos válasz tartozik. A GV *labilis* rendszer olyan nem GV stabilis rendszer, amely nincs a GV stabilitás határhelyzetében.

Nyilvánvalóan nem GV stabilis az

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau; \quad y[k] = \sum_{i=-\infty}^k u[i]$$

gerjesztés-válasz kapcsolátú rendszer, mert például az egységugrás gerjesztésre válasza nem korlátos. E rendszer válasza belépő és utána szinuszosan változó gerjesztés hatására viszont korlátos. Mindkét rendszer a stabilitás határhelyzetében van.

Lineáris és nem GV stabilis rendszer nem lehet egy objektum jó modellje, mert ha a rendszer egyes változói meghaladnak egy rájuk jellemző kritikus értéket, akkor a linearitás feltételezése már nem lehet jogos. A stabilitás határhelyzetében lévő rendszer megítélése részletes vizsgálatot igényel.

1.2-2.6. Memóriamentes rendszerek

Egy rendszer akkor *memóriamentes*, ha válasza a t , illetve a k időpontban csak a gerjesztésnek ugyanezen t , illetve a k időpontbeli értékétől függ. Ellenkező esetben a rendszer *dinamikus* (nem-memóriamentes).

A memóriamentes rendszer mindig kauzális. A dinamikus rendszer lehet véges vagy végtelen memóriájú. Véges memóriájú rendszer $y(t_1)$, illetve $y[k_1]$ válasza csak az $u(t)$ gerjesztésnek a $t_1 - T < t \leq t_1$, illetve az $u[k]$ gerjesztésnek a $k_1 - L < k \leq k_1$ intervallumbeli értékeitől függ, ahol T , illetve L véges, kauzális rendszer esetén pozitív.

Memóriamentes rendszert ír le például az

$$\text{FI: } y(t) = A t u^2(t) \quad ; \quad \text{DI: } y[k] = A u[k] + B$$

gerjesztés-válasz kapcsolat. Véges memóriájú, kauzális rendszert ír le például az

$$\text{FI: } y(t) = \int_{t-2}^t u(\tau) d\tau \quad ; \quad \text{DI: } y[k] = A u[k-5]$$

gerjesztés-válasz kapcsolat. Végtelen memóriájú, kauzális rendszert ír le például az

$$\text{FI: } y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau ; \text{DI: } y[k] = \sum_{i=-\infty}^k 2^i u[i]$$

gerjesztés-válasz kapcsolat.

A memóriamentes rendszer egy valóságos objektumnak csak ritkán elfogadható modellje.

1.2-2.F. Feladatok

F-1. Válassza ki a lineáris rendszereket az explicit gerjesztés-válasz kapcsolatukkal jellemzett következő FI illetve DI rendszerek közül:

$$\begin{array}{ll} (a) y(t) = 5 u'(t) ; & y[k] = 5 u[k-1]. \\ (b) y(t) = e^{2t} u(t) ; & y[k] = 4^k u[k]. \\ (c) y(t) = \varepsilon(t) e^{-2t} u(t) ; & y[k] = \varepsilon[k] 0,4^k u[k]. \\ (d) y(t) = 5 [u(t)]^2 ; & y[k] = 5 (u[k])^2. \\ (e) y(t) = 5 u(t) + 4 ; & y[k] = 5 u[k] + 4. \\ (f) y(t) = 5 u(t + 0,4) ; & y[k] = 5 u[k + 2]. \\ (g) y(t) = 5 u(1 - t) ; & y[k] = 5 u[1 - k]. \end{array}$$

F-2. Válassza ki az invariáns rendszereket az 1. feladatban az explicit gerjesztés-válasz kapcsolatukkal jellemzett rendszerek közül.

F-3. Válassza ki a kauzális rendszereket az 1. feladatban az explicit gerjesztés-válasz kapcsolatukkal jellemzett rendszerek közül.

F-4. Válassza ki a gerjesztés-válasz stabilis rendszereket az 1. feladatban az explicit gerjesztés-válasz kapcsolatukkal jellemzett rendszerek közül.

1.2-2.M. Megoldások

M-1. A (d) és az (e) által leírt rendszer nem lineáris (vagyis nemlineáris), a többi lineáris.

M-2. A (b) és a (c) által leírt rendszer nem invariáns (vagyis variáns), a többi invariáns.

M-3. Az (f) által leírt rendszer nem kauzális (vagyis akauzális), a többi kauzális.

M-4. A FI esetben az (a) és (b) által leírt rendszer nem GV stabilis, a többi GV stabilis. A DI esetben csak a (b) által leírt rendszer nem GV stabilis, a többi GV stabilis.

1.3. Hálózatok

Az 1. rész utolsó, 1.3. fejezetének 1.3-1. szakaszában megadjuk a hálózat definícióját, továbbá a hálózat és a rendszer kapcsolatát. Az 1.3-2. fejezetben részletesebben tárgyaljuk a jelfolyam hálózatokat és megemlítnünk néhány további hálózat-típust is. Ez a fejezet nem tartalmaz feladatokat, azok a jelfolyam hálózatokkal foglalkozó fejezetek (például a 2.4. fejezet) végén, a részletes tárgyalás után találhatók.

1.3-1. A hálózat fogalma

1.3-1.1. Komponensek összekapcsolása

Gyakorlati szempontból egy *hálózat* egy fizikai mennyiségekkel leírható *objektum* egy *modellje*. Az objektum minden (figyelembe veendő) változójához a hálózat egy változóját rendeljük. A fizikai mennyiségek kapcsolatát a hálózati modellben vagy az összekapcsolási szabályokkal vagy a hálózati komponensekre jellemző szabályokkal írjuk le. Ezek a szabályok eltérőek a különféle hálózat-típusoknál, amint ezt a következő szakaszban még részletezzük.

Elméleti szempontból a hálózat önmagában is értelmezhető és ekkor a modellezendő objektumnak nincs jelentősége. Mivel a továbbiakban a modellezés - egyébként alapvető fontosságú - problémáival nem foglalkozunk, ezért a formális értelmezésre fektetjük a hangsúlyt.

A hálózat komponensek összekapcsolásából áll. Minden komponenshez egy vagy több változó rendelhető. A komponensek is és összekapcsolásuk módja is bizonyos kapcsolatokat jelentenek a változók között, amelyek többnyire egyenletekkel fejezhető ki. Az ismert változók a gerjesztések, a bennünket érdeklő változók a válaszok.

A hálózatot leíró egyenletek rendszere olyan, hogy a független egyenletek maximális száma pontosan annyi, mint a bennük szereplő ismeretlen változók száma. Jó esélyünk vannak tehát arra, hogy az egyenletrendszer megoldásával a változók meghatározhatók, gyakran az egyértelműség is biztosított. További megfontolásokra van szükség, ha az egyenletrendszer nem megoldható vagy megoldása nem egyértelmű.

A komponensek összekapcsolása által meghatározott egyenletek lineáris algebrai egyenletek $+1$, -1 vagy 0 együtthatókkal. A komponensek által meghatározott egyenletek teljesen általánosak lehetnek; tartalmazhatnak összeadást, szorzást, hatványozást, időbeli eltolást, FI esetben differenciálást, integrálást. A továbbiakban (a 2.5. fejezet kivételével) arra az esetre szorítkozunk, amikor csak lineáris műveletek fordulnak elő.

1.3-1.2. A rendszer és a hálózat kapcsolata

A rendszer és a hálózat közötti különbség a következő.

A rendszerhez alapvetően csak kétféle változó van rendelve: az ismert gerjesztések és a keresett válaszok. Ezek a változók fellépnek a hálózatban is, de a hálózatban további változók is szerepelhetnek és többnyire szerepelnek is.

A gyakorlatban a rendszer és a hálózat közötti különbség nem mindig ennyire egyértelmű. Egyrészt rendszerhez gyakran további változókat (például állapotváltozókat) is rendelünk. Másrészt a rendszert néha részrendszerek összekapcsolásának tekintjük. Ekkor a rendszer és a hálózat közötti különbség elmosódik.

Egyes felfogások szerint hálózatról csak akkor beszélhetünk, ha komponensei előre meghatározottak és többnyire igen egyszerűek („elemiek”). Noha a továbbiakban tipikusan ilyen hálózatokkal fogunk foglalkozni, elvileg nem kell ehhez a megszorításhoz ragaszkodni.

Azt fogjuk mondani, hogy a hálózat akkor *reprezentál* vagy *realizál* egy rendszert, ha gerjesztés-válasz kapcsolataik megegyeznek.

A *hálózatanalízis* feladata a következő. Adott a hálózat, célunk a hálózat által reprezentált rendszer egy matematikai leírásának meghatározása.

A *hálózatszintézis* feladata a következő. Adott a rendszer valamilyen leírása (például a gerjesztés-válasz kapcsolata) és célunk egy vagy több olyan hálózat meghatározása, amely ezt a rendszert realizálja, vagyis amelynek a gerjesztés-válasz kapcsolata az adottal megegyezik. Többnyire előírtak a hálózat komponensei (például csak lineárisak lehetnek).

Ha el tudunk készíteni olyan fizikai komponenseket, amelyeknek kielégítően hasonló a viselkedése, mint a megfelelő hálózati komponenseknek, továbbá meg tudjuk valósítani az összekapcsolásokat is, akkor létre tudunk hozni egy objektumot, amely elvileg úgy fog működni, mint az eredetileg megadott rendszer. Kivitelezési bizonytalanságok miatt a működés többé-kevésbé eltérő lesz. A kivitelezés tárgyalása nem célunk.

1.3-2. Hálózatok néhány osztálya

1.3-2.1. Jelfolyam hálózatok

A továbbiakban csak egyetlen hálózattípussal, a jelfolyam hálózattal foglalkozunk részletesen. A jelfolyam hálózatot a továbbiakban többnyire röviden hálózatnak nevezzük.

Egy *jelfolyam hálózat* i -edik komponense P_i számú bemeneti pólussal és Q_i számú kimeneti pólussal rendelkezik.

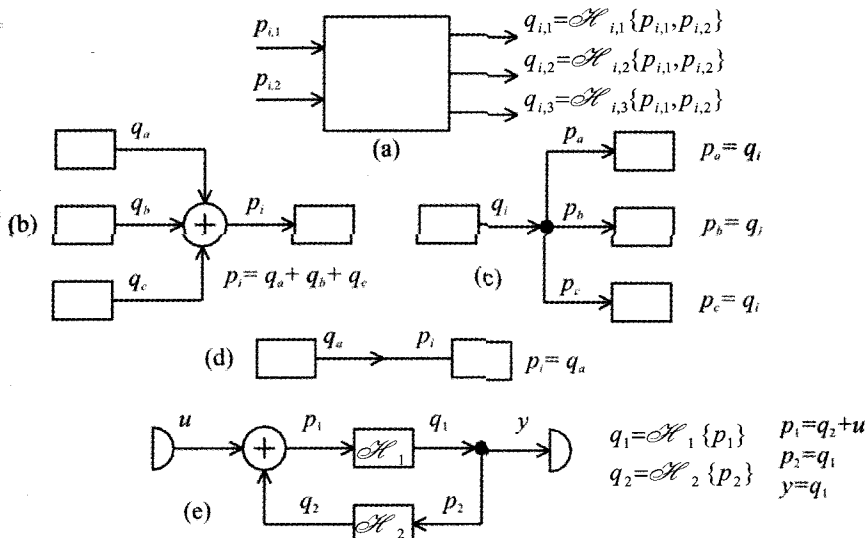
Mindegyik bemeneti pólushoz egy $p_{i,r}$ *bemeneti változó* ($r = 1, 2, \dots, P_i$) van rendelve és mindegyik kimeneti pólushoz egy $q_{i,r}$ *kimeneti változó* ($r = 1, 2, \dots, Q_i$) van rendelve. Az 1a ábra mutatja a komponens szimbólumát. Az i -edik komponens gerjesztés-válasz kapcsolatainak explicit alakja, vagyis a komponens *karakterisztikája*

$$q_{i,r} = \mathcal{H}_{i,r} \{ p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,P_i} \}, \quad r = 1, 2, \dots, Q_i. \quad (1.3-1)$$

Mindegyik komponens egy rendszernek tekinthető. A \mathcal{H} operátorok általában nem lineárisak. A komponensek többségének legfeljebb egy bemeneti és legfeljebb egy kimeneti változója van.

Kiemelünk két speciális komponenst. A *forrás* olyan komponens, amelynek nincs bemeneti változója és egyetlen kimeneti változója van ($P_i = 0, Q_i = 1$), karakterisztikája: $q_i = u_i$, ahol u_i adott jel. A *nyelő* olyan komponens, amelynek nincs kimeneti változója és egyetlen bemeneti változója van ($P_i = 1, Q_i = 0$), karakterisztikája: $p_i = y_i$, ahol y_i a keresett jel. Ez azt jelenti, hogy minden forrás egy gerjesztését, minden nyelő egy választát reprezentálja annak a rendszernek, amelyet a jelfolyam hálózat reprezentál.

A forrásra és a nyelőre speciális rajzjelek használatosak (1e ábra). Bizonyos „elemi” komponensekre (erősítő és integrátor illetve késleltető) is használatosak speciális rajzjelek. A részletesebb tárgyalás a 2.4-1. szakaszban található.



1.3-1. ábra. Jelfolyam hálózat ábrázolása. (a) Az i -edik komponens $P_i = 2$ bemeneti pólussal és változóval, $Q_i = 3$ kimeneti pólussal és változóval. (b) Összegező csomópont. (c) Sztétágazó csomópont. (d) Egyszerű csomópont. (e) Egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszert reprezentáló egyszerű jelfolyam hálózat és a rá vonatkozó egyenletek.

Az *összekapcsolási szabályok* a következők.

Egy *összegező csomópontban* egyesíthető tetszőleges számú kimeneti pólus és egyetlen bemeneti pólus. Az egyetlen bemeneti pólushoz tartozó bemeneti változó azon kimeneti változók összege, amelyek a csomópontban egyesített kimeneti pólusokhoz vannak rendelve. Az 1b ábra jelöléseivel

$$p_i = q_a + q_b + \dots \quad (1.3-2)$$

Egy *sztétágazó csomópontban* egyesíthető egyetlen kimeneti pólus és tetszőleges számú bemeneti pólus. Minden bemeneti pólushoz rendelt bemeneti változó megegyezik az egyetlen kimeneti pólushoz rendelt kimeneti változóval. Az 1c ábra jelöléseivel

$$p_a = q_i, \quad p_b = q_i, \dots \quad (1.3-3)$$

Ha csak egyetlen kimeneti és egyetlen bemeneti változó van egy csomópontban egyesítve, akkor ez az *egyszerű csomópont* tekinthető akár összegező, akár sztétágazó csomópontnak. Az 1d ábrán látható módon az utóbbi a szokásosabb.

Az ábrázoláson látható nyilak az $ok \Rightarrow okozat$ irányt szemléltetik. Ez tekinthető a változók vagy jelek terjedési (folyam) irányának. Innen származik a „jelfolyam hálózat” elnevezés.

Megjegyezzük, hogy elegendő lenne egyféle csomópontot értelmezni. A kétféle csomópont bevezetését az indokolja, hogy fizikai változókra az egyik csomópont megvalósítása rendszerint egyszerű, míg a másiké jóval bonyolultabb lehet. Gondoljunk például arra, hogy miként lehetne sebességeket vagy elektromos feszültségeket összegezni, illetve erőket vagy elektromos áramokat szétágaztatni.

Az 1e ábrán egy egyszerű jelfolyam hálózat látható. Ez egyetlen forrást, egyetlen nyelőt, két egy-bemenetű egy-kimenetű komponenst, egy összegező és egy szétágazó csomópontot tartalmaz.

Jelfolyam hálózatokkal a 2.4-1. szakaszban foglalkozunk részletesen.

*1.3-2.3. Néhány további hálózattípus

Ebben a pontban megemlítünk néhány további hálózattípust és röviden ismertetjük alapvető sajátosságukat. A továbbiakban egyikkel sem foglalkozunk. A „hálózat” az alább felsoroltaknál általánosabb értelemben is használatos még a műszaki értelemben is (energia-elosztó hálózat, távközlési hálózat, számítógép hálózat, és így tovább).

Jelfolyam gráfok

A *jelfolyam gráf* komponensei a *csomópontok* és az *irányított ágak*. A p -edik csomóponthoz egy v_p változó van rendelve. A q -adik csomópontból induló és a p -edik csomópontban végződő ághoz egy \mathcal{F}_{pq} operátor van rendelve. A p -edik csomóponthoz rendelt v_p változó azon $\mathcal{F}_{pq} \{v_q\}$ változók összege, amelyeket azon irányított ágak jelölnek ki, amelyek a q -adik csomópontból indulnak és a p -edik csomópontban végződnek. A hiányzó ágak nulla operátorú ágakként is értelmezhetők.

Egy lineáris rendszer jelfolyam gráffal is reprezentálható; ekkor a \mathcal{F}_{pq} operátorok lineárisak. Nemlineáris rendszer reprezentálására a jelfolyam gráf csak speciális esetekben alkalmas.

Ez a hálózat-típus sok területen használatos, a jelfolyam gráf kevéssé különbözik a jelfolyam hálózattól.

Neurális hálózatok

A neurális hálózatok változói a csomópontokhoz vannak rendelve, komponensei a neuronok, amelyek nemlineáris jelátalakítók. A rendszer bemeneti változói valamilyen súlyozással a neuronoknak a bemeneti változói. A neuronok kimeneti változói lehetnek a rendszer kimeneti változói vagy valamilyen súlyozással más neuronok bemeneti változói.

A neurális hálózatok speciális struktúrájúak, amennyiben a neuronok rétegekbe vannak rendezve.

Az említett súlyok rendszerint nem adottak, hanem egy tanítási vagy tanulási folyamat eredményeként alakulnak ki.

Kirchhoff-hálózatok

A *Kirchhoff-hálózatok* kétpólusok összekapcsolásából állnak. Minden kétpólushoz egy változó-pár van rendelve: egyikük „átmenő” típusú (erő, hőáram, entrópia, elektromos áram), másikuk „átfogó” típusú (sebesség-különbség, hőmérséklet-különbség, potenciál-különbség), szorzatuk rendszerint teljesítményt jelent.

Mindegyik kétpólusú komponens egy karakterisztika jellemez, amely megadja a két változó kapcsolatát. A komponensek között csatolás is lehet, amikor a karakterisztikában a komponens két változóján kívül a vele csatolt kétpólusok változói is szerepelhetnek.

Tetszőleges számú pólus egy csomópontban egyesíthető. Az összekapcsolás által létrehozott kapcsolatokat Kirchhoff törvényei fejezik ki. Kirchhoff csomóponti törvénye értelmében egy csomópontban egyesített átmenő típusú változók összege nulla. Kirchhoff hurok-törvénye értelmében hurkot (zárt pályát) alkotó kétpólusok átfogó változóinak összege nulla. Az összegezés során előjel szabályt is figyelembe kell venni. Kiváltható a csomópontok és a hurkok egy-egy fundamentális rendszere, amely maximális számú lineárisan független egyenletet eredményez. A hurkokra vonatkozó egyenletek felírása megtakarítható, ha a csomópontokhoz vagy a hurkokhoz rendelt új változókat is bevezetünk.

A Kirchhoff-hálózatokat elektromágneses, hőtani és áramlási folyamatok valamint ezek kapcsolatának modellezésében használják elterjedten. Mind analízisük, mind szintézisük módszere részletesen kidolgozott.

Bond gráfok

A *bond gráfok* komponensei a „bondok” és a sokkapuk. A bondokat egy nyíllal (gyakran „félhegyű” nyíllal) szokás ábrázolni.

Minden bondhoz egy változó-pár van rendelve. A bond iránya valamilyen hatás, gyakran a teljesítményáram irányát is jelenti. Minden sokkapuba bizonyos számú bond befelé irányul, majd a sokkapu által meghatározott módon onnan más bondok kifelé irányulnak, tipikusan egy másik sokkapu felé. A sokkaput 0, 1 vagy egy betű jelöli.

A bond gráfokat technológiai folyamatok modellezésére használják. Ezek kevésbé elterjedtek mint az e szakaszban említett többi hálózat.

Logikai hálózatok

A logikai hálózatok logikai változók közötti kapcsolatokat szemléltetnek. A legegyszerűbb és leggyakrabban használt esetben a logikai változó értéke 0 vagy 1 lehet.

A logikai hálózatok komponensei a sokkapuk, amelyeknek egy vagy több bemeneti és egy vagy több kimeneti kapujuk van. Egy kimeneti kapuhoz rendelt változó értéke a bemeneti kapukhoz rendelt változók értéke által meghatározott. A legfontosabb műveleteket reprezentáló kapuknak külön nevük és rajzjelük van (például a logikai „negálás”, logikai „és”, logikai „vagy” kapcsolatokat reprezentáló kapuk).

A logikai hálózatok és az általuk reprezentált logikai rendszerek számításának és tervezésének módszere részletesen kidolgozott.

A logikai hálózatok matematikai leírásának és számításának módszere eltér az előbb tárgyalt hálózatok leírásának és számításának módszerétől, fő matematikai apparátusa a kettes számrendszer és a Boole-algebra.

Hatásvázlatok, folyamatábrák

A hatásvázlat vagy folyamatábra bizonyos szempontból hasonló a jelfolyam gráfhoz, jelfolyam hálózathoz és a bond gráfhoz. Ezektől eltérően azonban célja nem egyenletekkel leírható összefüggések ábrázolása, hanem inkább logikai kapcsolatok kifejezése.

A hatásvázlatok és folyamatábrák elmélete és jelölésrendszere még egy szakterületen belül sem egységes.

Nem megyünk további részletekbe, mivel célunk csak annak illusztrálása volt, hogy az általunk a továbbiakban részletezendő jelfolyam hálózat csak egy lehetséges, de nem kizárólagos formája a rendszer hálózati reprezentációjának. Az általunk tárgyalandó rendszerek a jelfolyam hálózat mellett a jelfolyam gráffal reprezentálhatók kézenfekvő módon, míg például a logikai hálózatok más típusú rendszerek modellezésre alkalmasak.

2. Analízis az időtartományban

Ebben a részben megadjuk az olyan lineáris, invariáns rendszerek különböző időtartománybeli leírását, amelyeknek a gerjesztései és a válaszai vagy egyaránt diszkrét idejűek (DI) vagy egyaránt folytonos idejűek (FI).

Az időtartománybeli leírás az jelenti, hogy a rendszer gerjesztésének és válaszáának leírására az $u[k]$ és $y[k]$ illetve az $u(t)$ és $y(t)$ változókat használjuk. A 3. illetve a 4. részben az időtartományban értelmezett változókhoz rendelt más (a frekvenciatartományban illetve a komplex frekvenciatartományban értelmezett) változókat is használunk majd.

A tárgyalás során vagy párhuzamosan vagy közvetlenül egymás után tárgyaljuk a diszkrét idejű és a folytonos idejű rendszereket. A tárgyalást a DI esettel kezdjük, mert az többnyire egyszerűbben kezelhető. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a jelek valóság és folytonos értékűek, tehát még a DI esetben sem vesszük figyelembe a digitális rendszerekben alkalmazott kvantálás hatását.

A 2.1. fejezetben értelmezzük a lineáris rendszer impulzusválaszát, és megmutatjuk néhány alkalmazását, mint pl. az adott gerjesztéshez tartozó válasz számítása, a rendszer gerjesztés-válasz (GV) stabilitásának vizsgálata.

A 2.2. fejezetben értelmezzük a lineáris, invariáns rendszer rendszeregyenletét, bemutatjuk megoldásának néhány módszerét, megvizsgáljuk a rendszer GV stabilitását a rendszeregyenletének ismeretében. Ez a fejezet kihagyható, a következő, ennél célszerűbb leírást tartalmazó fejezetek e nélkül is megérthetők. Egyes szakterületeken viszont ez az elterjedtebb rendszer leírás.

A 2.3. fejezetben tárgyaljuk a lineáris, invariáns rendszer állapotváltozós leírását és e leírás megoldásának néhány módszerét. Értelmezzük az aszimptotikus stabilitást és módszert adunk annak eldöntésére. A modellezendő objektum vagy annak hálózati reprezentációja alapján többnyire az állapotváltozós leírás egyszerűbben állítható elő, mit akár az impulzusválasz, akár a rendszeregyenlet. Az állapotváltozós leírás azért is általánosabb az előzőknél, mert kézenfekvőbb az általánosítása nemlineáris vagy variáns rendszerekre.

A 2.4. fejezetben lineáris, invariáns jelfolyam hálózatokkal foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy miként állítható elő a hálózat által reprezentált lineáris, invariáns, kauzális rendszer állapotváltozós leírása, továbbá hogy miként rendelhető jelfolyam hálózat egy állapotváltozós leírásával vagy rendszeregyenletével jellemzett rendszerhez. A hálózatok iránt nem érdeklődő olvasó ezt a fejezetet kihagyhatja.

A 2.5. fejezet tárgya a nemlineáris rendszerek állapotváltozós leírása, jelfolyam hálózatos reprezentációja, az állapotegyenlet közelítő megoldásának néhány módszere, a megoldás szemléltetése. Ennek a fejezetnek a témájával a későbbiekben nem foglalkozunk.

Egy rendszernek az időtartománybeli leírása tekinthető a természetes tárgyalásnak. Sok rendszerelméleti feladat azonban könnyebben megoldható vagy a 3. részben tárgyalandó frekvenciatartománybeli vagy 4. részben tárgyalandó komplex frekvenciatartománybeli leírásmóddal. Vannak olyan feladatok, amelyek az időtartományban nem is fogalmazhatók meg egyszerűen. A két utóbbi leírásmód azonban csak lineáris, invariáns rendszerek esetén alkalmazhatók kényelmesen.

A 2. rész önmagában lezártnak tekinthető. Erre épül a 3. és a 4. rész. Az utóbbi tanulmányozásához az előbbi kihagyható, vagy a két fejezet tanulmányozásának sorrendje felcserélhető.

2.1. Az impulzusválasz és alkalmazásai

Egy lineáris, invariáns rendszer válaszát meg tudjuk határozni, ha ismerjük bármely konkrét $u=u_0$ gerjesztéshez tartozó $y=y_0$ választ. Ez az y_0 jel jellemzi a rendszert, alkalmas explicit gerjesztés-válasz kapcsolatának megfogalmazására. A legelterjedtebb ilyen speciális gerjesztés a diszkrét idejű $\delta[k]$ egységimpulzus, illetve a folytonos idejű $\delta(t)$ Dirac-impulzus, mert az ehhez tartozó $h[k]$ illetve $h(t)$ impulzusválasz ismeretében a legegyszerűbb a tetszőleges $u[k]$, illetve $u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y[k]$, illetve $y(t)$ válasz kifejezése.

A 2.1-1. szakaszban diszkrét idejű rendszerekkel, a 2.1-2. szakaszban folytonos idejű rendszerekkel foglalkozunk. Látni fogjuk, hogy a diszkrét idejű rendszerek kezelése egyszerűbb, mint a folytonos idejű rendszerek kezelése, ezért - noha talán kevésbé megszokottak - a továbbiakban is a diszkrét idejű rendszerekkel kezdjük vizsgálatainkat.

2.1-1. Diszkrét idejű rendszer impulzusválasza

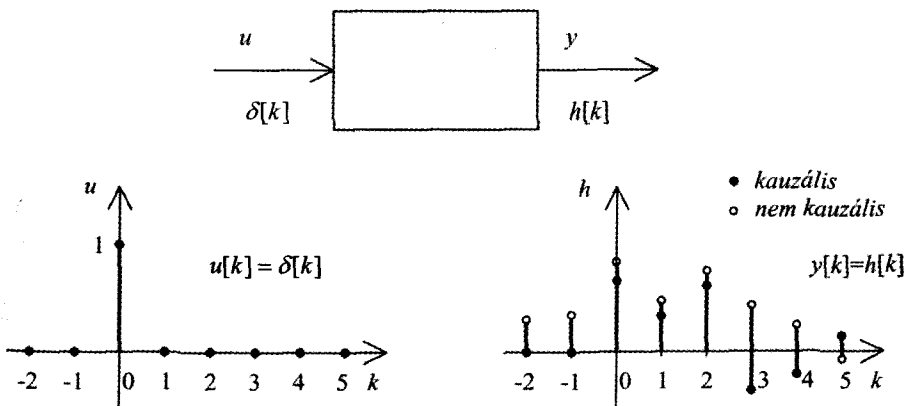
2.1-1.1. Az impulzusválasz definíciója

Megadjuk a DI rendszer impulzusválaszának definícióját, majd bemutatjuk alkalmazását.

Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer $h = h[k]$ impulzusválasza a rendszernek az egységimpulzus gerjesztéshez tartozó válasza (1. ábra):

$$u[k] = \delta[k] \Rightarrow y[k] = h[k]. \quad (2.1-1)$$

Az impulzusválaszt súlyfüggvénynek is nevezik. Ennek okát a következő pontban látni fogjuk.



2.1-1. ábra Egy DI rendszer impulzusválasza az egységimpulzushoz tartozó válasza

A lineáris, invariáns, diszkrét idejű rendszer akkor és csakis akkor *kauzális*, ha impulzusválasza belépő jel, vagyis $h[k] = 0$, $k \in \mathbf{Z}$, tulajdonságú.

Nem részletezzük e kézenfekvő állítás igazolását.

Ha ismerjük a rendszer $y = \mathcal{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatát, akkor az impulzusválasz $h[k] = \mathcal{W}\{\delta[k]\}$ alakban formálisan is kifejezhető.

Egy rendszer impulzusválasza meghatározható az objektumon végzett méréssel. Először meg kell győződni arról, hogy a diszkrét idejű, lineáris, invariáns modell alkalmazható-e. Ha igen, akkor az objektumra egy $u[k]=U \delta[k]$ gerjesztést kapcsolunk, megmérjük az $y[k]$ választ és ebből számítjuk a $h[k]=y[k]/U$ impulzusválaszt a mérés által lefedett k értékekre. Nem könnyű feladat egyszerű és jól közelítő $h[k]$ függvényt találni. A mérési pontokra történő tökéletes illesztést már csak azért sem kell biztosítani, mert a mérési eredmény maga nem pontos. A válasz értékei azonban számíthatók a függvény ismerete nélkül is, mint látni fogjuk

Ha a rendszernek sok gerjesztése és sok válasza van, akkor minden gerjesztés-válasz párhoz egy h_{pq} impulzusválasz rendelhető: $y_p[k] = h_{pq}[k]$, ha $u_q[k] = \delta[k]$ és minden más $u_i[k] = 0$.

Egy kauzális rendszert *véges impulzusválaszú* (FIR típusú, „Finite Impulse Response”) rendszernek nevezünk, ha az impulzusválasza azonosan nulla egy $L - 1$ ütem után. Az impulzusválasz hossza ekkor L ütem. A FIR típusú rendszer impulzus-válaszának általános alakja

$$h[k] = 0; \quad k \leq -1, \quad k \geq L. \quad (2.1-2)$$

Később látni fogjuk, hogy a FIR típusú rendszer előnyös tulajdonsága, hogy feltétlenül GV stabilis.

Általános esetben egy rendszer végtelen impulzusválaszú (IIR típusú, „Infinite Impulse Response”).

2.1-1.2. A válasz számítása

Meg akarjuk határozni a $h = h[k]$ impulzusválaszú DI rendszernek az $u = u[k]$ gerjesztéshez tartozó $y = y[k]$ választ.

A gerjesztés felírható a következő alakban:

$$u[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i] \delta[k - i]$$

Az impulzusválasz definíciója szerint a $\delta[k]$ gerjesztéshez $h[k]$ válasz tartozik. A rendszer invariáns jellegéből következik, hogy a $\delta[k-i]$ gerjesztéshez $h[k-i]$ válasz tartozik. A rendszer lineáris jellegéből következik, hogy az $u[i]\delta[k-i]$ gerjesztések összegéhez az $u[i]h[k-i]$ válaszok összege tartozik.

A diszkrét idejű, lineáris, invariáns, $h[k]$ impulzusválaszú rendszernek az $u[k]$ gerjesztéshez tartozó *válasza* a következő alakban fejezhető ki:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i], \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (2.1-3)$$

A művelet neve: h és u konvolúciója. A DI konvolúció szimbolikus alakja

$$y[k] = h[k] * u[k]. \quad (2.1-4)$$

Ennek jelentését a (3) adja. Az Olvasó is beláthatja, hogy a konvolúció kommutatív, asszociatív és az összeadásra disztributív művelet.

A $p = k - i$ változó bevezetésével a válasz kifejezhető a következő alakban is:

$$y[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h[p] u[k-p], k \in \mathbf{Z}. \quad (2.1-5)$$

Kauzális rendszerre $h[k]$ belépő jel és az összefüggések egyszerűsödnek:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^k h[k-i] u[i] \equiv \sum_{p=0}^{\infty} h[p] u[k-p], k \in \mathbf{Z}. \quad (2.1-6)$$

Ha a rendszer *kauzális* és a gerjesztés *belépő* jel, akkor a válasz is belépő:

$$y[k] = \varepsilon[k] \sum_{i=0}^k h[k-i] u[i] \equiv \varepsilon[k] \sum_{p=0}^k h[p] u[k-p]. \quad (2.1-7)$$

A gyakorlati esetek többségében a (7) alak használható. A (3) általános alak akkor is érvényes, ha a rendszer nem kauzális nem GV stabilis és a gerjesztés nem belépő. A később tárgyalandó rendszer leírások egyike sem rendelkezik e tulajdonságok mindegyikével.

A válasz értékei kauzális rendszer és belépő gerjesztés esetén részletesebben megadva a (7) értelmében következők:

$$\begin{aligned} y[0] &= h[0] u[0], \\ y[1] &= h[1] u[0] + h[0] u[1], \\ y[2] &= h[2] u[0] + h[1] u[1] + h[0] u[2], \dots \end{aligned} \quad (2.1-8)$$

A válasz $y[k]$ értékei akkor is számíthatók, ha $h[k]$ és $u[k]$ értékei csak numerikus sorozatként ismertek.

A konvolúció egyszerűen számítható zárt alakban tetszőleges k esetére, ha $h[k]$ és $u[k]$ egyaránt leírható exponenciális függvénnyel. Ebbe beletartozik az állandó, a szinuszos és az exponenciálisan csillapított szinuszos jel is.

A válasz (3) kifejezése a következőképpen értelmezhető. Az $y[k]$ értéke valamennyi $u[i]$ súlyozott összege. A $h[k-i]$ adja meg azt a súlyt, amellyel $u[i]$ az $y[k]$ kifejezésében szerepel. Ez magyarázza az impulzusválasz „súlyfüggvény” elnevezését is. A súly nulla is lehet. Kauzális rendszerre a súly nulla $k-i < 0$, azaz $i > k$ esetén, ami azt jelenti, hogy $u[i]$ ezen értékei nem befolyásolják $y[k]$ értékeit, a „jövő” nem befolyásolja a „jelen”.

Egy FIR típusú kauzális rendszer impulzusválaszának és az $u[k]$ gerjesztéshez tartozó válaszána kifejezése

$$h[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]) f[k] \Rightarrow y[k] = \sum_{i=0}^{L-1} h[i] u[k-i]. \quad (2.1-9)$$

A válasz k bármely értékére legfeljebb L tag összege: az $u[k], u[k-1], \dots, u[k-(L-1)]$ lineárkombinációja. Ha a gerjesztés is véges idejű, akkor $y[k]$ is véges idejű.

A (4) az $y = \mathcal{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolat egy konkrét alakja.

1. példa Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = \varepsilon[k] q^k$.

Határozzuk meg a rendszer válaszát, ha gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k] a^k$.

A kauzális rendszernek a belépő gerjesztéshez tartozó válasza maga is belépő jel, vagyis $y[k] = 0$, ha $k \in \mathbf{Z}_-$. Ha $k \in \mathbf{Z}_+$, akkor például (8) értelmében:

$$y[0] = 1 \cdot 1 = 1, \quad y[1] = 1 \cdot a + q \cdot 1 = a + q, \quad y[2] = 1 \cdot a^2 + q \cdot a + q^2 \cdot 1 = a^2 + qa + q^2,$$

és így tovább. Még ebben a nagyon egyszerű esetben sem könnyű kitalálni $y[k]$ általános kifejezését.

Alkalmazzuk most az általános (3) vagy a most érvényes speciális (7) alakot:

$$y[k] = \varepsilon[k] \sum_{i=0}^k h[k-i] u[i] = \varepsilon[k] \sum_{i=0}^k q^{k-i} a^i = \varepsilon[k] q^k \sum_{i=0}^k \left(\frac{a}{q}\right)^i.$$

E geometriai sor hányadosa (a/q), a sor összege $a \neq q$ esetén ismeretesen

$$y[k] = q^k \frac{1 - (a/q)^{k+1}}{1 - (a/q)} = \frac{q^{k+1} - a^{k+1}}{q - a}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy $k = 0, 1$ és 2 esetén a már számított eredmény adódik. A válasz teljes leírása (az $a = q$ eset közvetlenül is, határértékként is számítható)

$$y[k] = \varepsilon[k] \frac{q^{k+1} - a^{k+1}}{q - a}, \quad a \neq q; \quad y[k] = \varepsilon[k] (k+1) q^k, \quad a = q.$$

Ha $|a| < 1$ és $|q| < 1$, akkor $|y[k]| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Ha akár $|a| > 1$, akár $|q| > 1$, akkor $|y[k]| \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. #

2. példa Határozzuk meg az előző példában vizsgált rendszer válaszát, ha gerjesztése

$$u[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]) a^k, \quad L \in \mathbf{N}, \quad a \neq q.$$

A válasz számítható (7) felhasználásával. Ehhez az összegezést két részre célszerű bontani: ha $i = 0, 1, \dots, L-1$, akkor $u[i] = a^i$, egyébként $u[i] = 0$.

Egyszerűbb azonban a választ a szuperpozíció elvének alkalmazásával számítani. Az $u_1[k] = \varepsilon[k] a^k$ gerjesztéshez tartozó $y_1[k]$ válasz az előző példából ismert. Az

$$u_2[k] = \varepsilon[k-L] a^k \equiv a^L \varepsilon[k-L] a^{k-L} = a^L u_1[k-L]$$

gerjesztéshez tartozó válasz a rendszer lineáris és invariáns jellege következtében nyilván $y_2[k] = a^L y_1[k-L]$. A keresett válasz kifejezése tehát

$$y[k] = \varepsilon[k] \frac{q^{k+1} - a^{k+1}}{q - a} - \varepsilon[k-L] a^L \frac{q^{k+1-L} - a^{k+1-L}}{q - a}.$$

Áttekinthetőbb a válasz elemi átalakítással előállítható következő, ablakozott alakja:

$$y[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]) \frac{q^{k+1} - a^{k+1}}{q - a} + \varepsilon[k-L] \frac{q^L - a^L}{q - a} q^{k+1-L}.$$

Látható, hogy $|q| < 1$ esetén $|y[k]| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, és ez független a értékétől. Ez nem meglepő, hiszen a rendszer $k \geq L$ esetén gerjesztetlen. #

3. példa Egy rendszer impulzusválasza

$$h[k] = \varepsilon[k] q^k.$$

Határozzuk meg az $u[k] = \varepsilon[k] \cos \vartheta k$ belépő gerjesztéshez tartozó választ!

A konvolúciós összeg számítása nehéz feladatnak látszik. Egyszerűsödik a feladat az Euler-reláció alkalmazásával ($j \equiv \sqrt{-1}$ a képzetes egység jele):

$$\begin{aligned} e^{j\alpha} &\equiv \cos \alpha + j \sin \alpha, & e^{-j\alpha} &\equiv \cos \alpha - j \sin \alpha; \\ \cos \alpha &\equiv \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}), & \sin \alpha &\equiv \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}). \end{aligned}$$

A gerjesztés megadható ezek szerint a következő alakban is:

$$u[k] = \varepsilon[k] \left(\frac{1}{2} e^{j\vartheta k} + \frac{1}{2} e^{-j\vartheta k} \right).$$

Most már felhasználhatjuk az 1. példa eredményét $a = e^{j\vartheta}$ és $a = e^{-j\vartheta}$ helyettesítéssel. (Az 1. példában nem feltételeztük, hogy a valós értékű!) Azt kapjuk, hogy

$$y[k] = \varepsilon[k] \left(\frac{q^{k+1} - e^{j\vartheta(k+1)}}{2(q - e^{j\vartheta})} + \frac{q^{k+1} - e^{-j\vartheta(k+1)}}{2(q - e^{-j\vartheta})} \right).$$

Elemi átalakítással a következő, formailag is valós alakhoz jutunk:

$$y[k] = \varepsilon[k] \frac{(q^2 - q \cos \vartheta) q^k + \cos \vartheta k - q \cos \vartheta (k+1)}{q^2 + 1 - 2q \cos \vartheta}.$$

Ha $|q| < 1$, akkor $y[k] \rightarrow A \cos(\vartheta k + \rho)$, $k \rightarrow \infty$, ahol A és ρ állandók a q és ϑ paraméterek ismeretében a fenti eredményből számíthatók. #

***4. példa** Határozzuk meg az előző példákban szereplő rendszernek az $u[k] = a^k$ nem belépő gerjesztéshez tartozó választ!

Az (6) második alakjába helyettesítve kapjuk, hogy

$$y[k] = \sum_{p=0}^{\infty} h[p] u[k-p] = \sum_{p=0}^{\infty} q^p a^{k-p} = a^k \sum_{p=0}^{\infty} (q/a)^p.$$

A végtelen mértani sor csak akkor konvergens, ha $|q/a| < 1$. Ekkor

$$y[k] = \frac{1}{1 - (q/a)} a^k, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ ha } |q| < |a|.$$

Ha $|q/a| > 1$, akkor a feladat értelmetlen, mert $y[k]$ értéke nem véges a k bármely véges értékére. Az a tetszőleges, de csak az $|a| \geq 1$ eset értelmezhető $k \rightarrow -\infty$ esetén is. #

2.1-1.3. Gerjesztés-válasz stabilitás

Az 1.2-2.5. szakaszban már megadtuk a gerjesztés-válasz (GV) stabilitás definícióját. Az impulzusválasz ismeretében adhatunk jobban használható feltételt is. További rendszerleírások ismeretében további feltételekkel is meg fogunk ismerkedni.

A diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor *gerjesztés-válasz stabilis* (azaz bármely korlátos gerjesztéshez korlátos válasz tartozik), ha impulzusválasza abszolút összegezhető:

$$\text{GV stabilis rendszer} \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty. \quad (2.1-10)$$

Ennek egy szükséges (és a gyakorlati esetek többségében elegendő) feltétele

$$h[k] \rightarrow 0, \text{ ha } k \rightarrow \infty. \quad (2.1-11)$$

Ez a helyzet, ha $h[k]$ csökkenő exponenciális függvénnyel majorálható.

Kauzális rendszer impulzusválasza belépő jel. Ekkor az összegezés alsó határa ténylegesen $k = 0$.

A véges impulzusválaszú rendszer feltétlenül GV stabilis, hiszen ekkor a (10) összeg csak véges számú tagot tartalmaz.

A $h[k] = \varepsilon[k](1+k)^{-1}$ impulzusválasz kielégíti a (11) szükséges feltételt, de az általa jellemzett rendszer mégsem GV stabilis, mert (10) nincs kielégítve.

A *stabilitás határhelyzetében* lévőnek nevezhető az olyan nem GV stabilis DI rendszer, amelynek impulzusválasza ugyan nem abszolút összegezhető, de korlátos. Az ilyen rendszer válasza csak bizonyos gerjesztések esetén nem korlátos. Ha például $k \rightarrow \infty$ esetén $h[k]$ állandó értékhez tart, akkor $y[k]$ csak olyan korlátos $u[k]$ esetén nem korlátos, amely ugyancsak állandóhoz tart. Szokás *labilis rendszereknek* nevezni az olyan nem GV stabilis rendszert, amelyik nincs a GV stabilitás határhelyzetében.

Példa Legyen a rendszer impulzusválasza $h[k] = \varepsilon[k]q^k$, ahol q lehet valós vagy $q = re^{j\theta}$ alakban komplex.

A rendszer akkor GV stabilis, ha $|q| < 1$, vagyis komplex $q = re^{j\theta}$ esetén ha $r < 1$. Ebben az esetben nem csak (11) teljesül, hanem

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} |q|^k = \frac{1}{1-|q|}, \quad |q| < 1$$

értelmében a (10) is. Ha $|q| = 1$, akkor a rendszer a GV stabilitás *határhelyzetében van*, ha $|q| > 1$, akkor a rendszer GV labilis. Nyilvánvaló, hogy a

$$h[k] = \varepsilon[k] \{A_1 q_1^k + A_2 q_2^k + \dots + A_n q_n^k\}$$

impulzusválasz akkor és csakis akkor jellemez egy GV stabilis rendszert, ha minden $|q_i| < 1$. #

A (10) állítás igazolásához legyen $|u[k]| \leq M_u$ a korlátos gerjesztésre. Ekkor (3) értelmében

$$|y[k]| = \left| \sum_{p=-\infty}^{\infty} h[p] u[k-p] \right| \leq \sum_{p=-\infty}^{\infty} |h[p]| |u[k-p]| \leq M_u \sum_{p=-\infty}^{\infty} |h[p]|.$$

Az $|y[k]|$ véges marad, azaz $y[k]$ korlátos, ha (10) teljesül, vagyis a feltétel elegendő.

A feltétel szükségességének igazolásához legyen $u[k] = 1$, ha $h[-k] \geq 0$ és legyen $u[k] = -1$, ha $h[-k] < 0$. Ekkor a (3) értelmében $k = 0$ helyettesítéssel

$$y[0] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h[p] u[-p] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} |h[p]|.$$

Ez csak akkor véges, ha (10) teljesül, vagyis e feltétel szükséges.

*2.1-1.4. Az ugrásválasz és alkalmazásai

A lineáris rendszer válasza nem csak impulzusválaszának ismeretében határozható meg, hanem bármely adott gerjesztéshez tartozó válaszában is. Itt csak a legegyszerűbb és leggyakrabban használt általánosítást tárgyaljuk.

Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer $g = g[k]$ ugrásválasza a rendszernek az egységugrás gerjesztésre adott válasza:

$$u[k] = \varepsilon[k] \Rightarrow y[k] = g[k]. \quad (2.1-12)$$

Kauzális rendszer ugrásválasza belépő jel: $g[k] = 0$, $k \in \mathbf{Z}_-$.

Az impulzusválasz közvetlenül arról ad felvilágosítást, hogy miként viselkedik a rendszer válasza a gerjesztés megszűnése után. Az ugrásválasz azt adja meg, hogy miként viselkedik a rendszer válasza, ha gerjesztése egy bizonyos idő után állandó marad.

Mivel $\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]$, ezért a g ugrásválasz ismeretében egyszerűen kifejezhető a h impulzusválasz és viszont:

$$h[k] = g[k] - g[k-1], \quad g[k] = \sum_{i=-\infty}^k h[i] \quad (2.1-13)$$

A továbbiakban a rendszer jellemzésére az ugrásválaszt nem fogjuk használni.

2.1-1.F. Feladatok

F-1. Egy DI rendszer impulzusválasza

$$h[k] = 5 \varepsilon[k-1] (0,5^{k-1} - 0,1^{k-1}).$$

Határozza meg az $y[k]$ választ a $k = 0, 1, 2$, és 3 ütemekre, ha $u[k] = \varepsilon[k]$.

F-2. Határozza meg az $y[k]$ válasz kifejezését, ha a $h[k]$ impulzusválasz az előző feladatban megadott és a rendszer gerjesztése

$$(a) u[k] = \varepsilon[k]. \quad (b) u[k] = \varepsilon[k](-0,1)^k. \quad (c) u[k] = \varepsilon[k](0,1)^k. \\ (d) u[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-5]. \quad (e) u[k] = 9(1 - \varepsilon[k]) + \varepsilon[k].$$

Ellenőrizze az eredményt $k = 0, 1$ és 2 értékére!

F-3. Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = \varepsilon[k] q^k$.

Határozza meg e rendszer $u[k] = \varepsilon[k]$ gerjesztésre adott $y[k] = g[k]$ ugrásválaszát!

Mivel az impulzusválasz rendszerint ilyen tagok szuperpozíciója, ezért az eredmény sok esetre általánosítható.

F-4. Milyen tulajdonságú egy FIR típusú rendszer $g[k]$ ugrásválasza?

F-5. Egy kauzális IIR típusú rendszer gerjesztése véges hosszúságú: $u[k = 0, k \geq L]$.

Milyen tulajdonságú e rendszer válasza?

F-6. Egy DI rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolata

$$y[k] = \frac{1}{4}u[k+1] + \frac{1}{2}u[k] + \frac{1}{4}u[k-1],$$

vagyis a válasz a gerjesztés súlyozott átlaga.

Határozza meg az impulzusválaszt! Kauzális-e, illetve GV stabilis-e ez a rendszer?

***F-7.** Igazolja, hogy a következő impulzusválaszú rendszerek GV stabilis rendszert jellemeznek:

$$(a) h[k] = \varepsilon[k] \frac{1}{k!}. \quad (b) h[k] = \varepsilon[k-1] k^{-2}. \quad (c) h[k] = \varepsilon[k-1] k^{-\alpha}, \alpha > 1.$$

F-8. Adott a válaszértékek $y[0], y[1], \dots, y[L]$ véges sorozata, továbbá

(a) adott a gerjesztés $u[0], u[1], \dots, u[L]$ sorozata. Határozza meg az impulzusválasz $h[0], h[1], \dots, h[L]$ sorozatát. Ez a rendszer-identifikáció problémája.

(b) adott az impulzusválasz $h[0], h[1], \dots, h[L]$ sorozata. Határozza meg a gerjesztés $u[0], u[1], \dots, u[L]$ sorozatát. Ez a feladat például, ha $u[k]$ a mérendő jel, $h[k]$ jellemzi a mérőműszert és $y[k]$ a mérési eredmény.

F-9. Egy DI rendszernek az $u[k] = \delta[k]$ gerjesztésre adott válasza $y[k] = \varepsilon[k] 0,5^k$.

Igaz-e, hogy e rendszer kauzális, lineáris, invariáns és GV stabilis?

F-10. Egy DI rendszer impulzusválasza $h_1[k]$. E rendszer $y_1[k]$ válasza egy $h_2[k]$ impulzusválaszú rendszer $u_2[k]$ gerjesztése. Ez az elrendezés a két részrendszer kaszkád kapcsolása (nevezik soros kapcsolásnak is).

(a) Adja meg az $u = u_1$ gerjesztésű és $y = y_2$ válaszú rendszer h impulzusválaszát h_1 és h_2 ismeretében! Megváltozik-e h kifejezése, ha a két részrendszer felcseréljük?

(b) Adja meg $h[k]$ kifejezését, ha $h_1[k] = h_2[k] = \varepsilon[k] a^k$ alakú!

(c) Szükséges és elegendő feltétele-e a rendszer GV stabilitásának mindkét részrendszer GV stabilitása?

2.1-1.M. Megoldások

M-1. $h[0] = 0, h[1] = 0, h[2] = 2, h[3] = 1,2$. Ezek felhasználásával $y[0] = 0, y[1] = 0, y[2] = 2, h[3] = 3,2$.

M-2. A válasz általános alakja az (a)-(d) esetekben

$$y[k] = 5 \varepsilon[k-1] \sum_{i=0}^{k-1} (0,5^{k-1-i} - 0,1^{k-1-i}) u[i] = 5 \varepsilon[k-1] \left\{ 0,5^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} 2^i u[i] - 0,1^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} 10^i u[i] \right\}.$$

$$(a) y[k] = \varepsilon[k-1] \left\{ \frac{40}{9} - 5(0,5)^{k-1} + \frac{5}{9} (0,1)^{k-1} \right\}.$$

$$(b) y[k] = \varepsilon[k-1] \left\{ -\frac{5}{3} (-0,1)^{k-1} + \frac{25}{6} (0,5)^{k-1} - \frac{5}{2} (0,1)^{k-1} \right\}.$$

$$(c) y[k] = \varepsilon[k-1] \left\{ -\frac{25}{4} (0,1)^{k-1} + \frac{25}{4} (0,5)^{k-1} - 5k (0,1)^{k-1} \right\}.$$

$$(d) y[k] = \{ \varepsilon[k-1] - \varepsilon[k-6] \} \left\{ \frac{40}{9} - 5(0,5)^{k-1} + \frac{5}{9} (0,1)^{k-1} \right\} + \\ + \varepsilon[k-6] \left\{ 4,969 (0,5)^{k-6} - \frac{5}{9} (0,1)^{k-6} \right\}.$$

$$(e) u[k] = 9 - 8 \varepsilon[k] \Rightarrow y[k] = 40 \{ 1 - \varepsilon[k-1] \} + \\ + \varepsilon[k-1] \left\{ -\frac{280}{9} + 40 (0,5)^{k-1} - \frac{40}{9} (0,1)^{k-1} \right\}.$$

M-3. Konvolúcióval: $g[k] = \varepsilon[k](1 - q^{k+1})/(1 - q)$; ha $q = 1$, akkor $g[k] = \varepsilon[k](1 + k)$.

M-4. Ha $g[k] = 0, k \geq L$ (L az impulzusválasz hossza), akkor $g[k] = \sum_{i=0}^{L-1} h[i]$ állandó $k \geq L$ diszkrét időpontokban. Az állandó nulla is lehet.

M-5. A válasz előállítható L számú $h[k-i]$ alakú tag szuperpozíciójaként.

M-6. (a) Az impulzusválasz $h[k] = \frac{1}{4} \delta[k+1] + \frac{1}{2} \delta[k] + \frac{1}{4} \delta[k-1]$.

(b) A rendszer nem kauzális. A rendszer GV stabilis. Noha $h[k]$ véges hosszúságú, a rendszert nem szokás FIR típusúnak nevezni, mivel nem kauzális.

***M-7.** Mindegyik rendszer GV stabilis

M-8. (a) Oldjuk meg egymás után a (6) egyenletrendszert:

$$h[0] = \frac{1}{u[0]} y[0], \quad h[1] = \frac{1}{u[0]} \{ y[1] - h[0] u[1] \}, \quad h[2] = \frac{1}{u[0]} \{ y[2] - h[1] u[1] - h[0] u[2] \}, \dots \\ h[L] = \frac{1}{u[0]} \{ y[L] - h[L-1] u[1] - \dots - h[0] u[L] \}.$$

Ha $u[0] = 0$, akkor $y[0] = 0$, és ekkor a számítást a $k = 1$ ütemtől kezdjük.

(b) A fenti összefüggésekben a $h[k]$ és az $u[k]$ szerepe felcserélhető, ez eredményezi a feladat megoldását.

M-9. Egyetlen gerjesztés-válasz pár alapján az állítások egyikére sem lehet következtetni. Az viszont igaz, hogy ha a rendszer a megadott tulajdonságokkal bír, akkor lehet ilyen impulzusválasza.

M-10. (a) Mivel $y = y_2 = h_2 * u_2 = h_2 * y_1 = h_2 * (h_1 * u_1) = h_2 * h_1 * u$, ezért $h = h_2 * h_1$. Mivel a konvolúció kommutatív művelet, ezért a részrendszerek felcserélése ugyanazt az impulzusválaszt eredményezi.

$$(b) \text{ Konvolúcióval } h[k] = \varepsilon[k] \sum_{i=0}^k a^{k-i} a^i = \varepsilon[k] a^k (k+1).$$

* (c) A feltétel elegendő, de (legalábbis elméletileg) nem szükséges. Gyakorlatilag azonban ilyenkor a rendszer GV stabilitása nem biztosítható megbízhatóan.

2.1-2. Folytonos idejű rendszerek impulzusválasza

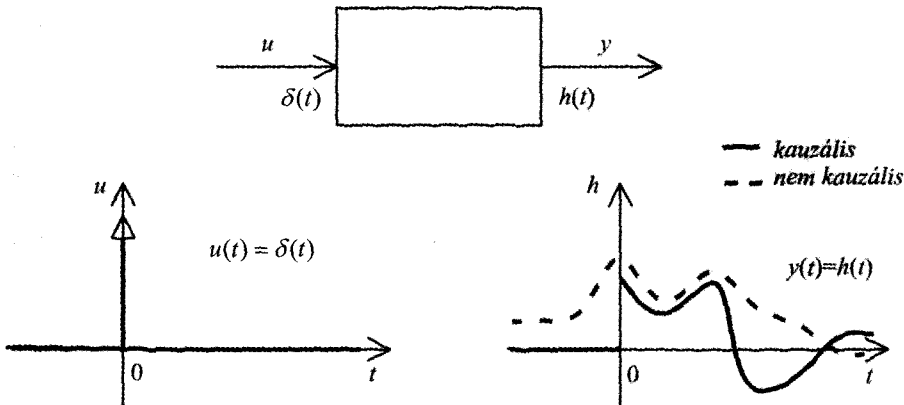
2.1-2.1. Az impulzusválasz definíciója

Megadjuk a FI rendszer impulzusválaszának definícióját, majd bemutatjuk alkalmazását.

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszer $h = h(t)$ impulzusválasza a rendszernek a Dirac-impulzus gerjesztéshez tartozó válasza (2. ábra):

$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t). \quad (2.1-14)$$

A DI és a FI rendszerek impulzusválaszának sok hasonló tulajdonsága van. Például $h = \mathcal{W}\{\delta\}$ érvényes mindkét esetben (2.1-1.1. pont). Viszont míg a $\delta[k]$ egységimpulzus egy „közönséges” DI függvény, a $\delta(t)$ Dirac-impulzus nem „közönséges” FI függvény.



2.1-2. ábra Folytonos idejű rendszer impulzusválasza a rendszernek a Dirac-impulzus gerjesztéshez tartozó válasza

A lineáris, invariáns, folytonos idejű rendszer akkor és csak akkor *kauzális*, ha impulzusválasza belépő jel, vagyis $h(t) = 0, t \in \mathbf{R}_-$ tulajdonságú.

Nem részletezzük e kézenfekvő állítás igazolását.

A FI impulzusválasz mérésekor nem gerjeszthetjük az objektumot Dirac-impulzussal, legfeljebb egy azt közelítő lefolyású változóval. A mérés eredménye is csak közelítése a FI impulzusválasznak, a közelítés t kis értékeire nem lehet jó.

Elméletileg egyre rövidebb és egyre nagyobb amplitúdójú impulzusokkal közelíthetjük a Dirac-impulzust. Az amplitúdó azonban nem növelhető korlátlanul, mert a

linearitás feltételezése nem lesz jogos. Ha viszont az amplitúdót állandó értéken tartva csökkentjük az impulzus hosszát, akkor a betáplált energia egyre kisebb lesz és a zajok egyre jobban torzítják a mérés eredményét. Egyesek nem tartják korrektné („proper”) modellnek az olyan rendszert, amelynek impulzusválasza Dirac-impulzust tartalmaz, hiszen ez csak akkor lép fel, ha a jel terjedéséhez szükséges idő nulla.

Míg egy FIR típusú DI rendszer könnyen megvalósítható digitális objektummal, ez nem áll FIR típusú FI rendszerekre, amelyek csak nehezen valósíthatók meg.

A FI rendszerek közül az időtartományban a további fejezetekben csak később definiálandó differenciális rendszerek rendszeregyenletének és állapotváltozós leírásának tárgyalására szorítkozunk. A frekvencia- és a komplex frekvenciatartományban ez a megszorítás nem szükséges.

2.1-2.2. A válasz számítása

Meg akarjuk határozni egy $h(t)$ impulzusválaszú FI rendszernek az adott $u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y(t)$ választ.

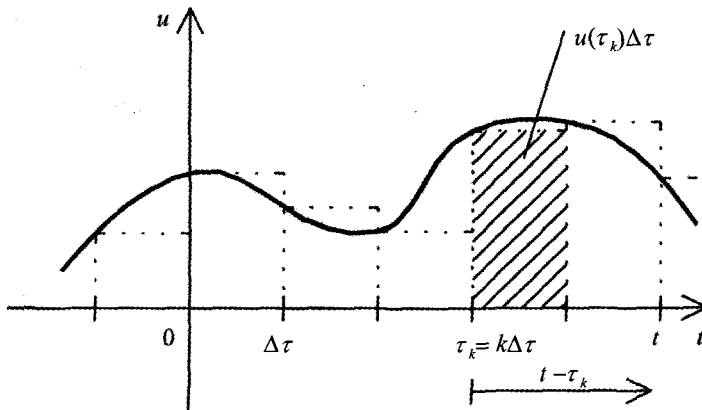
Közelítjük meg a gerjesztést szakaszonként állandó függvénnyel (3. ábra):

$$u(t) \approx u(\tau_k), \quad \tau_k < t < \tau_{k+1}; \quad \tau_k = k \cdot \Delta\tau, \quad k \in \mathbf{Z}$$

A $t = \tau_k$ időpontban belépő, $\Delta\tau$ hosszúságú, $u(\tau_k)$ amplitúdójú, vagyis $u(\tau_k)\Delta\tau$ intenzitású gerjesztéshez tartozó, t időpontbeli $y(t)$ válasz közelítő kifejezése $u(\tau_k)\Delta\tau \cdot h(t - \tau_k)$, ahol $t - \tau_k$ az eltelt idő. Az $y(t)$ közelítő értéke az ilyen tagok szuperpozíciója:

$$y(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(\tau_k)\Delta\tau \cdot h(t - \tau_k).$$

Minél kisebb $\Delta\tau$, annál kisebb a közelítés hibája. A $\Delta\tau \rightarrow 0$ határértéket képezve az összeg egy integrálhoz konvergál.



2.1-3. ábra A gerjesztés közelítése szakaszonként állandó függvénnyel

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns és $h = h(t)$ impulzusválaszú rendszernek az $u = u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y = y(t)$ válaszának kifejezése:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2.1-15)$$

Ezt a $h(t)$ és $u(t)$ jelek *konvolúciójának* nevezik. A FI konvolúció szimbolikus alakja

$$y(t) = h(t) * u(t). \quad (2.1-16)$$

Ennek jelentését a (15) adja. A (16) az $y = \mathcal{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolat egy konkrét alakja.

Az Olvasó is beláthatja, hogy a konvolúció kommutatív, asszociatív és az összeadásra disztributív művelet. A $h * u$ konvolúcióról belátható, hogy létezik, ha h és u egyike korlátos, másika abszolút integrálható; még akkor is folytonos, ha h és u egyaránt ugrásos; abszolút integrálható, ha h és u egyaránt abszolút integrálható.

A válasz kifejezésének egy másik alakjához juthatunk a $\mathcal{G} = t - \tau$ új integrációs változó bevezetésével:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathcal{G})u(t-\mathcal{G})d\mathcal{G}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2.1-17)$$

Ha a rendszer *kauzális*, akkor h belépő jel és ekkor

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau \equiv \int_{-0}^{\infty} h(\mathcal{G})u(t-\mathcal{G})d\mathcal{G}, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (2.1-18)$$

Kauzális rendszer és belépő gerjesztés esetén a következő alakhoz jutunk:

$$y(t) = \int_{-0}^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau = \int_{-0}^t h(\mathcal{G})u(t-\mathcal{G})d\mathcal{G}, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (2.1-19)$$

Az integrál -0 alsó határa azt fejezi ki, hogy ha akár $h(t)$, akár $u(t)$ tartalmaz $\delta(t)$ összetevőt, akkor azt figyelembe kell venni az integrálás során. A gyakorlati esetek többségében a (19) alakok használhatók. Az általános (15) és (17) alakok nem kauzális (fizikailag nem realizálható) rendszerekre is érvényesek.

Az impulzusválaszt súlyfüggvénynek is nevezik, mivel $h(t-\tau)$ megadja $u(\tau)$ súlyát $y(t)$ kifejezésében.

A konvolúció számítása zárt alakban viszonylag könnyű, ha h és u egyaránt egyszerű függvény (például exponenciális, szinuszos, polinomiális függvény, ezek összege és szorzata). Némi figyelemre van szükség a számítás során, ha a gerjesztés szakaszonként elemi függvény alakjában adott.

Gyakran szükséges vagy előnyös a konvolúció *numerikus* közelítő számítása. Szorítkozzunk kauzális rendszerre és belépő gerjesztésre. A (19) értelmében

$$y(t_k) = \int_0^{t_k} h(t_k - \tau)u(\tau) d\tau, \quad t_k \in \mathbf{R}_+. \quad (2.1-20)$$

Ha kiszámítjuk ezeket az értékeket kellően sűrűre választott t_1, t_2, \dots, t_n időpontokra, akkor $y(t)$ ismertnek tekinthető. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor $h(t)$ és $u(t)$ egyaránt függvény (nem tartalmaznak Dirac-impulzust). Közelítsük e függvényeket a következő lépcsős függvényekkel:

$$u(t) \approx u(kT), \quad h(t) \approx h(kT), \quad kT < t < kT + T, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ahol T kellően kis időköz. Ekkor például a válasz közelítő kifejezése

$$y(0) = 0; \quad y(kT) \approx T \sum_{i=0}^{k-1} h(kT - iT) u(iT), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1-21)$$

Alkalmazhatunk természetesen pontosabb integrációs eljárásokat (például a trapéz szabályt vagy a Simpson-szabályt). Minél kisebb T értéket választunk, annál kisebb a közelítés hibája, de annál több számítási munkára van szükség egy megválasztott $(0, t_n)$ intervallumban. Javíthatjuk az eljárás hatékonyságát adaptíven választott időközök alkalmazásával is.

1. példa Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t) = C \delta(t) + \alpha A \varepsilon(t) e^{-\alpha t}.$$

Határozzuk meg a rendszer válaszát, ha gerjesztése $u(t) = \varepsilon(t)[1 - e^{-\beta t}]$.

A rendszer kauzális, ezért a belépő gerjesztéshez tartozó válasza ugyancsak belépő, tehát $y(t) = 0$, ha $t \in \mathbf{R}_-$. Ha $t \in \mathbf{R}_+$, akkor (19) értelmében

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-0}^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t [C \delta(t-\tau) + \alpha A e^{-\alpha(t-\tau)}] [1 - e^{-\beta\tau}] d\tau = \\ &= C \int_0^t \delta(t-\tau) [1 - e^{-\beta\tau}] d\tau + \alpha A e^{-\alpha t} \int_0^t [e^{\alpha\tau} - e^{(\alpha-\beta)\tau}] d\tau, \quad t \in \mathbf{R}_+. \end{aligned}$$

Az első, illetve a második integrált jelölje I_1 , illetve I_2 , ahol

$$\begin{aligned} I_1 &= [1 - e^{-\beta\tau}]_{\tau=0}^t = 1 - e^{-\beta t}; \\ I_2 &= \frac{1}{\alpha} [e^{\alpha t} - 1] - \frac{1}{\alpha - \beta} [e^{(\alpha-\beta)t} - 1], \quad \alpha \neq \beta; \quad I_2 = \frac{1}{\alpha} [e^{\alpha t} - 1] - t, \quad \alpha = \beta. \end{aligned}$$

A válasz kifejezése némi rendezés után

$$\begin{aligned} y(t) &= \varepsilon(t) \left[C + A - \left(C + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} A \right) e^{-\beta t} + \frac{\beta}{\alpha - \beta} A e^{-\alpha t} \right], \quad \beta \neq \alpha, \quad t \in \mathbf{R}; \\ y(t) &= \varepsilon(t) [C + A - (C + A + A \alpha t) e^{-\alpha t}], \quad \beta = \alpha, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Ha $A = 0$, azaz ha $h(t) = C \delta(t)$, akkor $y(t) = C u(t)$ adódik, ami a helyes eredmény. #

2. példa Egy rendszer impulzusválasza

$$h(t) = \alpha A \varepsilon(t) e^{-\alpha t}.$$

Határozzuk meg a rendszer válaszát, ha gerjesztése

$$u(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] e^{-\beta t}, \quad T > 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Ha $t < 0$, akkor $y(t) = 0$. Ha $0 < t < T$, akkor az előző példa értelmében

$$y(t) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} A e^{-\beta t} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} A e^{-\alpha t}.$$

Ha $t > T$, akkor az integrál felső határául T írandó (hiszen ez után a gerjesztés nulla) és

$$y(t) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} A [e^{(\alpha - \beta)T} - 1] e^{-\alpha t}.$$

A válasz végső kifejezése némi rendezés után

$$y(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] \frac{\alpha}{\alpha - \beta} A [e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}] + \varepsilon(t-T) [e^{-\beta T} - e^{-\alpha T}] e^{-\alpha(t-T)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Az $\alpha = \beta$ speciális eset vizsgálatát az Olvasóra bizzuk. #

3. példa Határozzuk meg az előző példában megadott impulzusválaszú rendszer választát, ha gerjesztése $u(t) = \varepsilon(t) \cos \omega t$.

A konvolúciós integrál számítása nem jelent különösebb nehézséget. Felhasználhatjuk azonban az előző példa eredményét, hiszen $t \in \mathbf{R}_+$ esetén

$$\text{ha } u_1(t) = \varepsilon(t) e^{j\omega t}, \text{ akkor } y_1(t) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega} A (e^{j\omega t} - e^{-\alpha t}).$$

Felhasználva, hogy $\cos \omega t \equiv (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$, azt kapjuk, hogy $t \in \mathbf{R}_+$ esetén

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\alpha}{\alpha + j\omega} A (e^{j\omega t} - e^{-\alpha t}) + \frac{\alpha}{\alpha - j\omega} A (e^{-j\omega t} - e^{-\alpha t}) = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} A [(\alpha - j\omega) e^{j\omega t} + (\alpha + j\omega) e^{-j\omega t} - 2\alpha e^{-\alpha t}]. \end{aligned}$$

Elemi átalakítások után a következő végeredményhez jutunk:

$$y(t) = \varepsilon(t) \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} A \left[\cos \omega t + \frac{\omega}{\alpha} \sin \omega t - \alpha e^{-\alpha t} \right], \quad t \in \mathbf{R}.$$

A zárójelben álló első két tag $b \cos(\omega t + \rho)$ alakban összevonható. #

4. példa Oldjuk meg az előző feladatot, ha a rendszer gerjesztése az $u(t) = e^{\beta t}$ nem belépő jel.

A (18) alakot használva

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \alpha A e^{-\alpha(t-\tau)} e^{\beta\tau} d\tau = \alpha A e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{(\alpha+\beta)\tau} d\tau.$$

Az integrálnak csak akkor van véges értéke, ha $\alpha + \beta > 0$. Ekkor a válasz kifejezése

$$y(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} A e^{\beta t}, \quad \alpha > -\beta, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Fizikailag csak a $\beta \geq 0$ eset értelmezhető $t \rightarrow -\infty$ esetén is. #

5. példa Egy FI rendszer impulzusválasza és gerjesztése

$$h(t) = \alpha A \varepsilon(t) e^{-\alpha t}, \quad u(t) = \varepsilon(t) e^{-\beta t}; \quad \alpha \neq \beta.$$

Határozzuk meg a választ pontosan és közelítőleg is.

A válasz pontos kifejezése a 2. példa részeredménye értelmében

$$y(t) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} A \varepsilon(t) [e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}].$$

A válasz értéke a $t_k = kT$ időpontokban $y(kT) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} A [e^{-\beta T k} - e^{-\alpha T k}]$, $k \in \mathbf{N}$.

A közelítő megoldás a (21) értelmében

$$y_1(kT) = T \sum_{i=0}^{k-1} \alpha A e^{-\alpha(kT-iT)} e^{-\beta iT} = \alpha T A e^{-\alpha kT} \sum_{i=0}^{k-1} (e^{\alpha T - \beta T})^i = \alpha T A e^{-\alpha kT} \frac{e^{(\alpha T - \beta T)k} - 1}{e^{(\alpha T - \beta T)} - 1}.$$

Az elsőként számított közelítés végső alakja

$$y_1(kT) = \alpha T A \frac{e^{-\beta T k} - e^{-\alpha T k}}{e^{(\alpha - \beta)T} - 1}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

E nagyon egyszerű példában a közelítés arányos a pontos eredménnyel:

$$y_1(kT) = C_1 y(kT); \quad C_1 = \frac{m}{e^m - 1}, \quad m \equiv (\alpha - \beta)T.$$

Az arányossági tényező annál közelebb van az 1 értékhez, minél kisebb $|m|$ értéke, azaz minél kisebb T időközot választunk. Ha például $m = 0,1$, akkor $C_1 = 0,951$, ha $m = -0,1$, akkor $C_1 = 1,051$, vagyis a relatív hiba mintegy 5 %. #

2.1-2.3. Gerjesztés-válasz stabilitás

Az 1.2-2.5. szakaszban már megadtuk a gerjesztés-válasz (GV) stabilitás definícióját. Az impulzusválasz ismeretében adhatunk jobban használható feltételt is. További rendszerleírások ismeretében további feltételekkel is meg fogunk ismerkedni.

A folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor *gerjesztés-válasz stabilis* (azaz bármely korlátos gerjesztéshez korlátos válasz tartozik), ha impulzusválasza abszolút integrálható:

$$\text{GV stabilis rendszer} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty. \quad (2.1-22)$$

Ennek egy szükséges (és a gyakorlati esetek többségében elegendő) feltétele

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow h(t) \rightarrow 0. \quad (2.1-23)$$

Ez a helyzet, ha $h(t)$ a végtelenben nullához tartó exponenciális függvénnyel majorálható.

Kauzális rendszer impulzusválasza belépő jel. Ekkor (22)-ben az integrál alsó határa ténylegesen $t = -0$.

A *stabilitás határhelyzetében* lévőnek nevezhető az olyan nem GV stabilis FI rendszert, amelynek impulzusválasza nem abszolút integrálható, de korlátos. Az ilyen rendszer válasza csak bizonyos gerjesztések esetén nem korlátos. Ha például $t \rightarrow \infty$ esetén $h(t)$ állandó értékhez tart, akkor $y(t)$ csak olyan korlátos $u(t)$ esetén nem korlátos, amely ugyancsak állandóhoz tart. Szokás *labilis rendszernek* nevezni az olyan nem GV stabilis rendszert, amelyik nincs a GV stabilitás határhelyzetében.

Azok a megjegyzések, amelyeket a 2.1-1.3. pontban DI rendszerekkel kapcsolatban tettünk, érvényesek a FI rendszerekre is (véges impulzusválaszú FI rendszerek azonban ritkán fordulnak elő). Ugyanez vonatkozik az állítás igazolására is. Ezeket itt nem ismételjük meg.

1. példa Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t) = \varepsilon(t) e^{\alpha t} \cos \omega t \equiv \mathcal{R}_e \{ \varepsilon(t) e^{p t} \}; \quad p \equiv \alpha + j\omega.$$

A rendszer GV stabilis, ha $\mathcal{R}_e \{ p \} \equiv \alpha < 0$. Ekkor nem csak (23) teljesül, hanem mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha < 0,$$

ezért (22) is ki van elégítve. Nyilvánvaló, hogy a

$$h(t) = \varepsilon(t) \{ A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} \}$$

impulzusválaszú rendszer akkor és csakis akkor GV stabilis, ha minden $\mathcal{R}_e \{ p_i \} < 0$ teljesül. A komplex p_i értékek csak konjugált párokban fordulhatnak elő. #

***2. példa** Az $y = u'$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatú differenciáló rendszer impulzusválasza nyilvánvalóan $h(t) = \delta'(t)$. A Dirac-impulzus deriváltjának egy közelítő kifejezése

$$\delta'(t) \approx \frac{\delta(t) - \delta(t-T)}{T} \approx \frac{[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T/2)] - [\varepsilon(t-T/2) - \varepsilon(t)]}{T(T/2)}, \quad T \ll T_0.$$

Az $|\delta'(t)|$ integráljának közelítő értéke ennek alapján $2/T$. Ez minden határon túl nő, ha T nullához tart. A (22) értelmében a differenciáló rendszer nem GV stabilis, megegyezésben korábbi megállapításunkkal (1.2-2.5. pont). #

2.1-2.4. Az ugrásválasz és alkalmazásai

A lineáris rendszer válasza nem csak impulzusválaszának ismeretében határozható meg, hanem bármely adott gerjesztéshez tartozó válaszában is. Itt csak a legegyszerűbb és leggyakrabban használt általánosítást tárgyaljuk.

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszer $g = g(t)$ ugrásválasza a rendszernek az egységugrás gerjesztésre adott válasza:

$$u(t) = \varepsilon(t) \Rightarrow y(t) = g(t). \quad (2.1-24)$$

Kauzális rendszer ugrásválasza belépő jel: $g(t) = 0, t \in \mathbf{R}_-$.

Az impulzusválasz arról ad felvilágosítást, hogy miként viselkedik a rendszer válasza a gerjesztés megszűnése után. Az ugrásválasz azt adja meg, hogy miként viselkedik a rendszer válasza, ha gerjesztése egy bizonyos idő után állandó marad.

A g ugrásválasz kifejezése a h impulzusválasz ismeretében a (17) értelmében

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau. \quad (2.1-25)$$

Ebből következően a h impulzusválasz a g ugrásválasz általánosított deriváltja:

$$h(t) = g'(t). \quad (2.1-26)$$

Kauzális rendszer esetén (25)-ben az integrálás alsó határaként $\tau = -0$ is írható.

A továbbiakban arra a tipikus esetre szorítkozunk, amikor a kauzális rendszer ugrásválasza mindenütt folytonos, kivéve a $t = 0$ helyet, ahol véges ugrása lehet, vagyis általános alakja $g(t) = \varepsilon(t) f(t)$ és $f(t)$ differenciálható függvény. Ennek ismeretében az impulzusválasz kifejezése

$$g(t) = \varepsilon(t) f(t) \Rightarrow h(t) = f(0) \delta(t) + \varepsilon(t) f'(t), \quad (2.1-27)$$

ahol az $f'(t)$ egy függvény (nem tartalmaz Dirac-impulzus összetevőt). Az összefüggés akkor hasznos, amikor az ugrásválasz számítása vagy mérése egyszerűbb, mint az impulzusválaszé.

A tetszőleges u gerjesztéshez tartozó y válasz kifejezése az ugrásválasz ismeretében (17) értelmében a (26) felhasználásával

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g'(t - \tau) u(\tau) d\tau. \quad (2.1-28)$$

Kauzális rendszer esetén ez (27) értelmében így is írható:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \{f(0) \delta(t - \tau) + \varepsilon(t - \tau) f'(t - \tau)\} u(\tau) d\tau.$$

Ezek szerint a válasz kifejezése *kauzális* rendszer esetén:

$$g(t) = \varepsilon(t) f(t) \Rightarrow y(t) = f(0) u(t) + \int_{-\infty}^t f'(t - \tau) u(\tau) d\tau. \quad (2.1-29)$$

Ezt az összefüggést nevezik *Duhamel* tételének is. Más alakjai is használatosak (például olyan, amelyben u deriváltja szerepel).

A továbbiakban a rendszer jellemzésére az ugrásválaszt nem fogjuk használni.

2.1-2.F. Feladatok

F-1. Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t) = \varepsilon(t) [8 e^{-0,5t} - 4 e^{-0,1t}].$$

Határozza meg a rendszer $y(t)$ válaszát, ha a rendszer gerjesztése:

$$(a) u(t) = \varepsilon(t). \quad (b) u(t) = \varepsilon(t)[1 - e^{-0,3t}]. \quad (c) u(t) = \varepsilon(t)e^{-0,5t}.$$

$$(d) u(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2). \quad (e) u(t) = [1 - \varepsilon(t)] + 2\varepsilon(t).$$

F-2. Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t) = 3\delta(t) + \varepsilon(t)[8e^{-0,5t} - 4e^{-0,1t}].$$

Határozza meg a rendszer $y(t)$ válaszát, ha gerjesztését az előző feladatban adott (a) - (e) szerinti $u(t)$ jel írja le!

F-3. Egy FI rendszer ugrásválasza

$$g(t) = \varepsilon(t)e^{pt}.$$

Határozza meg e rendszer $h(t)$ impulzusválaszát!

***F-4.** Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t) = e^{\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

Határozza meg e rendszer $g(t)$ ugrásválaszát!

F-5. Egy FI rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolata

$$(a) y(t) = u(t-T). \quad (b) y(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau.$$

$$(c) y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(\tau) d\tau, T > 0. \quad (d) y(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(\tau) d\tau, T > 0.$$

Határozza meg a rendszer impulzusválaszát! Milyen tulajdonságú a rendszer (kauzális, lineáris, invariáns, GV stabilis)?

***F-6.** Egy FI rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolata

$$(a) y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau. \quad (b) y(t) = T u'(t). \quad (c) y(t) = u^2(t).$$

Határozza meg a rendszer impulzusválaszát!

Milyen tulajdonságú a rendszer (kauzális, lineáris, invariáns, GV stabilis)?

F-7. Egy FI rendszer impulzusválasza $h_1(t)$. E rendszer $y_1(t)$ válasza egy $h_2(t)$ impulzusválaszú rendszer $u_2(t)$ gerjesztése. Ez az elrendezés a két részrendszer kaskád kapcsolása (nevezik soros kapcsolásnak is).

Adja meg az $u = u_1$ gerjesztésű és $y = y_2$ válaszú rendszer h impulzusválaszát h_1 ismeretében!

Megváltozik-e h kifejezése, ha a két részrendszert felcseréljük?

***F-8.** Egy lineáris, invariáns, FI rendszer gerjesztése és a hozzá tartozó válasz egyaránt ismert:

$$u(t) = \varepsilon(t) e^{-\alpha t}, \quad y(t) = \varepsilon(t) [A e^{-\alpha t} + B e^{-\beta t}].$$

Határozza meg a rendszer impulzusválaszát!

F-9. Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t) = \varepsilon(t) [A + t]^C, \quad A \neq 0.$$

Határozza meg C azon értéktartományát, amelyben a rendszer GV stabilis!

2.1-2.6. Megoldások

M-1. Az (a) - (d) esetekre $y(t) = \varepsilon(t) \int_0^t [8 e^{-0,5(t-\tau)} - 4 e^{-0,1(t-\tau)}] u(\tau) d\tau, t > 0.$

$$(a) y(t) = \varepsilon(t) [-24 - 16 e^{-0,5t} + 40 e^{-0,1t}].$$

$$(b) y(t) = \varepsilon(t) [-24 - 60 e^{-0,3t} + 24 e^{-0,5t} + 60 e^{-0,1t}].$$

$$(c) y(t) = \varepsilon(t) [10 e^{-0,5t} + 8 t e^{-0,5t} - 10 e^{-0,1t}].$$

$$(d) y(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)] [-24 - 16 e^{-0,5t} + 40 e^{-0,1t}] + \\ + \varepsilon(t-2) [16 (1-e^{-1}) e^{-0,5(t-2)} - 40 (1-e^{-0,2}) e^{-0,1(t-2)}].$$

$$(e) u(t) = 1 + \varepsilon(t) \Rightarrow y(t) = -24 [1 - \varepsilon(t)] + \varepsilon(t) [-48 - 16 e^{-0,5t} + 40 e^{-0,1t}].$$

M-2. Jelölje $y_1(t)$ az előző feladat megoldását. Ekkor $y(t) = 3u(t) + y_1(t)$. Célszerű az egyforma exponenciális függvényeket összevonni.

$$\mathbf{M-3.} \quad h(t) = \{\varepsilon(t) e^{pt}\}' = \delta(t) + p \varepsilon(t) e^{pt}.$$

***M-4.** A rendszer nem kauzális és nem GV stabilis! $g(t) = \int_{-\infty}^t e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}; \alpha > 0.$ Ha α negatív vagy nulla, akkor az impulzusválasz és az ugrásválasz értelmetlen.

M-5. Az impulzusválasz $u(t) = \delta(t)$ helyettesítéssel adódik. Mindegyik lineáris, invariáns.

$$(a) h(t) = \delta(t - T); \text{ kauzális, ha } T \geq 0, \text{ (ekkor késleltető), GV stabilis.}$$

$$(b) h(t) = \varepsilon(t) / T; \text{ kauzális, nem GV stabilis; integrátor.}$$

$$(c) h(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\} / T; \text{ kauzális, GV stabilis; csúszó átlag képző.}$$

$$(d) h(t) = \{\varepsilon(t + T) - \varepsilon(t)\} / T; \text{ nem kauzális, GV stabilis; csúszó átlag képző.}$$

***M-6.** (a) A rendszer kauzális, lineáris, nem invariáns (az integrál alsó határa miatt, az ilyen rendszer impulzusválaszát nem értelmeztük), nem GV stabilis. (b) A rendszer kauzális, lineáris, invariáns, nem GV stabilis, $h(t) = \delta'(t)$ ami egy szokatlan jel. (c) A rendszer kauzális, nem lineáris (impulzusválasza nem értelmezett), invariáns, GV stabilis.

M-7. Mivel $y = y_2 = h_2 * u_2 = h_2 * y_1 = h_2 * (h_1 * u_1) = h_2 * h_1 * u$, ezért $h = h_2 * h_1$. Mivel a konvolúció kommutatív művelet, ezért a részrendszerek felcserélése ugyanazt az impulzusválaszt eredményezi.

***M-8.** Az ismert $y(t)$ választ (például egy mérés eredményének közelítő függvényét) differenciáljuk az idő szerint. Az $y(t)$ kifejezését is felhasználva

$$\int_0^t h(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \varepsilon(t) [A e^{-\alpha t} + B e^{-\beta t}] \Rightarrow h(t) = [A + B] \delta(t) + [\alpha - \beta] B \varepsilon(t) e^{-\beta t}.$$

***M-9.** Az $|h(t)| = h(t)$ integrálása nem jelent nehézséget. Az integrál akkor véges, vagyis a rendszer akkor GV stabilis, ha $C > 1$. Az $A \neq 0$ kikötés lényeges!

2.2. A rendszeregyenlet

A rendszeregyenlet a vizsgált rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának egy implicit alakja. A rendszeregyenletben fellép a gerjesztés, a válasz, valamint általuk meghatározott további változók (például a DI késleltetett gerjesztés vagy válasz, a FI gerjesztés vagy válasz deriváltja).

A rendszeregyenlet a rendszer jellemzésének egy kézenfekvő eszköze. Egyes szakterületeken (például gazdasági folyamatok modellezésére) elterjedten használják is, különösen DI modellekre.

A rendszeregyenlet meghatározása többnyire nem egyszerű feladat akár a modellezendő objektum, akár az objektum hálózati reprezentációjának ismeretében.

A DI rendszeregyenlet ismeretében az adott gerjesztéshez tartozó válasz numerikus meghatározása nagyon egyszerű. A DI és különösen az FI rendszeregyenlet alapján az adott gerjesztéshez tartozó válasz formulájának előállítására csak nagyon egyszerű gerjesztés esetén kényelmes, az eljárás nehezen algoritmizálható. A következő fejezetben a rendszer időtartománybeli leírásának egy célszerűbb módszerét fogjuk tárgyalni, amely azonban segédváltozók (az állapotváltozók) bevezetését igényli, ezért fogalmilag bonyolultabb a rendszeregyenletnél.

Ebben a fejezetben egyszerű feladatok megoldására szorítkozunk. A 3. és 4. részben a rendszeregyenlet előállítására és megoldására az itt tárgyalandónál hatékonyabb módszereket fogunk tárgyalni (frekvenciatartománybeli és komplex frekvenciatartománybeli eljárások).

A 2.2-1. szakaszban tárgyaljuk az alapfogalmakat. Itt értelmezzük a lineáris, invariáns, kauzális (és FI esetben: differenciális) rendszer rendszeregyenletét. A továbbiakban ennek a típusnak a vizsgálatára szorítkozunk. Megmutatjuk, hogy a DI rendszeregyenlet numerikus megoldása nagyon egyszerű.

A 2.2-2. szakaszban két módszert mutatunk a rendszeregyenletével leírt rendszer adott gerjesztéshez tartozó válaszában számítására. Az első lehetőség a rendszeregyenletből az impulzusválasz meghatározása, amelynek ismeretében a válasz az előző fejezetben tárgyalt módon számítható. A második lehetőség a válasz felbontása szabad és gerjesztett összetevőjére. E módszernek főként az elvi jelentősége lényeges, számítástechnikailag csak egyszerű függvényvel leírható gerjesztés esetén hasznos.

A 2.2-3. szakaszban a rendszer gerjesztés-válasz stabilitásának vizsgálatát tárgyaljuk a rendszeregyenlet ismeretében. Elegendő feltételt adnunk a rendszeregyenlet ismeretében a rendszer GV stabilitásának eldöntésére a rendszer impulzusválaszában számítása nélkül is.

2.2-1. A rendszeregyenlet fogalma

2.2-1.1. A rendszeregyenlet általános alakja

Tekintsünk egy olyan kauzális DI illetve kauzális, differenciális (vagyis differenciálegyenlettel leírható) FI rendszert, amelynek egyetlen $u = u[k]$ illetve $u = u(t)$ gerjesztése és egyetlen $y = y[k]$ illetve $y = y(t)$ válasza van (SISO rendszer).

A fenti típusú rendszerre a *rendszeregyenlet* explicit alakja megadja $y[k]$ kifejezését $y[p]$, $p < k$ és $u[p]$, $p \leq k$ segítségével, illetve $y(t)$ kifejezését $y^{(i)}(t)$ és $u^{(i)}(t)$ segítségével $i=1, 2, \dots, N$.

Itt $y^{(i)}$ és $u^{(i)}$ a válasz és a gerjesztés i -edik (általánosított) deriváltját jelöli.

Egy *lineáris* rendszer rendszeregyenletének explicit alakja

$$\text{DI: } y[k] = \mathcal{H}_u\{u[k]\} + \mathcal{H}_y\{y[k]\}; \quad \text{FI: } y(t) = \mathcal{H}_u\{u(t)\} + \mathcal{H}_y\{y(t)\}. \quad (2.2-1)$$

A \mathcal{H} operátorok lineárisak. Ha kauzális rendszerekre szorítkozunk, akkor az operátorokra további megszorítások vonatkoznak.

A továbbiakban olyan *lineáris* rendszerek tárgyalására szorítkozunk, amelyek diszkrét idejű esetben *lineáris differenciaegyenlettel*, folytonos idejű esetben *lineáris differenciálegyenlettel* leírhatók (utóbbiak a *differenciális* FI rendszerek). Ha a rendszer *invariáns*, akkor a differenciaegyenlet, illetve a differenciálegyenlet állandó együtthatós (az együtthatók nem függenek a k illetve a t időtől). A „differenciális” megszorítás azzal a következménnyel jár, hogy a FI gerjesztés és válasz késleltetett értékei nem fordulhatnak elő a rendszeregyenletben, holott ezek kizárása fizikailag nem indokolt.

Ezekkel a megszorításokkal a rendszeregyenlet a rendszernek egy *parametrikus* leírása, a paraméterek az egyenlet együtthatói. (Az impulzusválasz nem parametrikus leírása a rendszernek, amíg nem teszünk kikötéseket a megengedett függvényekre.)

2.2-1.2. A diszkrét idejű rendszeregyenlet

Egy u gerjesztésű, y válaszáú, diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer *rendszeregyenlete*

$$y[k] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m] - a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - \dots - a_n y[k-n], \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (2.2-2)$$

Az n természetes szám a rendszeregyenlet *rendszám*a. A rendszám lehet nulla is. (A rendszert jellemző másik rendszámmal később fogunk megismerkedni. A két módon értelmezett rendszám többnyire megegyezik.)

Alkalmazzuk az $y^{(i)}[k] = y[k-i]$ jelölést, akkor a rendszeregyenlet egy tömörebb és egyben szokásosabb formára rendezett alakja

$$y + \sum_{i=1}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)}. \quad (2.2-3)$$

A válasz (2) vagy (3) szerinti kifejezésében a $b_i u[k-i]$ tagok összege a gerjesztés k ütembeli és előző értékeinek súlyozott *mozgó átlagát* (MA) fejezi ki, míg az $a_i y[k-i]$ tagok összege a válasz k ütem előtti értékeinek súlyozott mozgó átlaga által okozott visszahatást vagy *autoregressziót* (AR) fejezi ki. Általában a rendszer ARMA típusú („auto regressive, moving average”). Ha speciálisan minden $a_i = 0$ ($n = 0$), akkor a rendszer MA típusú; ekkor a rendszeregyenlet egyúttal a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakja is, tehát megoldásával nem is kell foglalkozni.

Az MA típusú rendszer egyúttal FIR típusú (véges impulzusválaszú) is. Speciális feltételek teljesülése esetén lehet FIR típusú olyan rendszer is, amelynek rendszeregyenlete nem MA típusú. Ennek okát később látni fogjuk (redukálható átviteli függvény; 4.2-1.2. pont).

Többnyire csak $k \in \mathbf{N}$ (azaz $k = 0, 1, 2, \dots$) esetére keressük $y[k]$ értékét. Ehhez ismernünk kell a válasz n számú $y[0], y[1], \dots, y[n-1]$ *kezdeti értékét*. Ezek összességét kezdeti feltételeknek is nevezik.

A kezdeti értékek meghatározása akkor a legegyszerűbb, ha a gerjesztés belépő, mert ekkor - a kauzalitás következtében - a válasz is belépő, vagyis

$$u[k] = 0, k \in \mathbf{Z}_- \Rightarrow y[-1] = y[-2] = \dots = y[-n] = 0. \quad (2.2-4)$$

Ezeket nevezzük a válasz *kiindulási értékeinek*. Alább látni fogjuk, hogy a kiindulási értékekből már egyszerűen számíthatók (a lépésről lépésre módszerrel) a kezdeti értékek, amelyekre szükségünk van a rendszeregyenlet megoldásához.

Nem belépő gerjesztés esetén a kiindulási értékeket a rendszer „múltja” alapján kell meghatároznunk. Egy tipikus és egyszerű eset, amikor a gerjesztés $u[k] = u^-$ állandó ha $k \in \mathbf{Z}_-$. Ha a rendszer GV stabilis (lásd még a 2.2-3. szakaszt is), akkor $y[k] = y^-$ állandó ha $k \in \mathbf{Z}_-$. A (2)-ből ekkor behelyettesítés után következik, hogy

$$u[k] = u^-, k \in \mathbf{Z}_- \Rightarrow y[i] = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n} u^-; \quad i = -1, -2, \dots, -n. \quad (2.2-5)$$

Ha a gerjesztés $k = 0$ előtti értéke nem állandó, akkor a kiindulási értékek meghatározása bonyolultabb.

Ha a rendszer nem GV stabilis, akkor k véges negatív értékeire a válasz (kivételes esetektől eltekintve) nem véges, a megoldandó feladat értelmetlen. Gyakorlatilag ez nem GV stabilis rendszerekre még belépő gerjesztés esetén is így van, mert a nullának tekintett gerjesztés a valóságban nem tökéletesen nulla.

Egy másik eset, amikor a kiindulási értékekre szükségünk van, a következő. Legyen a gerjesztés intervallumonként adott, például

$$u[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-k_1]) f_1[k] + \varepsilon[k-k_1] f_2[k],$$

ahol f_1 és f_2 elemi DI függvények. Először meghatározzuk az $u[k] = \varepsilon[k] f_1[k]$ belépő gerjesztéshez tartozó $y[k]$ választ a $0 \leq k < k_1$ intervallumban nulla kiindulási értékekkel. A következő, esetünkben $k_1 \leq k < \infty$ intervallumbeli, az $u[k] = f_2[k]$ gerjesztéshez tartozó válasz meghatározásához szükségünk van az $y[k_1-1], y[k_1-2], \dots, y[k_1-n]$ kiindulási értékekre. Ezeket az előző megoldás helyettesítési értékei adják. Értelem szerinti az eljárás, ha a gerjesztés még több, elemi függvénnyel leírt szegmensből áll. Az eljárás elvileg egyszerű, de meglehetősen körülményes.

A rendszeregyenlet megoldásának két módszerét a következő szakaszokban fogjuk tárgyalni. Minden különös eljárás nélkül is meghatározhatjuk azonban a válasz értékét a $k = 0, 1, 2, \dots$ időpontokban fokozatos behelyettesítéssel, más néven a *lépésről lépésre* („step by step”) módszerrel.

Kezdjük a $k = 0$ értékkel

$$y[0] = b_0 u[0] + b_1 u[-1] + \dots + b_m u[-m] - a_1 y[-1] - a_2 y[-2] - \dots - a_n y[-n].$$

A $u[k]$ gerjesztés értékek ismertek, a kiindulási értékeket előzőleg meghatároztuk (belépő gerjesztés esetén mindegyik nulla), így $y[0]$ számítható. Hasonló módon kapjuk a válasz további értékeit:

$$\begin{aligned} y[0] &= b_0 u[0] + b_1 u[-1] + \dots + b_m u[-m] - a_1 y[-1] - a_2 y[-2] - \dots - a_n y[-n], \\ y[1] &= b_0 u[1] + b_1 u[0] + \dots + b_m u[1-m] - a_1 y[0] - a_2 y[-1] - \dots - a_n y[1-n], \\ y[2] &= b_0 u[2] + b_1 u[1] + \dots + b_m u[2-m] - a_1 y[1] - a_2 y[0] - \dots - a_n y[2-n], \dots \end{aligned} \quad (2.2-6)$$

Minden lépésnél csak előzőleg már számított $y[i]$ értékek szerepelnek a jobb oldalon. A meghatározandó tagok száma minden k esetén legfeljebb $n+m+1$. Emlékeztetőül: ha $y[k]$ értékét konvolúcióval számoljuk, akkor általános esetben $k+1$ tagot kell meghatározni.

Az eljárás nagyon egyszerű, igen alkalmas numerikus számításokra. A felhasználandó $u[k]$ értékeket elegendő numerikusan ismerni, nincs szükségünk formulára. Másrészt azonban többnyire nem egyszerű a válasz viselkedéséről általános megállapításokat tenni az adatsorozat ismeretében.

A lépésről lépésre módszer variáns rendszer esetén is alkalmazható, amikor a rendszeregyenlet kifejezését ugyancsak (2) adja, csak az $a_i = a_i[k]$, $b_i = b_i[k]$ együtthatók ekkor a k diszkrét idő ismert függvényei.

Példa Határozzuk meg annak a DI rendszernek az impulzusválaszát néhány ütemre, amelynek rendszeregyenlete

$$y[k] - y[k-1] + 0,24 y[k-2] = u[k] + 0,5 u[k-1] - 0,2 u[k-3].$$

Erre a rendszerre $n = 2$, vagyis a rendszeregyenlet másodrendű.

Esetünkben $u[k] = \delta[k]$, $y[k] = h[k]$, ezért

$$h[k] = \delta[k] + 0,5 \delta[k-1] - 0,2 \delta[k-3] + h[k-1] - 0,24 h[k-2].$$

Minden kiindulási érték nulla. Az impulzusválasz nulla, ha $k \in \mathbf{Z}_-$ és

$$\begin{aligned} h[0] &= 1 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0 - 0,2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 0,24 \cdot 0 = 1, \\ h[1] &= 1 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 - 0,2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 0,24 \cdot 0 = 1,5, \\ h[2] &= 1 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 - 0,2 \cdot 0 + 1 \cdot 1,5 - 0,24 \cdot 1 = 1,26, \\ h[3] &= 1 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 - 0,2 \cdot 1 + 1 \cdot 1,26 - 0,24 \cdot 1,5 = 0,70, \\ h[4] &= 1 \cdot 0,70 - 0,24 \cdot 1,26 = 0,3976, \\ &\vdots \end{aligned}$$

A továbbiakban az $u[k-i]$ által meghatározott minden tag nulla, mivel a gerjesztés véges hosszúságú. Az impulzusválasz azonban az autoregressziós hatás következtében nem azonosan nulla, a rendszer nem FIR típusú.

A numerikus eredmények alapján kézenfekvő feltételezni, hogy az impulzusválasz nullához tart, valószínűleg abszolút összegezhető is, de ebben még sok további $h[k]$ érték kiszámítása után sem lehetünk biztosak. #

2.2-1.3. A folytonos idejű rendszeregyenlet

Szorítkozzunk olyan FI rendszerek vizsgálatára, amelyek rendszeregyenlete olyan, hogy az $u(t)$ gerjesztés és az $y(t)$ válasz t időpont előtti hatása $y(t)$ értékére figyelembe vehető integráljukkal $-\infty$ és a vizsgált t időpont között. Az ilyen típusú rendszerek a *differenciális rendszerek*. Az elnevezés okát hamarosan látni fogjuk. Ezzel kizárunk például az $u(t-\tau)$ vagy az $y(t-\tau)$ alakú, ugyancsak a múltat figyelembe vevő tagokat.

Korábban bevezettük már a jel első, második, ... (általánosított) deriváltjára a következő jelölést:

$$x^{(1)}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad x^{(2)}(t) = \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad \dots \quad (2.2-7)$$

A jel első, második, ... integráljára vezessük be ezzel összhangban a következő jelölést

$$x^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau, \quad x^{(-2)}(t) = \int_{-\infty}^t x^{(-1)}(\tau) d\tau, \quad \dots \quad (2.2-8)$$

Sok gyakorlati esetben $x(t)$ nulla valamilyen időpont (rendszerint $t = 0$) előtt, ekkor az integrálás alsó határaként ez az időpont is választható.

Az u gerjesztésű, y válaszü, folytonos idejű, lineáris, invariáns, kauzális, differenciális rendszer rendszeregyenlete integrális alakban

$$y(t) = b_0 u(t) + b_1 u^{(-1)}(t) + \dots + b_n u^{(-n)}(t) - a_1 y^{(-1)}(t) - a_2 y^{(-2)}(t) - \dots - a_n y^{(-n)}(t). \quad (2.2-9)$$

Nem jelent megszorítást, hogy a fellépő integrálások számát a válaszra és a gerjesztésre egyezőnek választottuk, mert a „felesleges” tagokra az együththató nulla.

A rendszeregyenletnek ez az alakja ritkán használatos. Az integráloktól úgy szabadulhatunk meg, hogy differenciáljuk az egyenlet minden tagját n -szer a t idő szerint. Feltételezzük, hogy legalább általánosított értelemben $y(t)$ differenciálható n -szer és $u(t)$ is a szükséges számúszor. A (7) és (8) szerint n -szeri differenciálással $\{x^{(-i)}(t)\}^{(n)} = x^{(n-i)}(t)$ adódik. Szokásosan az ismeretlen választ és deriváltjait a bal oldalra rendezzük.

Az u gerjesztésű, y válaszü, folytonos idejű, lineáris, invariáns, kauzális, differenciális rendszer *rendszeregyenlete* a szokásos differenciális alakban

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y^{(1)}(t) + a_n y(t) = \\ = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_n u(t); \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (2.2-10)$$

Az n a rendszeregyenlet *rendszáma*.

A folytonos idejű rendszeregyenlet egy tömörebb alakja

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y^{(i)} = \sum_{i=0}^n b_{n-i} u^{(i)}. \quad (2.2-11)$$

A rendszeregyenletben bármelyik a_i vagy b_i együttható nulla is lehet.

A differenciális alakból $y^{(n)}(t)$ átrendezéssel kifejezhető. Ez úgy értelmezhető, hogy a válasz n -edik deriváltja kifejezhető a gerjesztéssel, a válasszal és annak deriváltjaival. Egy változónak azonban legfeljebb első vagy második deriváltjának adható fizikai tartalom (a változó „sebessége” és „gyorsulása”). Ez egy oka annak, hogy rendszerek leírására a FI rendszeregyenlet kettőnél nagyobb rendszám esetén ritkán használatos. Egy másik ok, hogy a szükséges kezdeti értékek meghatározása nagy rendszám esetén körülményes.

Példa Tekintsünk két, integrális alakú FI rendszeregyenletet:

$$(a) \quad y(t) + a_1 \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = b_0 u(t).$$

$$(b) \quad y(t) + a_1 \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = b_0 u(t) + b_2 \int_{-\infty}^t \left\{ \int_{-\infty}^{\theta} u(\tau) d\tau \right\} d\theta.$$

Az első egyenlet első, a második egyenlet második deriváltját képezve kapjuk a differenciális alakot:

$$(a) \quad y^{(1)}(t) + a_1 y(t) = b_0 u^{(1)}(t).$$

$$(b) \quad y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) = b_0 u^{(2)}(t) + b_2 u(t).$$

A (b) esetben értelmes lehet csak az első deriváltat képezni. Ekkor a rendszeregyenletben a válasznak csak az első deriváltja lép fel, a gerjesztésnek pedig az első deriváltja és első integrálja is. Ez azonban nem a (1) szerinti alak, mert abban nem szerepel sem a válasz, sem a gerjesztés integrálja. #

A válasz (9) szerinti kifejezésében a $b_i u^{(-i)}(t)$ tagok összege a gerjesztés előző értékeinek súlyozott *mozgó átlagát* (MA) fejezi ki, míg az $a_i y^{(-i)}(t)$ tagok összege a válasz előző értékeinek súlyozott *mozgó átlaga által okozott visszahatást* vagy *autoregressziót* (AR) fejezi ki. Általában a rendszer ARMA típusú („auto regressive, moving average”). Ha speciálisan minden $a_i=0$, akkor a rendszer MA típusú; ekkor a rendszeregyenlet n -szeres integrálás után egyúttal a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakja is, tehát megoldásával nem kell foglalkozni.

A differenciálást tartalmazó (10) alak alapján az MA, AR vagy ARMA elnevezések értelme nehezebben látható be.

A (9)-ből következik, hogy a rendszeregyenletben a gerjesztésnek legfeljebb annyiadik deriváltja szerepelhet, mint a válasznak. Az $y(t)=u^{(r)}(t)$ gerjesztés-válasz kapcsolatú rendszer ezek szerint nem tartozik a rendszerek itt tárgyalt osztályába.

A továbbiakban a rendszeregyenletnek a (10) vagy (11) alakjára hivatkozunk, noha a (9) fejezi ki a rendszeregyenlet valódi tartalmát.

A választ többnyire a $t \in \mathbf{R}_+$ (azaz a $0 < t < \infty$) intervallumban keressük. Ennek meghatározásához ismernünk kell az n számú $y(+0), y^{(1)}(+0), \dots, y^{(n-1)}(+0)$ *kezdeti értéket*, ahol

$$y^{(r)}(+0) \equiv \left. \frac{d^r y(t)}{dt^r} \right|_{t=+0}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.2-12)$$

A kezdeti értékek összességét *kezdeti feltételeknek* is nevezik.

A kezdeti értékek számítása még akkor is nehéz feladat, ha a gerjesztés belépő, tehát ha $u(t) = 0, t \in \mathbf{R}_-$. Ebben az esetben $y(-0) = 0$ és minden $y^{(r)}(-0) = 0$, vagyis valamennyi *kiindulási érték* nulla. Általában nem feltételezhetjük, hogy $y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ folytonos, ezért abból, hogy minden kiindulási érték nulla, nem következik, hogy minden kezdeti érték is nulla.

A kezdeti értékek számítását az $n = 2$ esetre mutatjuk be, amikor a rendszeregyenlet

$$y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_2 y(t) = b_0 u^{(2)}(t) + b_1 u^{(1)}(t) + b_2 u(t). \quad (2.2-13)$$

A számítandó kezdeti értékek $y(+0)$ és $y^{(1)}(+0)$. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a gerjesztés belépő, így a válasz is belépő, tehát $u^{(i)}(-0) = 0, y^{(i)}(-0) = 0$, vagyis amikor minden kiindulási érték nulla. Integráljuk a rendszeregyenletet $t = -0$ és t között:

$$y^{(1)}(t) + a_1 y(t) + a_2 \int_{-0}^t y(\tau) d\tau = b_0 u^{(1)}(t) + b_1 u(t) + b_2 \int_{-0}^t u(\tau) d\tau,$$

$$y(t) + a_1 \int_{-0}^t y(\tau) d\tau + a_2 \int_{-0}^0 \int_{-0}^{\vartheta} y(\tau) d\tau d\vartheta = b_0 u(t) + b_1 \int_{-0}^t u(\tau) d\tau + b_2 \int_{-0}^0 \int_{-0}^{\vartheta} u(\tau) d\tau d\vartheta.$$

Legyen $t = +0$. Szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, amikor a gerjesztés nem tartalmaz Dirac-impulzust. (Az impulzusválasz számításával a következő szakaszban foglalkozunk.) Ekkor a $t = -0$ és $t = +0$ határok közötti integrálok értéke nulla. A kezdeti értékekre vonatkozó egyenletrendszer (megfordítva az egyenletek sorrendjét)

$$y(+0) = b_0 u(+0), \quad y^{(1)}(+0) + a_1 y(+0) = b_0 u^{(1)}(+0) + b_1 u(+0). \quad (2.2-14)$$

Az első egyenlet megadja $y(+0)$ kifejezését, a másodikból $y^{(1)}(+0)$ ezután egyszerűen kifejezhető. Értelem szerinti az eljárás n tetszőleges értékre.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a kiindulási értékek nullától különbözőek. Ez a helyzet például akkor, amikor egymást követő (t_{i-1}, t_i) intervallumokban különböző függvények írják le a gerjesztést és így a választ is. Egy tipikus ilyen gerjesztés

$$u(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_1)\} C_1 t + \{\varepsilon(t - t_1) - \varepsilon(t - t_2)\} C_2 + \varepsilon(t - t_2) C_3 e^{-3t}.$$

Ekkor először megoldjuk a feladatot a $(0, t_1)$ intervallumban. A $t = t_1 - 0$ időpontbeli $y(t_1 - 0), y^{(1)}(t_1 - 0)$ helyettesítési értékek jelentik a kiindulási értékeket a (t_1, t_2) intervallumra, amelyre az $y(t_1 + 0), y^{(1)}(t_1 + 0)$ kezdeti értékeket kell meghatározni. Az előző gondolatmenet most is érvényes, csak most nem az $y^{(i)}(+0)$ és $u^{(i)}(+0)$ értékek fognak fellépni, hanem a megváltozások. A rájuk vonatkozó lineáris egyenletrendszer

$$y(t_1 + 0) - y(t_1 - 0) = b_0 [u(t_1 + 0) - u(t_1 - 0)],$$

$$y^{(1)}(t_1 + 0) - y^{(1)}(t_1 - 0) + a_1 [y(t_1 + 0) - y(t_1 - 0)] =$$

$$= b_0 [u^{(1)}(t_1 + 0) - u^{(1)}(t_1 - 0)] + b_1 [u(t_1 + 0) - u(t_1 - 0)]. \quad (2.2-14a)$$

Az egyenletrendszer megoldása, vagyis az $y(t_1 + 0), y^{(1)}(t_1 + 0)$ kezdeti értékek meghatározása nem jelent elvi nehézséget.

Később (4. rész) majd megismerkedünk jobban kezelhető eljárással is.

Ha $u(t) = u^-$, $t \in \mathbf{R}_-$ és a rendszer GV stabilis, akkor $y(t)$ is állandó ott, minden deriváltjuk nulla. Az y kiindulási értéke az $a_n y(-0) = b_n u^-$ egyenletből számítható, majd ennek ismeretében a kezdeti érték is.

A FI rendszeregyenletre nincs olyan egyszerű megoldás, mint a lépésről lépésre módszer volt a DI rendszeregyenletre. Alkalmazhatók közelítő numerikus megoldások.

Példa Tekintsük a következő FI rendszeregyenletet:

$$y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) + 3y(t) = 5u^{(1)}(t) + u(t).$$

Határozzuk meg az $y(+0)$, $y^{(1)}(+0)$ kezdeti értékeket, ha a gerjesztés

$$(a) u(t) = \varepsilon(t)t. \quad (b) u(t) = \varepsilon(t). \quad (c) u(t) = \delta(t).$$

Mindegyik gerjesztés belépő, ezért a válasz is belépő, a két kiindulási érték nulla:

$$y(-0) = 0, \quad y^{(1)}(-0) = 0.$$

Az (a) esetben $5u^{(1)}(t) + u(t) = \varepsilon(t)[5 + t]$. Ez véges a $t = 0$ helyen, ezért a válasz és deriváltja is folytonos ott, tehát $y(+0) = 0$ és $y^{(1)}(+0) = 0$.

A (b) esetben $5u^{(1)}(t) + u(t) = 5\delta(t) + \varepsilon(t)$. Az $y(t)$ folytonos a $t = 0$ helyen, de deriváltja nem. Integráljuk a rendszeregyenletet -0 és $+0$ között:

$$[y^{(1)}(+0) - y^{(1)}(-0)] + 4[y(+0) - y(-0)] + 3 \int_{-0}^{+0} y(t) dt = \int_{-0}^{+0} 1 dt + 5 \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt.$$

Csak $y^{(1)}(+0)$ és az utolsó tag nem nulla. Eredményünk $y(+0) = 0$, $y^{(1)}(+0) = 5$.

A (c) esetben $5u^{(1)}(t) + u(t) = 5\delta^{(1)}(t) + \delta(t)$. Ekkor $y(t)$ nem folytonos és $y^{(1)}(+0)$ nem véges. Az előző módon nem tudjuk a kezdeti feltételeket - és ennek következtében a rendszer impulzusválaszát sem - meghatározni.

A feladat még nehezebb lenne, ha a rendszeregyenlet jobb oldalán még az $u^{(2)}$ típusú tag is jelen lenne.

A vizsgált példa is mutatja, hogy a kezdeti értékek számítása egyes esetekben egyszerű, de lehet nagyon körülményes is. Más módszerrel a kezdeti értékek számításával kapcsolatos nehézségek könnyen kiküszöbölhetők (4.2-2.2. pont). #

Ha a rendszer nem invariáns, akkor a rendszeregyenletben szereplő a_i és b_i együtthatók az idő ismert függvényei. Ekkor azonban ezek jelentése a (9) integrális és a (10) differenciális alakban eltérő.

2.2-1.F. Feladatok

F-1. Igazolja, hogy a következő DI rendszeregyenletek ugyanazt a rendszert írják le, ha az együtthatók pontosnak tekinthetők:

$$(I) y - 0,5y^{(1)} = u - u^{(1)}, \quad (II) y - 2,5y^{(1)} + y^{(2)} = u - 3u^{(1)} + 2u^{(2)}.$$

F-2. Igazolja, hogy a következő FI rendszeregyenletek ugyanazt a rendszert írják le, ha az együtthatók pontosnak tekinthetők:

$$(I) \quad y^{(1)} + y = u, \quad (II) \quad y^{(2)} - y^{(1)} - 2y = u^{(1)} - 2u.$$

F-3. Egy DI rendszer rendszeregyenlete $y - 0,6 y^{(1)} = u^{(2)}$.

Határozza meg $y[k]$ értékét a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ és 5 ütemekre, ha a gerjesztés

$$(a) \quad u[k] = \delta[k]. \quad (b) \quad u[k] = \varepsilon[k].$$

Ez azt jelenti, hogy az impulzusválasz illetve az ugrásválasz elejét számítjuk.

F-4. Egy DI rendszer rendszeregyenlete $y - 0,6 y^{(1)} + 0,05 y^{(2)} = u^{(2)}$.

Határozza meg $y[k]$ értékét a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ és 5 ütemekre, ha a gerjesztés

$$(a) \quad u[k] = \delta[k]. \quad (b) \quad u[k] = \varepsilon[k]. \quad (c) \quad u[k] = \varepsilon[k](-0,1)^k. \\ (d) \quad u[k] = \varepsilon[k](0,1)^k. \quad (e) \quad u[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]. \quad (f) \quad u[k] = 9(1-\varepsilon[k]) + \varepsilon[k].$$

Később belátjuk, hogy a rendszer GV stabilis, ami az (f) megoldhatóságának feltétele.

2.2-1.M. Megoldások

M-1. Az (I)-ből késleltetéssel $y^{(1)} - 0,5 y^{(2)} = u^{(1)} - u^{(2)}$ adódik. Szorozzuk meg ezt (-2) -vel és adjuk hozzá (I)-hez: ekkor a (II) adódik.

M-2. Az (I)-ből differenciálással $y^{(2)} + y^{(1)} = u^{(1)}$ adódik. Adjuk ezt hozzá az (I) egyenlet (-2) -szereséhez: ekkor a (II) adódik.

M-3. Nyilván $y[-1] = y[-2] = 0$, sőt $y[0]$ és $y[1]$ is nulla. Ennek felhasználásával

$$(a) \quad y[k] = \delta[k-2] + 0,6 \delta[k-3] + 0,36 \delta[k-4] + 0,216 \delta[k-5] + \dots \\ (b) \quad y[k] = \delta[k-2] + 1,6 \delta[k-3] + 1,96 \delta[k-4] + 2,176 \delta[k-5] + \dots$$

Az impulzusválasz vagy az ugrásválasz első öt ütemének ismeretében a rendszer gerjesztés-válasz stabilitásáról nyilván nem tudunk megállapítást tenni.

M-4. Az (a)–(e) esetekben $y[-1] = y[-2] = 0$ adódik. Ennek felhasználásával a lépésről lépésre módszerrel

$$(a) \quad y[k] = \delta[k-2] + 0,6 \delta[k-3] + 0,31 \delta[k-4] + 0,156 \delta[k-5] + \dots \\ (b) \quad y[k] = \delta[k-2] + 1,6 \delta[k-3] + 1,91 \delta[k-4] + 2,066 \delta[k-5] + \dots \\ (c) \quad y[k] = \delta[k-2] + 0,5 \delta[k-3] + 0,26 \delta[k-4] + 0,130 \delta[k-5] + \dots \\ (d) \quad y[k] = \delta[k-2] + 0,7 \delta[k-3] + 0,38 \delta[k-4] + 0,194 \delta[k-5] + \dots \\ (e) \quad y[k] = \delta[k-2] + 1,6 \delta[k-3] + 1,91 \delta[k-4] + 1,066 \delta[k-5] + \dots$$

(f) Mivel a rendszer GV stabilis, ezért $y[-1] = y[-2] = 20$. Ennek felhasználásával

$$y[k] = 20 \delta[k] + 20 \delta[k-1] + 12 \delta[k-2] + 7,2 \delta[k-3] + 4,72 \delta[k-4] + 3,472 \delta[k-5] + \dots$$

Ha a rendszer nem lenne GV stabilis, akkor a nagyon régen ható állandó gerjesztés hatására a $k = -1, -2$ ütemekben (általában bármely véges ütemre) a válasz nem véges értékű, a feladat értelmetlen.

2.2-2. A rendszeregyenlet megoldása

2.2-2.1. Általános megfontolások

Ebben a szakaszban módszereket adunk mind a DI, mind a FI rendszeregyenlet megoldására. A lineáris, invariáns, kauzális, egy-gerjesztésű, egy-válaszú, DI illetve differenciális FI rendszer rendszeregyenletének általános alakja a (3), illetve a (1) értelmében

$$\begin{aligned} \text{DI: } y[k] + \sum_{i=1}^n a_i y[k-i] &= \sum_{i=0}^m b_i u[k-i]; \\ \text{FI: } y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y^{(i)}(t) &= \sum_{i=0}^n b_{n-i} u^{(i)}(t), \end{aligned} \quad (2.2-15)$$

ahol $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ jel i -edik (általánosított) deriváltját jelöli. Adottnak tekintjük az $u[k]$, illetve az $u(t)$ gerjesztést. Keresett az $y[k]$, $k \in \mathbf{N}$, illetve az $y(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$ válasz. Többnyire belépő gerjesztés hatást vizsgáljuk, amikor $u[k] = 0$, $k \in \mathbf{Z}_-$, illetve $u(t) = 0$, $t \in \mathbf{R}_-$. Ilyenkor - a rendszer kauzalitása miatt - a válasz is belépő jel.

A rendszeregyenlet megoldásának egy jól használható módszere a következő.

Először meghatározzuk a rendszeregyenlet által leírt DI, illetve FI rendszer impulzusválaszát (vagyis az egységimpulzus, illetve a Dirac-impulzus gerjesztéshez tartozó válaszát). Ennek ismeretében az adott gerjesztéshez tartozó válasz az előző szakaszban (a 2.1-1.2. illetve a 2.1-2.2. pontban) leírt módon konvolúcióval, vagyis összegezéssel, illetve integrálással elvi nehézség nélkül számítható. A következő pontban ezt a módszert fogjuk tárgyalni.

A rendszeregyenlet megoldható válasz szabad és gerjesztett összetevőre bontásának módszerével is. Ez az eljárás csak egyszerű függvénnyel leírható gerjesztés esetén használható viszonylag kényelmesen. Tárgyalását inkább fogalmi mint számítástechnikai fontossága indokolja.

A rendszeregyenlet megoldásának egy további módszere a következő. A rendszeregyenlethez egy állapotváltozós leírást rendelünk (ezt a 2.3-1.4. pontban tárgyaljuk), majd ezt oldjuk meg. Ez a kerülő út kényelmesebb lehet a rendszeregyenlet közvetlen megoldásánál.

Később (3.3-2. szakasz és 4.2-2. szakasz) megismerkedünk a rendszeregyenletnek a frekvenciatartománybeli és komplex frekvenciatartománybeli megoldásának módszerével. Ezek sokkal kényelmesebbek a jelen szakaszban tárgyalt időtartománybeli megoldási módszereknél. Ezeket együtt mutatjuk be DI illetve FI rendszerekre.

2.2-2.2. Az impulzusválasz számítása

A DI rendszer impulzusválasza az $u[k] = \delta[k]$ egységimpulzus gerjesztéshez tartozó $y[k] = h[k]$ válasza, a FI rendszer impulzusválasza az $u(t) = \delta(t)$ Dirac-impulzus gerjesztéshez tartozó $y(t) = h(t)$ válasza. Mivel $\delta[k]$, illetve $\delta(t)$ belépő jel, ezért - a vizsgált rendszer feltételezett kauzalitása következtében - az impulzusválasz is belépő jel. Emlékeztetőül megadjuk az y válasz kifejezését a h impulzusválasz és az u gerjesztés konvolúciójaként. Szimbolikusan (2.1-1.2. illetve a 2.1-2.2. pont)

$$y = h * u \quad (2.2-16)$$

Részletesen felírva és a rendszer kauzalitását figyelembe véve:

$$\begin{aligned} \text{DI: } y[k] &= \sum_{i=-\infty}^k h[k-i]u[i]; \\ \text{FI: } y(t) &= \int_{-\infty}^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.2-17)$$

Belépő gerjesztés esetén az összegezés alsó határa 0, az integrálás alsó határa -0 . Mivel a vizsgált rendszer lineáris és invariáns, ezért elegendő a

$$\begin{aligned} \text{DI: } y[k] + \sum_{i=1}^n a_i y[k-i] &= \delta[k], \quad y[k] = h_0[k]; \\ \text{FI: } y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y^{(i)}(t) &= \delta(t), \quad y(t) = h_0(t) \end{aligned} \quad (2.2-18)$$

speciális esetet vizsgálni. Az impulzusválasz ugyanis a szuperpozíció elve értelmében kifejezhető a $h_0[k]$, illetve a $h_0(t)$ *segéd-impulzusválasz* ismeretében:

$$\begin{aligned} \text{DI: } h[k] &= \sum_{i=0}^m b_i h_0[k-i]; \\ \text{FI: } h(t) &= \sum_{i=0}^n b_i h_0^{(i)}(t). \end{aligned} \quad (2.2-19)$$

Az azonos jellegű tagokat (tipikusan: exponenciális függvényeket) célszerű összevonni. Gondosan követni kell az $\varepsilon[k-i]$ tényezők hatását.

A $h_0[k]$, illetve a $h_0(t)$ függvényt a következő alakban keressük:

$$\text{DI: } h_0[k] = M \lambda^k \quad \text{FI: } h_0(t) = M e^{\lambda t}. \quad (2.2-20)$$

Minden alkalmas λ^k , illetve $e^{\lambda t}$ függvény a rendszeregyenlet egy *sajátfüggvénye*. Látni fogjuk, hogy egyes esetekben a sajátfüggvény ennél általánosabb is lehet. Helyettesítsük ezt a rendszeregyenletbe és egyelőre zárjuk ki a $k = 0$, illetve a $t = 0$ helyet:

$$\begin{aligned} \text{DI: } M \lambda^k + a_1 M \lambda^{k-1} + a_2 M \lambda^{k-2} + \dots + a_n M \lambda^{k-n} &= 0; \\ \text{FI: } M \lambda^n e^{\lambda t} + a_1 M \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + a_2 M \lambda^{n-2} e^{\lambda t} + \dots + a_n M e^{\lambda t} &= 0. \end{aligned}$$

Az $M \lambda^k$, illetve az $M e^{\lambda t}$ tényezővel egyszerűsíthetünk. A DI esetben célszerű még a λ^n tényezővel megszorozni az egyenletet. Ezzel a DI és a FI esetben a következő közös egyenlethez jutunk:

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0; \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n. \quad (2.2-21)$$

Ez a (15) DI illetve FI rendszeregyenlet *karakterisztikus egyenlete*, az egyenlet λ_i gyökei a rendszeregyenlet *sajátértékei*, amelyek meghatározzák a rendszeregyenlet λ_i^k illetve $\exp(\lambda_i t)$ *sajátfüggvényeit*. Az $F(\lambda)$ a rendszeregyenlet *karakterisztikus polinomja*.

A rendszeregyenlet ismeretében karakterisztikus egyenlete közvetlenül felírható, nincs szükség a közbülső lépésekre. Mivel az a_p együtthatók valóságosak, ezért a λ_i sajátértékek vagy valóságosak vagy konjugált komplex párokat alkotnak.

Az n -edfokú karakterisztikus egyenletnek pontosan n számú gyöke van. Kivételes esetektől eltekintve a gyökök mind különbözőek, vagyis a sajátértékek egyszerűesek. A továbbiakban először ezt az esetet tárgyaljuk, azután foglalkozunk az általánosabb esettel.

Egyszeres sajátértékek esete

Minden egyszeres λ_i sajátérték egy $M_i \lambda_i^k$, illetve $M_i e^{\lambda_i t}$ alakú megoldást jelent. A rendszeregyenlet linearitásából következik, hogy ezek összege is megoldás. A speciális (18) rendszeregyenletnek ezért biztosan van

$$\begin{aligned} \text{DI: } h_0[k] &= \varepsilon[k] \{M_1 \lambda_1^k + M_2 \lambda_2^k + \dots + M_n \lambda_n^k\}; \\ \text{FI: } h_0(t) &= \varepsilon(t) \{M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + M_n e^{\lambda_n t}\} \end{aligned} \quad (2.2-22)$$

alakú megoldása. Igazolható, hogy ha a *sajátértékek egyszerűesek*, akkor ez az *általános megoldás*, a homogén rendszeregyenletnek nincs másféle megoldása. Másként kifejezve: a rendszeregyenletnek csak az n számú λ_i^k , illetve $e^{\lambda_i t}$ sajátfüggvénye létezik. A feladat ezek után az n számú M_i együttható meghatározása.

A DI esetben kézenfekvő a $k = 0, 1, \dots, n-1$ időpontbeli $h_0[k]$ értékeket a lépésről lépésre meghatározni, majd ennek alapján felírni az n számú feltételi egyenletet. Igazolható azonban, hogy elegendő azt figyelembe venni, hogy $h_0[k]$ a k negatív értékeire nulla, míg a (18)-ból következően $h_0[0] = 1$, vagyis a feltételi egyenletek

$$\text{DI: } h_0[0] = 1, \quad h_0[-1] = 0, \quad h_0[-2] = 0, \dots, \quad h_0[-(n-1)] = 0. \quad (2.2-23)$$

Ha például $n = 2$, akkor a két feltételi egyenlet és megoldása

$$\left. \begin{aligned} M_1 + M_2 &= 1, \\ M_1 \lambda_1^{-1} + M_2 \lambda_2^{-1} &= 0; \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad M_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

A FI esetben tudjuk, hogy $h_0(t)$ és valamennyi $h_0^{(i)}(t)$ deriváltja nulla t negatív értékeire. Belátható, hogy ez igaz a $t = +0$ helyen is $i = 0, 1, \dots, n-2$ esetén. Ezt felhasználva és a (18)-at integrálva $t = -0$ és $t = +0$ között

$$h_0^{(n-1)}(+0) - h_0^{(n-1)}(-0) = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt$$

adódik. Az M_i együtthatók meghatározására szolgáló egyenletrendszer tehát

$$\text{FI: } h_0(+0) = 0, \quad h_0^{(1)}(+0) = 0, \dots, \quad h_0^{(n-2)}(+0) = 0, \quad h_0^{(n-1)}(+0) = 1. \quad (2.2-24)$$

Például $n = 2$ esetén a két feltételi egyenlet és megoldása

$$\left. \begin{array}{l} M_1 + M_2 = 0, \\ M_1 \lambda_1 + M_2 \lambda_2 = 1; \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad M_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

A kezdeti feltételek érvényesítése után a $h_0[k]$, illetve a $h_0(t)$ jel ismert. Ezután a $h[k]$, illetve a $h(t)$ impulzusválasz a (19) felhasználásával nehézség nélkül számítható.

A konjugált komplex sajátérték-párokat együtt célszerű kezelni:

$$\begin{aligned} \text{DI: } \lambda_i = r_i e^{j\theta_i}, \lambda_{i+1} = \lambda_i^* &\Rightarrow M_i \lambda_i^k + M_{i+1} \lambda_{i+1}^k = (P_i \cos \theta_i k + Q_i \sin \theta_i k) r_i^k, \\ \text{FI: } \lambda_i = \sigma_i + j \Omega_i, \lambda_{i+1} = \lambda_i^* &\Rightarrow M_i e^{\lambda_i t} + M_{i+1} e^{\lambda_{i+1} t} = (P_i \cos \Omega_i t + Q_i \sin \Omega_i t) e^{\sigma_i t}. \end{aligned} \quad (2.2-25)$$

Az $M_i, M_{i+1} = M_i^*$ komplex ismeretlen együtthatók helyett célszerűbb lehet a P_i és Q_i valós ismeretlen együtthatókkal számolni.

1. példa Határozzuk meg annak a DI rendszernek az impulzusválaszát, amelynek rendszeregyenlete

$$y[k] - y[k-1] + 0,24 y[k-2] = u[k] + 0,5 u[k-1] - 0,2 u[k-3].$$

A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete közvetlenül felírható:

$$\lambda^2 - \lambda + 0,24 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,6, \lambda_2 = 0,4.$$

A $h_0[k]$ segéd-impulzusválasz általános alakja ennek megfelelően

$$h_0[k] = \varepsilon[k] \{ M_1 (0,6)^k + M_2 (0,4)^k \}.$$

A kezdeti feltételek alapján a (23) értelmében

$$M_1 + M_2 = 1, \quad M_1 (0,6)^{-1} + M_2 (0,4)^{-1} = 0 \Rightarrow M_1 = 3, \quad M_2 = -2.$$

A rendszeregyenlet jobb oldalát is figyelembe véve kapjuk az impulzusválaszt:

$$\begin{aligned} h[k] &= h_0[k] + 0,5 h_0[k-1] - 0,2 h_0[k-3] = \\ &= \varepsilon[k] \{ 3 (0,6)^k - 2 (0,4)^k \} + \varepsilon[k-1] \{ 1,5 (0,6)^{k-1} - 1,0 (0,4)^{k-1} \} + \\ &+ \varepsilon[k-3] \{ -0,6 (0,6)^{k-3} + 0,4 (0,4)^{k-3} \}. \end{aligned}$$

A $k = 0, 1$ és 2 ütemeket külön célszerű leírni, a $(0,6)^{k-3}$ és a $(0,4)^{k-3}$ tagok együtthatóit összevonjuk:

$$h[k] = \delta[k] + 1,5 \delta[k-1] + 1,26 \delta[k-2] + \varepsilon[k-3] \{ 0,588 (0,6)^{k-3} + 0,112 (0,4)^{k-3} \}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ és 5 esetén a 2.2-1.2. pont példájában a lépésről lépésre módszerrel kapott $h[k]$ értéket adódnak. #

2. példa Határozzuk meg annak a FI rendszernek az impulzusválaszát, amelynek rendszeregyenlete

$$y^{(2)}(t) + 4 y^{(1)}(t) + 3 y(t) = 5 u^{(1)}(t) + u(t).$$

A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete közvetlenül felírható:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1.$$

A $h_0(t)$ segéd-impulzusválasz általános alakja tehát

$$h_0(t) = \varepsilon(t) \{M_1 e^{-3t} + M_2 e^{-t}\}.$$

A kezdeti feltételek (24) értelmében

$$M_1 + M_2 = 0, \quad -3M_1 - M_2 = 1; \Rightarrow M_1 = -\frac{1}{2}, \quad M_2 = \frac{1}{2}.$$

A rendszeregyenlet jobb oldalát figyelembe véve kapjuk (a h_0 a $t = 0$ helyen folytonos)

$$h(t) = 5h_0^{(1)}(t) + h_0(t) = \varepsilon(t) \left\{ \frac{15}{2} e^{-3t} - \frac{5}{2} e^{-3t} \right\} + \varepsilon(t) \left\{ -\frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-3t} \right\}.$$

Elemi rendezés után kapjuk az keresett impulzusválaszt:

$$h(t) = \varepsilon(t) \{7e^{-3t} - 2e^{-3t}\}.$$

Ha a rendszeregyenlet jobb oldalán szerepelne egy $u^{(2)}(t)$ tag is, akkor az impulzusválaszban fellépne egy $\delta(t)$ típusú összetevő is. #

Többszörös sajátértékek esete

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a rendszeregyenlet minden sajátértéke egyszeres. A gyakorlati esetek többségében ez így is van (kivéve az FI esetben a $\lambda = 0$ sajátértéket).

Lehet úgy érvelni, hogy többszörös sajátértékek a valóságban nem léteznek, hiszen a rendszeregyenlet együtthatói csak kivételesen ismertek pontosan, azok többnyire kerekített számítási vagy mérési eredmények. Bármelyik a_i együtthatóhoz ezért hozzáadhatunk egy olyan kis (pozitív vagy negatív) értéket, amelyről feltételezhető, hogy az a kerekítési hibán belül nem jelent változást. Ha például valamelyik a_i együttható értéke 0,24 (vagy 0,240), akkor ez akár 0,241, akár 0,239 (vagy akár 0,2401, akár 0,2399) értékkel helyettesíthető. Az esetleges többszörös sajátértékek ekkor többnyire több egyszeres sajátértékbe megy át. Megtehetjük azt is, hogy a többszörös λ_i sajátértékeket helyettesítjük több, egymáshoz közelebbi egyszeres sajátértékkel.

Fogalmilag és számítástechnikailag egyaránt indokolt vázolni azonban az eljárást többszörös sajátértékek esetére is. A következőket igazolás nélkül közöljük.

Ha λ_i egy r_i -szeres sajátérték, akkor nem csak λ_i^k , illetve $e^{\lambda_i t}$ sajátfüggvénye a rendszeregyenletnek, hanem

$$\begin{aligned} \text{DI: } f_i[k] &= \{M_{i,0} + M_{i,1} k + M_{i,2} k^2 + \dots + M_{i,r-1} k^{r-1}\} \lambda_i^k; \\ \text{FI: } f_i(t) &= \{M_{i,0} + M_{i,1} t + M_{i,2} t^2 + \dots + M_{i,r-1} t^{r-1}\} e^{\lambda_i t} \end{aligned} \quad (2.2-26)$$

is sajátfüggvény. Ez ugyanúgy r_i számú együtthatót tartalmaz, mint r_i számú különböző sajátértékhez tartozó sajátfüggvény összege. Ha a FI esetben $\lambda_i = 0$ egy r_i -szeres sajátérték, akkor a hozzá tartozó sajátfüggvény egy $(r_i - 1)$ -edfokú polinom. A $h_0[k]$, illetve a $h_0(t)$ segéd-impulzusválaszban szereplő együtthatók meghatározása ugyanazon feltételek alapján történik, mint egyszeres sajátértékek esetén.

***2.2-2.3. Szabad és gerjesztett összetevőkre bontás**

A (15) rendszeregyenletnek egy közvetlen megoldásaként az adott u gerjesztéshez tartozó y választ egy y_f szabad összetevő és egy y_g gerjesztett összetevő összegeként állítjuk elő:

$$\begin{aligned} \text{DI: } y[k] &= y_f[k] + y_g[k]; \\ \text{FI: } y(t) &= y_f(t) + y_g(t). \end{aligned} \quad (2.2-27)$$

Mint már említettük: ez a módszer csak akkor kényelmes, ha a gerjesztés egyszerű függvénnyel leírható.

A szabad összetevő általános alakja

A válasz y_f szabad összetevője, röviden a *szabad válasz* (pontosabban: a válasz szabad összetevőjének általános alakja) a gerjesztetlen rendszer ($u = 0$) válasza, vagyis a homogén rendszeregyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} \text{DI: } y_f[k] + \sum_{i=0}^n a_i y_f[k-i] &= 0; \\ \text{FI: } y_f^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^n a_{n-i} y_f^{(i)}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2-28)$$

A szabad választ nevezik sajátválasznak és természetes válasznak is.

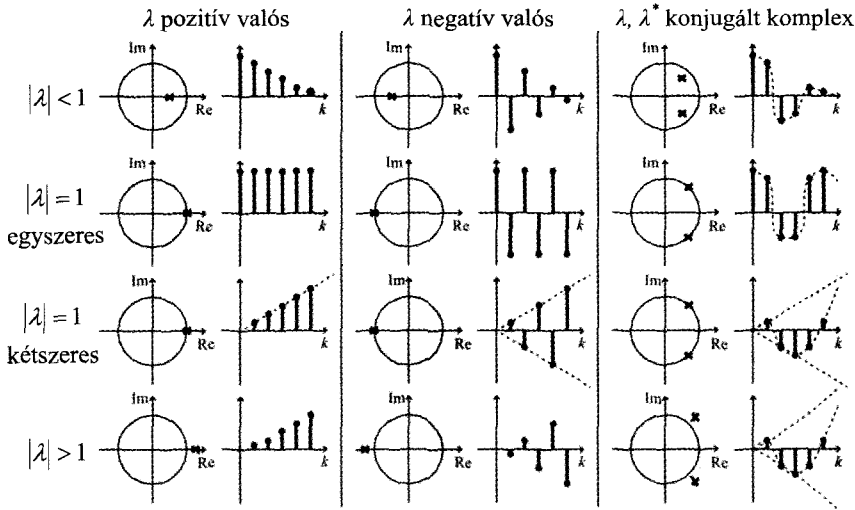
Az y_f szabad válasz általános kifejezése megegyezik a h_0 segéd-impulzusválasz általános alakjával, hiszen a $\delta[k]$, illetve a $\delta(t)$ gerjesztésű rendszere $k=0$, illetve a $t=0$ időponttól eltelve nem hat gerjesztés. A rendszeregyenlet (21) karakterisztikus egyenletének megoldása után ismerjük a rendszeregyenlet λ_i sajátértékeit. Ha ezek egyszerűek, akkor a szabad válasz általános alakja a (22) mintájára

$$\begin{aligned} \text{DI: } y_f[k] &= M_1 \lambda_1^k + M_2 \lambda_2^k + \dots + M_n \lambda_n^k; \\ \text{FI: } y_f(t) &= M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + M_n e^{\lambda_n t}. \end{aligned} \quad (2.2-29)$$

Az n számú M_i együttható egyelőre ismeretlen. Bizonyítható, hogy a (28) egyenlet minden megoldása ilyen alakú, ezért nevezik ezt a homogén egyenlet általános megoldásának. Ha valamelyik sajátérték többszörös, akkor az ahhoz tartozó általános megoldás (26) szerinti. A határozatlan állandók összes száma ekkor is n . Mint már említettük: a többszörös sajátértékek megkerülhetők az a_p együtthatóknak vagy a többszörös λ_i sajátértékeknek a kerekítési hibán belüli kis megváltoztatásával.

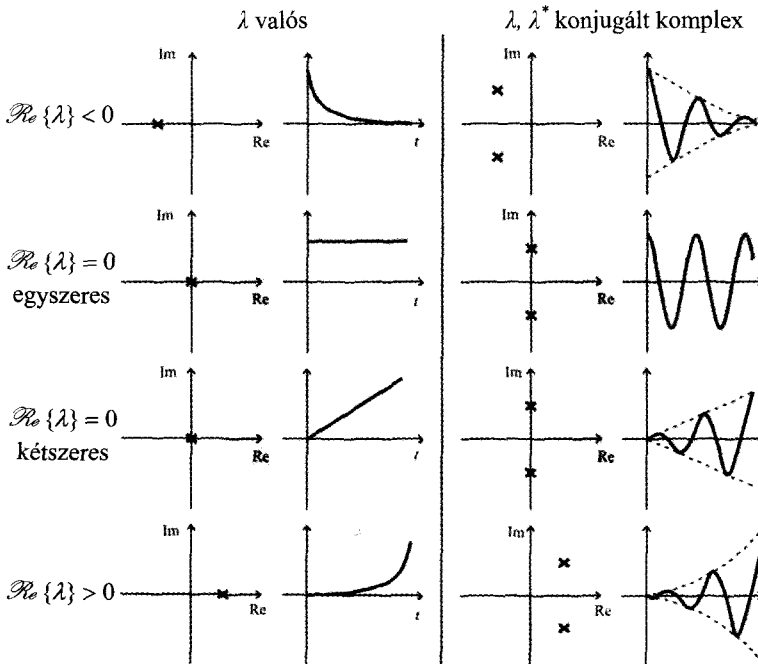
Amelyik DI sajátértékre $|\lambda_i| < 1$ (egységsugarú körön belüli), illetve amelyik FI sajátértékre $\mathcal{R}_e\{\lambda_i\} < 0$ (a bal félsíkra esik), az a végtelenben nullához tartozó tagot jelent még többszörös sajátérték esetén is. A csökkenés mértékét jellemezhetjük azzal a k_i , illetve t_i időponttal, amely után az $|M_i \lambda_i^k|$, illetve az $|M_i e^{\lambda_i t}|$ függvény kisebb $|M_i|$ kezdeti értékének 1%-ánál vagy valamilyen más tört részénél. Rövid számolással belátható, hogy

$$\begin{aligned} |\lambda_i^k| < 0,01 &\Leftrightarrow k > k_i = \frac{\ln 100}{-\ln |\lambda_i|} \approx \frac{4,6}{-\ln |\lambda_i|}, \quad |\lambda_i| < 1; \\ |e^{\lambda_i t}| < 0,01 &\Leftrightarrow t > t_i = \frac{\ln 100}{-\mathcal{R}_e\{\lambda_i\}} \approx \frac{4,6}{-\mathcal{R}_e\{\lambda_i\}}, \quad \mathcal{R}_e\{\lambda_i\} < 0. \end{aligned} \quad (2.2-30)$$



2.2-1. ábra A DI válasz szabad összetevőjének változása néhány tipikus sajátérték esetén

A t_i illetve a k_i neve *időállandó*. Ha minden $|\lambda_i| < 1$, illetve ha minden $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ akkor az időállandók legnagyobbika mérvadó arra, hogy mennyi idő után válik elhanyagolhatóvá a szabad összetevő. Az ennek megfelelő időpont után a teljes szabad összetevő nem feltétlenül csökken kezdeti értékének 1%-a alá, mert még az M_i állandók értékét is figyelembe kell venni. A megfelelő érték konkrét esetben kiszámítható, de ennek meghatározására ritkán van szükség.



2.2-2. ábra A FI válasz szabad összetevőjének változása néhány tipikus sajátérték esetén

A szabad összetevő változását szemlélteti néhány tipikus valós sajátérték vagy komplex sajátérték-pár esetére az 1. illetve a 2. ábra. Figyeljük meg, hogy a DI esetben az abszolút értékben egynél kisebb vagy nagyobb, a FI esetben a negatív vagy a pozitív valós részü sajátértékhez tartozó szabad összetevő lényegesen másként viselkedik.

A gerjesztett összetevő

A válasz y_g gerjesztett összetevője, röviden: a gerjesztett válasz a vizsgált rendszernek az adott gerjesztéshez tartozó egy lehetséges válasza, Ez azért nem jelenti a feladat megoldását, mert nem tesz eleget a kezdeti feltételeknek.

A matematikai terminológia szerint a gerjesztett válasz az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása. A gerjesztett válasz nem egyértelműen meghatározott, rendszerint a legegyszerűbb alakot választjuk.

A gerjesztett válasz meghatározására nincs általánosan használható eljárás. Ha azonban az u gerjesztést egyszerű függvény írja le, akkor használható a *próba függvény módszer*: az y_g gerjesztett választ ugyanolyan alakú, határozatlan szorzótényezőt tartalmazó függvény (például állandó, exponenciális, szinuszos függvény) alakjában keressük, mint amilyen a gerjesztés. Az adott u és a feltételezett y_g próba függvényt a rendszeregyenletbe helyettesítjük. A megegyező függvények együtthatóinak egyezéséből lineáris egyenleteket vagy egyenletrendszert kapunk az ismeretlen együtthatókra. A DI esetben az $u[k-1], u[k-2], \dots, u[k-m]$ tagok fellépése miatt a próba függvény csak $k \geq m$ esetén érvényes. A következő két táblázat néhány példát ad a próba függvények megválasztására. Figyeljük meg, hogy ha a gerjesztés megegyezik valamelyik λ_i^k , illetve $e^{\lambda_i t}$ sajátfüggvénnyel, akkor $A k \lambda_i^k$, illetve $A t e^{\lambda_i t}$ alakú próba függvényt kell választanunk.

Diszkrét idejű próba függvények	
$u[k], k \in \mathbf{N}$	$y_g[k], k \geq m$
C	A
$C a^k (a \neq \lambda_i)$	$A a^k$
$C \cos \Theta k + D \sin \Theta k (e^{j\Theta} \neq \lambda_i)$	$A \cos \Theta k + B \sin \Theta k$
$C k^p (p \in \mathbf{N})$	$A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \dots + A_p k^p$
$C \lambda_i^k (\lambda_i \text{ egyszeres})$	$A k \lambda_i^k$

Folytonos idejű próba függvények	
$u(t), t \in \mathbf{R}_+$	$y_g(t), t \in \mathbf{R}_+$
C	A
$C e^{at} (a \neq \lambda_i)$	$A e^{at}$
$C \cos \Omega t + D \sin \Omega t (e^{j\Omega} \neq \lambda_i)$	$A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$
$C t^p (p \in \mathbf{N})$	$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_p t^p$
$C e^{\lambda_i t} (\lambda_i \text{ egyszeres})$	$A t e^{\lambda_i t}$

Ha a gerjesztés a megadott függvények szorzata, akkor a próbafüggvényt is a megadott próbafüggvények szorzatának választjuk, de az állandók szorzatát egyetlen állandónak tekintjük.

Ha a gerjesztés intervallumonként írható le az említett egyszerű függvényekkel, akkor minden intervallumot a gerjesztett válasz és a kezdeti feltételek szempontjából új feladatként kezelünk.

A kezdeti feltételek érvényesítése

Igazolható, hogy a rendszeregyenlet *általános megoldása*, (a válasz általános alakja) a szabad válasz általános alakjának és a gerjesztett válasz bármely alakjának az összege:

$$\begin{aligned} \text{DI: } y[k] &= y_f[k] + y_g[k]; \\ \text{FI: } y(t) &= y_f(t) + y_g(t). \end{aligned} \quad (2.2-31)$$

Az ebben szereplő n számú határozatlan állandót úgy kell megválasztanunk, hogy a kezdeti feltételek ki legyenek elégítve. Mivel az eljárás némileg eltérő a DI és a FI esetben ezért ezeket egymás után tárgyaljuk.

Diszkrét idejű rendszer válasza

A gerjesztett válasznak a próbafüggvénnyel meghatározott alakja csak $k \geq m$ esetén érvényes. Mivel az általános alak n számú állandót tartalmaz, ezért azt n számú ütemmel visszafelé is érvényesnek tekinthetjük, vagyis kiterjeszthetjük azt a $k = m - 1, m - 2, \dots, m - n$ ütemekre is. Ezek szerint a következő *kezdeti értékeket* kell meghatározniuk:

$$y[m-n], y[m-n+1], y[m-n+2], \dots, y[m-1]. \quad (2.2-32)$$

Ha $m=0$, akkor ezek megegyeznek az $y[-1], y[-2], \dots, y[-n]$ *kiindulási értékekkel*. Belépő gerjesztés esetén ezek mindegyike nulla. Ha $m=1$, akkor először $y[0]$ értékét a lépésről lépésre módszerrel kiszámítjuk (2.2-1.2. pont), továbbá felhasználjuk az $y[-1], y[-2], \dots, y[-n+1]$ kiindulási értékeket. Ha $m=2$, akkor $y[0]$ és $y[1]$ értékét számítjuk a lépésről lépésre módszerrel és így tovább.

A szabad összetevőben szereplő határozatlan állandókat a következő lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$y_f[k] = y[k] - y_g[k], \quad k = m - n, m - n + 1, \dots, m - 1. \quad (2.2-33)$$

Ha minden sajátérték egyszeres, akkor (19) értelmében a megoldandó egyenletrendszer

$$\sum_{i=1}^n M_i \lambda_i^k = y[k] - y_g[k], \quad k = m - n, m - n + 1, \dots, m - 1. \quad (2.2-34)$$

Az egyenletrendszer megoldása után ismertek lesznek az addig határozatlan állandók (egyszeres sajátértékek esetén M_1, M_2, \dots, M_n). Ezeket behelyettesítve kapjuk a válasz kifejezését:

$$y[k] = y_f[k] + y_g[k], \quad k \geq m - n, \quad (2.2-35)$$

míg $y[k]$ értékeit a $0 \leq k < m - n$ ütemekre korábban már meghatároztuk. Ezzel a válasz minden $k \in \mathbf{Z}$ értékre ismert és feladatunkat megoldottuk. Ha $m \leq n$, akkor $y[k]$ formulája

a $k = 0$ értéktől már használható, ha azonban $m > n$, akkor a $k = 0, 1, \dots, m-n-1$ ütemekre vonatkozó értékeket egyenként kell megadnunk.

1. példa Határozzuk meg azon DI rendszer választát, amelynek rendszeregyenlete és gerjesztése

$$\begin{aligned} y[k] - y[k-1] + 0,24 y[k-2] &= u[k] + 0,5 u[k-1] - 0,2 u[k-3], \\ u[k] &= \varepsilon[k] \{ 2(0,5)^k + 3(0,6)^k \}. \end{aligned}$$

A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\lambda^2 - \lambda + 0,24 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,6, \lambda_2 = 0,4.$$

A szabad válasz ezek szerint $(0,6)^k$ és $(0,4)^k$ sajátfüggvények szuperpozíciója. A gerjesztett válasz próbafüggvénye (mivel $0,6$ egy sajátérték is!)

$$y_g[k] = A(0,5)^k + Bk(0,6)^k.$$

A rendszeregyenletbe helyettesítve (külön kezelhetjük a két tagot)

$$\begin{aligned} A \{ (0,5)^k - (0,5)^{k-1} + 0,24(0,5)^{k-2} \} &= 2 \{ (0,5)^k + 0,5(0,5)^{k-1} - 0,2(0,5)^{k-3} \}, \\ B \{ k(0,6)^k - (k-1)(0,6)^{k-1} + 0,24(k-2)(0,6)^{k-2} \} &= 3 \{ (0,6)^k + 0,5(0,6)^{k-1} - 0,2(0,6)^{k-3} \}. \end{aligned}$$

Az első egyenletből a $(0,5)^k$ függvény együtthatóinak egyezéséből

$$A = 2 \frac{1 + 0,5(0,5)^{-1} - 0,2(0,5)^{-3}}{1 - (0,5)^{-1} + 0,24(0,5)^{-2}} = -20.$$

A második egyenletből a $(0,6)^k$ függvény együtthatóinak egyezéséből

$$B = 3 \frac{1 + 0,5(0,6)^{-1} - 0,2(0,6)^{-3}}{1 - (0,6)^{-1} + 0,24(0,6)^{-2}} = \frac{49}{6}.$$

A $k(0,6)^k$ függvény együtthatóinak összege azonosan nulla, ezért ez nem ad új egyenletet a megoldáshoz.

A válasz általános alakja a $k \geq m-n = 3-2 = 1$ ütemtől érvényes. Célszerű ezért a kitevőket $k-1$ alakúnak választani:

$$y[k] = M_1(0,6)^{k-1} + M_2(0,4)^{k-1} - 10(0,5)^{k-1} + 4,9(k-1)(0,6)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

A lépésről lépésre módszerrel

$$\begin{aligned} y[0] &= (2+3) = 5, \\ y[1] &= 5 + (2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,6) + 0,5(2+3) = 10,3, \\ y[2] &= 10,3 - 0,24 \cdot 5 + (2 \cdot 0,5^2 + 3 \cdot 0,6^2) + 0,5(2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,6) = 12,08. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételeket a $k = 1$ és 2 helyen kell kielégíteni:

$$\begin{aligned} k = 1 &\Rightarrow M_1 + M_2 - 10 = 10,3, \\ k = 2 &\Rightarrow 0,6 M_1 + 0,4 M_2 - 10 \cdot 0,5 + 4,9 \cdot 0,6 = 12,08. \end{aligned}$$

Ebből $M_1 = 30,1$ és $M_2 = -9,8$ adódik. A válasz végső alakja ezek szerint

$$y[k] = 5 \delta[k] + \varepsilon[k-1] \{ 30,1 (0,6)^{k-1} - 9,8 (0,4)^{k-1} - 10 (0,5)^{k-1} + 4,9 (k-1) (0,6)^{k-1} \}.$$

Célszerű lehet a lépésről lépésre módszerrel még néhány $y[k]$ értéket kiszámítani és összevetni a megoldás helyettesítési értékével. #

Folytonos idejű rendszer válasza

A FI rendszeregyenlet $y_f(t)$ szabad összetevőjében szereplő n számú ismeretlen állandót az $y^{(r)}(+0)$ kezdeti feltételeket kifejező n számú lineáris egyenletrendszer megoldásával határozhatjuk meg:

$$y_f^{(r)}(+0) = y^{(r)}(+0) - y_g^{(r)}(+0), \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.2-36)$$

Itt $y^{(r)}(t)$ az $y(t)$ r -edik deriváltja.

Mint a 2.2-1.3. pontban már láttuk: az $y^{(r)}(+0)$ kezdeti értékek megegyeznek az $y^{(r)}(-0)$ kiindulási értékekkel, ha a rendszeregyenletben szereplő minden $u^{(i)}(t)$ derivált véges a $t=0$ helyen. Ellenkező esetben képezzük a gerjesztés annyiadik (mondjuk p -edik) integrálját, hogy arra a feltétel teljesüljön, az így kapott gerjesztéshez tartozó válasznak képezzük a p -edik (általánosított) deriváltját. Belépő gerjesztés esetén minden kiindulási érték nulla.

Egyszeres sajátértékek esetén a (29) értelmében a (36) részletes alakja

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^r M_i = y^{(r)}(+0) - y_g^{(r)}(+0), \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.2-37)$$

Értelem szerinti az eljárás többszörös sajátértékek esetén.

2. példa Határozzuk meg annak a FI rendszernek a válaszát, amelynek rendszeregyenlete és gerjesztése

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) + 0,6 y^{(1)}(t) + 0,25 y(t) &= 8 u^{(1)}(t) + 16 u(t), \\ u(t) &= 2 \{ \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1) \}. \end{aligned}$$

A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\lambda^2 + 0,6 \lambda + 0,25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -0,3 + j 0,4, \quad \lambda_2 = -0,3 - j 0,4.$$

A szabad válasz általános alakja ezek szerint

$$y_f(t) = \{ P \cos 0,4 t + Q \sin 0,4 t \} e^{-0,3t}.$$

Vizsgáljuk először a $0 < t < 1$ intervallumot. Itt a gerjesztés $u(t) = 2$, ezért a válasz próbafüggvénye is állandó: $y_g(t) = A$. A rendszeregyenletbe helyettesítve (az állandó deriváltja nulla)

$$0,25 A = 16 \cdot 2 \Rightarrow A = 128.$$

A válasz általános alakja e vizsgált intervallumban

$$y(t) = \{ P \cos 0,4 t + Q \sin 0,4 t \} e^{-0,3t} + 128, \quad 0 < t < 1.$$

A kezdeti feltételeket a (36) egyenletrendszer megoldásával kapjuk, amely a (13) általános alakú rendszeregyenlet kétszeres integrálásával állítható elő:

$$\begin{aligned} y(+0) &= b_0, u(+0) \Rightarrow y(+0) = 0, \\ y^{(1)}(+0) + a_1 y(+0) &= b_0 u^{(1)}(+0) + b_1 u(+0) \Rightarrow y^{(1)}(+0) = 8 \cdot 2 = 16. \end{aligned}$$

Az $y(t)$ és első deriváltjának kifejezésébe helyettesítve

$$\left. \begin{aligned} P + 128 &= 0, \\ -0,3P + 0,4Q &= 16; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} P = -128, \\ Q = -56. \end{cases}$$

Tekintsük most az $1 < t < \infty$ intervallumot. Itt $u(t) = 0$, ezért a válasz megegyezik szabad összetevőjével, általános alakja (célszerűen $t-1$ változóval)

$$y(t) = \{R \cos 0,4(t-1) + S \sin 0,4(t-1)\} e^{-0,3(t-1)}, \quad 1 < t < \infty.$$

A kezdeti feltételekhez szükségünk van a $t=1-0$ helyen fellépő értékekre, amelyek az előző intervallumra érvényes megoldásba helyettesítéssel adódnak:

$$\begin{aligned} y(1-0) &= \{-128 \cos 0,4 - 56 \sin 0,4\} e^{-0,3} + 128 = 24,505, \\ y^{(1)}(1-0) &= \{0,4 \cdot 128 \sin 0,4 - 0,4 \cdot 56 \cos 0,4\} e^{-0,3} - \\ &\quad -0,3 \{-128 \cos 0,4 - 56 \sin 0,4\} e^{-0,3} = 30,535. \end{aligned}$$

Az előző egyenletrendszer mintájára

$$\begin{aligned} y(1+0) - y(1-0) &= 0 \Rightarrow y(1+0) = 24,505, \\ y^{(1)}(1+0) - y^{(1)}(1-0) + 0,6 \{y(1+0) - y(1-0)\} &= 8 \{u(1+0) - u(1-0)\} \Rightarrow \\ \Rightarrow y^{(1)}(1+0) &= 30,535 - 0,6 \{24,505 - 24,505\} + 8 \{0 - 2\} = 14,535. \end{aligned}$$

Az R és S állandókra vonatkozó egyenletrendszer ennek alapján

$$\begin{aligned} R &= 24,505, \\ -0,3R + 0,4S &= 14,535 \Rightarrow S = 54,716. \end{aligned}$$

A keresett válasz végső alakja

$$\begin{aligned} y(t) &= \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)\} \{[-128 \cos 0,4t - 56 \sin 0,4t] e^{-0,3t} + 128\} + \\ &\quad + \varepsilon(t-1) \{24,5 \cos 0,4(t-1) + 54,7 \sin 0,4(t-1)\} e^{-0,3(t-1)}. \end{aligned}$$

Nem jelentett volna lényeges bonyodalmat, ha a $t=1$ időpont után a gerjesztést valamilyen más egyszerű függvény írta volna le.

Megjegyezzük, hogy ebben a speciális esetben a feladatot egyszerűbben is megoldhattuk volna. A gerjesztést tekinthetjük az $u_1(t) = 2\varepsilon(t)$ és az $u_2(t) = -2\varepsilon(t-1)$ gerjesztések szuperpozíciójának. Mivel $u_2(t) = -u_1(t-1)$, ezért a $0 < t < 1$ intervallumra vonatkozó $y_1(t)$ megoldást felhasználva

$$\begin{aligned} y(t) &= \varepsilon(t) \{[-128 \cos 0,4t - 56 \sin 0,4t] e^{-0,3t} + 128\} - \\ &\quad - \varepsilon(t-1) \{[-128 \cos 0,4(t-1) - 56 \sin 0,4(t-1)] e^{-0,3(t-1)} + 128\}. \end{aligned}$$

Trigonometriai átalakításokkal az előző alakhoz juthatunk. Az annyiban előnyösebb, hogy a válasz két ablakozott jel összegeként van előállítva. #

2.2-2.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a DI rendszer válaszát, ha rendszeregyenlete $y - 0,6 y^{(1)} = u^{(2)}$, és gerjesztése

$$(a) u[k] = \delta[k].$$

$$(b) u[k] = \varepsilon[k].$$

F-2. Határozza meg a DI rendszer válaszát, ha a rendszeregyenlete

$$y - 0,6y^{(1)} + 0,05y^{(2)} = 3u^{(2)},$$

és a gerjesztése:

$$(a) u[k] = \varepsilon[k]. \quad (b) u[k] = \varepsilon[k](-0,1)^k. \quad (c) u[k] = \varepsilon[k](0,1)^k.$$

$$(d) u[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]. \text{ (Útmutatás. Alkalmazhatja a szuperpozíció elvét!)}$$

$$* (e) u[k] = 9 \{1 - \varepsilon[k]\} + \varepsilon[k]. \text{ (Látni fogjuk, hogy a rendszer GV stabilis.)}$$

Ellenőrizze $y[k]$ értékét a $k = 0, 1, 2, 3$ ütemekre a lépésről lépésre módszerrel!

(Vö. 2.2-1.F-3.)

F-3. Határozza meg a DI rendszernek az $u[k] = \varepsilon[k]$ gerjesztéshez tartozó válaszát, ha rendszeregyenlete

$$(a) y - 0,5y^{(1)} = u - u^{(1)}. \quad (b) y - 2,5y^{(1)} + y^{(2)} = u - 3u^{(1)} + 2u^{(2)}.$$

F-4. Határozza meg a FI rendszer válaszát, ha rendszeregyenlete

$$y^{(2)} + 6y^{(1)} + 5y = u^{(1)} + 9u,$$

és a gerjesztése:

$$(a) u(t) = \varepsilon(t). \quad (b) u(t) = \varepsilon(t)e^{-2t}. \quad (c) u(t) = \varepsilon(t)e^{-t}.$$

$$(d) u(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1). \text{ (Útmutatás. Alkalmazhatja a szuperpozíció elvét!)}$$

$$* (e) u(t) = \{1 - \varepsilon(t)\} + \varepsilon(t)e^{-2t}. \text{ (Látni fogjuk, hogy a rendszer GV stabilis.)}$$

F-5. Határozza meg a FI rendszernek az $u(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztéshez tartozó válaszát (az ugrásválaszt), ha rendszeregyenlete

$$(a) y^{(1)} + y = u.$$

$$(b) y^{(2)} - y^{(1)} - 2y = u^{(1)} - 2u.$$

2.2-2.M. Megoldások

A feladatok megoldhatók akár az impulzusválasz számításával és szükség esetén konvolúcióval, akár az összetevőkre bontás módszerével. A megoldásokhoz tartozó bizonyos magyarázatok (például a kezdeti értékek) csak a második megoldási módszerre vonatkoznak.

M-1. $\lambda_1 = 0,6$. (a) $y[k] = \varepsilon[k-2](0,6)^{k-2}$. (b) $y[k] = \varepsilon[k-2]\{2,5 - 1,5(0,6)^{k-2}\}$.

M-2. A sajátértékek $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_2 = 0,1$. Az $y[0]$, $y[1]$ kezdeti értékeket a lépésről lépésre módszerrel kell számítani. A megoldás két alábbi alakja közül a második a célszerűbb.

$$(a) y[k] = \varepsilon[k] \left\{ \frac{20}{3} - \frac{45}{3}(0,5)^k + \frac{25}{3}(0,1)^k \right\} = \varepsilon[k-2] \left\{ \frac{20}{3} - \frac{15}{4}(0,5)^{k-2} + \frac{1}{12}(0,1)^{k-2} \right\}.$$

$$(b) y[k] = \varepsilon[k] \left\{ 25(-0,1)^k + \frac{25}{2}(0,5)^k - \frac{75}{2}(0,1)^k \right\} = \varepsilon[k-2] \left\{ \frac{1}{4}(-0,1)^{k-2} + \frac{25}{8}(0,5)^{k-2} - \frac{3}{8}(0,1)^{k-2} \right\}.$$

$$(c) y[k] = \varepsilon[k] \left\{ \frac{75}{4}(0,5)^k - \frac{75}{4}(0,1)^k - 75k(0,1)^k \right\} = \\ = \varepsilon[k-2] \left\{ \frac{75}{16}(0,5)^{k-2} - \frac{27}{16}(0,1)^{k-2} - \frac{3}{4}(k-2)(0,1)^{k-2} \right\}.$$

$$(d) y[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]) \left\{ \frac{20}{3} - \frac{45}{3}(0,5)^k + \frac{25}{3}(0,1)^k \right\} - \varepsilon[k-3] \{ 3,125(0,5)^{k-3} + 8,325(0,1)^{k-3} \} = \\ = (\varepsilon[k-2] - \varepsilon[k-5]) \left\{ \frac{20}{3} - \frac{15}{4}(0,5)^{k-2} + \frac{1}{12}(0,1)^{k-2} \right\} - \varepsilon[k-5] \{ 3,281(0,5)^{k-5} + 0,0831(0,1)^{k-5} \}.$$

* (e) $y[k] = 60$, $k \in \mathbf{Z}$, $y[0] = y[1] = 60$;

$$y[k] = \frac{20}{3} + 120(0,5)^k - \frac{200}{3}(0,1)^k, \quad k \in \mathbf{N};$$

$$y[k] = 60 \{ 1 - \varepsilon[k-2] \} + \varepsilon[k-2] \left\{ \frac{20}{3} + 30(0,5)^{k-2} - \frac{2}{3}(0,1)^{k-2} \right\},$$

M-3. A válasz mindkét esetben $y[k] = \varepsilon[k](0,5)^k$. A (b) rendszeregyenlet sajátértékei $\lambda_1 = 0,5$ és $\lambda_2 = 2$. Az utóbbi azonban nem szerepel a válaszban. Ez a megállapítás más gerjesztésre is érvényes. (A 2.2-1.F-1. feladatban beláttuk, hogy a második rendszeregyenlet az elsőből következik. Később ennek olyan értelmezést is adhatunk, hogy a két rendszer átviteli függvénye megegyezik.)

M-4. A sajátértékek $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -5$. Az $y(t)$ folytonos, de $y^{(1)}(t)$ nem az, ha $u(t)$ nem folytonos. Integráljuk a rendszeregyenletet -0 és $+0$ között. Ennek alapján azt kapjuk, hogy $y^{(1)}(+0) - y^{(1)}(-0) = u^{(1)}(+0) - u^{(1)}(-0)$. Egy másik lehetőség, hogy például az (a) feladatnál először az $u_1(t) = \varepsilon(t)t$ gerjesztéshez tartozó y_1 választ számítjuk, amelyre $y_1(0) = 0$, $y_1^{(1)}(0) = 0$, majd ennek ismeretében $y(t) = y_1'(t)$.

A próbafüggvények az (a) és (d) esetekben $y_g(t) = A$, a (b) és az (e) esetben $y_g(t) = A e^{-2t}$, a (c) esetben $y_g(t) = A t e^{-2t}$. Az (a), (b), (c) és (d) esetekben $y(+0) = 0$, $y^{(1)}(+0) = 1$. A válasz kifejezése:

$$(a) y(t) = \varepsilon(t) [1,8 - 2e^{-t} + 0,2e^{-5t}].$$

$$(b) y(t) = \varepsilon(t) \left[-\frac{7}{3}e^{-2t} + 2e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-5t} \right].$$

$$(c) y(t) = \varepsilon(t) \left[\left(2t - \frac{1}{4} \right) e^{-t} + \frac{1}{4} e^{-5t} \right].$$

$$(d) y(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] [1,8 - 2e^{-t} + 0,2e^{-5t}] + \varepsilon(t-1) [2(1-e^{-1})e^{-(t-1)} - 0,2(1-e^{-5})e^{-5(t-1)}].$$

*(e) Az $u(t)$ folytonos, ezért $y(+0) = y(-0) = 9/5$, $y^{(1)}(+0) = y^{(1)}(-0) = 0$;

$$y(t) = \frac{9}{5} [1 - \varepsilon(t)] + \varepsilon(t) \left[-\frac{7}{3} e^{-2t} + 4e^{-t} + \frac{2}{15} e^{-5t} \right].$$

M-5. A válasz kifejezése mindkét esetben $y(t) = \varepsilon(t)[1 - e^{-t}]$.

A (b) rendszer sajátértékei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +2$. Az utóbbi nem szerepel a válaszban. Ez más gerjesztés esetén is érvényes. (vö. 2.2-1.F-2.) Ennek a megállapításnak jelentőségét a stabilitás tárgyalásánál, a következő szakaszban fogjuk látni.

2.2-3. A gerjesztés-válasz stabilitás

2.2-3.1. A rendszeregyenlet sajátértékei

A rendszer gerjesztés-válasz stabilis, ha bármely korlátos gerjesztéséhez korlátos válasz tartozik (1.2-2.5. pont). A rendszeregyenlet ismeretében erre elegendő feltételt adunk.

A rendszeregyenletével leírt rendszer válasza a szabad és a gerjesztett válasz összege. A DI illetve a FI rendszer válaszában szabad összetevője egyszerűes λ_i sajátértékek esetén λ_i^k illetve $e^{\lambda_i t}$ alakú tagok összege, míg többszörös sajátértékek esetén λ_i^k , $k \lambda_i^k$, $k^2 \lambda_i^k$, ... illetve $e^{\lambda_i t}$, $t e^{\lambda_i t}$, $t^2 e^{\lambda_i t}$, ... alakú tagok összege. A szabad összetevő általános alakja akkor és csakis akkor korlátos, ha DI esetben minden $|\lambda_i| < 1$, illetve FI esetben ha minden $\Re\{\lambda_i\} < 0$. A gerjesztett összetevő próbafüggvénye viszont olyan mint a gerjesztés, ezért az korlátos gerjesztés esetén biztosan korlátos. Ez az állítás még akkor is igaz, ha a gerjesztés λ_i^k illetve $e^{\lambda_i t}$ alakú exponenciális függvény, mert ekkor a próbafüggvény $k^p \lambda_i^k$ illetve $t^p e^{\lambda_i t}$ ($p \in \mathbf{N}$). Ez ugyanis korlátos, ha $|\lambda_i| < 1$, illetve ha $\Re\{\lambda_i\} < 0$. Összefoglalva a következőket állíthatjuk.

Egy *rendszeregyenletével* jellemzett lineáris, invariáns rendszer biztosan *gerjesztés-válasz stabilis*, ha minden *sajátértéke* (akár egyszerűes, akár többszörös) kielégíti az elegendő, de elvileg nem szükséges feltételeket:

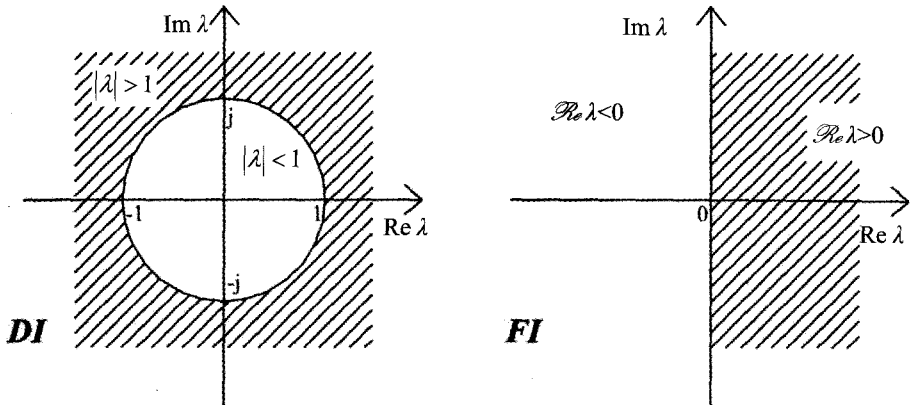
$$\text{DI: } |\lambda_i| < 1; \text{ FI: } \Re\{\lambda_i\} < 0; i=1, 2, \dots, n \Rightarrow \text{GV stabilis rendszer} \quad (2.2-38)$$

A rendszer tehát biztosan gerjesztés válasz stabilis, ha DI esetben minden sajátértéke a λ komplex számsík *egység sugarú körén belül* helyezkedik el, illetve ha FI esetben minden sajátértéke a λ komplex számsík *bal félsíkján* helyezkedik el. (3. ábra).

A rendszer GV stabilitásának szükséges és elegendő feltétele az (2.1-1.3 és 2.3. pont), hogy impulzusválasza abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható legyen. A (38) feltétel a GV stabilitásnak elvileg azért nem szükséges feltétele, mert előfordulhat, hogy a feltételt nem kielégítő sajátértékek egyike sem szerepel az impulzusválaszban. Kényes kérdés, hogy mit tartunk egy rendszer stabilitásáról, amely impulzusválasz alapján GV stabilis, de sajátértékei nem elégítik ki a (33) feltételt. Ebből már látható, hogy a GV stabilitás és „a stabilitás” nem azonosítható fogalmak. A 2.3-3. szakaszban még lesz

szó az aszimptotikus stabilitásról, további stabilitásfogalmakkal (például a Ljapunov-stabilitással) a 2.5. fejezetben foglalkozunk. A biztonság felé tévedünk, ha a (38) feltételeket nem kielégítő rendszert nem tekintjük GV stabilisnak.

Ha a rendszeregyenletnek van az egységsugarú körre eső $|\lambda_p|=1$ illetve a képzetes tengelyre eső $\operatorname{Re}\{\lambda_p\}=0$ típusú egyszeres sajátértéke, akkor az $u[k]=\varepsilon[k]\lambda_p^k$ illetve az $u(t)=\varepsilon(t)e^{\lambda_p t}$ gerjesztéshez tartozó válasznak lesz $M_p k \lambda_p^k$ vagy $M_p t e^{\lambda_p t}$ típusú összetevője. Ez az összetevő nem korlátos, ennek következtében a rendszer csak kivételesen lehet GV stabilis.



2.2-3. ábra A rendszer biztosan GV stabilis ha minden sajátértéke a λ komplex számsík egységsugarú körén belül illetve bal félsíkján helyezkedik el.

Példa A következő két DI illetve FI rendszeregyenlet ugyanazt a DI illetve FI rendszert írja le, mert a két impulzusválasz megegyezik (2.2-1.F-1. és 2. feladat).

$$\text{DI: } y - 0,5 y^{(1)} = u - u^{(1)}; \quad y - 2,5 y^{(1)} + y^{(2)} = u - 3 u^{(1)} + 2 u^{(2)};$$

$$\text{FI: } y^{(1)} + y = u; \quad y^{(2)} - y^{(1)} - 2 y = u^{(1)} - 2 u.$$

A bal oldali oszlopban szereplő rendszeregyenlet egyetlen sajátértéke (DI:) $\lambda = 0,5$; (FI:) $\lambda = -1$, ezek tehát GV stabilis rendszerek. A jobb oldali oszlopban szereplő rendszeregyenlet sajátértékei (DI:) $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_2 = 2$; (FI:) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Ezekre a (38) feltételek nincsenek kielégítve, a rendszer ennek ellenére GV stabilis, hiszen impulzusválasza megegyezik az előző rendszer GV stabilis impulzusválaszával. #

2.2-3.2. A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

A rendszeregyenlet ismeretében elegendő feltételeket adhatunk a rendszer GV stabilitására. Ehhez nem kell megoldanunk a karakterisztikus egyenletet, elegendő azt ellenőriznünk, hogy a megoldásai kielégítik-e a (38) feltételt, ami az együtthatók ismeretében megtehető. Ez különösen akkor előnyös, amikor az együtthatók egy vagy több paraméter függvényei, tehát a sajátértékek numerikusan nem is számíthatók. A sok ismert módszer közül csupán egyet adunk meg. A DI és a FI esetet külön tárgyaljuk.

Diszkrét idejű rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

A diszkrét idejű rendszer vizsgálandó rendszeregyenlete $y^{(i)}[k] = y[k-i]$ jelöléssel

$$y + a_1 y^{(1)} + \dots + a_n y^{(n)} = b_0 u + b_1 u^{(1)} + \dots + b_m u^{(m)}. \quad (2.2-39)$$

A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (2.2-40)$$

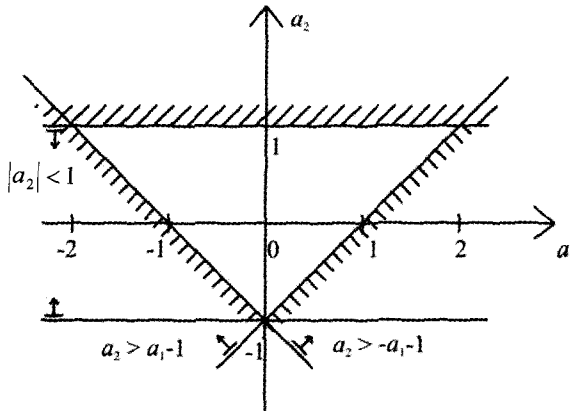
Mint láttuk: a DI rendszer biztosan GV stabilis, ha sajátértékei kielégítik a $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ feltételeket. Igazolható (*Jury*-kritérium), hogy ennek egy *szükséges* feltétele, hogy az együtthatók kielégítsék a következő egyenlőtlenségeket:

$$1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n > 0, \quad 1 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n > 0, \quad |a_n| < 1. \quad (2.2-41)$$

E három feltétel $n = 2$ esetén elegendő is

$$n = 2 \Rightarrow 1 + a_1 + a_2 > 0, \quad 1 - a_1 + a_2 > 0, \quad |a_2| < 1. \quad (2.2-42)$$

Ha $|a_1|$ és $|a_2|$ annyira kicsi, hogy $n = 2$ esetén az (a_1, a_2) pont beleesik a 4. ábra szerinti paramétersík háromszög alakú tartományába, akkor a másodrendű DI rendszer biztosan GV stabilis.



2.2-4. ábra Ha a másodrendű DI rendszeregyenlet paraméterei a háromszög belsejébe eső pontot adnak, akkor a rendszer biztosan GV stabilis.

Ha $n > 2$, akkor képezzünk az a_p együtthatókból új (b_q, c_r, \dots) együtthatókat a következő séma szerint (a Jury-eljárásnak más változatai is ismertek):

$$\begin{aligned} (1) \quad & b_p = a_0 a_p - a_n a_{n-p}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad a_0 \equiv 1; \\ (2) \quad & c_p = b_0 b_p - b_{n-1} b_{n-1-p}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, n-2; \\ & \vdots \\ (n-2) \quad & g_p = f_0 f_p - f_2 f_{2-p}, \quad p = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.2-43)$$

A karakterisztikus polinom nullahelyei akkor és csakis akkor esnek az egységsgugarú kör belsejébe, ha a (41) feltételek mellett teljesül a következő $n-2$ feltétel is (összesen tehát $n+1$ feltételt kell kielégíteni)

$$|a_0| > |a_n|, \quad |b_0| > |b_{n-1}|, \dots, |g_0| > |g_1|. \quad (2.2-44)$$

Az állítások hosszadalmas igazolását nem közöljük. Az Olvasóra bízunk annak belátását, hogy a (44) alapján a GV stabilitás elegendő feltételei $n=3$ esetén

$$n=3 \Rightarrow 1+a_1+a_2+a_3 > 0, \quad 1-a_1+a_2-a_3 > 0, \quad 1 > |a_3|, \quad |1-a_3^2| > |a_2-a_1a_3|. \quad (2.2-45)$$

Ha bármelyik egyenlőtlenség nincs kielégítve, akkor a DI rendszer többnyire nem GV stabilis.

Példa Egy másodrendű DI rendszer $a_1=2, a_2=0,5$ esetén nem elégíti ki a stabilitás elegendő feltételeit. Bővítsük a rendszeregyenletet egy $a_3y^{(3)}$ taggal úgy, hogy a rendszer biztosan GV stabilis legyen.

Az a_3 együtthatóra vonatkozó feltételek (45) értelmében

$$a_3 > -3,5, \quad a_3 > -0,5, \quad -1 < a_3 < 1, \quad (1-a_3^2) > 0,5-2a_3.$$

Ebből következik, hogy a $-0,58 < a_3 < -0,5$ feltételt kielégítő bármely a_3 megfelelő. Az $a_3 = 0$ (másodrendű rendszer) nem megfelelő választás. #

Folytonos idejű rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

A folytonos idejű rendszer vizsgálandó rendszeregyenlete

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y^{(1)} + a_ny = b_0u^{(n)} + b_1u^{(n-1)} + \dots + b_nu. \quad (2.2-46)$$

Itt $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ válasz i -edik deriváltja. A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (2.2-47)$$

Mint láttuk: a FI rendszer biztosan GV stabilis, ha sajátértékei kielégítik a $\Re\{\lambda_i\} < 0; i=1, 2, \dots, n$ feltételeket. Ebben az esetben $F(\lambda)$ egy Hurwitz-polinom. Ennek egy szükséges feltétele, hogy a karakterisztikus egyenlet minden együtthatója pozitív legyen:

$$a_i > 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (2.2-48)$$

Ezek a feltételek $n=1$ és $n=2$ esetén elegendők is:

$$n=2: \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0; \quad (2.2-49)$$

ami azt jelenti, hogy az (a_1, a_2) pont a paramétersík első negyedébe esik (az Olvasóra bízunk a 4. ábrának megfelelő tartomány kijelölését).

Ha $n=3$ és $n=4$, akkor három feltételt kell kielégíteni:

$$n=3: \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0; \quad (2.2-50)$$

$$n=4: \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2 > 0. \quad (2.2-51)$$

Általános esetre a sokféle eljárás közül *Routh* feltételrendszerét adjuk meg.

Képezzünk az a_p együtthatókból új (b_q, c_r, \dots) együtthatókat a következő séma szerint ($a_0 = 1$ és páros N esetén $a_{N+1} = 0$ helyettesítendő):

$$\begin{array}{cccccc}
 a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & & \\
 \hline
 a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & & \\
 b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_1 = a_2 - \frac{a_0 a_3}{a_1}, b_2 = a_4 - \frac{a_0 a_5}{a_1}, \dots & \\
 c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_1 = a_3 - \frac{a_1 b_2}{b_1}, c_2 = a_5 - \frac{a_1 b_3}{b_1}, \dots & (2.2-52) \\
 d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots & d_1 = b_2 - \frac{b_1 c_2}{c_1}, d_2 = b_3 - \frac{b_1 c_3}{c_1}, \dots & \\
 \vdots & & & & & & \\
 g_1 & 0 & & & & g_1 = e_2 - \frac{e_1 f_2}{f_1} &
 \end{array}$$

A b_p, c_r, \dots számok az előző két sorból a következő oszlopban és az aktuális oszlopban álló számokból származtathatók. A konstrukcióból következik, hogy minden új sorban eggyel kevesebb oszlop szerepel. A sorok száma $N/2$ vagy $(N-1)/2$. Az $F(\lambda)$ akkor és csak akkor Hurwitz-polinom, azaz minden zérusának valós része negatív, ha

$$a_p > 0, \quad p = 1, 2, \dots, N; \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \dots, g_1 > 0. \quad (2.2-53)$$

Ennek következtében: ha az (52) szerinti eljárásban az a_1, b_1, \dots számok valamelyike nulla, vagy negatív lenne, akkor $F(\lambda)$ nem Hurwitz-polinom, az eljárás befejezhető.

Vizsgáljuk példaként az $N = 4$ esetet. Ha a_1, a_2, a_3, a_4 pozitív, akkor

$$\begin{array}{ccc}
 1 & a_2 & a_4 \\
 \hline
 a_1 & a_3 & 0 \\
 a_2 - \frac{a_3}{a_1} & a_4 & \Rightarrow a_1 a_2 - a_3 > 0 \\
 a_3 - \frac{a_1 a_4}{a_2 - a_3 / a_1} & & \Rightarrow a_3 (a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 > 0.
 \end{array}$$

Ha a második feltétel ki van elégítve, akkor az első is teljesül, tehát az el is hagyható. Ezzel megkaptuk a már megadott (51) feltételt.

Példa Egy harmadrendű FI rendszer karakterisztikus polinomja

$$F(\lambda) = \lambda^3 + 2K \lambda^2 + 3K \lambda + 4K^2 + 8.$$

Határozzuk meg a K paraméter azon értéktartományát, amelyre a sajátértékek a bal félsíkra esnek.

Elegendő feltétel a $K > 0$ és (50) értelmében $a_1 a_2 > a_3$, vagyis

$$(2K)(3K) > 4K^2 + 8 \Rightarrow K^2 > 4,$$

tehát $K > 2$ esetén a rendszer biztosan GV stabilis. Ha $K \leq 2$, akkor a rendszer elméletileg lehet GV stabilis, de ez csak az impulzusválasz ismeretében dönthető el. #

2.2-3.F. Feladatok

F-1. Legyen a rendszeregyenletben $n = 0$. GV stabilis-e ez a DI vagy FI rendszer? Milyen típusú rendszert jellemez egy ilyen rendszeregyenlet?

F-2. Tudjuk, hogy az $y(t) = C \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolótű FI rendszer (integrátor) nem GV stabilis. Hogyan következik ez a rendszeregyenletre vonatkozó feltételekből?

F-3. Egy stabilitási tartalék biztosítása érdekében azt kívánjuk, hogy a DI rendszert leíró rendszeregyenlet sajátértékei egy r sugarú ($r < 1$) körön belül legyenek.

Hogyan tudjuk ellenőrizni ezt a szigorúbb GV stabilitást e szakasz eredményei alapján? Adjunk elegendő feltételt $n=1$ esetén az a_1 együtthatóra és $n=2$ esetén az a_1, a_2 együtthatókra!

F-4. Egy stabilitási tartalék biztosítása érdekében azt kívánjuk, hogy a FI rendszert leíró rendszeregyenlet sajátértékei kielégítsék a $\Re\{\lambda_i\} < \sigma < 0$ feltételt.

Hogyan tudjuk ellenőrizni ezt a szigorúbb GV stabilitást e szakasz eredményei alapján? Adjunk feltételt $n=1$ esetén az a_1 együtthatóra és $n=2$ esetén az a_1, a_2 együtthatókra! A stabilitási tartalékra ennél bonyolultabb feltételek is használatosak.

F-5. Egy DI illetve egy FI rendszer impulzusválasza

$$h[k] = \varepsilon[k] r^k \cos \vartheta k; \quad h(t) = \varepsilon(t) e^{-\alpha t} \cos \omega t.$$

Mit tud a rendszeregyenlet sajátértékeiről állítani? Hogyan módosul a válasz, ha az $\varepsilon[k]$ illetve az $\varepsilon(t)$ szorzótényezőt elhagyjuk?

2.2-3. M. Megoldások

M-1. A rendszerek GV stabilisak. A DI rendszer FIR típusú, a FI rendszer egy erősítő (memóriamentes rendszer).

M-2. A rendszeregyenlet $y^{(1)} = C u$. Az egyetlen sajátérték $\lambda = 0$, amely nem a bal félsíkon (hanem annak határán) fekszik. A rendszer a GV stabilitás határhelyzetében van.

M-3. Ellenőrizzünk egy új karakterisztikus polinomot: $F(r\xi)$. Ennek együtthatói $a'_i = a_i / r^i$. Ha $n = 1$, akkor az elegendő feltétel $|a_1| < r$, ami $\lambda = -a_1$ miatt nyilvánvaló. Ha $n = 2$, akkor a feltételek a (42) értelmében

$$r^2 + r a_1 + a_2 > 0, \quad r^2 - r a_1 + a_2 > 0, \quad r^2 - |a_2| > 0.$$

Ezek egy háromszög alakú tartományt adnak az (a_1, a_2) paramétersíkon, amely a 4. ábra háromszögén belül helyezkedik el.

M-4. Ellenőrizzünk egy új karakterisztikus polinomot: $F(\xi + \sigma)$. Ennek a'_i együtthatói az a_1, a_2, \dots, a_n együtthatóktól és a σ paramétertől függenek. Ha $n = 1$, akkor $a'_1 = a_1 + \sigma$, tehát a stabilitás feltétele $a_1 > -\sigma$, ami $\lambda = -a_1$ miatt nyilvánvaló. Ha $n = 2$, akkor $a'_1 = a_1 + 2\sigma$, $a'_2 = a_2 + \sigma a_1 + \sigma^2$, a feltételek $a_1 > -2\sigma$, $a_2 > -\sigma a_1 - \sigma^2$. A határvonalak az (a_1, a_2) síkon egymást metsző egyenesek, az elegendő feltételt kielégítő pontok természetesen az (a_1, a_2) paramétersík első negyedébe esnek.

M-5. A rendszeregyenletnek $r e^{\pm j\theta}$ illetve $-\alpha \pm j\omega$ egy komplex sajátérték-párja. Lehetnek további sajátértékei is. Ha az impulzusválasz nem belépő, akkor a rendszer nem kauzális, rendszeregyenlete nem lehet az előzőekben tárgyalt alakú.

2.3. Az állapotváltozós leírás

Amint az előző fejezetben láttuk, a rendszeregyenlet a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának egy tömör implicit formája. A rendszeregyenlet megoldására nem adható algoritmus, így például körülményes számítógépes programot készíteni a válasz szabad és gerjesztett összetevőre bontásán alapuló módszerre. A DI rendszeregyenlet numerikusan megoldható a lépésről lépésre módszerrel.

Mint a 2.2. fejezet bevezetőjében már említettük, célszerű a rendszer leírására új változókat, az állapotváltozókat bevezetni. Ez a tárgya ennek a fejezetnek, amelyben lineáris, invariáns, kauzális rendszerekre szorítkozunk.

A 2.5. fejezetben látni fogjuk, hogy az állapotváltozós leírás lényegesen könnyebben általánosítható nemlineáris vagy variáns rendszerekre, mint a rendszeregyenlettel történő leírás. Nemlineáris rendszerek nem írhatók le az impulzusválasszal, amelynek alkalmazása lineáris, variáns rendszerre sem egyszerű. A 3. és 4. részben tárgyalandó frekvenciatartománybeli vagy komplex frekvenciatartománybeli leírás általánosítása nemlineáris vagy variáns rendszerekre gyakorlatilag nem is lehetséges.

A 2.3-1. szakaszban értelmezzük az állapotváltozókat, megadjuk a rendszer állapotváltozós leírásának normálalakját, megmutatjuk a rendszer állapotváltozós leírásainak és rendszeregyenletének kapcsolatait.

A 2.3-2. és a 2.3-3. szakaszban egy-egy módszert adunk a diszkrét idejű, illetve a folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírásának megoldására.

A 2.3-4. szakaszban értelmezzük a rendszer aszimptotikus stabilitását, továbbá kritériumokat adunk ennek eldöntésére.

2.3-1. Alapfogalmak és alapegyenletek

2.3-1.1. Az állapotváltozó fogalma

Új változók bevezetésével megadhatjuk a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának egy implicit alakját, amelynek megoldására több módszer is létezik.

Az előzőek általánosításaként most megengedjük, hogy a rendszernek tetszőleges számú gerjesztése és válasza legyen, mivel ez nem okoz fogalmi nehézséget és egyszerűsíti a jelölést. Egyes esetekben külön megadjuk az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszerre vonatkozó speciális alakot is.

Egy diszkrét idejű illetve egy folytonos idejű rendszer $x_i = x_i[k]$ illetve $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ állapotváltozói olyan változók, amelyek a következő két tulajdonsággal rendelkeznek. Ismerve a rendszer viselkedését leíró egyenleteket és a gerjesztéseket, meg tudjuk határozni az $x_1[k_a], x_2[k_a], \dots, x_N[k_a]$ illetve az $x_1(t_a), x_2(t_a), \dots, x_N(t_a)$ értékek ismeretében

- (1) valamennyi x_i állapotváltozó értékét bármely $k_b > k_a$ illetve $t_b > t_a$ időpontra;
- (2) valamennyi y_i válasz értékét a k_a illetve t_a időpontban.

Az $x_1[k_a], x_2[k_a], \dots, x_N[k_a]$ illetve az $x_1(t_a), x_2(t_a), \dots, x_N(t_a)$ értékek összességét a rendszernek a $k=k_a$ illetve a $t=t_a$ időpontbeli *állapotának* nevezik.

Az N szám a rendszer állapotváltozós leírásának *rendszáma*. Ez rendszerint megegyezik a rendszer rendszerezhetőségének n rendszámával (lásd a 2.3-1.4. pontot). Előnyös, ha a rendszám minél kisebb.

Egy fizikai *objektum* állapotváltozóiként többnyire olyan fizikai változók választhatók, amelyek egy tárolt mennyiséget vagy annak változási sebességét jelentik. Ilyenek például a tömeg vagy a tömegáram, az elektromos töltés vagy áram, raktározott árú mennyisége vagy napi változás, és így tovább. Az állapotváltozó négyzete gyakran a tárolt energiával kapcsolatos. Ilyenek például egy test sebessége vagy mozgásmennyisége, egy rugó ereje vagy megnyúlása, egy kondenzátor töltése vagy feszültsége. A 2.4. fejezetben látni fogjuk, hogy egy *jelfolyam hálózatával* reprezentált rendszer állapotváltozóinak választhatók a DI késleltetők illetve a FI integrátorok kimeneti változói. Néha más választások célszerűek (például az említett változók alkalmas lineárkombinációja), mint ezt a megoldási módszerek során látni fogjuk.

Az itt követett általános tárgyalás során az állapotváltozókat segédváltozóknak tekintjük és nem foglalkozunk jelentésükkel.

2.3-1.2. Diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírása

Egy diszkrét idejű, kauzális rendszer állapotváltozós leírása kifejezi az állapotváltozók $k+1$ ütembeli és a válaszokat a k ütembeli értékét az állapotváltozók és a gerjesztések k ütembeli értékével. Lineáris rendszer esetén ezek a kifejezések lineárisak. A rendszert leíró egyenletek ennek megfelelően

$$x_p[k+1] = \sum_{q=1}^N A_{pq} x_q[k] + \sum_{q=1}^{N_u} B_{pq} u_q[k], \quad p = 1, 2, \dots, N; \quad (2.3-1)$$

$$y_p[k] = \sum_{q=1}^N C_{pq} x_q[k] + \sum_{q=1}^{N_u} D_{pq} u_q[k], \quad p = 1, 2, \dots, N_y; \quad (2.3-2)$$

ahol N az állapotváltozók, N_u a gerjesztések, N_y a válaszok száma.

Ha ismerjük az állapotváltozós leírást (vagyis az A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} , D_{pq} együtthatókat), az állapotváltozókat és a gerjesztéseket a k_a időpontban, akkor behelyettesítéssel meg tudjuk határozni a válaszokat a k_a időpontban, továbbá az állapotváltozókat a k_a+1 időpontban, majd a k_a+2 és így tovább időpontokban - amint azt az állapotváltozók definíciója megköveteli.

Ha a rendszer nem invariáns, akkor az (1) és (2) alakok továbbra is érvényesek, de az A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} , D_{pq} együtthatók a k diszkrét idő ismert függvényei.

Tömörebb alak előállítására érdekében vezessünk be vektorokat és mátrixokat:

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_N[k] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}.$$

Értelem szerinti a többi vektor és mátrix értelmezése is. Az \mathbf{x} , \mathbf{u} és \mathbf{y} állapot-gerjesztés- és válasz-vektor dimenziója rendre N , N_u és N_y . Az \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} és \mathbf{D} mátrixok dimenziója ennek megfelelően rendre $N \times N$, $N \times N_u$, $N_y \times N$ és $N_y \times N_u$.

Alkalmazzuk továbbá az $\mathbf{x}'[k] = \mathbf{x}[k+1]$ eddig is használt jelölést, akkor a következő tömör alakhoz jutunk.

Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer *állapotváltozós leírása*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}.\end{aligned}\quad (2.3-3)$$

Az első sor az *állapotegyenlet*, a második sor a válaszvektor állapotváltozós alakja.

Az \mathbf{x} az *állapotvektor*, a kvadratikus \mathbf{A} mátrix neve *rendszermátrix*.

Pontosabban szólva (3) az állapotváltozós leírás *normálalakja*. A továbbiakban csak a normálalakot nevezzük állapotváltozós leírásnak.

Ha a rendszernek csak egyetlen gerjesztése és egyetlen válasza van, akkor a \mathbf{B} mátrixnak csak egyetlen oszlopa van, vagyis egy \mathbf{B} vektor; a \mathbf{C} mátrixnak csak egyetlen sora van vagyis egy \mathbf{C}^T sorvektor (egy \mathbf{C} oszlopvektor transzponáltja), a \mathbf{D} mátrixnak csak egy sora és egy oszlopa van, vagyis egy D skalár. Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer állapotváltozós leírása ezek szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \\ y &= \mathbf{C}^T \mathbf{x} + D \mathbf{u}.\end{aligned}\quad (2.3-4)$$

Rendszerint a $k \in \mathbf{N}$ ütemekre akarjuk a válaszokat meghatározni. Ehhez ismernünk kell az $\mathbf{x}[0]$ *kezdeti állapotot*, azaz az $x_1[0], x_2[0], \dots, x_N[0]$ kezdeti értékeket. Ha minden gerjesztés a $k = 0$ helyen *belépő*, akkor $\mathbf{u}[-1] = \mathbf{0}$. A kauzalitás következtében $\mathbf{x}[-1] = \mathbf{0}$. Ezeket és a $k = -1$ ütemet a (3)-ba helyettesítve kapjuk, hogy

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{0}, \quad k \in \mathbf{Z}_- \Rightarrow \mathbf{x}[0] = \mathbf{0}.\quad (2.3-5)$$

Ha $k = 0$ előtt a gerjesztés *állandó*, azaz ha $\mathbf{u}[k] = \mathbf{u}^-, k \in \mathbf{Z}_-$ és a rendszer aszimptotikusan stabilis (2.3-4. szakasz), akkor ott az állapotvektor is állandó, tehát $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^-, k \in \mathbf{Z}_-$. Az állapotegyenletbe helyettesítve $\mathbf{x}^- = \mathbf{A} \mathbf{x}^- + \mathbf{B} \mathbf{u}^-$. Ebből $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}^-$ kifejezhető (alább \mathbf{I} az N -dimenziós egységmátrix)

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{u}^-, \quad k \in \mathbf{Z}_- \Rightarrow \mathbf{x}[0] = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}^-. \quad (2.3-6)$$

Ha a gerjesztés (a gerjesztések egyike) szakaszonként adott, mint például

$$\mathbf{u}[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k - k_1]) \mathbf{f}_1[k] + \varepsilon[k - k_1] \mathbf{f}_2[k], \quad (2.3-7)$$

akkor az eljárás a következő. Először megoldjuk az állapotegyenletet a $0 \leq k < k_1$ intervallumban, ahol a gerjesztés $\mathbf{f}_1[k]$, a kezdeti érték $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$. Ez az $\mathbf{x}[k]$ a k_1 helyen is érvényes, hiszen az $\mathbf{x}[k_1 - 1]$ és $\mathbf{u}[k_1 - 1]$ által meghatározott. Ez lesz az $\mathbf{x}[k_1]$ a kezdeti érték a $k_1 \leq k < \infty$ intervallumban. Hasonlóan járunk el több intervallum esetén.

A diszkrét idejű rendszeregyenlet numerikusan megoldható *lépésről lépésre*. Ehhez helyettesítsük $k = 0, 1, 2, \dots$ értékét a (3) egyenletekbe

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C} \mathbf{x}[k] + \mathbf{D} \mathbf{u}[k], \quad \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} \mathbf{u}[k].$$

A következő összefüggések adódnak:

$$\begin{aligned}
 k=0; & \quad \mathbf{y}[0] = \mathbf{C} \mathbf{x}[0] + \mathbf{D} \mathbf{u}[0], & \mathbf{x}[1] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[0] + \mathbf{B} \mathbf{u}[0], \\
 k=1; & \quad \mathbf{y}[1] = \mathbf{C} \mathbf{x}[1] + \mathbf{D} \mathbf{u}[1], & \mathbf{x}[2] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[1] + \mathbf{B} \mathbf{u}[1], \\
 k=2; & \quad \mathbf{y}[2] = \mathbf{C} \mathbf{x}[2] + \mathbf{D} \mathbf{u}[2], & \mathbf{x}[3] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[2] + \mathbf{B} \mathbf{u}[2], \\
 & \quad \vdots & &
 \end{aligned}
 \tag{2.3-8}$$

Minden lépésnél csak ismert vagy előzetesen már meghatározott értékek szerepelnek. Minden k értéknél $N_y + N$ helyettesítési értéket kell számítanunk. Ha $N_y = 1$, akkor ez $N + 1$ számú helyettesítési értéket jelent. Emlékeztetőül: ha a választ konvolúcióval számítjuk, akkor a k -edik ütemben $k + 1$ helyettesítési értéket, a rendszeregyenlet megoldásakor minden ütemben $n + m$ helyettesítési értéket kell számítanunk.

Az eljárás nagyon egyszerű, jól programozható. Az eredmény alapján azonban gyakran nehéz képet kapni a rendszer viselkedésének általános jellegzetességeiről.

Az eljárás variáns rendszer esetén is alkalmazható, amikor a mátrixok elemei a diszkrét idő ismert függvényei.

Példa Legyen egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,50 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u.$$

A gerjesztés belépő, majd exponenciálisan csökkenő:

$$u[k] = \varepsilon[k](0,5)^k.$$

A (8) séma és $x_1[0] = x_2[0] = 0$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 y[0] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 = 1,00, & \begin{bmatrix} x_1[1] \\ x_2[1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,50 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,50 \end{bmatrix}; \\
 y[1] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,50 \end{bmatrix} + 0,5 = 2,00, & \begin{bmatrix} x_1[2] \\ x_2[2] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,50 \end{bmatrix} 0,5 = \begin{bmatrix} -0,48 \\ 2,01 \end{bmatrix}; \\
 y[2] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,48 \\ 2,01 \end{bmatrix} + 0,25 = 2,26, \dots
 \end{aligned}$$

Később be fogjuk látni, hogy a válasz nullához tart. A lépésről lépésre módszer alkalmazásával ennek belátásához még sok lépésre van szükség. #

2.3-1.3. Folytonos idejű rendszerek állapotváltozós leírása

A folytonos idejű, kauzális, differenciális rendszer állapotváltozós leírása kifejezi az állapotváltozók első deriváltját („sebességét”) és a válaszokat bármely t időpontban az állapot-változóknak és a gerjesztéseknek ugyanezen t időpontbeli értékeivel. Lineáris rendszer esetén ezek a kifejezések lineárisak, invariáns esetben az együtthatók az időtől függetlenek. A rendszert leíró egyenletek ennek megfelelően

$$x_p'(t) = \sum_{q=1}^N A_{pq} x_q(t) + \sum_{q=1}^{N_u} B_{pq} u_q(t), \quad p=1, 2, \dots, N_y; \tag{2.3-9}$$

$$y_p(t) = \sum_{q=1}^N C_{pq} x_q(t) + \sum_{q=1}^{N_u} D_{pq} u_q(t), \quad p=1, 2, \dots, N_y, \tag{2.3-10}$$

ahol N az állapotváltozók, N_u a gerjesztések, N_y a válaszok száma. Nem differenciális rendszerek állapotváltozós leírása másféle tagokat is tartalmazhat mint például $x_g(t-T)$. Ilyen rendszereket ebben a részben nem tárgyalunk. A nem differenciális rendszereket a frekvencia- vagy a komplex frekvenciatartományban célszerű leírni.

Ha ismerjük az állapotváltozós leírást (vagyis az A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} , D_{pq} együtthatókat), az állapotváltozókat és a gerjesztéseket a t_a időpontban, akkor meg tudjuk határozni az állapotváltozók $x'_p(t_a)$ deriváltját a t_a időpontban. Ennek ismeretében közelítőleg kifejezhető $x_p(t_a + dt) \approx x_p(t_a) + x'_p(t_a) dt$, és pedig annál kisebb hibával, minél kisebb dt értéket választunk. Ez lehetővé teszi minden $x_p(t_b)$ számítását bármely t_b időpontban. Valamennyi $x_p(t_a)$ ismeretében számíthatók a válaszok is a t_a időpontban. A megadott leírás ezek szerint eleget tesz az állapotváltozókkal szemben támasztott két követelménynek.

Ha a rendszer variáns, akkor (9) és (10) érvényes marad, de ekkor az együtthatók a t idő ismert függvényei.

Az előző pontban látotthoz hasonló módon tömörebb alakhoz jutunk vektorok és mátrixok bevezetésével.

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns, differenciális, kauzális rendszer *állapotváltozós leírása*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.3-11)$$

Az első sor az *állapotegyenlet*, a második sor a válaszvektor állapotváltozós alakja.

Az \mathbf{x} az *állapotvektor*, a kvadratikus \mathbf{A} neve *rendszermátrix*.

Pontosabban szólva: a (11) az állapotváltozós leírás *normálalakja*. A továbbiakban csak a normálalakot nevezzük állapotváltozós leírásnak.

Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer állapotváltozós leírása (4) mintájára

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u, \\ y &= \mathbf{C}^T \mathbf{x} + D u. \end{aligned} \quad (2.3-12)$$

Az esetek többségében a választ a t pozitív értékeire akarjuk meghatározni. Ehhez ismernünk kell az $\mathbf{x}(+0)$ *kezdeti állapotot*, amelyhez viszont először meg kell határozni az $\mathbf{x}(-0)$ *kiindulási állapotot* (2.3-2. 4. pont). Ha minden gerjesztés *belépő*, akkor minden $x_1(-0), x_2(-0), \dots, x_N(-0)$ érték nulla:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, t \in \mathbf{R}_- \Rightarrow \mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}. \quad (2.3-13)$$

Ha a $t = 0$ időpont előtt a gerjesztés állandó, azaz ha $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^-, t \in \mathbf{R}_-$ és a rendszer aszimptotikusan stabilis (2.3-4. szakasz), akkor $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^-, \mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}, t \in \mathbf{R}_-$ és az állapotegyenletből következik, hogy

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, t \in \mathbf{R}_- \Rightarrow \mathbf{x}(-0) = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}^- . \quad (2.3-14)$$

Ha a gerjesztés szakaszonként adott, mint például

$$u(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_1)] f_1(t) + \varepsilon(t - t_1) f_2(t), \quad (2.3-15)$$

akkor az eljárás a következő. Először megoldjuk az állapotegyenletet a $0 < t < t_1$ intervallumban. Ennek megoldása adja azt az $\mathbf{x}(t_1 - 0)$ értéket, amely a $t_1 < t < \infty$ intervallumra a kiindulási érték. Értelem szerinti az általánosítás több intervallumra.

A folytonos idejű állapotegyenlet megoldására nincs olyan elemi módszer, mint a DI lépésről lépésre eljárás. Közelítő módszereket a 2.3-3.8. és a 2.5-2.5. pontban fogunk tárgyalni.

A FI rendszer állapotváltozós leírását lényegesen könnyebb kezelni, mint a rendszeregyenletét. Az állapotváltozós leírásban csak a gerjesztések és a válaszok maguk, valamint az állapotváltozók első deriváltja szerepel. Ha a gerjesztések korlátosak véges időre (például nem tartalmazzák a Dirac-impulzust), akkor minden $x'_p(t)$ véges, minden $x_p(t)$ függvény folytonos (még a $t = 0$ időpontban is). Ha a gerjesztés Dirac-impulzust is tartalmaz (például az impulzusválasz számításakor), akkor a $t = 0$ helyen $x'_p(t)$ nem véges, az $x_p(t)$ jelek a $t = 0$ hely kivételével folytonos függvények. Ez lényeges egyszerűsítést jelent a rendszeregyenlethez képest, amelynél a gerjesztés és a válasz magasabb rendű deriváltjai is fellépnek, aminek kellemetlen következményei vannak, ha a gerjesztés nem folytonos és különösen, ha még Dirac-impulzust is tartalmaz.

A DI esetben a kétféle leírás közötti különbség nem annyira alapvető. Egy DI jel eltolása egy vagy több ütemmel egyszerű, mindig elvégezhető művelet.

A 2.3-3. szakaszban látni fogjuk, hogy a válasz számítása az állapotváltozós leírás megoldásával egyszerűbb mint a rendszeregyenlet megoldásával, az eljárás jól algoritmizálható mind a DI, mind a FI esetben.

*2.3-1.4. Új állapotváltozók bevezetése

Tekintsük adottnak akár a DI, akár az FI rendszer állapotváltozós leírásának formálisan közös

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

normálalakját. Az N számú x_i állapotváltozó helyett bevezethetünk ugyancsak N számú \hat{x}_i új állapotváltozót egy kvadratikus, N -dimenziós, nonszinguláris (azaz invertálható), egyébként tetszőleges \mathbf{T} mátrixszal $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ alakban. Mivel $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}}$, ezért az állapotegyenletet \mathbf{T} -vel balról szorozva

$$(\dot{\hat{\mathbf{x}}}) = (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{T}\mathbf{B})\mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}.$$

adódik. Ezek szerint a rendszer egy másik állapotváltozós leírásának állapotvektora és együttható-mátrixai

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x} \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B}, \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}, \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}. \quad (2.3-16)$$

Ebből következik, hogy egy rendszer állapotváltozói sokféleképpen megválaszthatók. Az objektum alapján értelmezett x_i állapotváltozóknak rendszerint van fizikai jelentésük, az \hat{x}_i új állapotváltozóknak rendszerint nincs.

A \mathbf{T} transzformációs mátrix alkalmas megválasztásával az állapotváltozós leírás a megoldás vagy a realizálás szempontjából előnyös alakra hozható. Egy fontos esetet a 2.3-3.7. pontban tárgyalunk.

*2.3-1.5. Az állapotváltozós leírás és a rendszeregyenlet kapcsolatai

Eddig két implicit alakot tárgyaltunk az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer implicit gerjesztés-válasz kapcsolatára. Az egyik a *rendszeregyenlet* :

$$\begin{aligned} \text{DI: } y[k] + \sum_{i=1}^N a_i y^{(i)}[k] &= \sum_{i=0}^N b_i u^{(i)}[k], \\ \text{FI: } y^{(N)}(t) + \sum_{i=0}^{N-1} a_{N-i} y^{(i)}(t) &= \sum_{i=0}^N b_{N-i} u^{(i)}(t). \end{aligned} \quad (2.3-17)$$

Itt a DI esetben $N = \max(m, n)$, a FI esetben $N = n$. A másik implicit alak az *állapotváltozós leírás*:

$$\begin{aligned} \text{DI: } \mathbf{x}'[k] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} u[k], & y[k] &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}[k] + D u[k]; \\ \text{FI: } \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t), & y(t) &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}(t) + D u(t). \end{aligned} \quad (2.3-18)$$

Itt \mathbf{x} az N -dimenziós állapotvektor.

Célunk az egyik leírás ismeretében a másik előállítás.

Az állapotváltozós leírás előállítása a rendszeregyenletből

Tekintsük adottnak a rendszer (17) rendszeregyenletét. Célunk a rendszer egy (18) szerinti állapotváltozós leírásának előállítása.

A rendszeregyenletet $2N+1$ számú a_i, b_i együttható jellemzi. Az állapotváltozós leírás jellemzői az \mathbf{A} rendszermátrix (N^2 adat), a \mathbf{B} és \mathbf{C} vektor ($N+N$ adat) és a D skalár (1 adat), összesen $N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$ számú adat. Ebből már következik, hogy egy rendszeregyenlethez sok (sőt végtelenül sok) állapotváltozós leírás tartozik.

Itt a két, igen egyszerű szerkezetű *Frobenius*-alakot adjuk meg, amelyek DI és FI rendszerekre egyaránt érvényesek. Az első Frobenius-alak mátrixai

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_1^T &= [b_N - b_0 a_N \quad b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \quad \dots \quad b_1 - b_0 a_1], & D_1 &= b_0. \end{aligned} \quad (2.3-19)$$

A második Frobenius-alak mátrixai az elsőből transzponálással adódnak:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_1^T, & \mathbf{B}_2 &= \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{C}_2 &= \mathbf{B}_1, & D_2 &= D_1. \end{aligned} \quad (2.3-20)$$

Az első Frobenius-alak előnye, hogy az állapotegyenlet egyszerűbb (a gerjesztés csak x'_N kifejezésében szerepel). A második Frobenius-alak előnye, hogy a válasz kifejezéséhez csak az x_N állapotváltozó ismerete szükséges.

A második Frobenius-alak igazolása

Diszkrét idejű esetben a második Frobenius-alak igazolásához vezessük be a következő állapotváltozókat:

$$\begin{aligned}x_1 &= -a_N y^{(1)} + b_N u^{(1)}, \\x_2 &= -a_N y^{(2)} - a_{N-1} y^{(1)} + b_N u^{(2)} + b_{N-1} u^{(1)}, \\&\vdots \\x_N &= -a_N y^{(N)} - \dots - a_1 y^{(1)} + b_N u^{(N)} + \dots + b_1 u^{(1)}.\end{aligned}$$

Összevetve az utolsó egyenletet a DI rendszeregyenlettel, látható, hogy $y = x_N + b_0 u$, ezért a (20)-ban C^T és D kifejezése helyes. Fejezzük ki az $x_i[k+1] \equiv x_i'[k]$ változókat és vegyük figyelembe $y[k]$ kifejezését, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}x_1' &= -a_N y + b_N u = -a_N x_N + (b_N - b_0 a_N) u, \\x_2' &= -a_N y^{(1)} - a_{N-1} y + b_N u^{(1)} + b_{N-1} u = x_1 - a_{N-1} x_N + (b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) u, \\&\vdots \\x_N' &= -a_N y^{(N-1)} - \dots - a_1 y + b_N u^{(N-1)} + \dots + b_1 u = x_{N-1} - a_1 x_N + (b_1 - b_0 a_1) u.\end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a DI esetben az A és B kifejezése (20)-ban helyes.

Folytonos idejű esetben a második Frobenius-alak alak igazolásához vezessük be a következő új állapotváltozókat:

$$\begin{aligned}x_N &= y - b_0 u, \\x_{N-1} &= y^{(1)} + a_1 y - b_0 u^{(1)} - b_1 u, \\&\vdots \\x_1 &= y^{(N-1)} + a_1 y^{(N-2)} + \dots + a_{N-1} y - b_0 u^{(N-1)} - \dots - b_{N-1} u.\end{aligned}$$

Az x_N definíciójából következik, hogy $y = x_N + b_0 u$, vagyis (20)-ban a C^T és D kifejezése helyes. Fejezzük ki az x_i' változókat figyelembe véve a rendszeregyenletet és y kifejezését is:

$$\begin{aligned}x_1' &= y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + \dots + a_{N-1} y^{(1)} - b_0 u^{(N)} - \dots - b_{N-1} u^{(1)} = \\&= -a_N y + b_N u = -a_N x_N + (b_N - b_0 a_N) u, \\x_2' &= y^{(N-1)} + a_1 y^{(N-2)} + \dots + a_{N-2} y^{(1)} - b_0 u^{(N-1)} - \dots - b_{N-2} u^{(1)} = \\&= x_1 - a_{N-1} y + b_{N-1} u = x_1 - a_{N-1} x_N + (b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) u,\end{aligned}$$

és így tovább. Ez megfelel az állapotegyenlet (20) szerinti alakjának.

A (19) szerinti első Frobenius-alak igazolása DI vagy FI esetben valamivel körülményesebb. Ezt a 4.2-1.3. pontra halasztjuk, ahol a komplex frekvenciatartománybeli leírást fogjuk felhasználni. Azzal a (20) alak igazolása is jóval egyszerűbb, mint az előzőleg bemutatott volt.

A rendszeregyenlet előállítás az állapotváltozós leírásból

Tekintsük ismertnek a rendszer (18) állapotváltozós leírását, célunk ebből a rendszer (17) rendszeregyenletének előállítását.

A DI esetben fejezzük ki az $y[k]$ választ, majd ebből $y[k+1], y[k+2], \dots, y[k+N]$ kifejezését. Az állapotegyenlet felhasználásával $\mathbf{x}[k+1]$ kifejezhető $\mathbf{x}[k]$ segítségével. Például

$$y[k+1] = \mathbf{C}^T \mathbf{x}[k+1] + D u[k+1] = \mathbf{C}^T \{ \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} u[k] \} + D u[k+1].$$

Az eljárás eredménye a következő lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} y[k] &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}[k] + D u[k], \\ y[k+1] &= \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{C}^T \mathbf{B} u[k] + D u[k+1], \\ &\vdots \\ y[k+N] &= \mathbf{C}^T \mathbf{A}^N \mathbf{x}[k] + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} u[k] + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} u[k+1] + \\ &\quad + \dots + \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{B} u[k+N-2] + \mathbf{C}^T \mathbf{B} u[k+N-1] + D u[k+N]. \end{aligned} \quad (2.3-21)$$

Az egyenletrendszerben szereplő ismeretlenek $x_i[k], i=1, 2, \dots, N$ és $y[k+N]$, míg $y[k], y[k+1], \dots, y[k+N-1]$ ismertnek tekintendő. Az $y[k+N]$ kifejezése

$$\begin{aligned} y[k+N] &= b_0 u[k+N] + b_1 u[k+N-1] + \dots + b_N u[k] - \\ &\quad - a_1 y[k+N-1] - a_2 y[k+N-2] - \dots - a_N y[k] \end{aligned} \quad (2.3-22)$$

alakú lesz. Helyettesítsünk k helyére $k-N$ változót, akkor megkaptuk a rendszeregyenlet (17) alakját. A (22) alak bizonyos szempontból logikusabb a (17) alaknál, de az utóbbi az elterjedtebb.

Az eljárás analóg a FI esetben is, csak ekkor az $y(t)$ deriváltjait számítjuk és kifejezzük az $\mathbf{x}'(t)$ deriváltat az állapotegyenletből. A lineáris egyenletrendszer ekkor a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}(t) + D u(t), \\ y^{(1)}(t) &= \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{B} u(t) + D u^{(1)}(t), \\ &\vdots \\ y^{(N)} &= \mathbf{C}^T \mathbf{A}^N \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} u(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} u^{(1)}(t) + \\ &\quad + \dots + \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{B} u^{(N-2)}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{B} u^{(N-1)}(t) + D u^{(N)}(t). \end{aligned} \quad (2.3-23)$$

Az egyenletrendszert megoldva az $y^{(N)}(t)$ változóra, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y^{(N)}(t) &= b_N u(t) + b_{N-1} u^{(1)}(t) + \dots + b_0 u^{(N)}(t) - \\ &\quad - a_N y(t) + a_{N-1} y^{(1)}(t) - \dots - a_1 y^{(N-1)}(t). \end{aligned} \quad (2.3-24)$$

Ez éppen a (17) szerinti rendszeregyenlet.

A 4. részben más módszert is be fogunk mutatni a rendszeregyenletnek az állapotváltozós leírásból történő előállítására. Ott a közvetlen cél a rendszer átviteli függvényének az állapotváltozós leírásból történő előállítása lesz, de előbbiből a rendszeregyenlet már közvetlenül adódik.

2.3-1.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a 2.3-1.2. pont példájában tárgyalt DI rendszer válaszát a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ütemekre, ha a gerjesztés $u[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3])(0,5)^k$

F-2. Határozza meg az állapotváltozók értékét az előző feladatban a $k = 2$ ütemre, amely után a gerjesztés azonosan nulla. Ezek tekinthetők kezdeti értékeknek a $k = 3$ ütemtől gerjesztetlen rendszer vizsgálatához.

***F-3.** Határozza meg annak a DI rendszernek az állapotváltozós leírását, amelynek rendszeregyenlete $y - y^{(1)} + 0,24y^{(2)} = u + 0,5u^{(1)} - 0,2u^{(3)}$.

***F-4.** Határozza meg annak a DI rendszernek a rendszeregyenletét, ha az állapotváltozós leírása az előző feladat eredménye.

***F-5.** Mi a feltétele annak, hogy az A rendszermátrix első sora, illetve első oszlopa nulla legyen a (19), illetve a (20) szerinti leírásban? Külön kell vizsgálni a DI és FI esetet!

2.3-1.M. Megoldások

M-1. A $k = 0, 1$ és 2 ütemekre ugyanaz, mint a példában, $y[3] = 1, 905$ és $y[4] = 1, 3626$.

M-2. A példa eredményét felhasználva $x_1[2] = -0,48, x_2[2] = 2,01$.

***M-3.** Esetünkben $n = 2, m = 3$ és $N = 3$ következnek. A (19) szerinti Frobenius-alak

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,24 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} -0,2 & -0,24 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u.$$

A(20) szerinti Frobenius-alak ebből transzponálással adódik.

***M-4.** A (21) lineáris egyenletrendszer az $y^{(-i)}[k] \equiv y[k+i]$ jelölés alkalmazásával a következő:

$$y = -0,2 x_1 - 0,24 x_2 + 1,5 x_3 + u,$$

$$y^{(-1)} = -0,2 x_2 - 0,24 x_3 + 1,5 (-0,24 x_2 + x_3 + u) + u^{(-1)} = -0,56 x_2 + 1,26 x_3 + 1,5 u + u^{(-1)},$$

$$y^{(-2)} = -0,56 x_3 + 1,26 (-0,24 x_2 + x_3 + u) + 1,5 u^{(-1)} + u^{(-2)},$$

$$y^{(-3)} = -0,3024 x_3 + 0,70 (-0,24 x_2 + x_3 + u) + 1,26 u^{(-1)} + 1,5 u^{(-2)} + u^{(-3)}.$$

Az x_1 ismeretlen csak az első egyenletben szerepel, amely el is hagyható. Ennek következtében $y[k+3]$ kifejezésében y nem fog szerepelni, vagyis a rendszeregyenlet nem tartalmaz $y[k-3]$ típusú tagot. Természetesen visszkapjuk az F-3. feladatban megadott rendszeregyenletet.

***M-5.** Az első sor vagy oszlop nulla a DI esetben: ha $m > n$ (F-4. feladat), a FI esetben: ha $y(t)$ nem szerepel a rendszeregyenlet differenciális alakjában, csak a deriváltjai.

2.3-2. Az állapotváltozós leírás megoldása összetevőkre bontással

2.3-2.1. Általános megfontolások

Az előző szakaszban megfogalmaztuk a lineáris, invariáns, kauzális (FI esetben: differenciális) rendszer állapotváltozós leírását. Az állapotegyenlet normálalakja

$$\begin{aligned} \text{DI: } \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} \mathbf{u}[k]; \\ \text{FI: } \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (2.3-25)$$

Ha ennek megoldásaként az $\mathbf{x}[k]$, illetve az $\mathbf{x}(t)$ állapotvektor időfüggése már ismert, akkor az $\mathbf{y}[k]$, illetve az $\mathbf{y}(t)$ válaszvektor számítása már csak behelyettesítést igényel:

$$\begin{aligned} \text{DI: } \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C} \mathbf{x}[k] + \mathbf{D} \mathbf{u}[k]; \\ \text{FI: } \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (2.3-26)$$

Ebben és a következő szakaszban egy-egy módszert mutatunk be a DI, illetve a FI *állapotegyenlet* megoldására a $k \in \mathbf{N}$, illetve a $t \in \mathbf{R}_+$ intervallumban. Ismertnek tekintjük egyrészt a gerjesztéseket ugyanitt, másrészt a DI állapotvektor $\mathbf{x}[-1]$, illetve a FI állapotvektor $\mathbf{x}(-0)$ kiindulási értékét. Bekapcsolási folyamat estén (amikor $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ a k , illetve a t negatív értékeire) a kiindulási állapot nulla.

Mint már láttuk (2.3-1.2. pont) a DI állapotváltozós leírás megoldható a lépésről lépésre módszerrel. Később látni fogjuk, hogy a FI állapotváltozós leírás is megoldható a $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$ időpontokbeli $\mathbf{x}(t_k)$ és $\mathbf{y}(t_k)$ értékek közelítő számításával (2.5-2.5. pont). Most azonban az a célunk, hogy formulát találjunk az állapotvektor és a válaszvektor időfüggvényére. Ez lehetővé teszi az aszimptotikus viselkedés vizsgálatát, továbbá tetszőleges időpontban felvett érték számítását.

Ebben a szakaszban azt mutatjuk meg, hogy miként állítható elő az állapotvektor egy \mathbf{x}_f szabad összetevő és egy \mathbf{x}_g gerjesztett összetevő összegeként:

$$\begin{aligned} \text{DI: } \mathbf{x}[k] &= \mathbf{x}_f[k] + \mathbf{x}_g[k]; \\ \text{FI: } \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{x}_g(t). \end{aligned} \quad (2.3-27)$$

Ez a módszer csak egyszerű függvénnyel leírható gerjesztés esetén kényelmes. A gyakorlatban előforduló feladatok jelentékeny része szerencsére ilyen. A módszer analóg a rendszeregyenlet megoldásánál leírttal (2.2-2. szakasz), de a továbbiakban nem feltételezzük az ott leírtak ismeretét, ami ezáltal némi ismétlésre vezet.

A következő szakaszban egy mátrixfüggvényeket alkalmazó módszert tárgyalunk, amely nem csak akkor használható, ha a gerjesztést egyszerű függvény írja le.

Mindkét eljárást alkalmazhatjuk úgy is, hogy az állapotváltozós leírás ismeretében először meghatározzuk a rendszer impulzusválaszát. Ennek birtokában a tetszőleges gerjesztéshez tartozó válasz DI, illetve FI konvolúcióval számítható (2.1. fejezet). Az impulzusválasz számítását ezért mindkét módszernél külön részletezzük.

Az összetevőkre bontás módszere és a mátrixfüggvényes módszer bármelyike alkalmazható a másik ismerete nélkül.

2.3-2.2. A szabad összetevő számítása

Az állapotvektor \mathbf{x}_f *szabad összetevője* (más néven gerjesztetlen összetevője, természetes összetevője) a gerjesztetlen rendszer ($u = 0$) állapotváltozóját jelenti, vagyis az állapotegyenlet homogén megfelelőjének, a

$$\text{DI: } \mathbf{x}_f[k+1] = \mathbf{A} \mathbf{x}_f[k]; \quad \text{FI: } \mathbf{x}'_f(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}_f(t)$$

differenciaegyenletnek illetve differenciálegyenletnek az általános megoldását. Keressünk ezt exponenciális függvény alakjában:

$$\text{DI: } \mathbf{x}_f[k] = \mathbf{m} \lambda^k; \quad \text{FI: } \mathbf{x}_f(t) = \mathbf{m} e^{\lambda t}, \quad (2.3-28)$$

ahol λ a meghatározandó ismeretlen, az \mathbf{m} vektor (az egyenlet homogén jellege miatt) egy állandó szorzó erejéig határozatlan. Az állapotegyenlet homogén megfelelőjébe helyettesítve

$$\text{DI: } \mathbf{m} \lambda^{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{m} \lambda^k; \quad \text{FI: } \mathbf{m} \lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{m} e^{\lambda t}.$$

A biztosan nem nulla exponenciális tényezővel egyszerűsítve, a DI és az FI esetben egyaránt az

$$\mathbf{A} \mathbf{m} = \lambda \mathbf{m}$$

lineáris algebrai egyenlet adódik. Ez azt jelenti, hogy \mathbf{m} egy olyan vektor, amelyet az \mathbf{A} mátrixszal kifejezett lineáris transzformáció λ -szorosára nyújt, de nem forgat el. (Ez a megfogalmazás csak addig szemléletes, amíg λ és \mathbf{m} minden rendezője valós értékű.) Minden ilyen λ az \mathbf{A} mátrix egy *sajátértéke*, a hozzátartozó \mathbf{m} az \mathbf{A} egy *sajátvektora*. A rájuk vonatkozó egyenlet nullára redukált alakja

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (2.3-29)$$

ahol \mathbf{I} az N -dimenziós egységmátrix (minden főátlós eleme 1, minden más eleme 0). E homogén lineáris egyenletrendszernek csak akkor van a triviálisról ($\mathbf{m} = \mathbf{0}$) különböző megoldása, ha az együttható mátrix nem szinguláris, vagyis ha a mátrix determinánusa nulla:

$$D(\lambda) \equiv \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (2.3-30)$$

Ez az \mathbf{A} mátrix *karakterisztikus egyenlete*, amely egy N -edfokú algebrai egyenlet. Például $N = 2$ esetén:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \lambda - A_{22} \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

A $D(\lambda)$ az \mathbf{A} mátrix *karakterisztikus polinomja*, amelynek általános alakja

$$D(\lambda) = \lambda^N + d_1 \lambda^{N-1} + d_2 \lambda^{N-2} + \dots + d_{N-1} \lambda + d_N. \quad (2.3-31)$$

Ismeretes, hogy egy N -edfokú egyenletnek pontosan N számú gyöke van:

$$D(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N. \quad (2.3-32)$$

Mivel az egyenlet d_p együtthatói valósak, ezért a λ_i gyökei – vagyis a keresett sajátértékek – vagy valósak vagy konjugált komplex párokat alkotnak. Szorítkozzunk

egyelőre arra az esetre, amikor a karakterisztikus egyenlet minden gyöke egymástól különböző, vagyis amikor minden λ_i sajátérték *egyszeres*:

$$\lambda_p \neq \lambda_q, \quad p \neq q. \quad (2.3-33)$$

Az általánosabb esetre a 2.3-2.5. pontban még visszatérünk. Zárjuk ki továbbá azt az esetet, amikor a DI esetben nulla egy sajátérték (lásd az 5. példát).

A λ_i sajátértékhez tartozó \mathbf{m}_i *sajátvektor* a (29) homogén lineáris egyenletrendszer egy megoldása. Ennek előállításához az N számú egyenlet egyikét elhagyjuk és \mathbf{m}_i egyik rendezőjét ismertnek tekintjük. Például az N -edik egyenletet elhagyva és $(\mathbf{m}_i)_N = 1$ választással a következő lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i - A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1(N-1)} \\ -A_{21} & \lambda_i - A_{22} & \dots & -A_{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -A_{(N-1)1} & -A_{(N-1)2} & \dots & \lambda_i - A_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{i,1} \\ m_{i,2} \\ \vdots \\ m_{i,(N-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1N} \\ A_{2N} \\ \vdots \\ A_{(N-1),N} \end{bmatrix}; \quad i=1,2,\dots,N. \quad (2.3-34)$$

Ha ez az egyenletrendszer nem megoldható, akkor az \mathbf{m}_i egy másik rendezőjét választjuk egységnyinek. Konjugált komplex λ_i, λ_i^* sajátérték-párhoz konjugált komplex $\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i^*$ sajátvektor-pár tartozik.

A számítógépes programcsomagok közvetlenül szolgáltatják a kvadratikus A mátrix összes sajátértékét és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat. Utóbbiak rendszerint úgy vannak normálva, hogy abszolút értékük egységnyi.

Az egyszeres sajátértékek és a hozzájuk tartozó sajátvektorok mindegyike egy $\mathbf{m}_i \lambda_i^k$ illetve $\mathbf{m}_i e^{\lambda_i t}$ alakú szabad összetevőt jelent. Az állapotegyenlet linearitása miatt ezek lineárkombinációja is megoldás, azaz

$$DI: \mathbf{x}_i[k] = \sum_{i=1}^N K_i \mathbf{m}_i \lambda_i^k; \quad FI: \mathbf{x}_i(t) = \sum_{i=1}^N K_i \mathbf{m}_i e^{\lambda_i t}. \quad (2.3-35)$$

A K_i együtthatók tetszőlegesek. Igazolható, hogy ez a szabad összetevő *általános* alakja, vagyis az állapotegyenlet homogén megfelelőjének más alakú megoldása nincs. Az N számú K_i együttható meghatározására később kerül sor. A λ_i^k , illetve az $e^{\lambda_i t}$ az A mátrix *sajátfüggvénye* DI illetve FI esetben.

1. példa Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1' = -0,24 x_2 - 0,24 u, \quad x_2' = x_1 + x_2 + 1,50 u; \quad y = x_2 + u.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k](0,5)^k$.

A rendszer mátrix, ennek karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \det[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0,24 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \equiv \lambda^2 - \lambda + 0,24 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,6, \quad \lambda_2 = 0,4.$$

A sajátvektorok meghatározására szolgáló egyenlet

$$\lambda_i m_{i,1} + 0,24 m_{i,2} = 0 \quad \text{vagy} \quad -1 m_{i,1} + (\lambda_i - 1) m_{i,2} = 0.$$

Ezek szerint $m_{i,1} = (-0,24/\lambda_i)m_{i,2}$ vagy $m_{i,1} = (\lambda_i - 1)m_{i,2}$. Ebből $m_{i,2} = 1$ választással bármelyik egyenlet alapján $m_{1,1} = -0,4$, $m_{2,1} = -0,6$. A két sajátvektor tehát például

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} -0,4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} -0,6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Számítógéppel valószínűleg $\mathbf{m}_1 = [-0,371 \quad 0,928]^T$, $\mathbf{m}_2 = [-0,514 \quad 0,857]^T$ adódik. Az állapotvektor szabad összetevőjének általános alakja ezek szerint

$$x_{t,1}[k] = K_1(-0,4)(0,6)^k + K_2(-0,6)(0,4)^k, \quad x_{t,2}[k] = K_1(0,6)^k + K_2(0,4)^k.$$

A K_1, K_2 együtthatók egyelőre ismeretlenek, ezeket a későbbiekben fogjuk számítani. #

2. példa Egy FI rendszer állapotváltozás leírása

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -3x_1 - 4x_2 + u; \quad y = x_1 + 5x_2.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u(t) = \varepsilon(t)$.

A rendszermátrix és karakterisztikus egyenlete továbbá a karakterisztikus egyenlet megoldásaiként adódó sajátértékek

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}; \quad \det[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 4 \end{bmatrix} \equiv \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3.$$

A sajátvektorok meghatározására vonatkozó egyenlet

$$\lambda_i m_{i,1} - m_{i,2} = 0 \quad \text{vagy} \quad 3m_{i,1} + (\lambda_i + 4)m_{i,2} = 0.$$

Bármelyik egyenletből $m_{i,2} = 1$ választással $m_{1,1} = -1$, $m_{2,1} = -1/3$ vagy célszerűbbem

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Az állapotváltozók szabad összetevőjének általános alakja ezek szerint

$$x_{t,1}(t) = -K_1 e^{-t} - K_2 e^{-3t}, \quad x_{t,2}(t) = K_1 e^{-t} + 3K_2 e^{-3t}.$$

A K_1, K_2 együtthatók egyelőre ismeretlenek, ezeket a későbbiekben fogjuk számítani. #

2.3-2.3. A gerjesztett összetevő számítása

Az állapotvektor $\mathbf{x}_g[k]$ illetve $\mathbf{x}_g(t)$ gerjesztett összetevője az $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ DI illetve FI állapotegyenlet egy megoldása (az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása). Ennek tehát nem kell kielégítenie valamilyen kezdeti feltételt.

A gerjesztett összetevő számítására nem adható általános módszer. Ez az összetevőkre bontás módszerének egy hátránya. Ha azonban a gerjesztés a $k = 0$, illetve a $t = 0$ időpont után egyszerű függvénnyel leírható (állandó, exponenciális, szinuszos, polinomiális, ezek összege vagy szorzata), akkor az állapotváltozók gerjesztett összetevőjét hasonló függvény alakjában keressük ismeretlen együtthatókkal. Ez az ún. próbafüggvény módszer. A próbafüggvényben szereplő ismeretlen együtthatók meghatározásához behelyettesítjük a próbafüggvényt az állapotegyenletbe, felírjuk a

különböző típusú függvények együtthatóinak egyenlőségét, majd megoldjuk az így adódó lineáris egyenletrendszer.

A továbbiakban egyetlen gerjesztés vizsgálatára szorítkozunk. Több gerjesztés hatása a szuperpozíció elve alapján vehető figyelembe.

Tekintsük először azt az egyszerű esetet, amikor a gerjesztés a $k = 0$, illetve a $t = 0$ időpont után állandó:

$$DI: u[k] = U; \quad FI: u(t) = U. \quad (2.3-36)$$

Ekkor az állapotvektor gerjesztett összetevőjét is állandó vektorként keressük:

$$DI: \mathbf{x}_g[k] = \mathbf{X}; \quad FI: \mathbf{x}_g(t) = \mathbf{X}. \quad (2.3-37)$$

Mivel $\mathbf{x}_g[k+1] = \mathbf{X}$ illetve $\mathbf{x}'_g(t) = \mathbf{0}$, ezért az állapotegyenlet értelmében

$$DI: \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U; \quad FI: \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U. \quad (2.3-38)$$

E lineáris egyenletrendszer megoldása adja az \mathbf{X} vektort. Mátrixos alakban

$$DI: \mathbf{X} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{B}U; \quad FI: \mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}U. \quad (2.3-39)$$

Ha az $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ illetve az \mathbf{A} mátrix szinguláris, akkor a lineáris egyenletrendszer nem megoldható. Ez akkor áll elő, amikor DI esetben $\lambda = 1$ egy sajátérték, így $\lambda^k = 1$ egy sajátfüggvény, illetve FI esetben $\lambda = 0$ egy sajátérték, így $e^{\lambda t} = 1$ egy sajátfüggvény, vagyis amikor a gerjesztés éppen megegyezik a rendszermátrix egy sajátfüggvényével. Erre az esetre a 2.3-2.6. pontban visszatérünk.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a gerjesztés a $k = 0$, illetve a $t = 0$ időpont után exponenciális függvénnyel leírható (és nem egyezik meg egyik sajátfüggvénnyel sem):

$$DI: u[k] = Ua^k; \quad FI: u(t) = Ue^{\alpha t}. \quad (2.3-40)$$

Itt a illetve α komplex értékű is lehet. Az állapotvektor gerjesztett összetevőjét ekkor

$$DI: \mathbf{x}_g[k] = \mathbf{X}a^k, \quad a \neq \lambda_i; \quad FI: \mathbf{x}_g(t) = \mathbf{X}e^{\alpha t}, \quad \alpha \neq \lambda_i, \quad (2.3-41)$$

alakban keressük. Az állapotegyenletbe helyettesítve

$$DI: \mathbf{X}a^{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}a^k + \mathbf{B}Ua^k; \quad FI: \mathbf{X}\alpha e^{\alpha t} = \mathbf{A}\mathbf{X}e^{\alpha t} + \mathbf{B}Ue^{\alpha t}$$

adódik. Az exponenciális függvénnyel egyszerűsítve

$$DI: \mathbf{X} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}U; \quad FI: \mathbf{X} = [\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}U \quad (2.3-42)$$

adódik a keresett \mathbf{X} együttható-vektorra. A sajátértékek definíciójából következik, hogy az invertálható mátrixok nem szingulárisak. Az általánosabb esetre (amikor a illetve α egy sajátérték) később visszatérünk.

Hasonló az eljárás más, egyszerű függvénnyel leírható gerjesztés esetén is (vö. 2.3-2.3. pont). Ha például a gerjesztés

$$DI: u[k] = U k^p a^k; \quad FI: u[k] = U t^p e^{\alpha t}; \quad p \in \mathbf{N} \quad (2.3-43)$$

alakú (és $a \neq \lambda_i$ illetve $\alpha \neq \lambda_i$), akkor a próbafüggvény

$$DI: \mathbf{x}_g[k] = (\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1 k + \dots + \mathbf{X}_p k^p) a^k; \quad FI: \mathbf{x}[k] = (\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1 t + \dots + \mathbf{X}_p t^p) e^{\alpha t}, \quad (2.3-44)$$

vagyis egy p -edfokú teljes polinom és az exponenciális függvény szorzata. A $p+1$ számú ismeretlen \mathbf{X}_m vektorra a hatványfüggvények együtthatóinak egyezésének feltételei alapján $p+1$ számú lineáris vektoregyenletet kapunk. Megjegyezzük, hogy az

$$\text{DI: } \mathbf{x}_g[k] = \mathbf{X}_p k^p a^k; \text{FI: } \mathbf{x}[k] = \mathbf{X}_p t^p e^{at},$$

próbafüggvény nem vezet eredményre, amiről az Olvasó már $p=1$ esetén is meggyőződhet.

Az adott gerjesztéshez tartozó gerjesztett összetevő elvileg nem egyértelműen meghatározott. Rendszerint a legegyszerűbb alakot választjuk, de a választás a végeredményt nem befolyásolja.

1. példa Az előző pont 1. példájában megadott DI rendszer gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k](0,5)^k$. Az állapotváltozók gerjesztett összetevőjének próbafüggvénye

$$x_{g,1}[k] = X_1 (0,5)^k, \quad x_{g,2}[k] = X_2 (0,5)^k.$$

A próbafüggvényeket az állapotegyenletbe helyettesítve

$$\begin{aligned} X_1 (0,5)^{k+1} &= -0,24 (0,5)^k - 0,24 (0,5)^k, \\ X_2 (0,5)^{k+1} &= X_1 (0,5)^k + X_2 (0,5)^k + 1,5 (0,5)^k. \end{aligned}$$

Az együtthatókra vonatkozó egyenletrendszer és megoldása

$$\left. \begin{aligned} 0,5 X_1 + 0,24 X_2 &= -0,24, \\ -X_1 - 0,5 X_2 &= 1,5; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 24, \\ X_2 = -51. \end{cases}$$

Esetünkben az exponenciális függvénnyel leírt gerjesztés nem egyezett meg a $(0,6)^k$ és $(0,4)^k$ sajátfüggvények egyikével sem. #

2. példa Az előző pont 2. példájában megadott FI rendszer gerjesztése $u(t) = \varepsilon(t)$. Az állapotváltozók gerjesztett összetevőjét $x_{g,1}(t) = X_1$, $x_{g,2}(t) = X_2$ alakban keressük. Az állapotegyenletbe helyettesítve és figyelembe véve, hogy az állandó deriváltja nulla

$$X_2 = 0, \quad 3 X_1 + 4 X_2 = 1 \Rightarrow X_1 = \frac{1}{3}, \quad X_2 = 0$$

adódik az állapotváltozók gerjesztett összetevőjére. #

2.3-2.4. A kezdeti feltételek érvényesítése

Az állapotvektor általános alakját a szabad összetevőjének általános alakja (\mathbf{x}_f) és gerjesztett összetevőjének (\mathbf{x}_g) az összege adja. A szabad összetevő N számú határozatlan együtthatót tartalmaz, ezeket (35)-ben K_1, K_2, \dots, K_N jelöli. A határozatlan együtthatókat az ugyancsak N számú adatot jelentő $\mathbf{x}[0]$, illetve $\mathbf{x}(+0)$ kezdeti állapot ismeretében határozhatjuk meg.

Tekintsük ismertnek az állapotvektor értékét közvetlenül a $k=0$, illetve a $t=0$ időpont előtt, vagyis az állapotvektor $\mathbf{x}[-1]$, illetve $\mathbf{x}(-0)$ *kiindulási értékét*. Amint erről

a 2.3-2.1. pontban már volt szó: ezeket a rendszer múltbeli viselkedése alapján kell meghatározni. A legegyszerűbb esetben *bekapcsolási folyamatról* van szó, amikor a gerjesztés a $k=0$, illetve a $t=0$ időpont előtt azonosan nulla. A rendszer kauzalitása miatt ekkor az állapotvektor is nulla a k , illetve a t negatív értékeire, így speciálisan $\mathbf{x}[-1]=\mathbf{0}$ illetve $\mathbf{x}(-0)=\mathbf{0}$ a kiindulási állapot. Az általánosság érdekében azonban a továbbiakban az $\mathbf{x}[-1]$ illetve az $\mathbf{x}(-0)$ kiindulási állapotot nem tekintjük nullának.

Az $\mathbf{x}[0]$, illetve az $\mathbf{x}(+0)$ *kezdeti állapot* az állapotegyenlet ismeretében a kiindulási állapottól számítható $k=-1$ helyettesítéssel, illetve t szerinti integrálással:

$$\text{DI: } \mathbf{x}[0] = \mathbf{A} \mathbf{x}[-1] + \mathbf{B} \mathbf{u}[-1]; \quad \text{FI: } \mathbf{x}(+0) - \mathbf{x}(-0) = \int_{-0}^{+0} \{\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)\} dt.$$

Mivel $\mathbf{x}(t)$ korlátos a $t=0$ helyen, ezért integrálja nulla, így

$$\text{DI: } \mathbf{x}[0] = \mathbf{A} \mathbf{x}[-1] + \mathbf{B} \mathbf{u}[-1]; \quad \text{FI: } \mathbf{x}(+0) = \mathbf{x}(-0) + \mathbf{B} \int_{-0}^{+0} \mathbf{u}(t) dt. \quad (2.3-45)$$

Látható, hogy bekapcsolási folyamat esetén, továbbá ha $\mathbf{u}(t)$ véges a $t=0$ helyen (ami alól gyakorlatilag csak a Dirac-impulzus a kivétel), akkor a kezdeti állapot kifejezése az $\mathbf{x}[0]=\mathbf{0}$, illetve az $\mathbf{x}(+0)=\mathbf{0}$ alakra egyszerűsödik.

Helyettesítsünk az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_f + \mathbf{x}_g$ alakba $k=0$, illetve $t=0$ értéket. Ekkor

$$\text{DI: } \mathbf{x}_f[0] = \mathbf{x}[0] - \mathbf{x}_g[0]; \quad \text{FI: } \mathbf{x}_f(+0) = \mathbf{x}(+0) - \mathbf{x}_g(+0) \quad (2.3-46)$$

adódik. Ez éppen N számú lineáris egyenletet jelent az \mathbf{x}_f szabad összetevőben szereplő N számú ismeretlen együtthatóra. Egyszeres sajátértékek esetén a (35) felhasználásával és $k=0$ illetve $t=0$ helyettesítéssel

$$\text{DI: } \sum_{i=0}^N K_i \mathbf{m}_i = \mathbf{x}[0] - \mathbf{x}_g[0]; \quad \text{FI: } \sum_{i=0}^N K_i \mathbf{m}_i = \mathbf{x}(+0) - \mathbf{x}_g(+0). \quad (2.3-47)$$

Ez az összefüggés még tovább formalizálható (például számítógépes kiértékelésre áttekinthetőbbé tehető), ha bevezetjük az együtthatókból alkotott \mathbf{K} vektort és az \mathbf{m}_i sajátvektorokból alkotott \mathbf{M} *modális mátrixot*:

$$\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_N]^T, \quad \mathbf{M} = [\mathbf{m}_1 \quad \mathbf{m}_2 \quad \dots \quad \mathbf{m}_N]. \quad (2.3-48)$$

Az ismeretlen együtthatók kifejezése ezzel

$$\text{DI: } \mathbf{K} = \mathbf{M}^{-1} \{\mathbf{x}[0] - \mathbf{x}_g[0]\}; \quad \text{FI: } \mathbf{K} = \mathbf{M}^{-1} \{\mathbf{x}(+0) - \mathbf{x}_g(+0)\}. \quad (2.3-49)$$

Az együtthatók behelyettesítésével megkapjuk az állapotvektornak a kezdeti feltételeket is kielégítő $\mathbf{x} = \mathbf{x}_f + \mathbf{x}_g$ konkrét alakját. (Szigorúan véve \mathbf{x}_f általános és konkrét alakját meg kellene különböztetni.) Ennek ismeretében előállítható a válasz:

$$\text{DI: } \mathbf{y}[k] = \mathbf{C} \mathbf{x}[k] + \mathbf{D} \mathbf{u}[k]; \quad \text{FI: } \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t). \quad (2.3-50)$$

Az impulzusválasz számítását a következő pontban részletezzük.

1. példa Az előző pontban vizsgált DI rendszer állapotváltozóinak általános alakja

$$\begin{aligned}x_1[k] &= -0,4 K_1 (0,6)^k - 0,6 K_2 (0,4)^k + 24 (0,5)^k, \\x_2[k] &= K_1 (0,6)^k + K_2 (0,4)^k - 51 (0,5)^k.\end{aligned}$$

Mivel bekapcsolási folyamatot vizsgálunk, ezért a kezdeti állapot $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$. Az ismeretlen együtthatókra vonatkozó egyenletrendszer és megoldása

$$\left. \begin{aligned}0,4 K_1 + 0,6 K_2 &= 24, \\K_1 + K_2 &= 51;\end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 33, \\ K_2 = 18. \end{cases}$$

A válasz $y[k] = x_2[k] + u[k]$ kifejezésébe helyettesítve és annak belépő jellegét is kifejezve

$$y[k] = \varepsilon[k] \{33 (0,6)^k + 18 (0,4)^k - 50 (0,5)^k\}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy ez a $k = 0, 1$ és 2 helyen ugyanazt az értéket adja, mint amit a 2.3-1. 2. pont példájában a lépésről lépésre módszerrel számítottunk. #

2. példa Az előző pontban vizsgált FI rendszer állapotváltozóinak általános alakja

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -K_1 e^{-t} - K_2 e^{-3t} + \frac{1}{3}, \\x_2(t) &= K_1 e^{-t} + 3 K_2 e^{-3t} + 0.\end{aligned}$$

Mivel bekapcsolási folyamatot vizsgálunk és az $u(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztés a $t = 0$ helyen véges, ezért a kezdeti állapot $x(+0) = 0$. Az együtthatókra vonatkozó egyenletrendszer és megoldása

$$\left. \begin{aligned}K_1 + K_2 &= 1/3, \\K_1 + 3 K_2 &= 0;\end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 1/2, \\ K_2 = -1/6. \end{cases}$$

A válasz $y = x_1 + 5 x_2$ kifejezésébe helyettesítve és annak belépő jellegét is kifejezve

$$y(t) = \varepsilon(t) \left\{ 2 e^{-t} - \frac{7}{3} e^{-3t} + \frac{1}{3} \right\}$$

adódik. Ez a vizsgált FI rendszer ugrásválasza. #

3. példa Egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{aligned}x_1' &= -3 x_1 + 4 x_2 + 13 u, \\x_2' &= -x_1 - 3 x_2; \\y &= 3 x_1 + 2 x_2 + 4 u.\end{aligned}$$

Határozzuk meg ennek a rendszernek a válaszát, ha gerjesztése

$$u(t) = 4 \{ \varepsilon(t) - \varepsilon(t - 0,1) \} + 2 \varepsilon(t - 0,1).$$

Az állapotmátrix karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -4 \\ 1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + 6 \lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3 + j 2, \quad \lambda_2 = -3 - j 2.$$

A sajátvektorok például a λ_i $m_{i,2} = -m_{i,1} - 3 m_{i,2}$ egyenletből $m_{i,2} = 1$ választással

$$m_{1,1} = -3 - (-3 + j2) = -j2, \quad m_{2,1} = -3 - (-3 - j2) = +j2.$$

A két sajátérték és a két sajátvektor egymás konjugáltja. Az állapotvektor szabad összetevőjének általános alakja ezzel ismert, majd alább írjuk fel részletesen.

A gerjesztés intervallumonként állandó, ezért a gerjesztett összetevő is állandó mindkét intervallumban:

$$\left. \begin{array}{l} 3X_1 - 4X_2 = 13U, \\ X_1 + 3X_2 = 0; \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 3U, \\ X_2 = -U. \end{cases}$$

A $0 < t < t_1 = 0,1$ intervallumban az állapotváltozók általános alakja (itt $U = 4$)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -j2K_1 e^{-(3+j2)t} + j2K_2 e^{-(3-j2)t} + 12, \\ x_2(t) &= K_1 e^{-(3+j2)t} + K_2 e^{-(3-j2)t} - 4. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ kezdeti feltétel értelmében

$$\left. \begin{array}{l} j2K_1 - j2K_2 = 12, \\ K_1 + K_2 = 4; \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 2 - j3, \\ K_2 = 2 + j3. \end{cases}$$

A két komplex állandó K_i is egymás konjugáltja. Az állapotváltozók időfüggvénye a $0 < t < t_1 = 0,1$ intervallumban

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{-6 - j4\} e^{-3t} \{\cos 2t + j \sin 2t\} + \{-6 + j4\} e^{-3t} \{\cos 2t - j \sin 2t\} + 12, \\ x_2(t) &= \{2 - j3\} e^{-3t} \{\cos 2t + j \sin 2t\} + \{2 + j3\} e^{-3t} \{\cos 2t - j \sin 2t\} - 4. \end{aligned}$$

Rendezés után (a képzetes értékű tagok természetesen kiesnek)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{-12 \cos 2t + 8 \sin 2t\} e^{-3t} + 12, \\ x_2(t) &= \{4 \cos 2t + 6 \sin 2t\} e^{-3t} - 4. \end{aligned}$$

Térjünk rá a $0,1 < t < \infty$ intervallum vizsgálatára. Az $\mathbf{x}(t)$ általános alakja az előzővel megegyező, csak a gerjesztett összetevő most $X_1 = 6$, $X_2 = -2$. Célszerű a t változó helyett átmenetileg a $t' = t - t_1$ változót alkalmazni:

$$\begin{aligned} x_1(t') &= -j2K_1 e^{(-3+j2)t'} + j2K_2 e^{(-3-j2)t'} + 6, \\ x_2(t') &= K_1 e^{(-3+j2)t'} + K_2 e^{(-3-j2)t'} - 2. \end{aligned}$$

A $t = t_1$ (a $t' = 0$) időpontban az állapotváltozó folytonossága alapján $\mathbf{x}(t' = 0) = \mathbf{x}(t = t_1)$, ahol $\mathbf{x}(t_1)$ az előbb kapott állapotvektornak a $t_1 = 0,1$ időpontbeli értéke:

$$\begin{aligned} -jK_1 + jK_2 + 6 &= (-12 \cos 0,2 + 8 \sin 0,2) e^{-0,3} + 12 \approx 4,465, \\ K_1 + K_2 - 2 &= (4 \cos 0,2 + 6 \sin 0,2) e^{-0,3} - 2 \approx -0,213. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszer megoldásával $K_1 = 0,894 - j0,760$ és K_2 ennek konjugáltja. Ezt az általános alakba helyettesítve az előző számítás mintájára kapjuk a $0 < t' < \infty$ intervallumra, hogy

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{-3,070 \cos 2t' + 3,574 \sin 2t'\} e^{-3t'} + 6, \\ x_2(t) &= \{1,787 \cos 2t' + 1,535 \sin 2t'\} e^{-3t'} - 2. \end{aligned}$$

Az állapotváltozók ismeretében a keresett választ az $y = 3x_1 + 2x_2 + 4u$ összefüggés alapján kapjuk:

$$y(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)\} \{[-28 \cos 2t + 30 \sin 2t]e^{-3t} + 44\} + \\ + \varepsilon(t-0,1) \{[-1,914 \cos 2(t-0,1) + 13,792 \sin 2(t-0,1)]e^{-3(t-0,1)} + 22\}.$$

A válasz sem a $t=0$, sem a $t=0,1$ időpontban nem folytonos.

A választ célszerűbb lehet egy $\cos 2t$ és egy $\sin 2t$ függvény összege helyett egyetlen, $\cos(2t + \rho)$ alakú függvénnyel kifejezni, mint például

$$-28 \cos 2t + 30 \sin 2t = 41,04 \cos(2t - 2,322).$$

Az állapotváltozók felírása során is alkalmazhattuk volna ezt az alakot, de ott ez nem kényelmes, mert körülményes az összeget képezni. A konjugált komplex sajátérték-párhoz tartozó két összetevő összege számítható mint bármelyik sajátértékhez tartozó összetevő valós részének kétszerese, hiszen $z + z^* = 2 \Re\{z\}$ bármely z komplex számra. #

2.3-2.5. Az impulzusválasz számítása

A rendszer impulzusválaszának számítása önmagában is fontos feladat (például a rendszer GV stabilitásának eldöntésére). Célszerű lehet azonban az impulzusválasz számítása annak érdekében is, hogy elkerüljük a gerjesztett összetevő számítását és a kezdeti feltételek érvényesítését. Ez különösen akkor előnyös, amikor ha a gerjesztést nem egyszerű függvény írja le (például intervallumonként különböző függvények) vagy ha a rendszernek többféle gerjesztéshez tartozó választ akarjuk számítani.

Először a diszkrét idejű, azután a folytonos idejű rendszer impulzusválaszának számítását tárgyaljuk egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszerre szorítva.

Diszkrét idejű rendszer impulzusválasza

Az $u[k] = \delta[k]$ gerjesztéshez tartozó $y[k] = h[k]$ impulzusválasz számítása során a rendszer a $k=0$ diszkrét időponttól eltekintve gerjesztetlen, vagyis a válasz a $k \in \mathbf{Z}_+$ ütemekre megegyezik a válasz szabad összetevőjével. Egyszeres sajátértékek esetén (35) értelmében

$$\mathbf{x}[k] = \sum_{i=1}^N K_i \mathbf{m}_i \lambda_i^k.$$

Mivel $\delta[-1] = 0$, ezért $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$, mivel $\delta[0] = 1$, ezért $\mathbf{x}[1] = \mathbf{B}$, vagyis a $P_i = K_i \lambda_i$ új ismeretlen együtthatók bevezetésével a P_i együtthatókból képzett vektor

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i P_i = \mathbf{B} \quad (2.3-51)$$

lineáris egyenletrendszer szolgál az együtthatók meghatározására. Az \mathbf{m}_i sajátvektorokból képzett \mathbf{M} modális mátrix felhasználásával

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.3-52)$$

adja az együtthatók kifejezését. Az impulzusválaszt meghatározó állapotvektort ezek szerint

$$\mathbf{x}[k] = \varepsilon[k-1] \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i P_i \lambda_i^{k-1}$$

írja le, ahol a P_i együtthatók már ismertnek tekinthetők. Az $y = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + D u$ összefüggés alapján az *impulzusválasz* kifejezése

$$h[k] = D \delta[k] + \varepsilon[k-1] \sum_{i=1}^N C^T \mathbf{m}_i P_i \lambda_i^{k-1}. \quad (2.3-53)$$

A P_i együtthatókat a (51) vagy (52) adja.

1. példa Határozzuk meg a 2.3-2.2. pont 1. példájában vizsgált DI rendszer impulzusválaszát!

Az említett példában végzett számításaink szerint a sajátértékek $\lambda_1 = 0,5$ és $\lambda_2 = 0,4$ a sajátvektorok $\mathbf{m}_1 = [-0,4 \ 1]^T$ és $\mathbf{m}_2 = [-0,6 \ 1]^T$. A két P_i együttható meghatározására szolgáló (51) egyenletrendszer és megoldása

$$\left. \begin{aligned} -0,4 P_1 - 0,6 P_2 &= -0,24, \\ P_1 + P_2 &= 1,5; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 3,3, \\ P_2 = -1,8. \end{cases}$$

Az impulzusválasz kifejezése ezek szerint az

$$C^T \mathbf{m}_1 P_1 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} -0,4 \\ 1 \end{bmatrix} 3,3 = 3,3; \quad C^T \mathbf{m}_2 P_2 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} -0,6 \\ 1 \end{bmatrix} (-1,8) = -1,8$$

összefüggések felhasználásával

$$h[k] = \delta[k] + \varepsilon[k-1] \{3,3(0,6)^{k-1} - 1,8(0,4)^{k-1}\}.$$

Az impulzusválasz ismeretében bármely gerjesztésre adott válasz számítása megoldható konvolúcióval. Ekkor nincs szükség a gerjesztett összetevő számítására és a kezdeti feltételek érvényesítésére. Az előző pontokban megoldott DI példa megoldása is kényelmesebb lehet ezzel a módszerrel. #

2. példa Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [-0,2 \ -0,24 \ 1,5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u.$$

Határozzuk meg e rendszer impulzusválaszát!

A karakterisztikus egyenlet és megoldásai, vagyis az állapotmátrix sajátértékei

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0,24 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + \lambda + 0,24) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -0,6, \\ \lambda_2 = -0,4, \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

A $\lambda_3 = 0$ sajátérték különleges szerepet játszik, hiszen $\lambda_3^k = 0, k \in \mathbf{Z}_+$. A sajátvektorok meghatározására szolgáló egyenletrendszer és megoldása $m_{i,1} = 1$ választással (esetünkben $m_{3,3}$ nem is választható egységnyinek):

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i m_{i,1} - m_{i,2} &= 0, \\ \lambda_i m_{i,2} - m_{i,3} &= 0; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,6 \\ 0,36 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4 \\ 0,16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\lambda_3 = 0$ egyszeres sajátérték, ezért az impulzusválaszt a $k=0$ és 1 ütemekre lépésről lépésre kell számolni és csak a $k=2$ ütemtől kezdve írható fel sajátfüggvények összegeként:

$$\begin{bmatrix} x_1[1] \\ x_2[1] \\ x_3[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1[2] \\ x_2[2] \\ x_3[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Az általános alak és a kezdeti (a $k = 2$ időpontra vonatkozó) feltételek

$$\left. \begin{aligned} x_1[k] &= K_1(-0,6)^{k-2} + K_2(-0,4)^{k-2}, \\ x_2[k] &= -0,6K_1(-0,6)^{k-2} - 0,4K_2(-0,4)^{k-2}, \\ x_3[k] &= 0,36K_1(-0,6)^{k-2} + 0,16K_2(-0,4)^{k-2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 = 0, \\ -0,6K_1 - 0,4K_2 = 1, \\ 0,36K_1 + 0,16K_2 = -1. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer látszólag túlhatározott, de bármelyik két (!) egyenletből $K_1 = -5$, $K_2 = 5$ adódik. Az y kifejezésébe helyettesítve végeredményben

$$h[k] = \delta[k] + 1,5\delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \{-2,42(0,6)^{k-2} + 0,68(0,4)^{k-2}\}$$

adódik az impulzusválaszra. #

Folytonos idejű rendszer impulzusválasza

Az $u(t) = \delta(t)$ gerjesztéshez tartozó $y(t) = h(t)$ impulzusválasz számítására egy kerülő út a következő. Határozzuk meg először az $u_a(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztéshez tartozó $y_a(t) = g(t)$ ugrásválaszt; ennek ismeretében (2.1-42) értelmében a $h(t) = g'(t)$ impulzusválasz általánosított differenciálással számítható.

A FI impulzusválasz közvetlen számításához vegyük figyelembe, hogy az $u(t) = \delta(t)$ gerjesztés a $t = 0$ helytől eltekintve mindenütt nullának tekinthető, ezért az állapotvektor megegyezik a szabad összetevőjével. Egyszeres sajátértékek esetén (35) értelmében

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^N K_i \mathbf{m}_i e^{\lambda_i t}.$$

Az $\mathbf{x}(+0)$ kezdeti állapot számításához integráljuk az állapotegyenletet $t = -0$ és $+0$ között. Mivel $\mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}$, ezért az (45) mintájára

$$\mathbf{x}(+0) = \mathbf{B} \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = \mathbf{B}.$$

A K_i állandók meghatározására szolgáló lineáris egyenletrendszer

$$\sum_{i=1}^N K_i \mathbf{m}_i = \mathbf{B}. \quad (2.3-54)$$

Az \mathbf{M} modális mátrix felhasználásával ennek megoldása a K_i együtthatókból képzett vektora:

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}. \quad (2.3-55)$$

A FI impulzusválasz kifejezése $y = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + D u$ értelmében

$$h(t) = D \delta(t) + \varepsilon(t) \sum_{i=1}^N \mathbf{C}^T \mathbf{m}_i K_i e^{\lambda_i t}, \quad (2.3-56)$$

ahol a K_i együtthatók az (54) vagy az (55) értelmében ismertek.

3. példa Határozzuk meg a 2.3-2.2. pont 2. példájában vizsgált FI rendszer impulzusválaszt!

Képezzük az említett példában meghatározott

$$g(t) = \varepsilon(t) \left\{ 2e^{-t} - \frac{7}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} \right\}$$

ugrásválasz általánosított deriváltját:

$$h(t) = \delta(t) \left\{ 2e^{-t} - \frac{7}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} \right\} + \varepsilon(t) \left\{ -2e^{-t} + 7e^{-3t} \right\} = \varepsilon(t) \left\{ -2e^{-t} + 7e^{-3t} \right\},$$

mivel a $t = 0$ helyen $\delta(t)$ szorzója nulla.

Az impulzusválasz közvetlen számításához használjuk fel, hogy előző számításunk értelmében az A rendszermátrix sajátértékei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$; sajátvektorai pedig $\mathbf{m}_1 = [-1 \ 1]^T$, $\mathbf{m}_2 = [-1 \ 3]^T$. A K_i együtthatók meghatározására szolgáló egyenletrendszer és megoldása

$$\left. \begin{aligned} -K_1 - K_2 &= 0, \\ K_1 + 3K_2 &= 1; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} K_1 &= -1/2, \\ K_2 &= 1/2. \end{aligned} \right.$$

Az impulzusválasz kifejezésében ezek szerint

$$\mathbf{C}^T \mathbf{m}_1 K_1 = [1 \ 5] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{2} \right) = -2, \quad \mathbf{C}^T \mathbf{m}_2 K_2 = [1 \ 5] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \right) = 7.$$

Mivel $D = 0$, ezért az impulzusválaszra

$$h(t) = \delta(t) \left\{ 2e^{-t} - \frac{7}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} \right\} + \varepsilon(t) \left\{ -2e^{-t} + 7e^{-3t} \right\} = \varepsilon(t) \left\{ -2e^{-t} + 7e^{-3t} \right\}$$

adódik, amint azt előzőleg más módon meghatároztuk. #

*2.3-2.6. Többszörös sajátértékek esete

Az eddigiekben feltételeztük, hogy az A rendszermátrix minden λ_i sajátértéke egyszeres. A gyakorlatban ez rendszerint így is van, legfeljebb a $\lambda_i = 0$ jelent kivételt.

Lehet úgy érvelni, hogy mivel az állapotmátrix rendezői nem ismertek pontosan, ezért többszörös sajátértékek nem is létezhetnek. Bármelyik együtthatót vagy sajátértéket a feltételezett hibahatáron belül megváltoztathatjuk, miáltal a többszörös sajátértékek egyszeressé változtathatók (A 2.2-3.2. pontban a rendszeregyenlettel kapcsolatban erre már rámutattunk.)

Fogalmi szempontból mégis érdemes a többszörös sajátértékek esetével foglalkozni. Számítástechnikailag is előnyösebb lehet több, közeli sajátértéket egyetlen, többszörös sajátértékkel helyettesíteni.

Ha az A rendszermátrixnak többszörös sajátértéke is van, akkor a szabad összetevő általános alakja már nem állítható elő λ_i^k illetve $e^{\lambda_i t}$ alakú sajátfüggvények szuperpozíciójaként, hiszen ekkor ezek száma kisebb, mint N . Igazolható, hogy ha például λ_1 a DI illetve FI rendszermátrix egy r -szeres sajátértéke, akkor ehhez λ_1^k , $k \lambda_1^k$, $k^2 \lambda_1^k$, ..., $k^{r-1} \lambda_1^k$ illetve $e^{\lambda_1 t}$, $t e^{\lambda_1 t}$, $t^2 e^{\lambda_1 t}$, ..., $t^{r-1} e^{\lambda_1 t}$ sajátfüggvények tartoznak

(r számú sajátfüggvény), amelyek mindegyike kielégíti a gerjesztetlen rendszer állapotegyenletét. A sajátfüggvények összes száma továbbra is N , a rendszermátrix rendszáma. A sajátfüggvények együtthatóinak kapcsolata nem fogalmazható meg egyszerűen.

*2.3-2.7. Sajátfüggvényével gerjesztett rendszer

Tekintsük most azt a speciális esetet, amikor $\lambda_i = \lambda$ az A rendszermátrix egy (valós vagy komplex értékű) egyszeres sajátértéke és a DI rendszer gerjesztése $u[k] = U \lambda^k$, illetve a FI rendszer gerjesztése $u(t) = U e^{\lambda t}$ összetevőt tartalmaz. Ha λ komplex, akkor a gerjesztésben biztosan szerepel egy $U^* (\lambda^*)^k$ illetve $U^* e^{\lambda^* t}$ alakú tag is. A gerjesztett összetevőt a következő alakban keressük:

$$\begin{aligned} \text{DI: } u[k] = U \lambda^k &\Rightarrow \mathbf{x}_g[k] = \mathbf{X} \lambda^k + \mathbf{V} k \lambda^k; \\ \text{FI: } u(t) = U e^{\lambda t} &\Rightarrow \mathbf{x}_g(t) = \mathbf{X} e^{\lambda t} + \mathbf{V} t e^{\lambda t}. \end{aligned} \quad (2.3-57)$$

Ezt az $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u$ állapotegyenletbe helyettesítve

$$\begin{aligned} \text{DI: } \mathbf{X} \lambda^{k+1} + \mathbf{V} (k+1) \lambda^{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{X} \lambda^k + \mathbf{A} \mathbf{V} k \lambda^k + \mathbf{B} U \lambda^k; \\ \text{FI: } \mathbf{X} \lambda e^{\lambda t} + \mathbf{V} (1 + \lambda t) e^{\lambda t} &= \mathbf{A} \mathbf{X} e^{\lambda t} + \mathbf{A} \mathbf{V} t e^{\lambda t} + \mathbf{B} U e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

A függvények együtthatóinak egyezéséből a DI és FI esetben egyaránt

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{X} + \lambda \mathbf{V} = \mathbf{B} U, \quad (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (2.3-58)$$

A $2N$ számú X_p, V_p ismeretlenre $2N$ számú lineáris egyenletünk van, de az egyenletek nem függetlenek, az egyenletrendszer megoldása ezért nem egyértelmű. Bármelyik lehetséges megoldást választhatjuk, mert az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_f + \mathbf{x}_g$ állapotvektorra vonatkozó kezdeti feltétel alapján egyértelmű megoldáshoz jutunk.

Ebben az esetben is érvelhetünk úgy, hogy a gerjesztésben szereplő λ_i nem pontosan egyezik meg a λ_i sajátértékkel, ezért azt például $(1 + 10^{-6}) \lambda_i$ értékkel helyettesíthetjük, tehát nincs is szükség e speciális eset vizsgálatára.

1. példa A 2.3-2.2. pont 1. példájában vizsgált DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{aligned} x_1' &= -0,24 x_2 - 0,24 u, \\ x_2' &= x_1 + x_2 + 1,5 u; \\ y &= x_2 + u. \end{aligned}$$

Határozzuk meg e rendszer válaszát, ha gerjesztése $u[k] = 4 \varepsilon[k] (0,4)^k$.

Mint látuk, az állapotmátrix két sajátértéke $\lambda_1 = 0,6$, $\lambda_2 = 0,4$. Mivel a gerjesztés megegyezik az egyik sajátválasszal, ezért a az állapotvektor gerjesztett összetevőjét

$$\begin{aligned} x_{g,1}[k] &= X_1 + V_1 k (0,4)^k, \\ x_{g,2}[k] &= X_2 + V_2 k (0,4)^k \end{aligned}$$

alakban keressük. Az állapotegyenletbe helyettesítve

$$X_1(0,4)^{k+1} + V_1(k+1)(0,4)^{k+1} = -0,24[X_2(0,4)^k + V_2 k(0,4)^k] - 0,96(0,4)^k,$$

$$X_2(0,4)^{k+1} + V_2(k+1)(0,4)^{k+1} = [X_1(0,4)^k + V_1 k(0,4)^k] + [X_2(0,4)^k + V_2 k(0,4)^k] + 6(0,4)^k.$$

A $(0,4)^k$ és a $k(0,4)^k$ függvény együtthatóinak egyezésének feltételei

$$0,4X_1 + 0,4V_1 = -0,24X_2 - 0,96, \quad 0,4V_1 = -0,24V_2,$$

$$0,4X_2 + 0,4V_2 = X_1 + X_2 + 6, \quad 0,4V_1 = V_1 + V_2.$$

A két jobb oldali egyenletből egyaránt a $V_1 = -0,6V_2$ egyenlet adódik. Ez a másik két egyenletbe helyettesítve

$$X_1 + 0,6X_2 = -2,4 + 0,6V_2, \quad X_1 + 0,6X_2 = -6 + 0,4V_2.$$

A két egyenlet akkor nem ellentmondó (jobb oldaluk is egyenlő), ha $V_2 = -18$. Ekkor $V_1 = -10,8$ és $X_1 + 0,6X_2 = -13,2$. Az $X_2 = 0$ önkényes választással az állapotváltozók időfüggésének általános alakja

$$x_1[k] = -0,4K_1(0,6)^k - 0,6K_2(0,4)^k - 13,2(0,4)^k + 10,8k(0,4)^k,$$

$$x_2[k] = K_1(0,6)^k + K_2(0,4)^k - 18k(0,4)^k.$$

A kezdeti állapot $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$. Az együtthatókra vonatkozó egyenletrendszer és megoldása

$$\left. \begin{array}{l} -0,4K_1 - 0,6K_2 = 13,2 \\ K_1 + K_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_1 = 66, \\ K_2 = -66. \end{array} \right.$$

A válasz $y = x_2 + u$ kifejezésébe helyettesítve

$$y[k] = \varepsilon[k] \{66(0,6)^k - 62(0,4)^k - 18k(0,4)^k\}.$$

Ellenőrizhetjük hogy x_1, x_2, y a $k=1$ helyen helyes eredményt ad. #

2. példa A 2.3-2.2. pont 2. példájában vizsgált FI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -3x_1 - 4x_2 + u;$$

$$y = x_1 + 5u.$$

Határozzuk meg e rendszer válaszát, ha gerjesztése $u(t) = 4\varepsilon(t)e^{-t}$.

Mint már láttuk, az A rendszermátrix két sajátértéke $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. Mivel a gerjesztés e^{-t} összetevője megegyezik az egyik sajátválasszal, ezért az állapotvektor gerjesztett összetevőjét a következő alakban keressük:

$$x_{g,1}(t) = X_1 e^{-t} + V_1 t e^{-t},$$

$$x_{g,2}(t) = X_2 e^{-t} + V_2 t e^{-t}.$$

Az állapotegyenletbe helyettesítve ezeket a függvényeket

$$X_1 e^{-t} + V_1 e^{-t} - V_1 t e^{-t} = X_2 e^{-t} + V_2 t e^{-t},$$

$$X_2 e^{-t} + V_2 e^{-t} - V_2 t e^{-t} = -3 \{X_1 e^{-t} + V_1 t e^{-t}\} - 4 \{X_2 e^{-t} + V_2 t e^{-t}\} + 4 e^{-t}.$$

Az e^{-t} és a $t e^{-t}$ tagok együtthatóinak egyenlősége a következő egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{aligned} -X_1 + V_1 &= X_2, & -V_1 &= V_2, \\ -X_2 + V_2 &= 3X_1 - 4X_2 + 4. & -V_2 &= -3V_1 - 4V_2 \Rightarrow -V_1 = V_2. \end{aligned}$$

Az X_i együtthatókra vonatkozó két egyenlet $V_2 = -V_1$ felhasználásával

$$X_1 + X_2 = V_1, \quad 3X_1 + 3X_2 = 4 + V_1.$$

E két egyenlet akkor nem ellentmondásos, ha $3V_1 = 4 + V_1$, amiből

$$V_1 = 2 \Rightarrow V_2 = -2, \quad X_1 + X_2 = 2.$$

A két X_i egyike önkényesen megválasztható. Az állapotváltozók időfüggésének általános alakja $X_1 = 1, X_2 = 2 - 1 = 1$ választással

$$\begin{aligned} x_1(t) &= [1 - K_1]e^{-t} - K_2 e^{-3t} + 2t e^{-t}, \\ x_2(t) &= [1 + K_1]e^{-t} + 3K_2 e^{-3t} - 2t e^{-t}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{x}(+0) = \mathbf{0}$ kezdeti állapotot figyelembe vevő egyenletek és megoldásuk

$$\left. \begin{aligned} K_1 + K_2 &= 1 \\ K_1 + 3K_2 &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 2, \\ K_2 = -1. \end{cases}$$

A válasz $y = x_1 + 5x_2$ kifejezésébe helyettesítve

$$y(t) = \varepsilon(t) \left\{ 14e^{-t} - 14e^{-3t} + \frac{22}{9} - 9te^{-t} \right\}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy a válasz kezdeti értéke helyesen kiadódik. #

2.3-2.F. Feladatok

F-1. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{aligned} x_1' &= 0,4x_1 + 0,03x_2 + u, \\ x_2' &= x_1 + 0,2x_2; \\ y &= x_2. \end{aligned}$$

Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a rendszer gerjesztése

- $u[k] = \varepsilon[k]$.
- $u[k] = \varepsilon[k](-0,1)^k$.
- $u[k] = \varepsilon[k](0,1)^k$.
- $u[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]$.
- $u[k] = 9\{1 - \varepsilon[k]\} + \varepsilon[k]$.

Az (e) esetre feltételezze a rendszer stabilitását, amit később igazolni is fogunk. Ellenőrizze az eredményeket a $k = 0, 1$ és 2 ütemekre a lépésről lépésre módszerrel!

F-2. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1' = 0,4 x_1 + 0,08 x_2 + u,$$

$$x_2' = x_1 + 0,2 x_2;$$

$$y = x_2.$$

Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a gerjesztés

$$(a) u[k] = \delta[k]. \quad (b) u[k] = \varepsilon[k].$$

Ellenőrizze az eredményeket a $k = 0, 1$ és 2 ütemekre a lépésről lépésre módszerrel.

F-3. Egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$y = \begin{bmatrix} -0,2 & -0,24 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u.$$

Határozza meg e rendszer impulzusválasztát!

2.3-2.M. Megoldások

M-1. A sajátértékek $\lambda_1 = 0,1$ és $\lambda_2 = 0,5$.

$$(a) y[k] = \varepsilon[k] \left\{ \frac{20}{9} - \frac{45}{9} (0,5)^k + \frac{25}{9} (0,1)^k \right\}.$$

$$(b) y[k] = \varepsilon[k] \left\{ \frac{25}{3} (-0,1)^k + \frac{25}{6} (0,5)^k - \frac{25}{2} (0,1)^k \right\}.$$

$$(c) y[k] = \varepsilon[k] \left\{ \frac{25}{4} (0,5)^k - \frac{25}{4} (0,1)^k - 25 k (0,1)^k \right\}.$$

(d) Az (a) feladat megoldása felhasználható.

$$y[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]\} \left\{ \frac{20}{9} - \frac{45}{9} (0,5)^k + \frac{25}{9} (0,1)^k \right\} + \varepsilon[k-3] \{4,375 (0,5)^{k-3} - 2,275 (0,1)^{k-3}\}.$$

(e) A kezdeti értékek $x_1[0] = 16$ és $x_2[0] = 20$. Ezek felhasználásával

$$y[k] = \frac{20}{9} + 40 (0,5)^k - \frac{200}{9} (0,1)^k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

M-2. A sajátértékek $\lambda_1 = 0,6$ és $\lambda_2 = 0$. Ebből $A^k = \lambda_1^{k-1} A$, $k = 1, 2, \dots$ és

$$(a) y[k] = \varepsilon[k-2] (0,6)^{k-2}.$$

$$(b) y[k] = \varepsilon[k-2] \{2,5 - 1,5 (0,6)^{k-2}\}.$$

M-3. A sajátértékek és a sajátvektorok mint a 2.3-2.5. pont 2. példájában. A kezdeti állapot $\mathbf{x}(+0) = [0 \ 0 \ 1]^T$. Ezek felhasználásával

$$h(t) = \delta(t) + \varepsilon(t) \left\{ \frac{121}{30} e^{-0,6t} - \frac{17}{10} e^{-0,4t} - \frac{5}{6} \right\}$$

adja az impulzusválaszt. #

2.3-3. Az állapotváltozós leírás megoldása mátrixfüggvényekkel

2.3-3.1. Általános megfontolások

A 2.3-1. szakaszban megfogalmaztuk a lineáris, invariáns, kauzális (FI esetben: differenciális) rendszer állapotváltozós leírását. Az állapotegyenlet normálalakja

$$\text{DI: } \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} \mathbf{u}[k], \quad \text{FI: } \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t). \quad (2.3-59)$$

Ha ennek megoldásaként az $\mathbf{x}[k]$, illetve az $\mathbf{x}(t)$ állapotvektor időfüggése már ismert, akkor az $\mathbf{y}[k]$, illetve az $\mathbf{y}(t)$ válaszvektor számítása már csak behelyettesítést igényel:

$$\text{DI: } \mathbf{y}[k] = \mathbf{C} \mathbf{x}[k] + \mathbf{D} \mathbf{u}[k]; \quad \text{FI: } \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t). \quad (2.3-60)$$

Ebben a szakaszban formalizált módszert mutatunk be az állapotegyenlet megoldására a $k \in \mathbf{N}$ illetve a $t \in \mathbf{R}_+$ intervallumban.

Ismertnek tekintjük egyrészt a gerjesztéseket ugyanitt, másrészt a DI állapotvektor $\mathbf{x}[-1]$ kiindulási értékét vagy az abból számítható $\mathbf{x}[0] = \mathbf{A} \mathbf{x}[-1] + \mathbf{B} \mathbf{u}[-1]$ kezdeti értékét, illetve a FI állapotvektor $\mathbf{x}(-0)$ kiindulási értékét. Bekapcsolási folyamat estén (amikor $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ a k illetve a t idő negatív értékeire) minden kiindulási érték nulla.

2.3-3.2. A megoldás formulája

Igazolni fogjuk, hogy az állapotegyenlet azon megoldása, amelynek kezdeti értéke $\mathbf{x}[0]$ vagy kiindulási értéke $\mathbf{x}(-0)$, a következő alakú:

$$\begin{aligned} \text{DI: } \mathbf{x}[k] &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B} \mathbf{u}[i], & k \in \mathbf{Z}_+, \\ \text{FI: } \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(-0) + \int_{-0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau, & t \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \quad (2.3-61)$$

Az integrál -0 alsó határa azt jelenti, hogy ha a gerjesztés tartalmaz $\delta(t)$ Dirac-impulzus összetevőt, akkor azt az integrálás során figyelembe kell venni.

Bevezetve a $p = k - 1 - i$ új szummációs változót illetve a $\vartheta = t - \tau$ új integrációs változót a következő alak adódik:

$$\begin{aligned} \text{DT: } \mathbf{x}[k] &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] + \sum_{p=0}^{k-1} \mathbf{A}^p \mathbf{B} \mathbf{u}[k-1-p], & k \in \mathbf{Z}_+, \\ \text{FI: } \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(-0) + \int_0^{t+0} e^{\mathbf{A}\vartheta} \mathbf{B} \mathbf{u}(t-\vartheta) d\vartheta, & t \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \quad (2.3-62)$$

A válasz számítható vagy úgy, hogy az állapotvektort minden időpontra kiszámítva azt (60)-ba helyettesítjük. Ezt a helyettesítést általánosan is elvégezhetjük, miáltal kiküszöbölhetjük az állapotvektor időfüggvényét (csak a belépő gerjesztés esetén nulla kiindulási állapotot kell ismernünk):

$$\begin{aligned} \text{DI: } \mathbf{y}[k] &= \begin{cases} \mathbf{C} \mathbf{x}[0] + \mathbf{D} \mathbf{u}[0], & k = 0, \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] + \mathbf{C} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B} \mathbf{u}[i] + \mathbf{D} \mathbf{u}[k], & k \in \mathbf{Z}_+; \end{cases} & (2.3-63) \\ \text{FI: } \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(-0) + \mathbf{C} \int_{-0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t), \quad t \in \mathbf{R}_+. \end{aligned}$$

Az állapotvektor, illetve a válaszvektor első tagja a *zérus gerjesztésű összetevő*, második, illetve második és harmadik tagja a *zérus állapotú összetevő* (pontosabban: a zérus kezdeti vagy kiindulási állapotú összetevő). Ha minden gerjesztés belépő (értéke nulla $k=0$ illetve $t=0$ előtt), akkor $\mathbf{x}[0]=\mathbf{0}$ illetve $\mathbf{x}(-0)=\mathbf{0}$, ezért ekkor az első tag nulla, tehát \mathbf{x} és \mathbf{y} megegyezik zérus állapotú összetevőjével. Ez a helyzet a gyakorlati esetek többségében. Ha viszont a gerjesztés azonosan nulla k illetve t nem-negatív értékeire, akkor \mathbf{x} és \mathbf{y} megegyezik zérus gerjesztésű összetevőjével.

A zérus gerjesztésű összetevő emlékeztet a szabad összetevőre, a zérus állapotú összetevő emlékeztet a gerjesztett összetevőre, de nem azonosak. Ez abból is látszik, hogy belépő gerjesztés esetén a zérus állapotú összetevő nulla, míg a szabad összetevő általában nem nulla.

A DI állapotvektor és válasz kifejezésében szereplő \mathbf{A}^k , $k \in \mathbf{N}$ mátrixfüggvény a kvadratikus mátrix önmagával való ismételt szorzását jelenti. A FI állapotvektor és válasz kifejezésében szereplő $e^{\mathbf{A}t}$, $t \in \mathbf{R}$ exponenciális mátrixfüggvényt hatványsora definiálja:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 t^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{A}^4 t^4 + \dots \quad (2.3-64)$$

Igazolható, hogy ez bármely \mathbf{A} mátrix esetén konvergens. Kellő számú tag figyelembe vételével a függvény tetszőleges pontossággal számítható, de csak t kellően kis értékeire használható eljárás. A (61) vagy (63) tényleges felhasználásához még meg kell adni \mathbf{A}^k és $e^{\mathbf{A}t}$ számításának gyakorlati módszerét. Számítógépes programmal ez nem jelent nehézséget. Az elvi háttérhez a 2.3-3.4. pontban tárgyaljuk az \mathbf{A} mátrix sajátértékeit, majd ezek felhasználásával a 2.3-3.5. pontban a mátrixfüggvények számítását.

Igazoljuk most, hogy (61) valóban megoldása az állapotegyenletnek.

A DI esetben kövessük a lépésről lépésre megoldás módszerét, miközben minden lépésnél helyettesítsük be az előző eredményt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[1] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[0] + \mathbf{B} \mathbf{u}[0], \\ \mathbf{x}[2] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[1] + \mathbf{B} \mathbf{u}[1] = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}[0] + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}[0] + \mathbf{A} \mathbf{u}[1], \\ \mathbf{x}[3] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[2] + \mathbf{A} \mathbf{u}[2] = \mathbf{A}^3 \mathbf{x}[0] + \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \mathbf{u}[0] + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}[1] + \mathbf{B} \mathbf{u}[2], \end{aligned}$$

és így tovább. A (61) ugyanezt adja, vagyis helyes megoldást ad. Az igazolás a feltételezett megoldásnak az állapotegyenletbe helyettesítésével is elvégezhető.

A FI megoldás igazolásához a (64) értelmezés alapján belátható, hogy az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrixfüggvény ugyanúgy differenciálható, mint az $e^{\mathbf{A}t}$ skalar függvény. Képezzük az állapotvektor (61) szerinti kifejezésének idő szerinti deriváltját:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{x}(-0) + \int_{-0}^t \mathbf{A} e^{\mathbf{A}'(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{B} \mathbf{u}(t).$$

Az első két tag összege a (61) értelmében $\mathbf{A} \mathbf{x}(t)$, tehát az (59) FI állapotegyenlet valóban ki van elégtve.

2.3-3.3. Az impulzusválasz kifejezése

Valamely DI illetve FI egy-gerjesztésű, egy-válaszú, lineáris, invariáns rendszer $h[k]$ illetve $h(t)$ impulzusválasza az $u[k] = \delta[k]$ illetve az $u(t) = \delta(t)$ gerjesztéshez tartozó válasza (2.1-1. és 2.1-2. szakasz). Az állapotváltozós leírás ismeretében az impulzusválasz a következőképpen állítható elő.

Az egységimpulzus illetve a Dirac-impulzus gerjesztés belépő jel, ennek következtében $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$ illetve $\mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}$. A (63)-ban az összeg megegyezik az $i = 0$ tagjával, az integrál megegyezik a $u(t)$ szorzójával a $\tau = 0$ helyen. Ebből következően (figyelembe véve az egy gerjesztést, egy választ)

$$\begin{aligned} \text{DI: } h[k] &= D \delta[k] + \varepsilon[k-1] \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}, \quad k \in \mathbf{Z}; \\ \text{FI: } h(t) &= D \delta(t) + \varepsilon(t) \mathbf{C}^T e^{\mathbf{A}'t} \mathbf{B}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (2.3-65)$$

Látható, hogy ha $D = 0$, akkor a DI impulzusválasz késleltetve van (legkorábban a $k = 1$ ütemben lép be), a FI impulzusválasz „simított” (nem tartalmaz Dirac-impulzust). Sokan csak az ilyen állapotváltozós leírású rendszert tartják elfogadhatónak (egyébként a rendszer nem „proper”).

A válasz (63) szerinti kifejezése felfogható az impulzusválasz (65) kifejezésének és a gerjesztésnek a konvolúciójának is. Az adott gerjesztéshez tartozó válasz számításához az állapotváltozók időfüggvényére nincs feltétlenül szükség, mint azt már láttuk.

2.3-3.4. Mátrix sajátértékei

A rendszermátrix sajátértékei nem csak számítástechnikai, hanem fogalmi szempontból is fontos szerepet játszanak. Ez a pont és a 2.3-2.2. pont sok átfedést tartalmaz.

Legyen \mathbf{A} egy kvadrátikus mátrix, sorainak és oszlopainak száma N . Az

$$\mathbf{m} = [m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_N]^T \quad (2.3-66)$$

vektor a mátrix egy sajátvektora, ha kielégíti a következő egyenletet:

$$\mathbf{A} \mathbf{m} = \lambda \mathbf{m}. \quad (2.3-67)$$

Itt a valós vagy komplex értékű λ állandó az \mathbf{A} mátrix egy sajátértéke. Ha \mathbf{m} egy sajátvektor, akkor $K \mathbf{m}$ ($K \neq 0$) is egy sajátvektor, ezért \mathbf{m} normálható, például egy normája vagy valamelyik nem nulla értékű rendezője egységnyinek választható.

A (67) nullára redukált alakja

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (2.3-68)$$

Itt \mathbf{I} a kvadratikus, N -dimenziós egységmátrix (tehát minden főátlóbeli eleme 1, többi eleme 0).

A (68) homogén lineáris egyenletrendszernek csak akkor van az $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ triviális megoldástól különböző megoldása, ha determinánusa nulla, vagyis ha λ_i megoldása az \mathbf{A} mátrix $D(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletének:

$$D(\lambda) \equiv \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0; \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N. \quad (2.3-69)$$

A determináns részletesebben felírt alakja

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \equiv \begin{vmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1N} \\ -A_{21} & \lambda - A_{22} & \dots & -A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_{N1} & -A_{N2} & \dots & \lambda - A_{NN} \end{vmatrix}. \quad (2.3-70)$$

Ebből következik, hogy a $D(\lambda)$ karakterisztikus polinom általános alakja

$$D(\lambda) = \lambda^N + d_1 \lambda^{N-1} + d_2 \lambda^{N-2} + \dots + d_{N-1} \lambda + d_N. \quad (2.3-71)$$

A karakterisztikus egyenletnek N számú gyöke van (a karakterisztikus polinomnak N számú nullahelye vagy zérusa van). Mivel az A_{pq} és így a d_i együtthatók valósak, ezért a sajátértékek vagy valósak vagy konjugált komplex párokat alkotnak. A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_N). \quad (2.3-72)$$

A sajátértékek egyszerezsek, ha $\lambda_p \neq \lambda_q$, $p \neq q$, egyébként egy vagy több sajátérték többszörös. Az utóbbi eset a gyakorlatban ritkán fordul elő, de a DI esetben $\lambda = 0$ gyakran többszörös sajátérték. Az állapotváltozós leírás megoldásához a sajátértékek ismeretére rendszerint szükség van.

A Cayley–Hamilton-tétel értelmében minden kvadratikus mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, vagyis a (69) szerinti jelöléssel

$$\mathbf{A}^N + d_1 \mathbf{A}^{N-1} + \dots + d_{N-1} \mathbf{A} + d_N \mathbf{I} = \mathbf{0}. \quad (2.3-73)$$

Ebből következik, hogy miután ismételt szorzással meghatároztuk az $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots, \mathbf{A}^{N-1}$ kvadratikus mátrixokat, az \mathbf{A}^N mátrix már szorzás nélkül is számítható:

$$\mathbf{A}^N = -d_N \mathbf{I} - d_{N-1} \mathbf{A} - d_{N-2} \mathbf{A}^2 - \dots - d_1 \mathbf{A}^{N-1}.$$

Az \mathbf{A}^N ismeretében hasonló módon számítható \mathbf{A}^{N+1} , \mathbf{A}^{N+2} és így tovább.

A fenti összefüggés felhasználható kvadratikus mátrix pozitív egész hatványainak számítására. Lényegesebb azonban az, hogy a tétel értelmében a mátrix bármely pozitív egész hatványa (és így végtelen sora, például exponenciális függvénye) meghatározható úgy, hogy $N-1$ számú ismételt szorzásra van csak szükség. Erre több lehetőség is ismert. Ezek közül kettőt mutatunk be a következő pontokban. Az eljárások alkalmasak a mátrix tetszőleges (negatív vagy nem egész) hatványának számítására is.

A legtöbb matematikai számítógépes program alkalmas kvadratikus mátrix hatványának vagy exponenciális függvényének számítására. Ennek alapján az Euler-reláció felhasználásával számítható mátrix szinusza, koszinusza, ezek szorzata a mátrix hatványával vagy exponenciális függvényével.

2.3-3.5. Mátrix függvénye egyszeres sajátértékek esetén

Legyen A egy $N \times N$ dimenziós kvadratikus mátrix, amelynek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ sajátértékei egyszeresek. Meg akarjuk határozni az A^k ($k \in \mathbf{N}$) és az $e^{A t}$ ($t \in \mathbf{R}$) mátrixot. A mátrix sajátértékeit ismertnek tekintjük. A sok ismert módszer közül egyet mutatunk be.

Az A^k vagy az $e^{A t}$ mátrixfüggvény előállítására érdekében határozzuk meg az A mátrix N számú L_i Lagrange-mátrixát a következő összefüggés alapján:

$$L_i = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^N \frac{A - \lambda_p I}{\lambda_i - \lambda_p}; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3-74)$$

Így például $N = 3$ esetén a három Lagrange-mátrix

$$L_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{A - \lambda_3 I}{\lambda_1 - \lambda_3}, \quad L_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{A - \lambda_3 I}{\lambda_2 - \lambda_3}, \quad L_3 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_3 - \lambda_2}.$$

Láthatjuk, hogy A legnagyobb előforduló hatványa valóban A^{N-1} . Igazolható továbbá, hogy $L_p L_q = \mathbf{0}$, $p \neq q$, továbbá hogy

$$\sum_{i=1}^N L_i = I. \quad (2.3-75)$$

Éz felhasználható a számított Lagrange-mátrixok ellenőrzésére.

Igazolható, hogy a kvadratikus A mátrix *hatványai* a következő összefüggéssel számíthatók *egyszeres sajátértékek* esetén:

$$A^k = \sum_{i=1}^N \lambda_i^k L_i. \quad (2.3-76)$$

Tekintsük még azt a valamivel általánosabb esetet, amikor az A mátrix M számú sajátértéke egyszeres és nem nulla, továbbá $\lambda_0 = 0$ egy $(N-M)$ -szeres sajátértéke. Ekkor a mátrix karakterisztikus egyenlete

$$D(\lambda) \equiv \lambda^N + d_1 \lambda^{N-1} + \dots + d_M \lambda^{N-M} = 0. \quad (2.3-77)$$

Most A^2, A^3, \dots, A^{M-1} számítandó ismételt szorzással, míg $k \geq M$ esetén (76) érvényes, de most a Lagrange-mátrixok kifejezése

$$L_i = \frac{A^{N-M}}{\lambda_i^{N-M}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^M \frac{A - \lambda_p I}{\lambda_i - \lambda_p}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (2.3-78)$$

Az ismételt szorzással számítandó legnagyobb hatvány most is A^{N-1} .

Az *exponenciális mátrixfüggvény* az A mátrix Lagrange-mátrixainak ismeretében *egyszeres sajátértékek* esetén a következő összefüggéssel számolható:

$$e^{A t} = \sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t} L_i. \quad (2.3-79)$$

A sor alakú definíció felhasználásával is, de a fenti összefüggéssel is igazolható, hogy az exponenciális mátrixfüggvény szorzására vagy differenciálására vonatkozó szabályok megegyeznek a valós változós exponenciális függvényre vonatkozókkal. Például A és e^{At} szorzata felcserélhető (kommutatívak).

Hasonló módon értelmezettek és számíthatók más olyan mátrixfüggvények is, amelyeknek az egész számsíkon konvergens hatványsoruk van.

1. példa Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,50 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k](0,5)^k$.

A rendszermátrix karakterisztikus egyenlete és ebből számított sajátértékei

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda & 0,24 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - \lambda + 0,24 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,6, \lambda_2 = 0,4.$$

Az A mátrix Lagrange-mátrixai az (74) értelmében

$$L_1 = \frac{1}{0,2} \begin{bmatrix} -0,4 & -0,24 \\ 1 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1,2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1,2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}; \quad L_1 + L_2 = I.$$

A (61) alkalmazásához a következő mátrixfüggvényt kell számítanunk:

$$\begin{aligned} C A^i B &= C \{ \lambda_1^i L_1 + \lambda_2^i L_2 \} B = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ (0,6)^i \begin{bmatrix} -2 & -1,2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + (0,4)^i \begin{bmatrix} 3 & 1,2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,5 \end{bmatrix} = 3,3 (0,6)^i - 1,8 (0,4)^i. \end{aligned}$$

A válasz kifejezése a (63) értelmében

$$\begin{aligned} y[0] &= 1, \\ y[k] &= \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ 3,3 (0,6)^{k-1-i} - 1,8 (0,4)^{k-1-i} \right\} (0,5)^i + 1 \cdot (0,5)^k = \\ &= 3,3 \frac{0,6^k}{0,6} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{0,5}{0,6} \right)^i - 1,8 \frac{0,4^k}{0,4} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{0,5}{0,4} \right)^i, \quad k \in \mathbf{Z}_+. \end{aligned}$$

A vizsgált egyszerű esetben ki tudjuk fejezni az összeget zárt alakban (mértani sor):

$$y[k] = 3,3 \frac{0,6^k}{0,6} \frac{1 - (0,5/0,6)^k}{1 - (0,5/0,6)} - 1,8 \frac{0,4^k}{0,4} \frac{1 - (0,5/0,4)^k}{1 - (0,5/0,4)}, \quad k \in \mathbf{Z}_+.$$

Ez a $k = 0$ helyen is jó eredményt ad. A megoldás végső alakja rendezés után

$$y[k] = \varepsilon[k] \left\{ 33 (0,6)^k + 18 (0,4)^k - 50 (0,5)^k \right\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Behelyettesítve $k = 0, 1$ és 2 értékét a válaszra ugyanazokat az értékeket kapjuk, mint a 2.3-1.2. pont példájában a lépésről lépésre módszerrel. #

2. példa Egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u(t) = \varepsilon(t)$.

A rendszermátrix karakterisztikus egyenlete és a sajátértékei

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda+4 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3.$$

A rendszermátrix Lagrange-mátrixai

$$L_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ -1,5 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 1,5 & 1,5 \end{bmatrix}; \quad L_1 + L_2 = I.$$

A (61) alkalmazásához a következő mátrixfüggvényt kell számítanunk:

$$\begin{aligned} C e^{At} B &= C \left\{ e^{\lambda_1 t} L_1 + e^{\lambda_2 t} L_2 \right\} B = \\ &= [1 \quad 5] \left\{ e^{-t} \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ -1,5 & -0,5 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 1,5 & 1,5 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 e^{-t} + 7 e^{-3t}. \end{aligned}$$

A válasz kifejezése (63) alapján $\mathbf{x}[-0] = \mathbf{0}$ felhasználásával

$$y(t) = \int_0^t [-2 e^{-(t-\tau)} + 7 e^{-3(t-\tau)}] 1 d\tau = -2 e^{-t} \frac{e^t - 1}{1} + 7 e^{-3t} \frac{e^{3t} - 1}{3}, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Rendezés után, a válasz belépő jellegét is kifejezve

$$y(t) = \varepsilon(t) \left\{ \frac{1}{3} + 2 e^{-t} - \frac{7}{3} e^{-3t} \right\}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Az Olvasó ellenőrizheti, hogy a vizsgált állapotváltozós leírás és a 2.2-2.4. pont példájában vizsgált rendszeregyenlet ugyanazt a rendszert írják le. Ennek megfelelően a válaszok is megegyeznek. #

*2.3-3.6. Mátrix függvénye többszörös sajátértékek esetén

Legyen A egy kvadratikus, N -dimenziós mátrix, amelynek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sajátértékei egyszerűek és egyetlen, $\lambda_{p+1} \equiv \lambda_s$ sajátértéke többszörös, multiplicitása $r = N - p$. Az ilyen mátrix hatványai illetve exponenciális függvénye kifejezhetők a mátrix H Hermite-mátrixainak ismeretében:

$$A^k = \sum_{i=1}^p \lambda_i^k H_{i0} + \sum_{q=0}^{\max(r-1, k)} \frac{k!}{(k-q)!} \lambda_s^{k-q} H_{sq}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (2.3-80)$$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^p e^{\lambda_i t} H_{i0} + \sum_{q=0}^{r-1} t^q e^{\lambda_s t} H_{sq}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2.3-81)$$

Látható, hogy a \mathbf{H}_{sq} mátrix együtthatója a λ_s^k illetve az $e^{\lambda_s t}$ exponenciális függvény λ_s szerinti q -adik deriváltja.

Kézenfekvő az általánosítás arra az esetre, amikor a mátrixnak több többszörös sajátértéke van.

Az \mathbf{A} mátrix Hermite-mátrixai a következőképpen határozhatók meg. Írjuk fel a (80) egyenletet $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ esetére:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p \mathbf{H}_{i0} + \mathbf{H}_{s0} &= \mathbf{I}, \\ \sum_{i=0}^p \lambda_i \mathbf{H}_{i0} + \lambda_s \mathbf{H}_{s0} + \mathbf{H}_{s1} &= \mathbf{A}, \\ \sum_{i=0}^p \lambda_i^2 \mathbf{H}_{i0} + \lambda_s^2 \mathbf{H}_{s0} + 2 \lambda_s \mathbf{H}_{s1} + 2 \mathbf{H}_{s2} &= \mathbf{A}^2, \\ &\vdots \\ \sum_{i=0}^p \lambda_i^{N-1} \mathbf{H}_{i0} + \lambda_s^{N-1} \mathbf{H}_{s0} + (N-1) \lambda_s^{N-2} \mathbf{H}_{s1} + (N-1)(N-2) \lambda_s^{N-3} \mathbf{H}_{s2} + \\ &+ \dots + \frac{(N-1)!}{p!} \mathbf{H}_{s,r-1} = \mathbf{A}^{N-1}. \end{aligned} \quad (2.3-82)$$

Az \mathbf{A} itt szereplő hatványait ismételt szorzással számítjuk. Láthatjuk, hogy legfeljebb \mathbf{A}^{N-1} számítására van szükség. A (82) összefüggések N számú lineáris mátrixegyenletet jelentenek a $p+r=N$ számú Hermite-mátrixra. Az egyenletrendszer megoldása adja az ismeretlen Hermite-mátrixokat, tehát (80) illetve (81) már alkalmazható a mátrixfüggvény számítására.

Előfordulhat, hogy a $\mathbf{H}_{s,r-1}$ vagy még a $\mathbf{H}_{s,r-2}, \mathbf{H}_{s,r-3}, \dots$ mátrixokra is zérus mátrixot kapunk. Ekkor van olyan N -nél kisebb fokszámú ún. minimálegyenlet, amelyet az \mathbf{A} mátrix kielégít. Ennek előzetes meghatározásával a számítás egyszerűsíthető. Nem foglalkozunk részletesebben ezzel a nagyon speciális esettel.

Az Hermite-mátrixok alkalmazhatók más, sorával definiált mátrixfüggvény számítására is, ha annak van többszörös sajátértéke.

Példa Határozzuk meg az \mathbf{A}^k és az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrixot, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,25 & 1 \end{bmatrix}.$$

A mátrix karakterisztikus egyenlete

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0,25 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - \lambda + 0,25 \equiv (\lambda - 0,5)^2 = 0.$$

Ebből következik, hogy $\lambda_1 = 0,5$ a mátrix egy kétszeres sajátértéke, a mátrixnak további sajátértéke nincs ($N = 2, p = 0, r = 2$). Az Hermite-mátrixokra vonatkozó (82) egyenletek a következő alakúak

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{10} &= \mathbf{I}, \\ \lambda_1 \mathbf{H}_{10} + \mathbf{H}_{11} &= \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{H}_{10} = \mathbf{I}$, $\mathbf{H}_{11} = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$, vagy részletesebben:

$$\mathbf{H}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{11} = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \\ -0,25 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

A két keresett mátrixfüggvény (80) és (81) értelmében

$$\mathbf{A}^k = \lambda_1^k \mathbf{H}_{10} + k \lambda_1^{k-1} \mathbf{H}_{11} = \begin{bmatrix} (1-k)(0,5)^k & 2k(0,5)^k \\ -0,5k(0,5)^k & (1+k)(0,5)^k \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{H}_{10} + t \mathbf{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{H}_{11} = \begin{bmatrix} (1-0,5t)e^{0,5t} & t e^{0,5t} \\ -0,25t e^{0,5t} & (1+0,5t)e^{0,5t} \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizhetjük az eredményeket $k=0$ és 1 illetve $t=0$ esetre. #

*2.3-3.7. Az állapotegyenlet szétcsatolása

Ebben a pontban az állapotegyenlet egy olyan átalakítását mutatjuk be, amely a megoldását nagyon egyszerűvé teszi. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a rendszermátrix minden sajátértéke egyszerűes.

Az \mathbf{A} mátrix egyszerűes λ_i sajátértékéhez tartozó \mathbf{m}_i sajátvektora a (68) szerinti

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{m}_i = \mathbf{0} \quad (2.3-83)$$

egyenlet egy megoldása. Hagyjuk el a lineáris egyenletrendszer utolsó egyenletét és válasszuk a sajátvektor utolsó rendezőjét egységnyinek. A többi rendező a

$$\begin{bmatrix} \lambda_i - A_{11} & -A_{12} & \dots & \lambda_i - A_{1(N-1)} \\ -A_{21} & \lambda_i - A_{22} & \dots & -A_{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -A_{(N-1)1} & -A_{(N-1)2} & \dots & \lambda_i - A_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{i1} \\ m_{i2} \\ \vdots \\ m_{i(N-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1N} \\ A_{2N} \\ \vdots \\ A_{(N-1)N} \end{bmatrix}; \quad i=1, 2, \dots, N \quad (2.3-84)$$

lineáris egyenletrendszer megoldása. Az i -edik sajátvektor ennek alapján

$$\mathbf{m}_i = [m_{i,1} \quad m_{i,2} \quad \dots \quad m_{i,N-1} \quad 1]^T, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (2.3-85)$$

Mind egyik sajátvektor megszorozható egy állandóval. Az \mathbf{A} mátrix \mathbf{M} modális mátrixa a sajátvektoraiból alkotott kvadratikuss N -dimenziós mátrix:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1 \quad \mathbf{m}_2 \quad \dots \quad \mathbf{m}_N]. \quad (2.3-86)$$

Igazolható, hogy ha a sajátértékek egyszerűesek, akkor a modális mátrix nem szinguláris, tehát meghatározható az inverze. Igazolható továbbá, hogy ekkor

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}^{-1}, \quad \mathbf{\Lambda} \equiv \langle \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_N \rangle. \quad (2.3-87)$$

Itt $\langle \dots \rangle$ diagonális mátrixot jelent, amely a főátlós elemeket tartalmazza. A (87) az \mathbf{A} mátrix úgynevezett spektrál-felbontása. Ebből már következik, hogy

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M} \langle \lambda_1^k \quad \lambda_2^k \quad \dots \quad \lambda_N^k \rangle \mathbf{M}^{-1}, \quad (2.3-88)$$

$$\mathbf{e}^{A t} = \mathbf{M} \left\langle \mathbf{e}^{\lambda_1 t} \quad \mathbf{e}^{\lambda_2 t} \quad \dots \quad \mathbf{e}^{\lambda_N t} \right\rangle \mathbf{M}^{-1}. \quad (2.3-89)$$

Ezek után (61) vagy (63) alapján számítható az állapotvektor vagy a válaszvektor.

Az új állapotváltozókra vonatkozó állapotváltozós leírás előállításához írjuk fel az állapotegyenletet:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}.$$

Szorozzuk balról az \mathbf{M}^{-1} mátrixszal és vezessük be az $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}$ új állapotvektort. Az állapotváltozós leírás ekkor az alábbi alakot ölti:

$$\hat{\mathbf{x}}' = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = (\mathbf{C} \mathbf{M}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \mathbf{u}. \quad (2.3-90)$$

Ez az új állapotváltozók bevezetésének – a 2.3-1.2. és a 2.3-1.3. pontban már említett – egy speciális és célszerű esete. Az új rendszermátrix most a sajátértékekből alkotott \mathbf{A} diagonális mátrix. A (90) megadja az új állapotváltozós leírásban szereplő többi mátrix kifejezését is a régi mátrixokkal és az \mathbf{M} mátrixszal. A \mathbf{A} mátrix diagonális jellege következtében az állapotegyenlet struktúrája most ún. *szétcsatolt formájú*:

$$\hat{x}'_p = \lambda_p \hat{x}_p + \mathbf{b}_p^T \mathbf{u}, \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3-91)$$

ahol \mathbf{b}_p^T az $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}$ mátrix p -edik sora. Ha a rendszernek csak egy gerjesztése van, akkor $\mathbf{b}_p^T \mathbf{u} = b_p u$, ahol b_p az $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}$ vektor p -edik rendezője. A szétcsatolt állapotegyenlet egyes egyenletei ekkor egymástól függetlenül megoldhatók. Könnyen belátható, hogy

$$\text{DI: } \hat{x}_p[k] = \lambda_p^k \hat{x}_p[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_p^{k-1-i} \mathbf{b}_p^T \mathbf{u}[i], \quad (2.3-92)$$

$$\text{FI: } \hat{x}_p(t) = e^{\lambda_p t} \hat{x}_p(-0) + \int_{-0}^t e^{\lambda_p(t-\tau)} \mathbf{b}_p^T \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.3-93)$$

Az $\hat{x}_p[k]$ illetve $\hat{x}_p(t)$ állapotváltozók ismeretében számítható az $\mathbf{y}[k]$ illetve $\mathbf{y}(t)$ válasz.

Ha az \mathbf{A} mátrix sajátértékei nem mind egyszeresek, akkor az eljárás némi általánosítást igényel. Ezt azonban nem tárgyaljuk.

Ha a rendszermátrix egyszeres sajátértékei között komplex párok is vannak, akkor egyes feladatok megoldásához (például a hálózati reprezentáció meghatározáshoz) nem a szétcsatolt alak a legelőnyösebb. A rendszermátrix ilyenkor olyan blokk-diagonális alakra is hozható, amelynek vagy csak a főátlós elemei vagy az ezekre támaszkodó 2×2 méretű blokkok különböznek nullától, viszont ezek minden eleme valós. Ez az alak már alkalmas a hálózati reprezentáció előállítására. Ezt az eljárást nem tárgyaljuk.

1. példa Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,50 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k](0,5)^k$.

A rendszermátrix karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \lambda & 0,24 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 0,24 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,6, \lambda_2 = 0,4.$$

A sajátvektorok $m_{i2}=1$ választással a következő két egyenlet bármelyikének megoldása:

$$\lambda_i m_{i1} = -0,24 \quad \text{vagy} \quad -m_{i1} = -(\lambda_i - 1) \Rightarrow m_{i1} = -0,4, \quad m_{21} = -0,6.$$

Az A rendszermátrix M modális mátrixa és annak inverze

$$M = \begin{bmatrix} -0,4 & -0,6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

A (88) értelmében

$$A^k = \begin{bmatrix} -0,4 & -0,6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6^k & 0 \\ 0 & 0,4^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(0,6)^k + 3(0,4)^k & -1,2(0,6)^k + 1,2(0,4)^k \\ 5(0,6)^k - 5(0,4)^k & 3(0,6)^k - 2(0,4)^k \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy $k=0$ és 1 esetén valóban I és A adódik. Könnyen belátható, hogy ez a kifejezés megegyezik az $A^k = 0,6^k L_1 + 0,4^k L_2$ szerintivel, amelyet a 2.3-3.5. pont 1. példájában kaptunk. A válasz számításának további menete megegyezik az ott követettel, ezért azt nem ismételjük itt meg. #

2. példa Egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u(t) = \varepsilon(t)$.

A rendszermátrix karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3.$$

A sajátvektorok $m_{i2} = 1$ választással a következő két egyenlet egyikének megoldása:

$$\lambda_i m_{i1} = 1 \quad \text{vagy} \quad 3 m_{i1} = -(\lambda_i + 4) \Rightarrow m_{11} = -1, \quad m_{21} = -1/3.$$

Az A mátrix M modális mátrixa és annak inverze ($m_{22} = -3$ célszerű választással):

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} -1,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

A (85) értelmében

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 e^{-t} - 0,5 e^{-3t} & 0,5 e^{-t} - 0,5 e^{-3t} \\ -1,5 e^{-t} + 1,5 e^{-3t} & -0,5 e^{-t} + 1,5 e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Ha $t=0$, akkor helyesen I adódik. Könnyen ellenőrizhető, hogy az exponenciális mátrixfüggvény e kifejezése megegyezik a 2.3-3.5. pont 2. példája alapján előállíthatóval. A válasz számításának további menete megegyezik az ott követettel, ezért azt itt nem ismételjük meg. #

2.3-3.8. Folytonos idejű válasz közelítő számítása

A FI választ megadó (63) integrál akkor számítható zárt alakban, ha a gerjesztést egyszerű jel írja le. Általános esetben a számítást numerikusan, valamilyen *közelítő* módszerrel végezhetjük el. Erre egy elterjedt lehetőség az, hogy a választ előre rögzített vagy alkalmasan megválasztott $t_0=0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$ időpontokban számítjuk. Ha ezeket „elég sűrűre” választjuk, akkor $\mathbf{y}(t)$ a választott intervallumban kellő pontossággal ismertnek tekinthető. Szükség esetén interpoláció is alkalmazható.

A továbbiakban olyan belépő gerjesztésekre szorítkozunk, amelyek végesek t véges nem-negatív értékeire. Az esetleges Dirac-impulzus összetevők hatását külön vesszük figyelembe (2.3-3.3. pont). A *lépésközre* a

$$h_k = t_{k+1} - t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (2.3-94)$$

jelölést fogjuk alkalmazni. Minél kisebb lépésközöket alkalmazunk, annál pontosabb lesz az eredmény, de annál több választértéket kell számítanunk az adott intervallum vizsgálatához. A pontosság nem csak a lépésközök csökkentésével, hanem a közelítés alkalmazott módszerével is növelhető.

Elsődleges célunk az állapotvektor meghatározása az egyes időpontokban. Ezek ismeretében a válaszvektor számítása már egyszerű feladat:

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (2.3-95)$$

Az állapotvektor közelítő értékeinek számítására minden olyan eljárás alkalmas, amely használható az elsőrendű, nemlineáris

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3-96)$$

vektoriális differenciálegyenlet megoldására. Esetünkben $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$.

A legegyszerűbb közelítések az előrelépő és a hátralépő *Euler-módszer*:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{k+1}) &\approx \mathbf{x}(t_k) + h_k \mathbf{x}'(t_k) = \mathbf{x}(t_k) + h_k \{ \mathbf{A} \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t_k) \}, \\ \mathbf{x}(t_{k+1}) &\approx \mathbf{x}(t_k) + h_k \mathbf{x}'(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + h_k \{ \mathbf{A} \mathbf{x}(t_{k+1}) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t_{k+1}) \}. \end{aligned}$$

Ezekből $\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k + h_k)$ kifejezhető:

$$\text{előrelépő Euler: } \mathbf{x}(t_k + h_k) \approx [\mathbf{I} + h_k \mathbf{A}] \mathbf{x}(t_k) + h_k \mathbf{B} \mathbf{u}(t_k), \quad (2.3-97)$$

$$\text{hátralépő Euler: } \mathbf{x}(t_k + h_k) \approx [\mathbf{I} - h_k \mathbf{A}]^{-1} \{ \mathbf{x}(t_k) + h_k \mathbf{B} \mathbf{u}(t_k + h_k) \}. \quad (2.3-98)$$

További, ezeknél hatékonyabb módszereket a 2.5-2.5. pontban fogunk tárgyalni.

Az előrelépő Euler-módszer $N=1$ rendszámú (vagyis skalár) esetben úgy értelmezhető, hogy az $x(t)$ függvényt a t_k helyen az érintőjével közelítjük, hiszen annak meredeksége a megoldandó differenciálegyenletből számítható. A hátralépő Euler-módszernél a függvényt a t_k helyen a t_{k+1} pontbeli érintőjével közelítjük, amelyet azonban magát is csak közelítően tudjuk számítani. Ennek ellenére a hátralépő Euler-módszer azonos lépésköz, sőt azonos mennyiségű számítási munka (nagyjából kétszeres lépésköz) esetén többnyire pontosabb közelítést jelent, mint az előrelépő. A megadott két összefüggés ennek az érintővel történő közelítésnek az általánosítása tetszőleges rendszámra. A bonyolultabb eljárások egy része az Euler-módszer finomítása és továbbfejlesztése.

A h_k lépésközök megválasztása komoly megfontolást igényel, ha az A mátrix sajátértékei széles tartományt fognak át, azaz ha $|\lambda_i|_{\max} \gg |\lambda_i|_{\min}$ (a rendszer „stiff”). A számítás elején olyan kis lépésközt kell választanunk, hogy $h_k |\lambda_i|_{\max}$ is elég kicsi legyen. Előbb-utóbb azonban nagyobb lépésközt célszerű választani, különben a számítás túlságosan hosszadalmas lesz. Hasonló eljárást kell követnünk, ha a gerjesztések gyorsan és lassan változó szakaszokra bonthatók.

Többnyire egy lépésköz megválasztása után azt addig nem változtatjuk meg, amíg az állapotvektor megváltozásának egy normája nem lesz túlságosan nagy vagy túlságosan kicsi. A számítástechnikai szempontokat nem részletezzük tovább. A számítógépes programok különféle (rendszerint megválasztható) kritériumok alapján optimalizálják az alkalmazott lépésközt.

2.3-2.F. Feladatok

F-1. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{aligned}x'_1 &= 0,4x_1 + 0,03x_2 + u, & x'_2 &= x_1 + 0,2x_2; \\ y &= x_2.\end{aligned}$$

Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a gerjesztés

$$\begin{aligned}(a) \quad u[k] &= \varepsilon[k], & (b) \quad u[k] &= \varepsilon[k](-0,1)^k. \\ (c) \quad u[k] &= \varepsilon[k](0,1)^k, & (d) \quad u[k] &= \varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]. \\ (e) \quad u[k] &= 9\{1 - \varepsilon[k]\} + \varepsilon[k].\end{aligned}$$

Az (e) esetre feltételezze a rendszer stabilitását, amit később igazolni is fogunk.

Ellenőrizze az eredményeket a $k=0, 1$ és 2 ütemekre a lépésről lépésre módszerrel!

F-2. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{aligned}x'_1 &= 0,4x_1 + 0,08x_2 + u, \\ x'_2 &= x_1 + 0,2x_2; \\ y &= x_2.\end{aligned}$$

Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a gerjesztés

$$(a) \quad u[k] = \delta[k], \quad (b) \quad u[k] = \varepsilon[k].$$

Ellenőrizze az eredményt a $k=0, 1$ és 2 ütemekre a lépésről lépésre módszerrel.

F-3. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,24 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} -0,2 & -0,24 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u.$$

Határozza meg a rendszer $h[k]$ impulzusválaszát!

F-4. Határozza meg annak a FI rendszernek az impulzusválaszát, amelynek állapotváltozós leírása a 2.3-3.5. pont 2. példájában adott!

***F-5.** Igazolja, hogy a (2.3-19) szerinti Frobenius-mátrix modális mátrixa $N=3$ és egyszeres sajátértékek esetén

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}.$$

Az állítás tetszőleges rendszámra kézenfekvő módon általánosítható.

***F-6.** Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer állapotváltozós leírása egyszeres sajátértékek esetén a rendszermátrix diagonalizálása után a következő alakra hozható:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_0 \\ \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1^* \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^T & \mathbf{C}^T & \mathbf{C}_1^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + Du.$$

A 0 indexű mátrixok és vektorok valóságosak, az 1 indexűek komplexek, a csillag a konjugáltat jelöli. Az A részmatricák diagonálisak, elemeik a valós, illetve a komplex sajátértékek. Mutassa meg, hogy a

$$T = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & I \\ \mathbf{0} & jI & -jI \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}jI \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}jI \end{bmatrix}$$

transzformációs mátrisszal a következő, valós elemű diagonális mátrixokat tartalmazó állapotváltozós leírás adódik:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}'_0 \\ \hat{\mathbf{x}}'_1 \\ \hat{\mathbf{x}}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & -A_3 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^T & \mathbf{C}_2^T & \mathbf{C}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + Du.$$

Adja meg a 2 és 3 indexű mátrixok és vektorok kifejezését az 1 indexűekkel! Milyen célszerűbb alakra rendezhető át ez az állapotváltozós leírás?

***F-7.** Adott egy DI, lineáris, invariáns rendszer állapotegyenlete és $\mathbf{x}[0]$ kezdeti állapota, N az állapotváltozók száma.

Hogyan kell megválasztani az $u[k]$ gerjesztés-értékeket ($k = 0, 1, \dots, N-1$) ahhoz, hogy $k \geq N$ esetén $\mathbf{x}[k] = \mathbf{0}$ legyen? Mindig megoldható ez a feladat?

2.3-2.M. Megoldások

M-1. A sajátértékek $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_2 = 0,5$.

A válaszok kifejezése

$$(a) y[k] = \varepsilon[k] \left\{ \frac{20}{9} - 5(0,5)^k + \frac{25}{9}(0,1)^k \right\}.$$

$$(b) y[k] = \varepsilon[k] \left\{ \frac{25}{3}(-0,1)^k + \frac{25}{6}(0,5)^k - \frac{25}{2}(0,1)^k \right\}.$$

$$(c) y[k] = \varepsilon[k] \left\{ \frac{25}{4}(0,5)^k - \frac{25}{4}(0,1)^k - 25k(0,1)^k \right\}.$$

(d) Az (a) szerinti eredmény felhasználható.

$$y[k] = \{ \varepsilon[k] - \varepsilon[k-3] \} \left\{ \frac{20}{9} - 5(0,5)^k + \frac{25}{9}(0,1)^k \right\} + \\ + \varepsilon[k-3] \{ 4,375(0,5)^{k-3} - 2,775(0,1)^{k-3} \}.$$

(e) A kezdeti értékek $x_1[0] = 16$ és $x_2[0] = 20$. Ezek felhasználásával

$$y[k] = \frac{20}{9} + 40(0,5)^k - \frac{200}{9}(0,1)^k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

M-2. A sajátértékek $\lambda_1 = 0,6$, $\lambda_2 = 0$. Ebből $A^k = \lambda_1^{k-1} A$, $k = 1, 2, \dots$ és

$$(a) y[k] = \varepsilon[k-2](0,6)^{k-2}.$$

$$(b) y[k] = \varepsilon[k-2] \{ 2,5 - 1,5(0,6)^{k-2} \}.$$

M-3. A sajátértékek $\lambda_1 = 0,6$, $\lambda_2 = 0,4$, $\lambda_0 = 0$. A Lagrange-mátrixok

$$L_1 = \frac{A}{\lambda_1} \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad L_2 = \frac{A}{\lambda_2} \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

$L_1 + L_2 = I$ és $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = A$ teljesül. Figyelembe véve, hogy $k = N - M = 1$ esetén az $A^{k-1} = I$ tag nem számolható a Lagrange-mátrixokkal, kapjuk hogy

$$h[k] = D \delta[k] + C^T B \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] C^T A^{k-1} B.$$

A szorzásokat elvégezve:

$$h[k] = \delta[k] + 1,5 \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \{ 0,98(0,6)^{k-2} + 0,28(0,4)^{k-2} \}.$$

Ez megegyezik a 2.2-2. szakasz 1. példájában kapottal, mivel a vizsgált rendszeregyenlet és állapotváltozós leírás ugyanazt a rendszert jellemzik (2.2-1.F-3. feladat).

M-4. Felhasználva az idézett példát és a (65)-öt kapjuk, hogy $h(t) = \varepsilon(t) \{ -2e^{-t} + 7e^{-3t} \}$.

A megoldást most teljesen mechanikusan tudjuk előállítani szemben a megfelelő rendszeregyenlet megoldásával (2.2-2.4. pont 2. példa).

***M-5.** A sajátértékek kielégítik a $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$ egyenletet. Ennek alapján könnyen belátható az $\mathbf{A} \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{A}$ egyenlet érvényessége.

***M-6.** A (9) felhasználásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{A}_1 \}, \quad \mathbf{A}_3 = \operatorname{Im} \{ \mathbf{A}_1 \}; \\ \mathbf{B}_2 &= 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{B}_1 \}, \quad \mathbf{B}_3 = -2 \operatorname{Im} \{ \mathbf{B}_1 \}; \quad \mathbf{C}_2 = \operatorname{Re} \{ \mathbf{C}_1 \}, \quad \mathbf{C}_3 = \operatorname{Im} \{ \mathbf{C}_1 \}. \end{aligned}$$

Célszerű az állapotváltozók sorrendjét úgy megválasztani, hogy a konjugált párt alkotó sajátértékekhez tartozók kövessék egymást, akkor a transzformált rendszermátrix blokk-diagonális lesz 1×1 és 2×2 méretű blokkokkal.

***M-7.** Az állapotegyenlet megoldása alapján $\mathbf{x}[N]$ kifejezhető. Átrendezve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[0] & u[1] & \dots & u[N-1] \end{bmatrix}^T = \mathbf{x}[N] - \mathbf{A}^N \mathbf{x}[0].$$

A lineáris egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a keresett $u[k]$ értékeket, és természetesen $u[k] = 0, k \geq N$. A feladat nem megoldható, ha a bal oldali mátrix nem invertálható (ekkor a rendszert nem vezérelhetőnek nevezik). Látható, hogy tetszőleges $\mathbf{x}[N]$ végső állapot is előírható. A feltétel $N' > N$ időpontra is vonatkozhat, de ekkor a megoldás nem egyértelmű (bizonyos $u[k]$ értékek megválaszthatók).

2.3-4. Aszimptotikus stabilitás

2.3-4.1. Az aszimptotikus stabilitás feltételei

A rendszer állapotváltozós leírása mélyebb betekintést ad a rendszer viselkedésébe, mit az impulzusválasszal vagy a rendszeregyenlettel történő leírás. Ez lehetővé teszi egy, a GV stabilitásnál szigorúbb stabilitás értelmezését.

A lineáris, invariáns rendszer *aszimptotikusan stabilis*, ha a gerjesztetlen rendszer minden *állapotváltozója* nullához tart bármely kezdeti állapot esetén:

$$\left. \begin{aligned} \text{DI: } \mathbf{u}[k] = 0, k \in \mathbf{N} &\Rightarrow \mathbf{x}[k] \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \\ \text{FI: } \mathbf{u}(t) = 0, t \in \mathbf{R}_+ &\Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \text{aszimptotikusan stabilis rendszer (2.3-99)}$$

Az „aszimptotikusan stabilis” elnevezésből nem derül ki egyértelműen, hogy az állapotváltozókra vonatkozó feltételről van szó, nem csak a válasz aszimptotikus viselkedéséről.

Ha a gerjesztetlen rendszer állapotváltozóit nullához tartanak, akkor a válaszok is nullához tartanak. A fordított állítás nem mindig igaz. Előfordulhat ugyanis, hogy a gerjesztetlen rendszer minden válasza nullához tart, de egyes állapotváltozókra ez nem érvényes. Erre a nagyon speciális esetre később még visszatérünk.

Ha a gerjesztés nulla pozitív időkre, akkor az állapotvektor megegyezik a zérus gerjesztésű összetevőjével. A (61)-ből következik, hogy ekkor a gerjesztetlen rendszer állapotvektorának időfüggése

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0], \quad k \in \mathbf{N}; \quad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(-0), \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

A mátrixfüggvények és a mátrix sajátértékeinek kapcsolatából következik az alábbi állítás helyessége.

A lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor *aszimptotikusan stabilis*, ha A rendszermátrixának minden *sajátértéke* az egységsugarú körön belül, illetve a bal félsíkon van

$$\left. \begin{array}{l} \text{DI: minden } |\lambda_i| < 1 \\ \text{FI: minden } \Re\{\lambda_i\} < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{aszimptotikusan stabilis rendszer} \quad (2.3-100)$$

A tétel akkor is igaz, ha a sajátértékek többszörösek, mivel a $k^p \lambda_i^k$ illetve a $t^p e^{\lambda_i t}$ sajátfüggvények nullához tartanak bármely $p \in \mathbb{N}$ esetén, ha az exponenciális tényező nullához tart.

Ha a fenti feltételek csak úgy teljesülnek, hogy $<$ nem érvényes, de \leq már érvényes, továbbá az egységnyi abszolút értékű (az egységsugarú körre eső) illetve a nulla valós részű (a képzetes tengelyre eső) sajátértékek egyszeresek, akkor a rendszer nem aszimptotikusan stabilis, de az aszimptotikus stabilitás *határhelyzetében* van. Ekkor a gerjesztetlen rendszer állapotváltozói nem tartanak nullához, de végesek maradnak: vagy egy állandóhoz vagy egy korlátos periodikus jelhez tartanak. A modellezett objektumtól is függ, hogy egy ilyen rendszert stabilisnak tekintünk-e vagy nem.

Ha a nem aszimptotikusan stabilis rendszer nincs az aszimptotikus stabilitás határhelyzetében, akkor aszimptotikusan *labilisnak* nevezhető. Az ilyen rendszer csak korlátozott feltételek mellett (például csak bizonyos időpontig) tekinthető lineárisnak.

*2.3-4.2. A rendszeregyenlet és a rendszermátrix sajátértékei

Vizsgáljuk meg egy rendszer rendszeregyenletének $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértékeinek és rendszermátrixának vagy állapotegyenletének $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ sajátértékeinek kapcsolatát.

Az esetek többségében a *sajátértékek* kétféle rendszere azonos, azaz $n = N$ és megfelelő sorszámozás választásával $\lambda_i(\text{rendszeregyenlet}) = \lambda_i(\text{rendszermátrix})$.

Előfordulhat azonban, hogy fellépnek „járulékos” sajátértékek. A lehetséges eseteket a következő táblázatos összeállítás szemlélteti:

rendszeregyenlet	állapotegyenlet		
$(p + q = n)$	$(p + r = N)$		
λ_i	λ_i	$i = 1, 2, \dots, p;$	(2.3-101)
λ_{y_i}	-	$i = 1, 2, \dots, q;$	
-	λ_{x_i}	$i = 1, 2, \dots, r.$	

Ennek belátásához tekintsük egy rendszernek a rendszeregyenletét és állapotváltozós leírását, amelyek a 2.3-1.4. pontban megadott módon kapcsolódnak egymáshoz. Ezek sajátértékei nyilván megegyeznek.

Késleltessük most a DI rendszeregyenletet $1, 2, \dots, q$ ütemmel illetve képezzük a FI rendszeregyenlet $1., 2., \dots, q$ -adik deriváltját. Szorozzuk meg az egyenleteket tetszőleges c_1, c_2, \dots, c_q állandókkal és adjuk össze az egyenleteket. Most egy olyan új rendszeregyenletünk van, amely az eredetivel megegyező rendszert ír le. Elemi megfontolásokkal belátható, hogy az új rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

$F(\lambda) \cdot F_q(\lambda) = 0$, ahol $F(\lambda)$ az eredeti rendszeregyenletnek (és esetünkben az állapotegyenletnek is) a karakterisztikus polinomja, míg $F_q(\lambda)$ egy q -adfokú polinom, amelynek együttthatói a c , választott állandók. Az új rendszeregyenletnek ezek szerint q számú olyan sajátértéke van, amely nem sajátértéke az állapotegyenletnek.

Egészítsük most ki az állapotváltozókat r számú új állapotváltozóval, az állapotegyenletet r számú új egyenlettel. Válasszuk az A mátrix új oszlopainak első N sorát és a C^T sorvektor új oszlopait zérusnak. Ekkor egy új állapotváltozós leíráshoz jutunk, amely a gerjesztés-válasz kapcsolat szempontjából ugyanazt a rendszert írja le, mint az eredeti. Az új állapotegyenlet sajátértékei egyrészt az eredeti egyenlet sajátértékei, továbbá r számú új sajátérték, amelyek nem sajátértékei a rendszeregyenletnek.

A gyakorlatban a különböző leírásokat vagy fizikai megfontolások vagy mérési eredmények alapján kapjuk és nem az előzőleg leírt, értelmetlennek tűnő átalakításokkal. Célunk csak annak bemutatása volt, hogy megjelenhetnek a rendszeregyenletben vagy az állapotegyenletben olyan sajátértékek, amelyek csak az egyik leíráshoz tartoznak, a másikhoz nem. Ennek egy következményét tárgyaljuk a következő pontban.

A modellezett objektum ismerete nélkül nem lehet eldönteni, hogy a különböző, azonos GV kapcsolatot leíró rendszer közül melyik jelenti a legjobb leírást, tehát hogy mely sajátértékeknek van fizikai realitásuk.

2.3-4.3. Aszimptotikus stabilitás és gerjesztés-válasz stabilitás

A lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor GV stabilis (korlátos gerjesztéshez korlátos válasz tartozik), ha impulzusválasza abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható (2.1-1.3. és 2.3. pont). Az impulzusválasz (39) kifejezéséből következik, hogy az akkor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ha $A^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ illetve $e^{At} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ teljesül. A mátrixfüggvényeknek a Lagrange- vagy az Hermite-mátrixszokkal kifejezett alakjából (2.3-3.5. és 6. pont) következik, hogy ez teljesül, ha a rendszermátrix sajátértékei a DI esetben az egység sugarú kör belsejében, a FI esetben a bal félsíkon helyezkednek el. A (100) figyelembe vételével ebből az alábbi állítás következik.

A lineáris, invariáns rendszer biztosan *GV stabilis*, ha *aszimptotikusan stabilis*.

A GV stabilitásnak ez az elegendő feltétele azonban – legalábbis elméletileg – nem szükséges is.

Ha a rendszer nem aszimptotikusan stabilis, de GV stabilis, akkor el kell döntenünk, hogy a rendszert stabilisnak tekintjük vagy nem. Ha az állapotváltozók a modellezett objektum fizikai változói által meghatározottak, akkor többnyire nem tekintjük az ilyen rendszert stabilisnak. A GV stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis rendszer egy olyan objektum modelljének tekinthető, amelyen belül katasztrófák állhatnak elő, de ennek nincs kihatása a GV kapcsolatra. Előfordulhat azonban, hogy az állapotváltozós leírás nem megfelelő modellje az objektumnak. Ez a helyzet például ha egy célszerűtlen hálózati modelltől adódott (l. a következő fejezetet). Ha a rendszer teljesen vezérelhető és teljesen megfigyelhető (ezeket a fogalmakat nem tárgyaljuk), akkor a GV stabilis rendszer aszimptotikusan stabilis is.

Az aszimptotikus stabilitás és a GV stabilitás mellett más stabilitási fogalmak is használatosak. Ennek egyik oka az, hogy e két stabilitási fogalom nehezen terjeszthető ki nemlineáris vagy variáns rendszerekre. Igen elterjedt a Ljapunov értelmű stabilitás, amelynek eldöntése azonban korántsem egyszerű (2.5-2.6. pont). Másrészt a nemlineáris

rendszer egyensúlyi pontjának vagy pontjainak stabilitása többnyire eldönthető a lineáris rendszerre vonatkozó aszimptotikus stabilitás fogalmának és technikájának felhasználásával, amint azt a 2.5-2.2. pontban látni fogjuk.

2.3-4.F. Feladatok

F-1. Egy rendszermátrix rendezői

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1, & A_{12} &= -1, \\ A_{21} &= 1, & A_{22} &= P. \end{aligned}$$

Határozza meg a P valós paraméter azon értéktartományát, amelyben a DI vagy a FI rendszer aszimptotikusan stabilis!

F-2. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mutassa meg, hogy a rendszer nem aszimptotikusan stabilis! Válassza meg C_1 és C_2 értékét úgy, hogy a rendszer mégis GV stabilis legyen, ha ez lehetséges!

F-3. Oldja meg az előző feladatot, ha a megadott állapotváltozós leírás egy FI rendszerre vonatkozik!

F-4. Adjon feltételeket az A rendszermátrix elemeire $N = 2$ esetén, amelyek biztosítják a DI illetve a FI rendszer aszimptotikus stabilitását!

F-5. Egy DI illetve egy FI rendszer rendszermátrixának egy sajátértéke nulla.
Lehet-e aszimptotikusan stabilis ez a rendszer?

F-6. A rendszermátrix egy sajátértéke

(a) $\lambda_a = -1$,

(b) $\lambda_b = +1$,

(c) két sajátértéke konjugált komplex pár: $\lambda_c = +j$, $\lambda_c^* = -j$.

Aszimptotikusan stabilis-e a DI illetve a FI rendszer a három esetben?

F-7. Egy másodrendű rendszer rendszermátrixában $A_{12} = 0$.

Adja meg az A_{11} , A_{21} és A_{22} paraméterek azon értéktartományát, amelyben a DI illetve a FI rendszer aszimptotikusan stabilis!

Adja meg a stabilitási tartomány ábráját a háromdimenziós paraméterterben, ha az egyszerűen lehetséges!

Lehet-e ez a rendszer GV stabilis, ha nem aszimptotikusan stabilis?

2.3-4.M. Megoldások**M-1. A karakterisztikus egyenlet**

$$\lambda^2 - (1+P)\lambda + (1+P) = 0.$$

Az aszimptotikus stabilitás szükséges és elegendő feltételei DI illetve FI rendszer esetén (2.2-3.2. pont):

$$\begin{array}{ll} \text{DI:} & \text{FI:} \\ 1 - (1+P) + (1+P) > 0, & -(1+P) > 0, \\ 1 + (1+P) + (1+P) > 0, & 1+P > 0; \\ 1 - |1+P| > 0; & \\ & \text{vagyis} \\ -1,5 < P < 0, & \text{nincs ilyen } P \text{ érték.} \end{array}$$

M-2. Az állapotváltozós leírás (vagy a rendszermátrix) karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 1,5\lambda - 1 = 0.$$

Az együttthatókra vonatkozó feltételek nincsenek kielégítve. Valóban: a két sajátérték $\lambda_1 = -0,5$, $\lambda_2 = 2$. A λ_2 sajátérték az egység sugarú körön kívüli. Az A mátrix Lagrange-mátrixai

$$\mathbf{L}_1 = \frac{-1}{2,5} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,4 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Az impulzusválaszban akkor nem fog a $\mathbf{C}\mathbf{L}_2\mathbf{B}\lambda_2^k$ tag szerepelni, ha az exponenciális függvény szorzója nulla:

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,4 C_1 + 0,8 C_2 = 0,$$

vagyis ha $C_1 = -2C_2$, ahol C_2 tetszőleges. Ha azonban például $C_1 = -2,000001 C_2$, akkor a nem aszimptotikusan stabilis rendszer nem is GV stabilis.

M-3. Az előző megoldás most is érvényes, mert λ_2 a jobb félsíkon van.***M-4. A karakterisztikus egyenlet**

$$\begin{aligned} \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 &= 0, \\ a_1 &= -A_{11} - A_{22}, \quad a_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \equiv \det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Ezután alkalmazható a (2.2-41) illetve a (2.2-48) kritériumrendszer.

Az eredményeket nehéz áttekinthető alakra hozni (például ábrázolni) a négy független paraméterrel kifejezve, amelyek a stabilitás szempontjából két független paraméterre redukálhatók.

M-5. A DI esetben a rendszer aszimptotikusan stabilis. A FI esetben a rendszer nem aszimptotikusan stabilis, sőt ha $\lambda = 0$ a rendszermátrixnak többszörös sajátértéke, akkor a rendszer (aszimptotikusan) labilisnak is nevezhető.

M-6. A DI esetben a rendszer egyik megadott (az egységsugarú körre eső) sajátérték esetén sem aszimptotikusan stabilis; ha a megadott sajátértékek mindegyike egyszeres, akkor a rendszer az (aszimptotikus) stabilitás határhelyzetében van; ha a megadott sajátértékek bármelyike többszörös, akkor a rendszer (aszimptotikusan) labilis. A FI esetben $\lambda_a = -1$: a rendszer aszimptotikusan stabilis; $\lambda_b = +1$: a rendszer nem aszimptotikusan stabilis (aszimptotikusan labilis); $\lambda_c = +j$, $\lambda_c^* = -j$: a rendszer nem aszimptotikusan stabilis; ha e sajátérték-pár egyszeres, akkor a rendszer az aszimptotikus stabilitás határhelyzetében van, ha többszörös, akkor a rendszer (aszimptotikusan) labilis.

M-7. A két sajátérték $\lambda_1 = A_{11}$, $\lambda_2 = A_{22}$, vagyis az aszimptotikus stabilitás nem függ A_{12} értékétől. Ebből következik, hogy az aszimptotikus stabilitás feltételei:

$$\text{DI: } -1 < A_{11}, A_{22} < 1$$

$$\text{FI: } A_{11}, A_{22} < 0$$

A stabilitási tartomány ábrázolása az A_{11} , A_{22} paramétersíkon nagyon egyszerű.

A nem aszimptotikusan stabilis rendszer lehet GV stabilis, ha a λ_1 sajátérték a stabilitási tartományba esik és a válasz nem függ az x_2 állapotváltozótól.

A feladat megoldható az előző feladat megoldása alapján is, de az valamivel több megfontolást igényel.

2.4. Jelfolyam hálózatok

Az előző fejezetekben a rendszert, mint gerjesztéseinek és válaszainak kapcsolatát tekintettük, a lineáris, invariáns rendszer jellemzésére különféle matematikai leírásokat használtunk (impulzusválasz, rendszeregyenlet, állapotváltozós leírás). Ebben a fejezetben lineáris, invariáns, kauzális rendszerek jelfolyam hálózattal (röviden: hálózattal) történő leírását tárgyaljuk. Látni fogjuk, hogy az állapotváltozók egyszerűen értelmezhetők a rendszer hálózati reprezentációjában.

A 2.4-1. szakaszban az alapfogalmakat és az általános törvényeket tárgyaljuk. Ennek során definiáljuk a lineáris jelfolyam hálózat komponenseit, karakterisztikájukat és összekapcsolási szabályokat.

A 2.4-2. szakaszban megmutatjuk, hogy miként állítható elő a hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírása és rendszeregyenlete, értelmezzük a hálózat regularitását és stabilitását.

A 2.4-3. szakaszban megmutatjuk, hogy akár az állapotváltozós leírásával, akár a rendszeregyenletével jellemzett rendszerhez miként rendelhető hálózati reprezentáció. A realizációs feladatra a 4.3-2. szakaszban még visszatérünk. A nemlineáris és variáns rendszerek hálózati reprezentációjával a 2.5-1.3. pontban foglalkozunk.

2.4-1. Általános törvények

2.4-1.1. Elemi komponensek

Mint már említettük (1.3-2.1. pont) egy jelfolyam hálózat – amelyre ebben a fejezetben a *hálózat* rövidebb elnevezést is alkalmazni fogjuk – *komponensek* összekapcsolását jelenti.

Minden komponensnek meghatározott számú p_1, p_2, \dots bemeneti változója és q_1, q_2, \dots kimeneti változója lehet.

A komponens *karakterisztikája* kifejezi kimeneti változóit a bemeneti változóival.

Részletesebben csak olyan komponensekkel foglalkozunk, amelyeknek legfeljebb egy p bemeneti és legfeljebb egy q kimeneti változójuk van. Az általánosabb lineáris komponens ugyanis helyettesíthető ilyenek összekapcsolásával (2.4-1.3. pont).

A továbbiakban elemi komponensek összekapcsolásából álló hálózatok vizsgálatára szorítkozunk. Sokan csak az ilyen hálózatokat nevezik „hálózatnak”.

Az általunk vizsgálandó lineáris, invariáns, kauzális jelfolyam hálózatok *elemi komponensei* a következők:

A komponens neve	DI karakterisztikája	FI karakterisztikája	
forrás	$q[k] = u[k]$	$q(t) = u(t)$	
nyelő	$p[k] = y[k]$	$p(t) = y(t)$	
erősítő	$q[k] = K p[k]$	$q(t) = K p(t)$	(2.4-1)
DI késleltető	$q[k] = p[k - 1]$	–	
FI integrátor	–	$q(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau$	

Az erősítő *memóriamentes* komponens, a késleltető illetve az integrátor *dinamikus* (nem memóriamentes, memóriával bíró) komponensek.

Az u változó az adott DI illetve FI jel, az y változó a keresett DI illetve FI jel. Az erősítő és a késleltető illetve az integrátor *lineáris* komponensek (nagyon egyszerű lineáris rendszerek), a forrás és a nyelő nem tekinthető lineáris komponensnek (habár nemlineárisnak sem szokás nevezni őket). Természetesen u , illetve y a hálózat által reprezentált rendszer gerjesztését, illetve válaszát jelenti.

A *késleltető* illetve az *integrátor* kimeneti változójára az x jelet fogjuk használni. Később látni fogjuk, hogy ez célszerű jelölés, mert ezek lehetnek a hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozóit. Jelölje a késleltető illetve az integrátor bemeneti változóját p_x , akkor a karakterisztikájuk

$$\text{DI: } x[k] = p_x[k-1] \quad \text{FI: } x(t) = \int_{-\infty}^t p_x(\tau) d\tau.$$

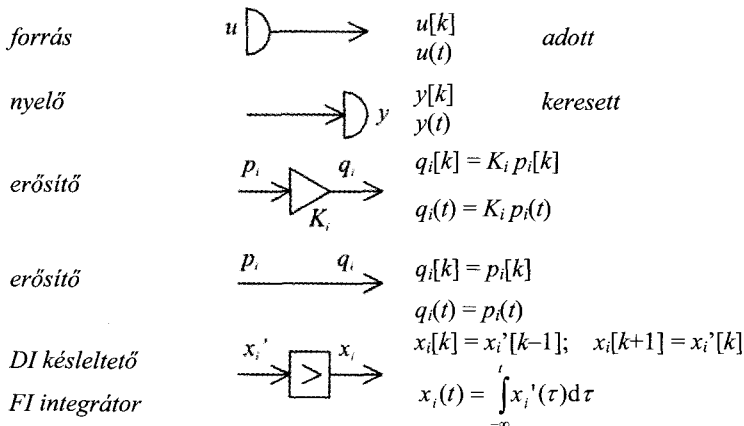
A k változó helyére $k+1$ változót írva illetve a FI karakterisztikát t szerint differenciálva kapjuk

$$\text{DI: } x'[k] = p_x[k]; \quad \text{FI: } x'(t) = p_x(t), \quad (2.4-2)$$

ahol $x'[k] \equiv x[k+1]$ illetve $x'(t)$ az $x(t)$ általánosított deriváltja. Míg az első alak az oksági kapcsolatot fejezi ki (késleltetés vagy integrálás), a második alak kényelmes jelölésnek tekintendő. Összefoglalva a dinamikus komponensek karakterisztikája a következő:

Az i -edik DI *késleltető* kimeneti változójának jele x_i , bemeneti változójának jele x_i' .
Az i -edik FI *integrátor* kimeneti változójának jele x_i , bemeneti változójának jele x_i' .

Az 1. ábrán láthatjuk a lineáris, invariáns, kauzális (a FI esetben: differenciális) rendszereket reprezentáló jelfolyam hálózat elemi komponenseinek rajzjelét és karakterisztikáját.



2.4-1. ábra A vizsgált hálózatok elemi komponensei a forrás, a nyelő, az erősítő K_i vagy 1 erősítéssel, a DI késleltető illetve a FI integrátor

A következő szakaszban látni fogjuk, hogy ilyen komponensek összekapcsolásával realizálhatók azok a rendszerek, amelyek rendszeregyenlete a 2.2. fejezetben, állapotváltozós leírása a 2.3. fejezetben megadott.

A karakterisztikák általánosítása lineáris, *variáns*, kauzális hálózatokra kézenfekvő. Csak az erősítő karakterisztikája más variáns esetben. A variáns erősítő K erősítése a k illetve a t idő ismert függvénye, tehát a variáns erősítő karakterisztikája $q_i[k] = K_i[k] p_i[k]$, $q_i(t) = K_i(t) p_i(t)$. Látni fogjuk, hogy az állapotváltozós leírás előállításában ebben az általánosabb esetben ugyanúgy történik, mint az invariánsé.

Nemlineáris jelfolyam hálózatokkal a 2.5-1.3. pontban foglalkozunk. Látni fogjuk, hogy csak az erősítő általánosítására lesz szükség.

A FI rendszert reprezentáló hálózat egy további kauzális, lineáris, invariáns elemi komponense a FI idejű késleltető, amelynek karakterisztikája $q_i(t) = p_i(t - T_i)$, $T_i > 0$. Az ilyen komponenset is tartalmazó hálózat nem differenciális FI rendszert reprezentál, állapotváltozós leírása nem a 2.3. fejezetben megadott alakú. Ennek megoldása az időtartományban nehéz. Mint látni fogjuk, a frekvencia-tartományban és a komplex frekvencia-tartományban a FI késleltető vagy sok más lineáris, invariáns komponens figyelembe vétele sem okoz elvi nehézséget (3.3. és 4.4. fejezet).

2.4-1.2. Összekapcsolási szabályok és kényszerek

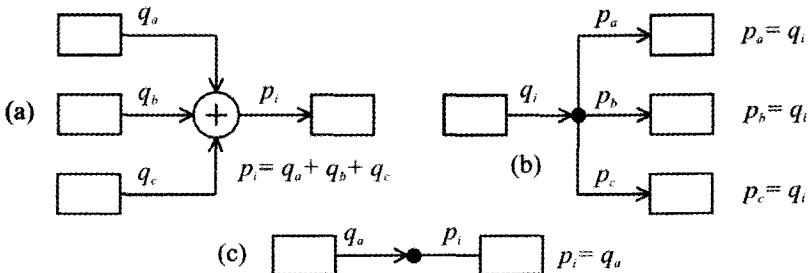
A jelfolyam hálózat összekapcsolási szabályait és kényszereit az 1.3-2.1. pontban és az 1.3-1. ábrán már megfogalmaztuk, itt csak megismételjük őket.

Egy *összegező csomópontban* egyesíthető tetszőleges számú kimeneti pólus és egyetlen bemeneti pólus. Az egyetlen bemeneti pólushoz tartozó bemeneti változó azon kimeneti változók összege, amelyek a csomópontban egyesített bemeneti pólusokhoz vannak rendelve. A 2a ábra jelöléseivel

$$p_i = q_a + q_b + \dots \quad (2.4-3)$$

Egy *szétágazó csomópontban* egyesíthető egyetlen kimeneti pólus és tetszőleges számú bemeneti pólus. Minden bemeneti pólushoz rendelt bemeneti változó megegyezik az egyetlen kimeneti pólushoz rendelt kimeneti változóval. A 2b ábra jelöléseivel

$$p_a = q_i, \quad p_b = q_i, \quad \dots \quad (2.4-4)$$



2.4-2. ábra A csomópontok ábrázolása: (a) összegező csomópont; (b) szétágazó csomópont; (c) egyszerű csomópont

Ha csak egyetlen kimeneti és egyetlen bemeneti változó van egy csomópontban egyesítve, akkor ez az *egyszerű csomópont* tekinthető akár összegező, akár szétágazó csomópontnak. A 2c ábrán látható módon az utóbbi a szokásosabb.

A következő szakaszban módszert fogunk adni az elemi komponensekből álló jelfolyam hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának előállítására. A rendszeregyenlet ebből (2.3-1.5. pont) egyszerű hálózatokra közvetlenül is előállítható. A rendszeregyenletet később tárgyalandó (3. vagy 4. fejezet) módszerekkel egyszerű előállítani.

*2.4-1.3. Sokváltozós lineáris komponens helyettesítése

Egy komponensnek általában P számú p_i bemeneti változója és Q számú q_i kimeneti változója van. A karakterisztika általános alakja

$$q_i = \mathcal{H}_i \{p_1, p_2, \dots, p_P\}, \quad i=1, 2, \dots, Q. \quad (2.4-5)$$

A \mathcal{H}_i operátorok lehetnek a k illetve a t idő függvényei is.

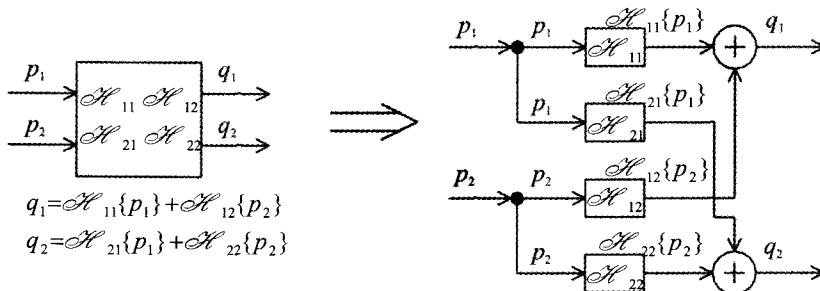
Lineáris komponens esetén $P \geq 1$ és $Q \geq 1$, hiszen a forrás és a nyelő nem lineáris komponensek. Egy *lineáris komponens* \mathcal{H}_i operátorai lineárisak, ezért, a karakterisztika általános alakja

$$q_i = \mathcal{H}_{i,1} \{p_1\} + \mathcal{H}_{i,2} \{p_2\} + \dots + \mathcal{H}_{i,P} \{p_P\}, \quad i=1, 2, \dots, Q, \quad (2.4-6)$$

ahol minden $\mathcal{H}_{i,j}$ operátor lineáris. Ha a komponens lineáris és invariáns, akkor a $\mathcal{H}_{i,j}$ operátorok nem függenek a k illetve a t időtől.

Egy olyan lineáris komponens, amelynek P számú bemeneti és Q számú kimeneti változója van, a (6)-ból következően helyettesíthető $P \times Q$ számú egy-bemenetű, egy-kimenetű lineáris komponens alkalmas összekapcsolásával. A $P=2, Q=2$ eset látható a 3. ábrán. Az általánosítás kézenfekvő, habár az ábrát nehéz áttekinthetően megrajzolni.

Egyesek az összegező és a szétágazó csomópont is komponensnek tekintik. Ezek azonban nem helyettesíthetők egy-bemenetű, egy-kimenetű lineáris komponensekkel. A „szétágazó” helyett a „szétágaztató” elnevezés pontosabb lenne.



2.4-3. ábra Két-bemenetű, két-kimenetű lineáris komponens helyettesítése egy-bemenetű, egy-kimenetű lineáris komponensek összekapcsolásával

A helyettesítés számítástechnikai szempontból nem egyértelműen előnyös, hiszen megjelennek új változók. Célszerűbb lehet ezért lemondani az elemi komponensekre szorító leírásról. A továbbiakban azonban csak elemi komponenseket tartalmazó hálózatokkal foglalkozunk.

2.4-1.F. Feladatok

F-1. Értelmezzen olyan DI illetve FI elemi lineáris komponenset, amelyet két valós paraméter jellemez, és amely feleslegessé teszi az erősítő és a késleltető illetve az integrátor alkalmazását.

F-2. Egy két-bemenetű, két-kimenetű lineáris DI komponens karakterisztikája

$$\begin{aligned}q_1[k] &= K_1 p_1[k-1] + K_2 p_2[k], \\ q_2[k] &= K_3 p_1[k-1] + K_4 p_2[k-1].\end{aligned}$$

Adjon meg egy olyan összetett komponenset, amely csak elemi komponenseket tartalmaz!

F-3. Egy két-bemenetű, két-kimenetű lineáris FI komponens karakterisztikája

$$\begin{aligned}q_1(t) &= K_1 \int_{-\infty}^t p_1(\tau) d\tau + K_2 p_2(t), \\ q_2(t) &= K_3 \int_{-\infty}^t p_1(\tau) d\tau + K_4 \int_{-\infty}^t p_2(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Adjon meg egy olyan összetett komponenset, amely csak elemi komponenseket tartalmaz!

***F-4.** Igazolja, hogy a $q = (p_1 + p_2)^2$ karakterisztikájú nemlineáris DI illetve FI komponens nem helyettesíthető a 3. ábrán láthatóhoz hasonló módon.

***F-5.** Igazolja, hogy a $q = \mathcal{H}\{p\} + u$ karakterisztikájú (u adott) nemlineáris DI illetve FI komponens helyettesíthető a 3. ábrán láthatóhoz hasonló módon.

2.4-1.M. Megoldások

M-1. Tekintsük a következő karakterisztikájú DI illetve FI komponenset:

$$\begin{aligned}\text{DI: } q[k] &= K p[k-n]; \\ \text{FI: } q(t) &= K \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{\tau_1} p(\tau) d\tau \cdots d\tau_{n-2} d\tau_{n-1}.\end{aligned}$$

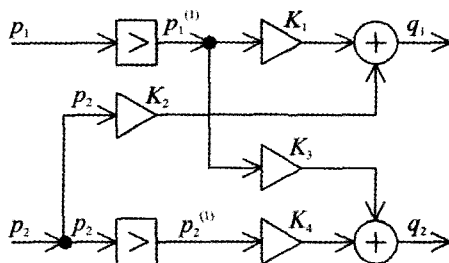
Ez a komponens erősítőt reprezentál, ha $n = 0$ és késleltetőt vagy integrátort reprezentál, ha $K = 1$ és $n = 1$.

M-2. Egy realizáció látható a 4. ábrán (a következő oldalon), amelyen $p_i^{(k)}[k] = p_i[k-1]$.

M-3. A 4. ábra hálózata most is egy lehetséges kapcsolat, amelyen $p_i^{(1)}$ a $p_i(t)$ deriváltja.

***M-4.** A karakterisztika egy más alakja

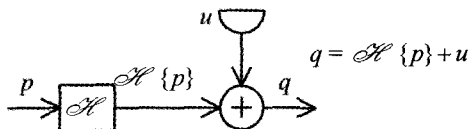
$$q = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2.$$



2.4-4. ábra A 2. vagy a 3. feladatban adott karakterisztikájú, két-bemenetű, két-kimenetű lineáris komponens egy helyettesítése elemi komponensek összekapcsolásával

Ebből következik, hogy a két négyzetre emelő nemlineáris komponensen kívül egy további nemlineáris komponensre, a szorzóra is szükség van, amelynek két bemenete és egy kimenete van.

*M-5. Egy lehetséges kapcsolás az 5. ábrán látható. Ha a \mathcal{H} operátor lineáris, akkor a karakterisztika inhomogén lineáris (tehát nemlineáris). Ha a \mathcal{H} operátor lineáris, akkor az általánosítás sok-bemenetű, sok-kimenetű komponensre kézenfekvő.



2.4-5. ábra Egy nemlineáris, egy-bemenetű, egy-kimenetű komponens helyettesítése.

2.4-2. Az állapotváltozós leírás előállítása

2.4-2.1. Elemi megfontolások

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, miként állítható elő az elemi komponensek összekapcsolásából álló hálózat, illetve az általa reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának normálalakja:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.4-7)$$

ahol a DI esetben $\mathbf{x}'[k] \equiv \mathbf{x}[k+1]$, míg a FI esetben $\mathbf{x}'(t)$ az $\mathbf{x}(t)$ általánosított deriváltja. Példáink során egy gerjesztésre és egy válasza szorítkozunk, amikor $\mathbf{B} = \mathbf{B}$ oszlopvektor, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ sorvektor és $\mathbf{D} = D$ skalár. Az eljárások azonban alkalmazhatók olyan hálózatokra is, amelyek sok-gerjesztésű, sok-válaszú rendszereket reprezentálnak.

A választott jelölések a következő állítást fejezik ki.

Az i -edik DI késleltető illetve az i -edik FI integrátor x_i kimeneti változója választható a rendszer i -edik állapotváltozójának. A rendszer N rendszáma megegyezik a hálózat által tartalmazott késleltetők illetve integrátorok számával.

Az állapotegyenlet az x_i bemeneti változók kifejezése az x_j állapotváltozókkal és az u_j gerjesztésekkel, a válasz állapotváltozós kifejezése a nyelők y_i bemeneti változóinak kifejezése az x_j állapotváltozókkal és az u_j gerjesztésekkel.

Az eljárás a következő. Jelölje x_1, x_2, \dots, x_N a dinamikus komponensek kimeneti változóit. Ezáltal értelmeztük a x'_1, x'_2, \dots, x'_N bemeneti változókat is. Kísérreljük meg előállítani az összekapcsolási kényszerek alkalmazásával az x'_i bemeneti változókat az x_j kimeneti változókkal és az u_j gerjesztésekkel. Szükség esetén egyes erősítők p_i bemeneti változóját további ismeretlenként kezeljük, mindegyiket kifejezzük a többi változóval. Ennek az erősítőnek a kimeneti változója $K_i p_i$, míg a q_i változót nem is használjuk. Az így előálló lineáris algebrai egyenletrendszerből kifejezzük az x'_i és az y_i változókat az x_j és u_j változókkal. Ezzel előállítottuk az állapotegyenletet alkotó N számú egyenletet és a válaszok kifejezését is.

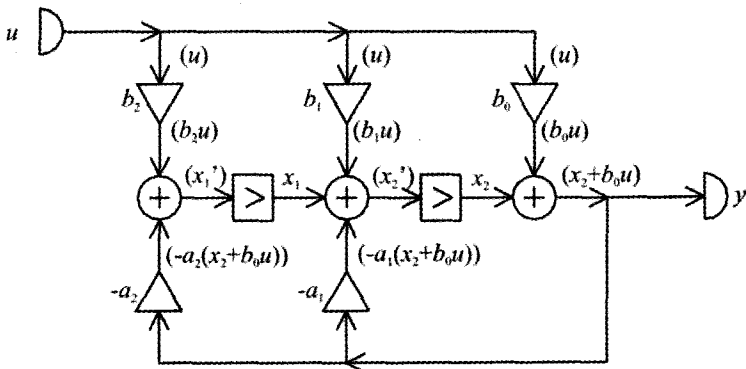
Általánosan fogalmazva: a hálózat ismeretében kellő számú lineáris algebrai egyenletet kell előállítanunk, majd az x'_i és y_i változókra megoldanunk az x_j és u_j változókat ismertnek tekintve.

A példával illusztrálni fogjuk, hogy az eljárás követése egyszerűbb, mint általános leírása.

Kivételesen előfordulhat, hogy a leírt eljárással nem fejezhető ki az x'_i változók a kívánt alakban. Ekkor a hálózat *nem reguláris*, az ilyen hálózatot nem tekintjük egy rendszer megfelelő modelljének (l. a következő pontot is).

A hálózati reprezentáció az – eddig csak formálisan bevezetett – állapotváltozók egy értelmezését adja. Tudjuk, hogy az így értelmezett állapotváltozók bármely független lineárkombinációja is tekinthető állapotváltozóknak. Ez egyben arra is utal, hogy egy rendszernek több hálózati reprezentációja is lehet (a 2.4-3. szakaszban foglalkozunk az egyenletek realizálásával).

1. példa Határozzuk meg annak a rendszernek az állapotváltozós leírását, amelynek egy hálózati reprezentációja a 6. ábrán látható. Az erősítésekre alkalmazott jelölések okát látni fogjuk.



2.4-6. ábra Két dinamikus komponenset tartalmazó hálózat. Ez egy másodrendű rendszer úgynevezett első kanonikus realizációja

Kijelöltük az x_1 és x_2 változókat. Zárójelben feltüntettük azokat a változókat, amelyek a szemlélet alapján kifejezhetők. Ezek a következők: x'_1 és x'_2 , azután b_0u , b_1u , b_2u , a jobb oldali összegező csomópontnál $x_2 + b_0u$ majd ennek felhasználásával

$-a_1(x_2 + b_0 u)$ és $-a_2(x_2 + b_0 u)$. Némi gyakorlat birtokában ez „fejben” elvégezhető. Esetünkben nem volt szükség járulékos változók bevezetésére. Nem minden hálózat egyenletei írhatók fel ilyen egyszerű módon.

Fejezzük most ki a késleltetők vagy az integrátorok bemeneti változóit:

$$\begin{aligned}x_1' &= -a_2(x_2 + b_0 u) + b_2 u \equiv (0)x_1 + (-a_2)x_2 + (b_2 - b_0 a_2)u, \\x_2' &= x_1 - a_1(x_2 + b_0 u) + b_1 u \equiv x_1 + (-a_1)x_2 + (b_1 - b_0 a_1)u.\end{aligned}$$

Ezzel meg is kaptuk az $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$ állapotegyenletet. A válasz kifejezése

$$y = x_2 + b_0 u \equiv (0)x_1 + (1)x_2 + b_0 u.$$

Ennek általános alakja $\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}$.

Az Olvasó ellenőrizheti, hogy ez a (2.3-20) szerinti második Frobenius-alakja a következő rendszeregyenletnek:

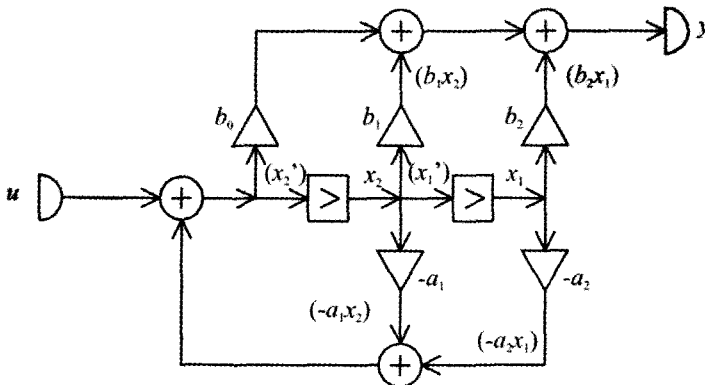
$$\begin{aligned}\text{DI: } & y + a_1 y^{(1)} + a_2 y^{(2)} = b_0 u + b_1 u^{(1)} + b_2 u^{(2)}, \\ \text{FI: } & y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_2 y = b_0 u^{(2)} + b_1 u^{(1)} + b_2 u.\end{aligned}$$

Ez megmagyarázza az erősítésekre alkalmazott jeleket. Ha $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ (azaz elhagyjuk a két erősítőt), akkor a DI hálózat egy FIR típusú DI rendszert reprezentál. #

2. példa Határozzuk meg annak a rendszernek az állapotváltozós leírását, amelynek egy hálózati reprezentációja a 7. ábrán látható.

Az előző példa mintájára, a 7. ábrán zárójelben megadott változók felhasználásával felírhatók a következő egyenletek:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -a_2 x_1 - a_1 x_2 + u; \\ y &= (b_2 - b_0 a_2)x_1 + (b_1 - b_0 a_1)x_2 + b_0 u.\end{aligned}$$



2.4-7. ábra Két dinamikus komponenset tartalmazó hálózat. Ez egy másodrendű rendszer úgynevezett második kanonikus realizációja

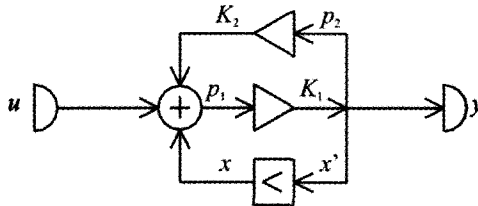
A rendszeregyenlet megegyezik az előző példában megadottal a (2.3-19) első Frobenius-alak értelmében. A DI hálózat az $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ speciális esetben FIR típusú rendszert reprezentál. #

2.4-2.2. A hálózat regularitása

Mint már említettük: előfordulhat, hogy az elemi komponensek összekapcsolásából álló hálózat állapotváltozós leírása nem állítható elő, ha minden dinamikus komponens kimeneti változóját állapotváltozónak tekintjük. Az ilyen *nem reguláris* (vagy nemreguláris) hálózatot nem tekintjük egy rendszer korrekt reprezentációjának.

Illusztrációként tekintjük a 8. ábrán látható hálózatot, amelyre felírhatók a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} p_1 &= K_2 p_2 + x + u, & x' &= K_1 p_1, \\ p_2 &= K_1 p_1, & y &= K_1 p_1. \end{aligned}$$



2.4-8. ábra Memóriamentes hurkot tartalmazó hálózat. Ez nem feltétlenül reguláris

Ha $K_1 K_2 \neq 1$, akkor a p_i változók kiküszöbölhetők:

$$p_1 = K_0 (x+u), \quad p_2 = K_1 K_0 (x+u); \quad K_0 \equiv \frac{1}{1 - K_1 K_2}.$$

Ennek felhasználásával kapjuk az állapotváltozós leírást:

$$\begin{aligned} x' &= K_1 K_0 x + K_1 K_0 u, \\ y &= K_1 K_0 x + K_1 K_0 u; \quad K_0 \equiv 1/(1 - K_1 K_2). \end{aligned}$$

Ebben az esetben a hálózat reguláris és egy rendszer reprezentációjának tekinthetjük.

Ha azonban $K_1 K_2 = 1$, akkor a következő egyenletrendszer adódik ($K_2 = 1/K_1$):

$$p_1 - \frac{1}{K_1} p_2 = x + u,$$

$$K_1 p_1 - p_2 = 0.$$

Ez az egyenletrendszer ellentmondásos, determinánsa nulla, vagyis nem megoldható. A hálózatnak nincs állapotváltozós leírása, tehát nem reguláris.

Hamis okoskodás lenne azt állítani, hogy a lineáris egyenletrendszer „megoldása” $x + u = 0$, vagyis $x = -u$, mert ez *nem* állapotegyenlet (nem x' van kifejezve!). Ha mégis elfogadjuk ezt a nem korrekt egyenletet, akkor a hálózat alapján (nem az egyenletrendszerből) azt kapjuk, hogy $y = x' = -u'$ vagy részletesebben

$$\text{DI: } y[k] = -u[k+1]; \quad \text{FI: } y(t) = -u'(t).$$

A DI egyenlet egy prediktort, a FI egyenlet egy differenciátort ír le. Nyilvánvaló, hogy erősítővel és késleltetővel nem realizálhatunk egy prediktort és nem tűnik hihetőnek, hogy erősítővel és integrátorral lehet differenciátort realizálni. A nem reguláris hálózatból azonban nem mindig adódnak ilyen abszurd eredmények.

A 8. ábrán látható hálózatot megvizsgálva azt látjuk, hogy az egy *memóriamentes hurkot*, vagyis egy olyan zárt jelfolyamot tartalmaz, amelyben nincsen dinamikus komponens. Egy ilyen hurok fizikailag mindenképpen gyanús jelenséget ír le, hiszen azt fejezi ki, hogy egy változó értékét minden időpontban a saját, ugyanezen időpontbeli értéke befolyásolja, ami végtelen gyors terjedési sebességet feltételez. Ez természetesen lehetetlen, de általánosan nem dönthető el, hogy közelítésként elfogadható-e. A vizsgált példában $p_1 = K_1 K_2 p_1 + x + u$ adódik, de csak akkor jelent nem reguláris hálózatot, ha az erősítések szorzata pontosan 1, amit még szándékosan sem könnyű létrehozni.

Nehézségeink lehetnek a vizsgált hálózati modellel akkor is, ha az erősítések szorzata nem pontosan egységnyi. Ennek illusztrálásra tekintsük azt az esetet, amikor $K_1 = 1$ és $K_2 = 1 + \varepsilon$, ahol $|\varepsilon|$ kis szám. Ekkor az állapotváltozós leírásban szereplő egyetlen számérték $A \equiv K_1 K_0 \equiv K_1 / (1 - K_1 K_2) = -1/\varepsilon$. Ez az A egyúttal a rendszer egyetlen sajátértéke. Ha most $\varepsilon = +0,001$, akkor $A = -1000$. Ha viszont $\varepsilon = -0,001$, akkor $A = +1000$. Az erősítés kicsiny változása drasztikus változást okoz abban a paraméterben, amely alapvetően meghatározza a rendszer viselkedését (a FI esetben például a stabilitást). A hálózat ekkor érzékeny a két erősítés értékére.

Mindebből arra következtethetünk, hogy a hálózati modellben célszerű kerülni a memóriamentes hurkot.

Egyes álláspontok szerint a memóriamentes hurkot tartalmazó hálózat nem tekinthető korrekt modellnek.

2.4-2.3. A hálózat stabilitása

A hálózat állapotváltozós leírásának ismeretében eldönthetjük, hogy az általa reprezentált rendszer aszimptotikusan stabilis-e (a rendszermátrix minden sajátértéke az egység sugarú körön belül illetve a bal félsíkon helyezkedik el) vagy hogy gerjesztés-válasz stabilis-e (az impulzusválasz abszolút összegezhető vagy abszolút integrálható). A hálózat stabilitására a következő definíció szokásos.

Egy hálózat akkor és csakis akkor *stabilis*, ha az általa reprezentált rendszer aszimptotikusan stabilis.

Ez azt jelenti (2.3-3.1. pont), hogy

$$\text{ha } \mathbf{u}[k] = \mathbf{0}, k \in \mathbf{N}, \text{ akkor } \mathbf{x}[k] \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{y}[k] \rightarrow \mathbf{0}, k \rightarrow \infty ;$$

$$\text{ha } \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, t \in \mathbf{R}_+, \text{ akkor } \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{0}, t \rightarrow \infty.$$

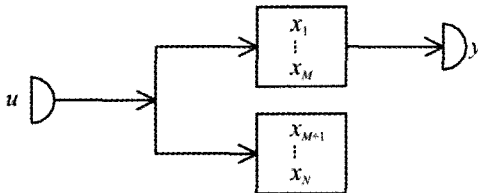
A rendszermátrix sajátértékeinek elhelyezkedése a rendszermátrix karakterisztikus polinomjának együtthatói ismeretében ellenőrizhető (2.2-4. szakasz).

Mint tudjuk, az aszimptotikusan stabilis rendszer GV stabilis is, de a GV stabilitás nem biztosítja az aszimptotikus stabilitásnak. Ennek az állításnak most adhatunk egy más megfogalmazást is.

Egy *stabilis hálózat* aszimptotikusan stabilis és így gerjesztés-válasz stabilis rendszert reprezentál. Egy nem stabilis hálózat reprezentálhat olyan rendszert, amely esetleg gerjesztés-válasz stabilis, de biztosan nem aszimptotikusan stabilis.

Illusztrációként tekintsünk egy olyan hálózatot, amelynek struktúrája a 9. ábrán látható. A választ csak az x_1, x_2, \dots, x_M állapotváltozók befolyásolják, vagyis a válasz nem

függ az $x_{M+1}, x_{M+2}, \dots, x_N$ állapotváltozóktól. Ha a „felső” részhálózat stabilis, az „alsó” vizsgont nem, akkor a hálózat nem stabilis. Ugyanakkor ez a hálózat egy GV stabilis rendszert reprezentál, amely azonban nem aszimptotikusan stabilis. Egy GV stabilis rendszert reprezentáló, de nem stabilis hálózat nem feltétlenül ilyen struktúrájú. A 9. ábra csak e jelenség egy egyszerű értelmezését illusztrálja.



2.4-9. ábra Egy olyan hálózat struktúrája, amely egy gerjesztés-válasz stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis rendszert reprezentál.

Gyakorlati megfontolások alapján úgy is dönthetünk, hogy az objektumnak a GV stabilitás nem kielégítő tulajdonsága, ha nem aszimptotikusan stabilis is. Dönthetünk azonban úgy is, hogy a hálózat nem megfelelő modellje az objektumnak. Ilyenkor a feladat egy az objektumot jobban leíró hálózat konstrukciója. Ez lehet az eredetnél egyszerűbb (elhagyjuk a nem stabilis részhálózatot), de rendszerint bonyolultabb (figyelembe vesszünk valamilyen előzőleg elhanyagolt hatást).

2.4-2.4. A rendszeregyenlet előállítás

A hálózat ismeretében az általa reprezentált rendszert leíró rendszeregyenlet többféle módon is előállítható. Egy lehetőség abban áll, hogy először előállítjuk az állapotváltozók leírását, ami az előzőek szerint egyszerű feladat, majd abból állítjuk elő a rendszeregyenletet a 2.3-1.4. pontban tárgyalt módon. Egy másik, még egyszerűbb módszert a 4.3-1. szakaszban fogunk látni (az átviteli függvény felhasználásával).

A következő két példa illusztrálja, hogy a hálózat alapján a rendszeregyenlet közvetlen előállítás néha egyszerű, máskor azonban körülményes. Nem érdemes nagyon sok időt vesztegetni az „egyszerű” megoldásra, ha az nem kézenfekvő.

1. példa Határozzuk meg a 10. ábrán megadott hálózat (vö. 6. ábra) által reprezentált rendszer rendszeregyenletét!

A forrásból és a nyelőlől kiindulva könnyen követhetjük a zárójelben megadott változók kifejezését. Külön célszerű tárgyalni a DI és a FI esetet.

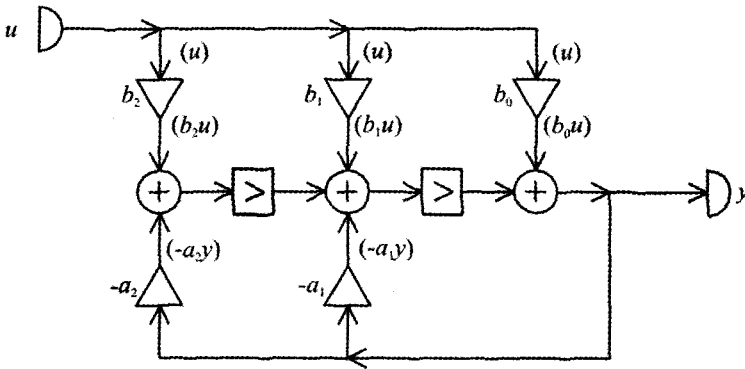
A DI esetben a bal oldali és a jobb oldali késleltető kimeneti változójának kifejezése késleltetéssel állítható elő:

$$\begin{aligned} \{b_2 u - a_2 y\}^{(1)} &= b_2 u^{(1)} - a_2 y^{(1)}, \\ \{b_2 u^{(1)} - a_2 y^{(1)} - a_1 y + b_1 u\}^{(1)} &= b_2 u^{(2)} - a_2 y^{(2)} - a_1 y^{(1)} + b_1 u^{(1)}. \end{aligned}$$

A válasz kifejezése az ábra alapján

$$y = b_2 u^{(2)} + b_1 u^{(1)} + b_0 u - a_2 y^{(2)} - a_1 y^{(1)}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ezzel meg is kaptuk a másodrendű rendszeregyenlet ismert alakját.



2.4-10. ábra Másodrendű hálózat, amelynek minden változója kifejezhető a gerjesztés és a válasz segítségével, ezért a rendszeregyenlet könnyen előállítható

A FI esetben ugyanezek az egyenletek érvényesek, csak az integrátorok kimeneti változója most bemeneti változójuk integrálja. Formálisan az (i) felső index helyére $(-i)$ felső index írandó. A rendszeregyenlet integrális alakja ezek szerint

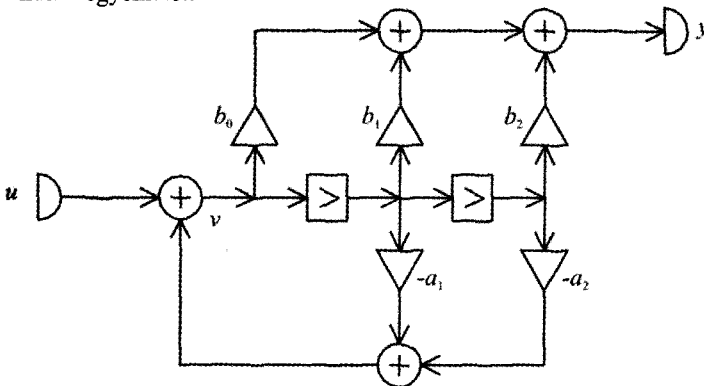
$$y = b_2 u^{(-2)} + b_1 u^{(-1)} + b_0 u - a_2 y^{(-2)} - a_1 y^{(-1)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

A szokásos differenciális alakot ebből kétszeri differenciálással és rendezéssel kapjuk:

$$y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_2 y = b_0 u^{(2)} + b_1 u^{(1)} + b_2 u, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Erre a hálózatra a rendszeregyenlet előállítását igen egyszerű volt. #

2. példa Határozzuk meg a 11. ábrán megadott hálózat (vö. 7. ábra) által reprezentált rendszer rendszeregyenletét!



2.4-11. ábra Másodrendű hálózat rendszeregyenletének előállítását egy segédváltozó bevezetésével

Most nem egyszerű a változókat a gerjesztéssel és a válasszal közvetlenül kifejezni, ezért bevezetünk egy v segédváltozót (a bal oldali összegezőből kimenő változót). A DI esetben felírható egyenletek

$$\begin{aligned} v &= -a_1 v^{(1)} - a_2 v^{(2)} + u, \\ y &= b_0 v + b_1 v^{(1)} + b_2 v^{(2)}. \end{aligned}$$

A v segédváltozó kiküszöbölése nem egyszerű feladat. Képezzük v késleltetett alakjait:

$$v^{(1)} = -a_1 v^{(2)} - a_2 v^{(3)} + u^{(1)},$$

$$v^{(2)} = -a_1 v^{(3)} - a_2 v^{(4)} + u^{(2)}.$$

Helyettesítsük a második egyenletet az elsőbe, majd mindkettőt v kifejezésébe. Ezáltal kifejeztük a $v, v^{(1)}, v^{(2)}$ változókat a $v^{(3)}, v^{(4)}$ és az $u, u^{(1)}, u^{(2)}$ változók lineárkombinációjaként. Helyettesítsük ezeket y kifejezésébe, továbbá ennek egy és két ütemmel késleltetett alakjába:

$$y^{(1)} = b_0 v^{(1)} + b_1 v^{(2)} + b_2 v^{(3)},$$

$$y^{(2)} = b_0 v^{(2)} + b_1 v^{(3)} + b_2 v^{(4)}.$$

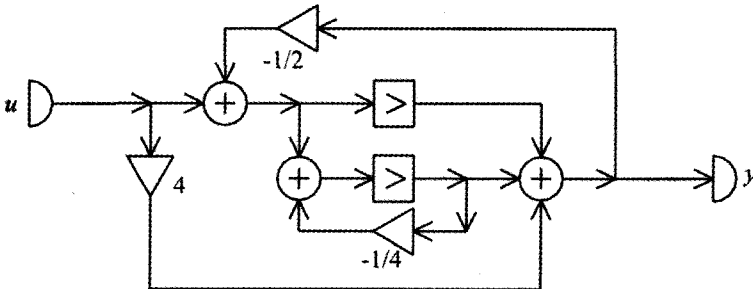
Oldjuk meg a változókra vonatkozó lineáris egyenletrendszert az y változóra úgy, hogy az $y^{(1)}$ és az $y^{(2)}$ változót ismertnek tekintjük. Belátható, hogy ekkor az előző példában meghatározott rendszeregyenlet adódik.

A FI eset hasonlóan tárgyalható (lásd az előző példát).

E hálózat rendszeregyenletének ilyen módon történő előállításánál nem nyertünk azáltal, hogy csak egy segédváltozót vezetünk be és nem az állapotváltozós leírásból indultunk ki, amelyekben két állapotváltozó is szerepel, viszont ezek kiküszöbölésére kidolgozott módszert követhetünk. #

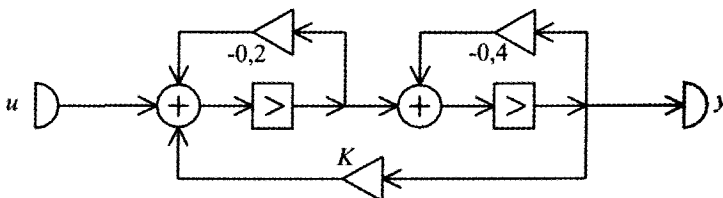
2.4-2.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a 12. ábrán látható hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását!



2.4-12. ábra A feladatban szereplő másodrendű jelfolyam hálózat

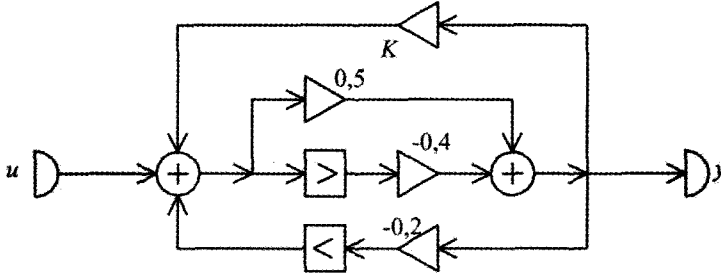
F-2. Határozza meg a 13. ábrán látható hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását! A K erősítést kezelje paraméterként.



2.4-13. ábra Egy másik másodrendű jelfolyam hálózat, amelyben az egyik erősítés határozatlan

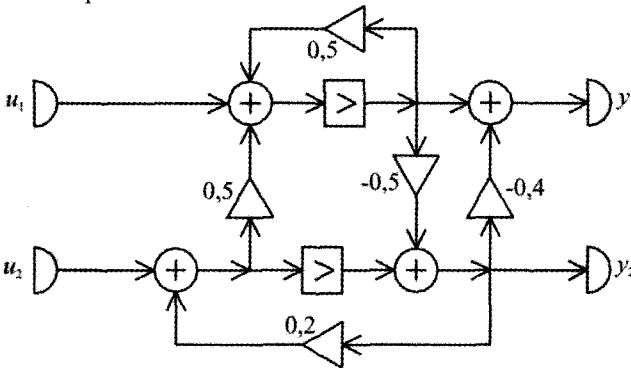
- F-3.** Határozza meg a 13. ábra szerinti hálózat K erősítését úgy, hogy
 (a) a rendszermátrix egyik sajátértéke nulla legyen!
 (b) a hálózat ne legyen reguláris!
 (c) a DI hálózat stabilis legyen!
 (d) a FI hálózat stabilis legyen!

- F-4.** Oldja meg az előző feladat (a) és (b) részét a 14. ábrán látható hálózatra!



2.4-14. ábra Másodrendű jelfolyam hálózat amelyben az egyik erősítés határozatlan

- F-5.** Határozza meg a 15. ábrán vázolt hálózat által reprezentált két-gerjesztésű, két-válaszú rendszer állapotváltozós leírását!



2.4-15. ábra Két-gerjesztésű, két-válaszú rendszert reprezentáló másodrendű hálózat

- F-6.** Határozza meg a 13. ábrán látható hálózatra $x_1[0], x_2[0]$, illetve $x_1(-0), x_2(-0)$ értékét, ha $u = u^-$ állandó értékű a k illetve t negatív értékeire és

$$(a) K = -0,32. \quad (b) K = +1.$$

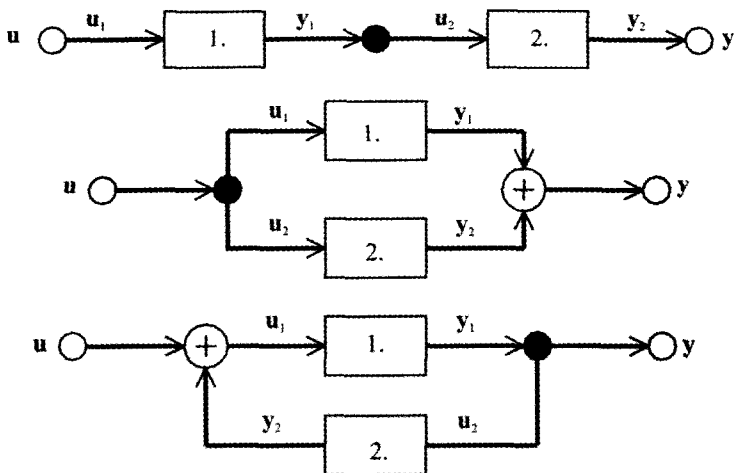
- *F-7.** Két több-gerjesztésű, több-válaszú, folytonos idejű illetve diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírása

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1; \quad \mathbf{x}'_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}_2.$$

A két részrendszert a 16a, b, illetve c ábrán látható módon összekapcsoljuk. Az ábrán a vastag vonalak arra utalnak, hogy a jelfolyam több változót reprezentálhat.

Mik a feltételei annak, hogy több gerjesztés és több válasz esetén az általános lineáris komponenseket tartalmazó hálózat egy rendszert reprezentáljon?

Határozza meg az előálló rendszer állapotváltozós leírását, vagyis értelmezzük a rendszer állapotvektorát, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} mátrixait!



2.4-16. ábra Két sokváltozós részrendszer különféle összekapcsolásából álló sokváltozós rendszer

2.4-2.M. Megoldások

M-1. Jelölje x_1 a felső, x_2 az alsó késleltető illetve integrátor kimeneti változóját. Ekkor

$$x_1' = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - u,$$

$$x_2' = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2 - u;$$

$$y = x_1 + x_2 + 4u.$$

M-2. Jelölje x_1 a bal oldali, x_2 a jobb oldali késleltető illetve integrátor kimeneti változóját. Ekkor $x_1' = -0,2x_1 + Kx_2 + u$, $x_2' = x_1 - 0,4x_2$; $y = x_2$.

M-3. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 0,6\lambda + 0,08 - K = 0$. Ebből már következnek a megoldások.

(a) Ha $K = 0,08$, akkor $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0,6$.

(b) Nincs ilyen véges K érték.

(c) $1 + 0,6 + 0,08 - K > 0$, $1 - 0,6 + 0,08 - K > 0$, $1 - |0,08 - K| > 0$ ki van elégítve, ha $-0,92 < K < +0,48$.

(d) $0,6 > 0$, $0,08 - K > 0$ ki van elégítve, ha $K < 0,08$.

M-4. A felső dinamikus komponensre $x_1' = K(0,5x_1' - 0,4x_1) + x_2 + u$. Ha $K \neq 2$, akkor $K_0 = 1/(1 - 0,5K)$ jelöléssel

$$x_1' = -0,4K K_0 x_1 + K_0 x_2 + K_0 u,$$

$$x_2' = (0,08 + 0,04K K_0)x_1 - 0,1K_0 x_2 - 0,1K_0 u;$$

$$y = (-0,4 - 0,2K K_0)x_1 + 0,5K_0 x_2 + 0,5K_0 u.$$

A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + (0,1K_0 + 0,4K K_0)\lambda - 0,08K_0 = 0$.

(a) Nincs ilyen véges K érték.

(b) Ha $K = 2$. Ekkor a memóriamentes hurokban az erősítések szorzata 1.

M-5. Az 1. feladathoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,45 & 0,1 \\ -0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,4 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

M-6. Az állandó gerjesztéshez tartozó gerjesztett összetevő k illetve t negatív értékeire maga is állandó:

DI hálózat:

$$x'_1 = x_1 = x_1[0],$$

$$x'_2 = x_2 = x_2[0],$$

$$x_1[0] = \frac{1,4}{1,68 - K} u^-,$$

$$x_2[0] = \frac{1}{1,68 - K} u^-.$$

FI hálózat:

$$x'_1 = 0, x_1 = x_1(-0),$$

$$x'_2 = 0, x_2 = x_2(-0),$$

$$x_1(-0) = \frac{0,4}{0,08 - K} u^-.$$

$$x_2(-0) = \frac{1}{0,08 - K} u^-.$$

Ezek a megoldások azonban csak akkor érvényesek, ha k illetve t negatív értékeire a hálózat stabilis. Ekkor az osztások biztosan értelmezettek. Ha a hálózat nem stabilis, akkor negatív időkre nem alakul ki állandósult állapot, a feladatnak nincs értelme. Az M-3. értelmében az (a) esetben az eredmények használhatók, a (b) esetben nem.

***M-7.** Ha minden komponens egy-gerjesztésű és egy-válaszú, akkor nincs külön általános feltétel. Egyébként a csomópontokban szétágazó vagy összegeződő változók számának meg kell egyeznie; szükség esetén a hiányzó változókat nulla értékű változóknak tekinthetjük. A továbbiakban feltételezzük, hogy a változók sorszámozása is össze van hangolva.

A rendszer állapotváltozóinak választhatók a két rendszer állapotváltozóinak összessége, vagyis

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Az alapvető egyenletek $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_2$. Az \mathbf{y} kifejezésének előállítását után már egyszerűen adódik, hogy

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \theta \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}, C = [D_2 C_1 \quad C_2], D = D_2 D_1.$$

(b) Az alapvető egyenletek $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Az \mathbf{y} kifejezésének előállítását után már egyszerűen adódik, hogy

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \theta \\ \theta & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2], D = D_1 + D_2.$$

(c) Az alapvető egyenletek $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} + \mathbf{y}_2$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1$. Az \mathbf{y} kifejezésére vonatkozó egyenlet megoldható, ha az alábbi \mathbf{F} mátrix létezik (ekkor reguláris a hálózat). Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{I} - \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2]^{-1}, \quad \hat{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{F} \mathbf{C}_1, \quad \hat{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{F} \mathbf{D}_1 \mathbf{C}_2, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{F} \mathbf{D}_1.$$

Az \mathbf{y} kifejezésének előállítását után már egyszerűen adódik, hogy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_2 \hat{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{B}_1 (\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2 \hat{\mathbf{C}}_2) \\ \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{D}}_2 \\ \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{D}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \hat{\mathbf{C}}_2], \quad \mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}.$$

A leírás biztosan értelmezett, ha legalább az egyik \mathbf{D}_i zérus(mátrix). Ez a feltétel természetesen nem szükséges, az \mathbf{F} mátrix csak kivételesen nem értelmezett.

Többváltozós esetben a mátrixszorzatoknak értelmezetteknek kell lenniük, ami automatikusan teljesül, ha az összetartozó kimeneti és bemeneti változók száma megegyezik. Szükség esetén bevezethetünk nulla értékű változókat.

2.4-3. Az egyenletek realizálása

2.4-3.1. A feladat megfogalmazása

Az előző két szakaszban a lineáris jelfolyam hálózatok *analízisének* problémáját tárgyaltuk: adott volt a hálózat, célunk az általa reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának vagy rendszeregyenletének előállítása.

Foglalkozunk most a *realizáció* feladatával: célunk egy olyan hálózat konstruálása, amely adott állapotváltozós leírású vagy rendszeregyenletű rendszert reprezentál. Az impulzusválaszával jellemzett rendszer realizációjával a 4.3-2. szakaszban foglalkozunk. Egy-gerjesztésű, egy-válaszú, lineáris, invariáns, kauzális rendszerekre szorítkozunk. Itt nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy honnan származik a rendszer leírása, hanem azt adottnak tekintjük. A hálózati realizáció célja rendszerint az, hogy ténylegesen megvalósítsuk a rendszer matematikai leírásával jellemzett objektumot.

Többnyire az olyan realizációkat részesítjük előnyben, amelyek minimális számú dinamikus komponenst (DI késeltetőt illetve FI integrátort) tartalmaznak. Ezeket *kanonikus realizációknak* nevezzük. (Egyesek a kanonikus jelzőt szűkebb értelemben használják, például csak bizonyos kapcsolásokat neveznek kanonikusnak.)

Egy rendszerleíráshoz többnyire sok realizáció, sőt sok kanonikus realizáció tartozik. Lehetőségünk van ezek közül a (valamilyen értelemben) optimálist kiválasztani. Ennek szempontjaival nem foglalkozunk. Megemlítjük azonban, hogy a realizáció feladatát gyakran célszerű visszavezetni másodrendű rendszerek realizációjára és ilyenek összekapcsolására. Ennek néhány módszerét a 4.3. szakaszban tárgyaljuk.

Ebben a szakaszban bemutatjuk az állapotváltozós leírás és a rendszeregyenlet néhány realizációját. Másodrendű rendszerekre szorítkozunk egyrészt az egyszerűség kedvéért, másrészt azért is, mert az általánosítás kézenfekvő.

A szóhasználatban megjegyezzük, hogy ha a hálózatot tekintjük adottnak, akkor azt mondjuk, hogy az egy rendszert reprezentál. Ha viszont a rendszer valamilyen leírását tekintjük adottnak, akkor azt mondjuk, hogy egy megfelelő hálózat realizálja a rendszert.

2.4-3.1. Az állapotváltozós leírás realizálása

Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú, lineáris, invariáns, kauzális, másodrendű DI illetve differenciális FI rendszer állapotváltozós leírása

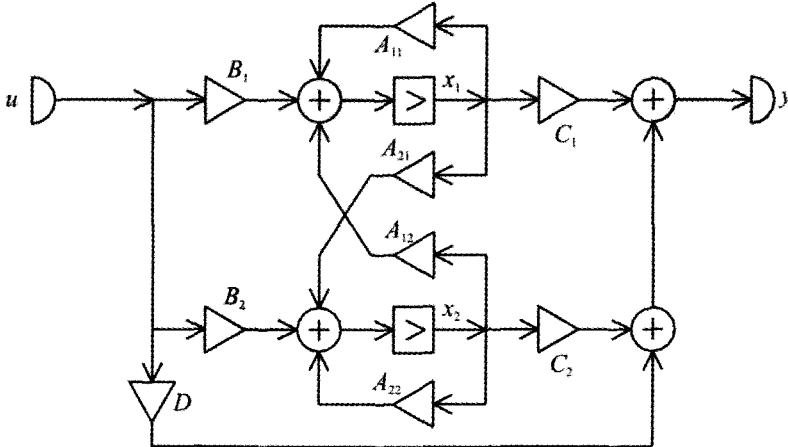
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u, \\ \dot{x}_2 &= A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + B_2 u; \\ y &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + D u. \end{aligned} \quad (2.4-8)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a 17. ábrán látható hálózat által reprezentált rendszernek éppen ez az állapotváltozós leírása.

A kapcsolás általánosítása nagyobb rendszámú ($N > 2$ számú állapotváltozó) rendszerekre kézenfekvő, habár a kapcsolás áttekinthető felrajzolása általános esetben nem egyszerű. A hálózat N számú dinamikus komponenset és általános esetben $N^2 + 2N + 1 = (N + 1)^2$ számú erősítőt tartalmaz. Az erősítők tényleges száma ennél rendszerint kevesebb, mert az állapotváltozós leírásban szereplő együtthatók egy része rendszerint nulla, tehát ezeket nem kell ténylegesen realizálni. A $+1$ és -1 együttható realizálása is többnyire egyszerűen megoldható.

Alkalmos transzformációs mátrixszal az állapotváltozós leírás olyan alakra hozható, amely az eredetinél jóval kevesebb nullától különböző együtthatót tartalmaz, tehát realizálása kevesebb erősítőt igényel. Ennek módját nem részletezzük (2.3-2.7. pont).

Még célszerűbb előállítani az állapotváltozós leíráshoz rendelt rendszeregyenletet (2.3-1.4. pont) és azt realizálni a következő pontban leírt módon.



2.4-17. ábra A másodrendű állapotváltozós leírás kanonikus realizációja

A 17. ábra szerinti realizáció akkor is használható, ha a rendszer variáns, tehát az állapotváltozós leírás együtthatói az idő ismert függvényei. Ekkor az erősítések is időfüggők, a realizáló hálózat variáns.

2.4-3.3. A rendszeregyenlet realizálása

Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú, lineáris, invariáns, kauzális, n -edrendű DI illetve differenciális FI rendszer rendszeregyenlete

$$\text{DI: } y + a_1 y^{(1)} + a_2 y^{(2)} + \dots + a_n y^{(n)} = b_0 u + b_1 u^{(1)} + b_2 u^{(2)} + \dots + b_n u^{(n)}; \quad (2.4-9)$$

$$\text{FI: } y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} u^{(1)} + b_n u.$$

A DI esetben $y^{(i)}[k] \equiv y[k-i]$, míg a FI esetben $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ jel i -edik általánosított deriváltja.

A 2.4-2.1. pont 1. és 2. példájában láttuk, hogy a 6. és a 7. ábrán megadott másodrendű hálózat olyan rendszert reprezentál (most úgy is mondhatjuk, hogy realizál), amelynek a rendszeregyenlete éppen a megadott. Az általánosítás n tetszőleges értékére kézenfekvő. Ezek a hálózatok n számú dinamikus komponenset és legfeljebb $2n+1$ számú erősítőt tartalmaznak. Ennél kevesebb dinamikus komponenssel a rendszeregyenlet nem realizálható, ezért mindkét hálózat kanonikus realizáció. Megjegyezzük, hogy a 7. ábra szerinti kapcsolás egyszerűsíthető, amennyiben mind a forrásnál, mind a nyelőnél csak egyetlen összegező csomópontra van szükség.

Ha N és n az adott rendszerre megegyezik (ez a tipikus eset, az ettől eltérő leírások rendszerint valamilyen elfajulást jelentenek), akkor a rendszeregyenlethez tartozó realizációk ugyanannyi dinamikus komponenset, de többnyire kevesebb erősítőt tartalmaznak, mint az állapotváltozós leírás realizációja általános esetben. Az erősítők szükséges száma többek között attól is függ, hogy a leírásban hány együttható értéke 0, +1 vagy -1, mert ezek realizálása többnyire megoldható erősítő nélkül is.

A 6. és 7. ábrákon adott realizációk akkor is használhatók, ha a rendszer variáns, tehát a rendszeregyenlet együtthatói az idő ismert függvényei. Ekkor az erősítések is időfüggők, a realizáló hálózat variáns. A váltakozva 0 és 1 erősítésű erősítő egy kapcsolóval egyenértékű.

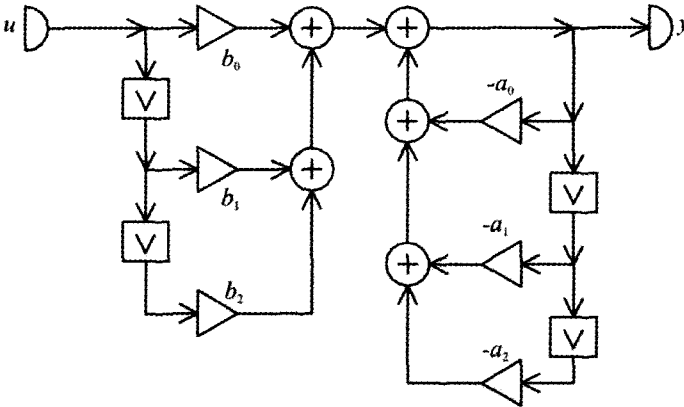
Más struktúrájú kanonikus realizációkat a 4.3-2. szakaszban tárgyalunk. A különböző realizációk gyakorlati szempontból előnyös tulajdonságaival azonban nem foglalkozunk a későbbiekben sem.

2.4-3.F. Feladatok

F-1. Igazolja, hogy a 18. ábrán látható hálózat a másodrendű rendszeregyenlet egy nem kanonikus realizációja! A hálózat könnyen általánosítható nagyobb rendszámra.

***F-2.** Az állapotváltozós leírás a rendszer mátrix egyszeres sajátértékei esetén átalakítható szétcsatolt formájúvá (2.3-3.7. pont).

Hogyan hasznosítható ez az átalakítás a hálózati realizáció előállításakor?



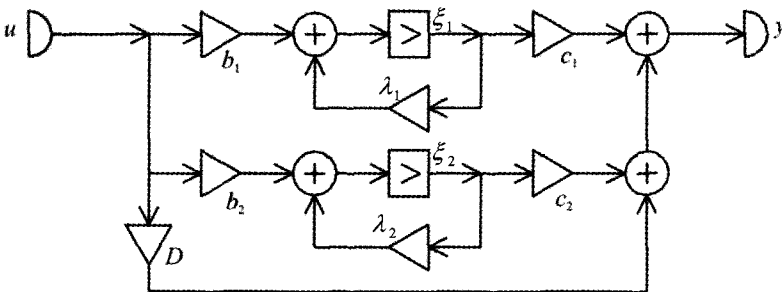
2.4-18. ábra A másodrendű rendszeregyenlet egy nem kanonikus realizációja

2.4-3.M. Megoldások

M-1. A DI esetben közvetlenül megkapjuk a rendszeregyenletet. A FI esetben a rendszeregyenlet integrális alakját kapjuk, amelyből kétszeres differenciálással adódik a rendszeregyenlet szokásos alakja.

A realizáció azért nem kanonikus, mert négy dinamikus komponenst tartalmaz, holott a rendszer csak másodrendű.

***M-2.** Ha minden sajátérték egyszeres és valós, akkor a rendszer mátrix diagonálissá tehető. A 17. ábrán vázolt hálózat ekkor a 19. ábrán láthatóra egyszerűsödik. Általános esetben az állapotváltozók száma N , ekkor a realizáló hálózat N számú dinamikus komponenst (kanonikus realizáció!) és legfeljebb $2N + 1$ számú erősítőt tartalmaz.



2.4-19. ábra A másodrendű szétcsatolt állapotváltozós leírás realizációja a rendszer- mátrix egyszeres, valós sajátértékei esetén

Komplex sajátértékek esetén a diagonalizálás elvégezhető, de a rendszer mátrix főátlós elemei (a sajátértékek) nem valósak, tehát nem realizálhatók erősítővel.

Ilyenkor az állapot mátrix blokk-diagonális alakra hozható, amely például a 17. ábra szerinti hálózattal realizálható. A realizációs feladatot egyszerűbb a komplex frekvenciatartományban megoldani (4.3-2. szakasz).

2.5. Nemlineáris rendszerek

A gyakorlatban előforduló objektumok sokszor teljesülő feltételek mellett kielégítően modellezhetők lineáris, invariáns rendszerrel. Általános esetben azonban csak nemlineáris, variáns rendszer a megfelelő modell. A továbbiakban nemlineáris rendszeren a nemlineáris, variáns rendszert értjük, habár példáink szinte kizárólag az invariáns esetre vonatkoznak.

Egyes esetekben azért vizsgáljuk a nemlineáris modellt, hogy feltételeket kapjunk az egyszerűbb lineáris modell alkalmazhatóságára. Ilyen feltétel lehet például a gerjesztés bizonyos paramétereire vonatkozó korlát. Máskor azonban azért van szükség a nemlineáris modell vizsgálatára, mert a lineáris rendszer alapvetően hibásan írja le az objektum működését. Ez a helyzet például, ha egy változó egy másik változó négyzete vagy abszolút értéke, két változó szorzata.

A nemlineáris rendszer vizsgálata nyilván sokkal bonyolultabb, mint a lineáris rendszeré. Még a rendszert leíró egyenletek osztályozása sem egyszerű. Az egyenletek zárt alakú (képlet jellegű) megoldása csak kivételesen lehetséges. Többnyire csak numerikus megoldásra van lehetőség. Fontos speciális esetet jelent, amikor feltételezhetjük, hogy a változók csak kismértékben változnak egyensúlyi értékük környezetében, habár a numerikus számítás ilyenkor is csak részben takarítható meg.

A 2.5-1. szakaszban az állapotváltozós leírással, a hálózati reprezentációval és az egyensúlyi állapottal foglalkozunk. Nem minden nemlineáris rendszer írható le az általunk vizsgálandó módon, de a tárgyalandó leírási mód sok gyakorlati feladat modellezésére kielégítően használható.

A 2.5-2. szakaszban az állapotegyenlet megoldásának néhány módszerét mutatjuk be. Itt foglalkozunk a stabilitási fogalmakkal is, habár ezt a problémakört is csak érintőlegesen tudjuk vizsgálni.

2.5-1. Állapotváltozós leírás

2.5-1.1. A nemlineáris rendszer fogalma

Egy u gerjesztésű és y válaszü rendszert általánosan az $y = \mathcal{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatával jellemezhetünk, ahol a \mathcal{W} operátor a (k diszkrét vagy t folytonos) időtől is függhet. Ha a \mathcal{W} operátor lineáris, akkor a rendszert lineárisnak nevezzük (1.2-2.2. pont). Ha a gerjesztés időbeli eltolása a válaszban ugyanilyen időbeli eltolást okoz, akkor a rendszert invariánsnak nevezzük (1.2-2.3. pont).

Az előzőekben láttuk, hogy a lineáris, invariáns rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolata a $h[k]$ illetve $h(t)$ impulzusválasz ismeretében megadható (konvolúció; 2.1-1.2. és 2.1-2.2. pont). Ez lineáris, variáns rendszerre is általánosítható. A lineáris, kauzális rendszer további, előzőleg tárgyalt leírásmódjai a rendszeregyenlet (2.2. fejezet), az állapotváltozós leírás (2.3. fejezet) és a hálózati reprezentáció (2.4. fejezet) megadása.

A nemlineáris rendszer vizsgálata természetesen lényegesen bonyolultabb, mint egy lineáris rendszeré. Mivel a szuperpozíció elve nemlineáris rendszerre nem érvényes, ezért egy adott gerjesztéshez tartozó válasz (például az impulzusválasz) ismeretében nem tudjuk a rendszernek egy másik hasonló (még kevésbé egy tetszőleges) gerjesztéséhez tartozó válaszát meghatározni. A rendszeregyenlet típusú leírás általánosítása is ritkán reményteljes (például elsőrendű rendszer esetére). Nemlineáris és variáns rendszerre az állapotváltozós leírás általánosítása a legegyszerűbb, mint azt látni fogjuk.

Nem tekintjük feladatunknak a nemlineáris kapcsolat meghatározásának módját. Azt sejtethetjük, hogy a lineáris, invariáns rendszer leírásában szereplő véges számú állandó paraméter meghatározása az objektum elméleti vagy kísérleti vizsgálata alapján lényegesen egyszerűbb, mint függvénykapcsolatok meghatározása és leírása. A feladat numerikus megoldásához egy $\eta = \Phi(\xi)$ függvény kiválasztása (például polinom) és paramétereinek meghatározása (például fokszám, együtthatók) helyett a numerikus analízishez célszerűbb lehet kellő számú összetartozó $\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1; \dots$ értékpár meghatározása és kezelése.

Az előzőkhöz hasonlóan most is igyekszünk együtt tárgyalni a diszkrét idejű (DI) és a folytonos idejű (FI) rendszereket, habár a hangsúlyt az utóbbiakra fogjuk helyezni, mivel a DI rendszert leíró egyenletek numerikusan a lépésről lépésre módszerrel kézenfekvő módon megoldhatók. Többnyire arra az esetre szorítkozunk, amikor a rendszer invariáns. Ha még a gerjesztés is állandó (k illetve t pozitív értékeire), akkor a rendszert leíró egyenletekben az idő explicit módon nem szerepel, csak a változók függenek az időtől. Az ilyen *autonóm rendszer* vizsgálata egyszerűbb.

2.5-1.2. A rendszer állapotváltozós leírása

Egy rendszer *állapotának* korábban megadott (2.3-1.1. pont) definíciója nem feltételezte a rendszer lineáris jellegét, ezért azt nem kell általánosítani. Az *állapotegyenlet* megadja a DI állapotvektor $\mathbf{x}'[k] \equiv \mathbf{x}[k+1]$ szettett értékét, illetve a FI differenciális rendszer állapotvektorának $\mathbf{x}'(t)$ idő szerinti deriváltját mint az \mathbf{x} állapotvektor és az \mathbf{u} gerjesztésvektor függvényét. A válasz állapotváltozós alakja megadja az \mathbf{y} válaszvektort mint az \mathbf{x} állapotvektor és az \mathbf{x} gerjesztésvektor függvényét. Lineáris rendszerre ezek a kapcsolatok lineárisak voltak.

Egy diszkrét idejű illetve egy differenciális folytonos idejű, kauzális rendszer *állapotváltozós leírása* (pontosabban: az állapotváltozós leírás normálalakja)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.5-1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.5-2)$$

ahol \mathbf{F} és \mathbf{G} ismert, vektor értékű függvények, például $x_1' = F_1(x_1, x_2, \dots, x_N, u)$. Ezeknek még a k diszkrét idő vagy a t folytonos idő is lehet független változójuk.

A nem differenciális FI rendszernek nem feltétlenül létezik ilyen leírása (például késleltetés). Megjegyezzük, hogy a fenti tömör normálalak nem mindig állítható elő, esetleg további változók bevezetésére is szükség lehet.

Az állapotváltozó leírás egy másik szokásos normálalakja

$$\text{DI: } \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, k), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, k); \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$\text{FI: } \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t); \quad t \in \mathbf{R},$$

(2.5-3)

ahol az időfüggést okozhatja akár a gerjesztés, akár a rendszer időfüggő jellege.

Elsődleges célunk az $\mathbf{x} = \mathbf{x}[k]$, $k \in \mathbf{N}$ illetve az $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$ állapotvektor meghatározása, hiszen annak ismeretében a válasz már egyszerűen számítható.

Az állapotvektort leíró függvényt és az állapotvektort ábrázoló ponthalmazt nevezik *trajektóriának* is. A DI esetben az egymást követő pontokat egyenes szakaszokkal célszerű összekötni. Ekkor a trajektória mindkét esetben egy görbe az N -dimenziós térben. Ennek megrajzolása csak $N=2$ esetén egyszerű. Speciálisan $N=1$ esetén az $x_1 = x$, $x_2 = x'$ változók síkjában értelmezett a trajektória.

Az $\mathbf{x}[0]$ illetve az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapotból induló trajektória tarthat egy ponthoz (stabilis egyensúlyi állapot), tarthat egy zárt görbéhez (ez többnyire periodikus állapotot jelent), tarthat nem zárt görbéhez, de esetleg nincs egyszerű aszimptotikus tulajdonsága (kaotikus rendszer). Egyes esetekről később még részletesebben is szólnunk.

Olyan formula előállítása, mint amelyet lineáris invariáns esetben megismertünk (2.3-2.2. pont) csak kivételesen van lehetőség. E helyett az $\mathbf{y}[k]$ illetve az $\mathbf{y}(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ értékek közelítő meghatározása a célunk. A $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$ értékeket kellően sűrűn kell megválasztani (vö. 2.3-2.9. pont). Tárgyalni fogunk azonban olyan közelítő eljárásokat is, amelyek formula alakú megoldásra vezetnek (linearizálási módszerek).

2.5-1.3. Nemlineáris jelfolyam hálózat

A nemlineáris rendszerek széles osztálya reprezentálható olyan jelfolyam hálózattal, amelynek komponensei az eddig megismerteken kívül (2.4-1.1. pont) a nemlineáris erősítő. A szorzó tekinthető nemlineáris erősítőnek is.

A legegyszerűbb esetben a *nemlineáris erősítőnek* egyetlen ξ bemeneti és egyetlen η kimeneti változója van. Mindkettő lehet a diszkrét idő illetve a folytonos idő függvénye. Az i -edik nemlineáris erősítő *karakterisztikája*

$$\eta_i = \Phi_i(\xi_i), \quad (2.5-4)$$

ahol Φ_i adott *függvény*. Ennek megadása történhet elemi függvénnyel, mint például $\eta = C|\xi|$ vagy $\eta = A\xi + B\xi^3$; történhet intervallumonként értelmezett függvényekkel mint például

$$\eta = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \leq 0, \\ C\xi, & 0 \leq \xi < \infty; \end{cases}$$

vagy történhet ξ_p, η_p számpárok megadásával. Az első módszer tűnhet a legegánsabbnak, de rendszerint az a legkevésbé pontos. A nemlineáris erősítőre ugyanazt a rajzjelet fogjuk használni, mint a lineáris erősítőre.

Általánosabban a *nemlineáris erősítőnek* tetszőleges számú bemeneti változója és egyetlen kimeneti változója van, karakterisztikája

$$\eta_i = \Phi_i(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in}), \quad (2.5-5)$$

ahol Φ_i változóinak ismert függvénye. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a (4) karakterisztikában a ξ független változó egy vektor. Ilyen komponens a *szorzó* is, amelynek karakterisztikája $\eta = \xi_1 \xi_2$. Szokás a szorzóra speciális rajzjelet is használni. A

lineáris variáns erősítő tekinthető olyan nemlineáris szorzónak, amelynek egyik bemeneti változója az idő ismert függvénye, vagyis egy gerjesztés.

Nincs szükség több kimeneti változós nemlineáris erősítő bevezetésére, mert az helyettesíthető több egy-kimenetű nemlineáris erősítő összekapcsolásával.

Vizsgált hálózatunk ezek szerint a következő komponensek összekapcsolásából áll (lásd az 1a és 1b ábrát):

- forrás u_i adott DI illetve FI függvény; $i = 1, 2, \dots, N_U$;
- nyelő y_i keresett DI illetve FI függvény; $i = 1, 2, \dots, N_Y$;
- lineáris erősítő $q_i = K_i p_i$, K_i ismert; $i = 1, 2, \dots, N_K$;
- DI késleltető/ FI integrátor x'_i bemeneti, x_i kimeneti változó; $i = 1, 2, \dots, N_X$;
- nemlineáris erősítő $\eta_i = \Phi_i(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{i\ell_i})$, Φ_i ismert; $i = 1, 2, \dots, N_\Phi$.

A lineáris jelfolyam hálózatokhoz hasonlóan az összekapcsolási kényszerek alapján most is kifejezhető egyrészt valamennyi komponens bemeneti változója a komponensek kimeneti változójának lineárkombinációjaként, másrészt a karakterisztikák kifejezik a kimeneti változókat a bemeneti változókkal.

A hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozói továbbra is lehetnek az egyes DI késleltetők vagy FI integrátorok x_i kimeneti változói.

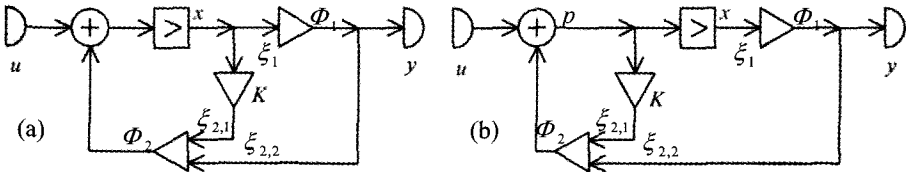
Ha a hálózat nem tartalmaz memóriamentes (azaz csak lineáris és nemlineáris erősítőket tartalmazó) hurkot, akkor a hálózati egyenletekből lineáris műveletekkel előállítható a hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának (1) és (2) szerinti alakja.

Példa Az 1a és 1b ábrán látható jelfolyam hálózatban ismert a K erősítés, a $\Phi_1(\xi_1)$ egyváltozós, a $\Phi_2(\xi_{2,1}, \xi_{2,2})$ kétváltozós függvény a hálózatra felírható az alábbi egyenletrendszer (öt ismeretlent tartalmazó öt egyenlet)

$$x' = \Phi_2(\xi_{2,1}, \xi_{2,2}) + u, \quad \xi_1 = x, \quad \xi_{2,1} = Kx, \quad \xi_{2,2} = \Phi_1(\xi_1); \quad y = \Phi_1(\xi_1).$$

A ξ jelű változókat kiküszöbölve kapjuk az állapotváltozós leírás (1), (2) szerinti normálalakját:

$$x' = \Phi_2(Kx, \Phi_1(x)) + u, \quad y = \Phi_1(x).$$



2.5-1. ábra Egy dinamikus komponens, egy lineáris és két nemlineáris erősítőt tartalmazó hálózat, amelyben (a) nincs illetve (b) van memóriamentes hurok

Az 1b ábrán látható hálózatra felírható egyenletek a p jelű változó bevezetésével (a ξ jelű változókat az x és p jelűekkel kifejezve)

$$x' = p, \quad p = \Phi_2(Kp, \Phi_1(x)) + u, \quad ; \quad y = \Phi_1(x).$$

A középső egyenlet nem oldható meg képletszerűen p -re, de bármely k_i illetve t_i időpontra p numerikusan kifejezhető x és u aktuális értékével, tehát előállítható az állapotváltozós leírás normálalakja. Ez általánosan azért nem lehetséges, mert az 1b ábra szerinti hálózat memóriamentes hurkot tartalmaz. #

2.5-1.4. Egyensúlyi állapotok

Sok gyakorlati feladatnál a nemlineáris, invariáns rendszer gerjesztései **állandó értékűek** pozitív időkre vagy állandó értékhez tartanak. Formálisan megfogalmazva

$$\begin{aligned} \text{DI: } \mathbf{u}[k] &= \bar{\mathbf{u}}, \quad k \in \mathbf{N} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{u}[k] \rightarrow \bar{\mathbf{u}}, \quad k \rightarrow \infty; \\ \text{FI: } \mathbf{u}(t) &= \bar{\mathbf{u}}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{u}(t) \rightarrow \bar{\mathbf{u}}, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.5-6)$$

Ha van olyan $\bar{\mathbf{x}}$ állapotvektor, amely ekkor megoldása az állapotegyenletnek, akkor ez a rendszernek az **egyensúlyi állapota** (egyensúlyi pontja), a megfelelő $\bar{\mathbf{y}}$ érték az **egyensúlyi válasz**. Adott állandó gerjesztés esetén a rendszernek több egyensúlyi állapota és egyensúlyi válasza is lehet.

Mivel az állandó DI állapotvektor eltolt értéke ugyanaz az állandó, míg az állandó FI állapotvektor deriváltja nulla, ezért az $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ állapotegyenletű rendszer egyensúlyi állapotát (állapotait) a következő nemlineáris egyenlet megoldásai adják:

$$\begin{aligned} \text{DI: } \mathbf{F}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) &= \mathbf{x}; \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_m; \\ \text{FI: } \mathbf{F}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) &= \mathbf{0}; \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_m. \end{aligned} \quad (2.5-7)$$

Az egyensúlyi válaszok ezek ismeretében a (2) értelmében

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{\mathbf{u}}); \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.5-8)$$

Az egyensúlyi állapotot vagy az egyensúlyi választ nevezik munkapontnak is.

Szorítkozzunk autonóm rendszer vizsgálatára, vagyis a rendszer invariáns, gerjesztései állandók (speciálisan $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ is lehet). Ekkor például a következő kérdésekre kell válaszolnunk:

– Hány egyensúlyi állapota van a rendszernek? Speciálisan: van-e a rendszernek egyensúlyi állapota?

– Milyen feltételek mellett tart a rendszer állapota valamelyik (esetleg az egyetlen) egyensúlyi állapothoz? Speciálisan: melyek azok az egyensúlyi állapotok, amelyek bizonyos feltételek mellett előállhatnak (stabilis egyensúlyi állapotok), melyek azok, amelyek semmiképpen sem állhatnak elő (labilis egyensúlyi állapotok)?

– Milyen folyamatok zajlanak le akkor, ha a rendszernek nincs stabilis egyensúlyi állapota?

– Mikor nevezhető a rendszer stabilisnak?

– Stabilis-e a rendszer, ha csak egyetlen egyensúlyi állapota van és az stabilis?

A fenti kérdésekre a válaszok adott rendszer esetén függhetnek az állandó gerjesztések nagyságától és a kezdeti állapottól. Ennek kapcsán újra meg kell gondolni, hogy mikor nevezhető a rendszer stabilisnak.

Az autonóm rendszernek az állandó (statikus) egyensúlyi állapotai mellett lehetnek időben változó (dinamikus) egyensúlyi állapotai is, speciálisan a periodikusan változó állapotvektora. Ilyen állapot lineáris, invariáns rendszerben is felléphet (például FI esetben van a képzetes tengelyre eső, DI esetben az egységugarú körre eső egyszeres sajátérték-párja).

Amint látjuk, a nemlineáris rendszer vizsgálata során sok olyan kérdés merül fel, amelyek lineáris, invariáns rendszer esetén vagy fel sem merülnek vagy egyszerűen megválaszolhatók.

Példa Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírása

$$x' = -\Phi(x) + u; \quad y = \Phi(x); \quad \Phi(x) = 300x - 45x^2 + 2x^3.$$

Egy ilyen rendszert reprezentál az 1a és 1b ábrán látható hálózat, ha speciálisan $K = 0$, $\Phi_1(\xi_1) = \Phi(\xi_1)$, $\Phi_2(\xi_{2,1}, \xi_{2,2}) = -\xi_{2,2}$.

Határozzuk meg az egyensúlyi állapotot és az egyensúlyi választ, ha a gerjesztés $u(t) = \bar{u}$, $t \in \mathbf{R}_+$, ahol (a) $\bar{u} = 400$; (b) $\bar{u} = 550$; (c) $\bar{u} = 700$.

Az egyensúlyi állapot az $x' = 0$ feltétel alapján a $0 = -\Phi(\bar{x}) + \bar{u}$ egyenlet, vagyis a

$$2\bar{x}^3 - 45\bar{x}^2 + 300\bar{x} - \bar{u} = 0$$

egyenlet valós megoldásai. Ebből következően az egyensúlyi válasz $\bar{y} = \bar{u}$. Ebben a speciális esetben az egyensúlyi válasz meghatározható \bar{x} számítása nélkül. Ennek alapján azonban az egyensúlyi válasz stabilitásáról nem fogunk semmit sem tudni.

A $\Phi(x)$ függvény görbét felvázolva láthatjuk, hogy annak egy lokális maximuma és egy lokális minimuma van. Ebből következik, hogy vagy 1 vagy 3 egyensúlyi állapot van. A nemlineáris egyenlet megoldásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (a) \quad & \bar{u} = 400; \quad \bar{x} = 1,763; \quad \bar{y} = 400; \\ (b) \quad & \bar{u} = 550; \quad \bar{x}_1 = 3,012; \quad \bar{x}_2 = 7,835; \quad \bar{x}_3 = 11,653; \quad \bar{y} = 550; \\ (c) \quad & \bar{u} = 700; \quad \bar{x} = 13,075; \quad \bar{y} = 700. \end{aligned}$$

Az (a) és a (c) esetben egyetlen egyensúlyi állapot van. Ha az stabilis, akkor valószínűleg az az állapot be is fog állni bármilyen kezdeti állapot mellett. (Mint később látni fogjuk, valóban ez a helyzet.) Ezzel szemben a (b) esetben, amikor három egyensúlyi állapot van, elég nehéz előzetes elképzelést kialakítani. (Később ezt az esetet is meg fogjuk vizsgálni.) #

2.5-1.5. Az egyensúlyi állapot stabilitása

Az autonóm rendszer állandó \bar{u} gerjesztéshez tartozó állandó \bar{x} egyensúlyi állapotának stabilitása egyszerűen vizsgálható, ha az egyensúlyi állapot izolált (vagyis nincs környezetében másik egyensúlyi pont) és ha az állapotegyenlet (1) szerinti alakjában szereplő $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ függvény az \bar{x} , \bar{u} pontban differenciálható, vagyis létezik az \mathbf{A} derivált mátrixa (Jacobi-mátrixa), amelynek szimbolikus alakja, illetve rendezői

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \Leftrightarrow (\mathbf{A})_{pq} = \left. \frac{\partial F_p(x_1, x_2, \dots, x_N, \mathbf{u})}{\partial x_q} \right|_{\mathbf{x}=\bar{x}, \mathbf{u}=\bar{u}}. \quad (2.5-9)$$

Vezessük be az \bar{x} egyensúlyi állapottól való eltérésre az

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \quad (2.5-10)$$

jelölést. Közelítsük az \mathbf{F} függvényt \bar{x} környezetében elsőfokú Taylor-polimomjával:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \approx \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (2.5-11)$$

Az \mathbf{F} függvény határozza meg, hogy az állapottérnek az \bar{x} körüli mely tartományában fogadható el ez a közelítés előírt hibán belül. E tartomány ismeretére azonban jelenleg

nincs szükségünk. Az (1) állapotegyenlet ezzel a közelítéssel a következő lesz: $\bar{\mathbf{x}}' + \tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}$. A DI esetben $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{x}}$ és $\tilde{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}$, míg a FI esetben $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$ és $\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}$. Az állapotegyenlet az egyensúlyi pont környezetében mindkét esetben

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (2.5-12)$$

Ez alakilag megegyezik a lineáris, invariáns, gerjesztetlen rendszer állapotegyenletével. Ennek egyetlen egyensúlyi állapota $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, amelynek stabilitását az \mathbf{A} mátrix sajátértékei határozzák meg. Ebből következik az alábbi megállapítás.

Az $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ állapotegyenletű rendszernek az $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ állandó gerjesztéshez tartozó $\bar{\mathbf{x}}$, *egyensúlyi állapota* akkor *stabilis*, ha az \mathbf{A}_i mátrix (az \mathbf{F} függvény \mathbf{x} szerinti derivált mátrixa az $\bar{\mathbf{x}}$, helyen) minden $\lambda_{i,p}$ sajátértékére teljesül, hogy

$$\text{DI: } |\lambda_{i,p}| < 1; \quad \text{FI: } \operatorname{Re} \{ \lambda_{i,p} \} < 0, \quad p = 1, 2, \dots, N. \quad (2.5-13)$$

Az egyensúlyi állapot stabilitása azt jelenti, hogy ha $\mathbf{x}[k]$ illetve $\mathbf{x}(t)$ már elég közel került egy stabilis egyensúlyi állapotához, akkor ahhoz fog tartani. Ez azt is jelenti, hogy ha az állapotvektor egy stabilis egyensúlyi állapotába került és valamilyen zavaró hatás miatt onnan kissé kimozdul, akkor oda vissza fog térni. Az nem dönthető el egyszerűen, hogy mikor van az állapotvektor „elég közel” egy egyensúlyi állapotához, vagy hogy mikor mozdult el onnan csak „kissé”.

Az egyensúlyi pont stabilitására vonatkozó fenti szemléletes állítás itt nem tárgyalt szigorú megfogalmazása Poincaré és Ljapunov nevéhez fűződik.

Példa Az előző pont példájában vizsgált folytonos idejű rendszere

$$\begin{aligned} x' &= F(x, u) \equiv -\Phi(x) + u; & \Phi(x) &= 300x - 45x^2 + 2x^3; \\ A(x, u) &= -\Phi'(x) \equiv -(300 - 90x + 6x^2). \end{aligned}$$

A derivált mátrix most skalár (mivel az állapotváltozók száma $N = 1$), és esetünkben a gerjesztéstől közvetlenül nem függ (persze az egyensúlyi állapot függ a gerjesztéstől). A linearizált rendszer sajátértéke megegyezik A egyensúlyi értékével.

Az előző pont példájában vizsgált három gerjesztés esetén

- (a) $\bar{u} = 400 \Rightarrow \bar{x} = 1,763; \lambda = -160;$
 (b) $\bar{u} = 550 \Rightarrow \bar{x}_1 = 3,012; \lambda_1 = -83,36; \bar{x}_2 = 7,835; \lambda_2 = +36,83; \bar{x}_3 = 11,563; \lambda_3 = -65,97;$
 (c) $\bar{u} = 700 \Rightarrow \bar{x} = 13,075; \lambda = -148,99.$

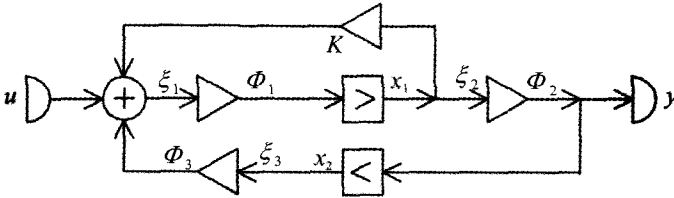
Ezek szerint $\bar{u} = 400$ és $\bar{u} = 700$ esetén az egyetlen egyensúlyi állapot stabilis. Valószínű, hogy bármilyen kiindulási állapot és bármely, ehhez az \bar{u} értékhez tartó gerjesztés esetén ez az állapot fog beállni. Ennek megfelelően $\bar{y} = 400$ vagy $\bar{y} = 700$ lesz az állandósult válasz.

Ha $\bar{u} = 550$, akkor két stabilis egyensúlyi állapot is van, a harmadik labilis. Azt sejtethetjük, hogy valamelyik stabilis állapot be fog állni, az állandósult válasz pedig $\bar{y} = 550$ lesz. Azt azonban ezek alapján nem lehet meghatározni, hogy melyik stabilis egyensúlyi állapot fog beállni. Ha a kezdeti állapot valamelyik stabilis egyensúlyi állapot környezetében van, akkor rövid időn belül beáll a közeli állandósult állapot.

Nagyobb rendszám esetén még nehezebb a trajektóriák menetéről előzetes megállapításokat tenni. #

2.5-1.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a 2. ábrán látható nemlineáris hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását!



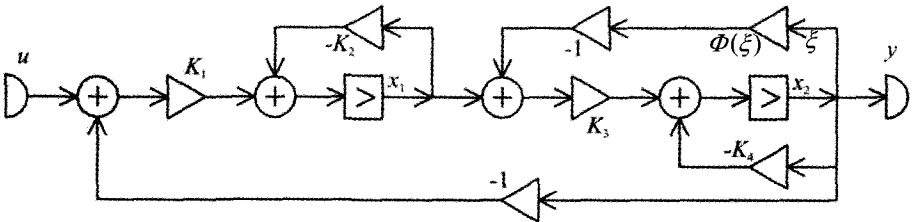
2.5-2. ábra Két dinamikus komponens, három nemlineáris és egy lineáris erősítőt tartalmazó jelfolyam hálózat

F-2. Állítsa elő az előző feladatban szereplő FI vagy DI rendszer egyensúlyi állapotait meghatározó egyenletrendszert! Hogyan egyszerűsödik ez, ha minden $\Phi_i(\xi_i)$ függvény egyetlen nullahelye a $\xi_i = 0$ érték? (Ez a gyakorlatban sokszor teljesül.)

F-3. Mi a feltétele annak, hogy az előző feladatban meghatározott egyensúlyi állapot stabilis legyen?

F-4. Léteznek-e olyan $\Phi_i(\xi_i)$ karakterisztikák, amelyek mellett az 1. feladatban vizsgált rendszernek nincs egyensúlyi állapota? Feltételezzük, hogy az origó minden karakterisztikának egy pontja.

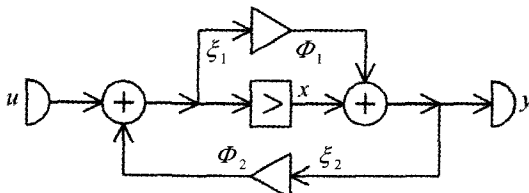
***F-5.** Léteznek-e olyan $\Phi_i(\xi_i)$ karakterisztikák, amelyek mellett az 1. feladatban vizsgált rendszer egyensúlyi állapota bizonyos \bar{u} állandó gerjesztés esetén nem izolált?



2.5-3. ábra Két dinamikus komponens és egy nemlineáris erősítőt tartalmazó hálózat

F-6. Oldja meg az 1. feladatot a 3. ábrán látható hálózatra!

F-7. Oldja meg az 2. és a 3. feladatot a 3. ábrán látható hálózatra!



2.5-4. ábra Egy dinamikus komponens és két nemlineáris erősítőt tartalmazó hálózat

F-8. Határozza meg a 4. ábrán látható hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását, ha ez lehetséges! Egyszerűsödik-e a feladat, ha akár az egyik, akár a másik erősítő lineáris?

F-9. Egy folytonos idejű, gerjesztetlen rendszerben az $y(t)$ válasz változásának sebessége (az y' derivált) arányos az y válasz értékének és az 1 telítési értékétől való $1-y$ eltéréseinek a szorzatával. Ennek megfelelően a rendszer állapotegyenlete

$$y' = \alpha y(1-y); \quad y = y(t).$$

Igazolja, hogy az $y(0) = y_0 > 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás

$$y(t) = \frac{1}{1 + C e^{-\alpha t}}; \quad C \equiv \frac{1 - y_0}{y_0}.$$

Hogyan viselkedik $y(t)$, ha α pozitív, illetve ha negatív?

Ez olyan kivételes feladat, amikor zárt alakú megoldás előállítható.

F-10. Az előző feladat diszkrét idejű megfelelőjének egy lehetséges alakja

$$y' - y = a y(1 - y'); \quad y = y[k].$$

Allítsa elő az állapotegyenletet és igazolja, hogy az $y[0] = y_0 > 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás

$$y[k] = \frac{1}{1 + C q^k}; \quad C \equiv \frac{1 - y_0}{y_0}, \quad q \equiv \frac{1}{1 + a}.$$

Hogyan viselkedik $y[k]$ az a paraméter értékétől függően?

Ez is olyan kivételes feladat, amikor zárt alakú megoldás előállítható.

2.5-1.M. Megoldások

M-1. A 2. ábra jelöléseivel $x_1' = \Phi_1(Kx_1 + \Phi_3(x_2) + u)$, $x_2' = \Phi_2(x_1)$; $y = \Phi_2(x_1)$.

M-2. A FI esetben az $x_i' = 0$ feltételből $\Phi_1(K\bar{x}_1 + \Phi_3(\bar{x}_2) + \bar{u}) = 0$, $\Phi_2(\bar{x}_1) = 0$. A megadott speciális esetben $\bar{x}_1 = 0$, $\Phi_3(\bar{x}_2) = -\bar{u}$.

A DI esetben az $x_i' = x_i$ feltételből $\Phi_1(K\bar{x}_1 + \Phi_3(\Phi_2(\bar{x}_1)) + \bar{u}) - \bar{x}_1 = 0$, és ezt felhasználva $\bar{x}_2 = \Phi_2(\bar{x}_1)$. A megadott speciális esetben a feladat nem egyszerűsödik.

Az egyenletek megoldhatósága vagy a megoldás egyértelműsége egyik esetben sem biztosított.

M-3. Vezessük be a következő jelöléseket (a vessző a függvény deriváltját jelöli, a derivált a megadott egyensúlyi értékénél számítandó):

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= K\bar{x}_1 + \Phi_3(\bar{x}_2) + \bar{u}, & \bar{\xi}_2 &= \bar{x}_1, & \bar{\xi}_3 &= \bar{x}; \\ F_{11} &= K \Phi_1'(\bar{\xi}_1), & F_{12} &= \Phi_1'(\bar{\xi}_1) \Phi_3'(\bar{\xi}_3), & F_{21} &= \Phi_2'(\bar{\xi}_2). \end{aligned}$$

Az egyensúlyi pontban a linearizált állapotváltozós leírás karakterisztikus egyenlete

$$\begin{vmatrix} \lambda - F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - F_{11}\lambda - F_{12}F_{21} = 0.$$

Az egyensúlyi állapot akkor és csakis akkor stabilis, ha

$$FI: F_{11} < 0, \quad F_{12}F_{21} < 0.$$

$$DI: F_{12}F_{21} < 1 - F_{11}, \quad F_{12}F_{21} < 1 + F_{11}, \quad |F_{12}F_{21}| < 1.$$

M-4. A FI esetben a $\Phi_3(\bar{x}_2) = -\bar{u}$ egyenletnek nincs feltétlenül megoldása. Ez a helyzet, ha például a karakterisztika telítődő jellegű, mint amilyen $\Phi_3(\xi) = A \arctg(a\xi)$ és $|\bar{u}| > 2|A|/\pi$. A DI eset az előzőhöz hasonlóvá válik ha $\Phi_1(\xi_1) = C_1\xi_1$, ezért ennél általánosabb esetben sem mindig megoldható.

***M-5.** Tekintsük például a $\Phi_3(\bar{x}_2) = -\bar{u}$ egyenletet. Legyen a karakterisztika folytonos és intervallumonként lineáris (A, B, a, b pozitív állandók):

$$\Phi_3(\xi) = \begin{cases} A\xi, & |\xi| \leq a \\ Aa, & a \leq |\xi| \leq b, \\ B(\xi - b) + Aa, & b \leq |\xi|. \end{cases}$$

Ekkor $\bar{u} = -Aa$ gerjesztés esetén minden az (a, b) intervallumba eső \bar{x}_2 egyensúlyi állapot, tehát például $\bar{x}_2 = (a+b)/2$ nem izolált egyensúlyi állapot. Ennek oka a karakterisztikára választott speciális közelítés.

M-6. Az ábra alapján némi rendezéssel kapjuk, hogy

$$x_1' = -K_2 x_1 - K_1 x_2 + K_1 u, \quad x_2' = K_3 x_1 - K_4 x_2 - K_3 \Phi(x_2); \quad y = x_2.$$

M-7. A DI esetben $\bar{x}_1 = K_1 \{-\bar{x}_2 + \bar{u}\} / \{1 + K_2\}$ felhasználásával ($K_2 \neq -1$) a

$$\{(1 + K_2)(1 + K_4) + K_1 K_3\} \bar{x}_2 + \{1 + K_2\} K_3 \Phi(\bar{x}_2) = K_1 K_3 \bar{u}$$

nemlineáris egyenlet megoldása adja az \bar{x}_2 egyensúlyi állapotot (állapotokat).

A FI esetben $\bar{x}_1 = \{K_1 / K_2\} \{-\bar{x}_2 + \bar{u}\}$ felhasználásával ($K_2 \neq 0$) a

$$\{K_1 K_3 + K_2 K_4\} \bar{x}_2 + K_2 K_3 \Phi(\bar{x}_2) = K_1 K_3 \bar{u}$$

nemlineáris egyenlet megoldása adja az \bar{x}_2 egyensúlyi állapotot (állapotokat).

Az egyensúlyi állapotban linearizált rendszer karakterisztikus egyenlete mind a DI, mind a FI esetben $F \equiv \Phi'(\xi) \Big|_{\bar{x}_2}$ jelöléssel

$$\begin{vmatrix} \lambda + K_2 & K_1 \\ -K_3 & \lambda + K_4 + FK_3 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + (K_2 + FK_3 + K_4) + (K_1 K_3 + FK_2 K_3 + K_2 K_4) = 0.$$

Az egyensúlyi állapot stabilitásának feltételi egyenlőtlenségei már könnyen előállíthatók.

M-8. A hálózat memóriamentes hurkot tartalmaz, ezért nem meglepő, hogy az explicit alak általánosan nem állítható elő. Az állapotváltozós leírás két olyan implicit alakja, amely csak egy megoldandó nemlineáris egyenletet jelent:

$$(I) \quad x' = \xi_1, \quad \xi_1 = \Phi_2(x + \Phi_1(\xi_1)); \quad y = x + \Phi_1(\xi_1).$$

$$(II) \quad x' = \Phi_2(\xi_2) + u, \quad \xi_2 = x + \Phi_1(\Phi_2(\xi_2) + u); \quad y = \xi_2.$$

Rögzített t vagy k mellett x és u ismeretében középső egyenletből ξ_1 vagy ξ_2 numerikusan számítható, majd az állapotegyenlet jobb oldala és a válasz értéke is.

Nem jelent lényeges egyszerűsítést, ha a két erősítő bármelyike lineáris.

M-9. Behelyettesítéssel igazolható a megoldás helyessége. Esetünkben az elsőrendű differenciálegyenlet megoldható a változók szeparációjával:

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)} = \alpha \int_0^t d\tau.$$

Ebből már egyszerűen következik, hogy a megadottól eltérő megoldás nincs is. A két egyensúlyi állapot $y = 0$ és $y = 1$. Ha $0 < y_0 < 1$ és $\alpha > 0$, akkor $y(t)$ monoton növekszik az y_0 kezdeti értékről az 1 értékre, míg ha $\alpha < 0$, akkor $y(t)$ monoton csökken az y_0 kezdeti értékről a 0 értékre. Ha a kezdeti érték a $(0, 1)$ intervallumon kívüli, akkor a megoldás szakadós. Ha a szakadási hely t valamilyen pozitív értékénél lép fel, akkor ez valószínűleg nem értelmes megoldás.

M-10. Az állapotegyenlet explicit alakja $y' = \frac{1+a}{1+ay} y$; $y = y[k]$.

Behelyettesítéssel igazolható, hogy a megadott megoldás ezt kielégíti. Ha $0 < y_0 < 1$ és $0 < a < \infty$ (azaz $1 > q > 0$), akkor $y[k]$ monoton növekszik a 0 értékről az 1 értékre, míg ha $-1 < a < 0$ (azaz $\infty > q > 1$), akkor $y[k]$ monoton csökken az y_0 értékről a 0 értékre; ha viszont $a < -1$ akkor q negatív és ezért lehet, hogy $y[k]$ minden ütemben előjelet vált. Ha a kezdeti érték nincs a $(0,1)$ intervallumban, akkor a megoldásnak lehet szinguláris pontja. Többnyire csak az első és a második eset értelmes.

2.5-2. Az állapotegyenlet megoldása

2.5-2.1. Általános megfontolások

Míg a lineáris, invariáns rendszerek állapotegyenlete adott időfüggvényű gerjesztés esetén zárt alakban megoldható, vagyis adható egy $\mathbf{x} = \mathbf{x}[k]$ illetve $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ alakú képlet (2.3-2. szakasz), ez nemlineáris rendszerekre csak kivételesen lehetséges. Ilyen kivételes eset csak ritkán tekinthető valamilyen gyakorlati feladat modelljének.

A *diszkrét idejű* rendszer állapotegyenlete a fokozatos behelyettesítés módszerével („lépésről lépésre módszer”; 2.3-1.2. pont) megoldható. Ennek során ugyanis nem jelent érdemi különbséget, hogy $\mathbf{x}[k+1]$ az $\mathbf{x}[k]$ és az $\mathbf{u}[k]$ lineáris függvénye állandó együtthatókkal, vagy ennél bonyolultabb módon függ $\mathbf{x}[k]$ és $\mathbf{u}[k]$ értékétől. A *folytonos idejű nemlineáris* rendszer állapotegyenletének megoldásához azonban szinte mindig közelítő eljárásra van szükség.

A következőkben három közelítő eljárást fogunk tárgyalni: az egyensúlyi állapot körüli linearizálást, a tartományi linearizálást és a helyettesítési értékek számítását.

Az *egyensúlyi állapot körüli linearizálás* módszere akkor alkalmazható, ha elegendő az egyensúlyi állapot egy olyan kellően kis környezetét vizsgálni, amelyben minden nemlineáris függvény kielégítően közelíthető lineáris függvénnyel. Ebből következően a módszer nem mindig alkalmazható. Ha azonban alkalmazható, akkor rendkívül hatékony és általános következtetések levonására is alkalmas. A „kellően kis”

környezet kijelölése rendszerint nehéz feladat, de pontos ismeretére gyakran nincs is szükség. A lineáris rendszer az objektumnak az egyensúlyi állapot (gyakran $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$) körüli linearizált modellje. Nyilvánvaló, hogy nagy értékű, kellően hosszan tartó gerjesztés esetén semmilyen objektum nem modellezhető lineáris rendszerrel.

A *tartománykénti linearizálás* módszerét rendszerint első közelítésként használjuk. Az eljárás hibája tetszőlegesen csökkenthető a tartományok számának növelésével. Ekkor azonban a módszer nagyon nehezen kezelhetővé válik. Gyakran az egyensúlyi állapotok számának, stabilitásának és a közelítő értékének meghatározására szorítkozunk az eljárás alkalmazása során.

A *helyettesítési értékek számításának* módszerét numerikus közelítő módszerek is nevezik, noha az előző két eljárás is részben vagy egészben numerikus. Ezek a numerikus módszerek folytonos idejű rendszerek számítására szolgálnak, tehát eredményük a válasz $y(0), y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_M)$ értékei. Hibájuk tetszőlegesen csökkenthető a számítási munka és idő növelése árán. A legtöbb matematikai programcsomag tartalmaz egy vagy több ilyen eljárást. E módszer hátránya, hogy segítségével csak akkor tudunk a rendszer működéséről általános megállapításokat tenni, ha kellően sok konkrét feladatot megoldottunk (például azonos gerjesztés és különböző kezdeti állapotok, azonos kezdeti állapot és különböző gerjesztések). Korántsem egyszerű azonban annak eldöntése, hogy mikor vizsgálunk már meg „kellően sok” konkrét esetet. Ezért is van jelentőségük a különböző durva közelítéseknek, kvalitatív vizsgálatoknak.

A *válasz ábrázolását* rendszerint a szokásos módon végezzük a k, y illetve a t, y koordináta-rendszerben. Ugyanígy ábrázolhatjuk az állapotváltozókat is. Utóbbiakat célszerűbb lehet $N=2$ (esetleg $N=3$) esetén az *állapotsíkon* (az *állapottérben*) a trajektória görbéjével ábrázolni. Ilyenkor az időskálától vagy eltekintünk, vagy csak nagyon durva skálázásra szorítkozunk. A rögzített (rendszerint állandó) gerjesztéshez és különböző kezdeti állapotokhoz tartozó trajektóriák seregének ábrája a *fázisportré*. E név magyarázata az, hogy az ábrázolási módot eredetileg másodrendű FI rendszerekre és az y, y' változókra, a „fázisváltozókra” alkalmazták. Ezek gyakran állapotváltozók, de nem feltétlenül azok.

2.5-2.2. Linearizálás az egyensúlyi állapotban

A rendszer gerjesztését mindig előállíthatjuk $u[k] = \bar{u} + \tilde{u}[k]$ illetve $u(t) = \bar{u} + \tilde{u}(t)$ alakban, ahol \bar{u} állandó. Az \bar{u} jelentheti például a gerjesztés állandósult értékét (mint az előző pontban), kezdeti értékét, de egy célszerűen választott más értékét is.

Jelölje az állandó \bar{u} gerjesztéshez tartozó állapotvektort $\bar{\mathbf{x}}$ és a választ \bar{y} . Nevezzzük ezeket *egyensúlyi állapotnak* és egyensúlyi válasznak, noha ezek az elnevezések csak akkor jogosak, ha \bar{u} a gerjesztés állandósult értékét jelöli. Tekintsük az egyensúlyi értékeket ismertnek (2.5-1.5. pont).

A változókat ezek szerint a következő alakban állítjuk elő:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{y}}. \quad (2.5-13)$$

A feladat megoldása során ennek a felbontásnak akkor van haszna, ha az $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}$ változók „kellően kicsik”. Nem könnyű eldönteni, hogy az ismert $\tilde{\mathbf{u}}$ mikor tekinthető „kellően kicsinek”, az ismeretlen $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}$ összetevőkről pedig csak a számítás végén állíthatunk valamit, előzetes becslést adni nagyon nehéz. Mindezek ellenére a felbontás sok gyakorlati esetben előnyösen alkalmazható.

Az $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ állapotváltozós leírással jellemzett nemlineáris, invariáns rendszernek az egyensúlyi állapotbeli linearizálásán alapuló közelítő analízise a fenti felbontás alapján a következő lépésekből áll.

(1) *Az egyensúlyi állapot meghatározása*

Határozzuk meg a 2.5-1.4. pontban leírt módon az $\bar{\mathbf{u}}$ állandó gerjesztés-összetevőhöz tartozó $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapotot. Ha több egyensúlyi állapot van, akkor a továbbiakban egy kiválasztott stabilis egyensúlyi állapotról van szó.

Határozzuk meg a stabilis egyensúlyi állapotban az \mathbf{F} és a \mathbf{G} függvénynek az \mathbf{x} és az \mathbf{u} változók szerinti derivált mátrixát. Szimbolikusan

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}. \quad (2.5-14)$$

Az \mathbf{A} számításmódját részletesebben a (9) adja, a többi mátrixra ez értelem szerint alkalmazható. A \mathbf{C} és \mathbf{D} számításra nincs feltétlenül szükség.

(2) *A linearizált rendszer vizsgálata*

A stabilis egyensúlyi állapot környezetében a nemlineáris rendszert az

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.5-15)$$

állapotváltozós leírású, lineáris, invariáns rendszerrel helyettesítjük. Ezt a lineáris állapotegyenletet valamilyen (például a 2.3. fejezetben tárgyalt) módszerrel megoldjuk. Az $\tilde{\mathbf{u}}[k]$ illetve az $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ gerjesztés jelalakjára nem vonatkozik megkötés.

Az állapotvektor ismeretében a válasz számítható vagy a linearizált összefüggésbe vagy a \mathbf{G} függvénybe helyettesítéssel. Mindkét eljárásnak vannak előnyei és hátrányai.

(3) *A közelítés jogossága*

A megoldás ismeretében ellenőriznünk kell, hogy linearizálási eljárásunk jogos volt-e. Erre több lehetőségünk van, néhányat megemlítünk.

Megadhatjuk előre az \tilde{x}_i és \tilde{u}_i változók azon legkisebb és legnagyobb értékét, amelyek között az \mathbf{F} (és a \mathbf{G}) függvények lineáris közelítése az egyensúlyi pont környezetében elfogadható. A lineáris feladat megoldása előtt ellenőrizzük az \tilde{u}_i , a megoldás ismeretében az \tilde{x}_i változókra vonatkozó feltételek teljesülését.

Úgy is eljárhatunk, hogy a lineáris közelítéssel kapott megoldás ismeretében vizsgáljuk az \mathbf{F} (és a \mathbf{G}) függvények eltérését lineáris közelítésüktől, majd eldöntjük, hogy azok elfogadhatók-e.

A hálózati reprezentáció ismeretében célszerű lehet az ellenőrzést a nemlineáris erősítő karakterisztikájára elvégezni. Ekkor a $\tilde{\xi}_i$ változók időfüggését is számítanunk kell. Ez rendszerint nem jelent számítási többletet.

Az $\eta = \Phi(\xi)$ karakterisztikájú nemlineáris erősítő linearizált közelítése egy $\bar{\xi}$ egyensúlyi pont környezetében $\tilde{\eta} = \Phi'(\bar{\xi})\tilde{\eta}$, vagyis a nemlineáris erősítőt egy $\mathbf{K} = \Phi'(\bar{\xi})$ erősítésű lineáris erősítővel helyettesítjük. Egy két-bemenetű erősítő linearizált közelítése

$$\eta = \Phi(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow \tilde{\eta} = K_1 \tilde{\xi}_1 + K_2 \tilde{\xi}_2, \quad K_i = \left. \frac{\partial \Phi(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_i} \right|_{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2}. \quad (2.5-16)$$

Ez két lineáris erősítővel és egy összegező csomóponttal realizálható.

A linearizált modellt különösen akkor kell kritikusan kezelnünk, amikor a nemlineáris rendszernek több stabilis egyensúlyi állapota (egyensúlyi pontja vagy állandósult trajektóriája) van. Ekkor ugyanis a vizsgált stabilis egyensúlyi ponttól „túlságosan távol” a közelítés teljesen hamis eredményt adhat, mert az onnan induló trajektória esetleg nem a vizsgált stabilis egyensúlyi ponthoz tart, hanem egy másikhoz vagy egy stabilis határciklushoz. A linearizált állapotegyenlet alapján ennek eldöntésére kevés a támpontunk. Ezt a problémát más módszerrel sem egyszerű megoldani.

Mint már említettük, ezt a közelítést elterjedten alkalmazzuk - esetleg úgy, hogy nem is vagyunk tudatában. Amikor ugyanis egy rendszert *lineárisnak* tekintünk, akkor többnyire az $\bar{u} = 0$ gerjesztéshez tartozó $\bar{x} = \mathbf{0}$ stabilis egyensúlyi pont körüli linearizált modellt vizsgáljuk, és ekkor $\bar{u} = u$, vagyis maga a gerjesztés. Egy másik gyakori eset, amikor \bar{u} az állandó, névleges (üzemi) gerjesztést jelenti, míg \bar{u} az ettől való szándékos vagy zavar jellegű eltérést.

Példa Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírása (2.5-1.5. pont)

$$x' = -\Phi(x) + u, \quad y = \Phi(x); \quad \Phi(x) = 300x - 45x^2 + 2x^3.$$

Ennek linearizált megfelelője valamely \bar{u}, \bar{x} környezetében

$$\tilde{x}' = -\Phi'(\bar{x})\tilde{x} + \tilde{u}, \quad \tilde{y} = \Phi'(\bar{x})\tilde{x}; \quad \Phi'(\bar{x}) = 300 - 90\bar{x} + 6\bar{x}^2.$$

Ha $\bar{u} = 550$, akkor két stabilis egyensúlyi állapot is van (2.5-1.6. pont):

$$\bar{x}_1 = 3,012; \quad \bar{x}' = -83,36\bar{x} + \bar{u}, \quad \bar{y} = 83,36\bar{x};$$

$$\bar{x}_3 = 11,653; \quad \bar{x}' = -65,97\bar{x} + \bar{u}, \quad \bar{y} = 65,97\bar{x}.$$

Könnyen belátható, hogy a $\Phi(x)$ függvénynek maximuma van az $x_a = 5$ helyen; ennél nagyobb x értékekre az első közelítés biztosan nem használható ($\tilde{x} < 2$). Mivel a $\Phi(x)$ függvénynek minimuma van az $x_b = 10$ helyen, ezért ennél kisebb x értékekre a második közelítés biztosan nem használható ($\tilde{x} > -1,6$).

Ha például az \bar{x}_1 környezetében a lineáris közelítést a $2 < x < 4$ intervallumban tekintjük érvényesnek, akkor az intervallum két szélén pontosan és a

$$\Phi(x) \approx \Phi(\bar{x}) + \Phi'(\bar{x})(x - \bar{x}_1)$$

közelítéssel

$$\Phi(2) = 436; \quad \Phi(2) \approx 550 + 83,36(2 - \bar{x}_1) = 465,7;$$

$$\Phi(4) = 608; \quad \Phi(4) \approx 550 + 83,36(4 - \bar{x}_1) = 632,4,$$

ami +7%, illetve +4% relatív hibát jelent. A nemlineáris karakterisztika közelítésének relatív hibája ezek szerint legfeljebb 7%. Ez többnyire elfogadható, ezért az intervallum megfelelőnek tekinthető. A nemlineáris karakterisztika relatív hibája csak egy becslése a válasz relatív hibájának. Még ebben az egyszerű esetben sem könnyű általánosan válaszolni arra a kérdésre, hogy az $u(t)$ vagy az $\bar{u}(t)$ gerjesztésnek milyen feltételeket kell kielégítenie ahhoz, hogy $x(t)$ vagy $\tilde{x}(t)$ a megengedett intervallumon belül maradjon. A közelítés elfogadhatóságát ezért minden esetben meg kell vizsgálni. #

2.5-2.3. Tartományonkénti linearizálás

Az egyváltozós függvényt – például egy nemlineáris erősítő karakterisztikáját - többnyire tetszőleges pontossággal közelíthetjük intervallumonként lineáris függvényvel:

$$\eta = \Phi(\xi) \Rightarrow \eta = K_p \xi + L_p, \quad \xi \in \Omega_p \text{ vagy } \hat{\xi}_p \leq \xi < \hat{\xi}_{p+1}. \quad (2.5-17)$$

A K_p és az L_p paramétert célszerű úgy megválasztani, hogy az intervallum két végpontjában a közelítő érték a pontossal egyező legyen. Ha a módszert első közelítésként használjuk, akkor a vizsgált tartományt csak néhány intervallumra bontjuk.

Tételezzük fel egyelőre, hogy az állapotváltozós leírásban csak egyetlen ilyen függvény szerepel. A fenti közelítéssel előállítottuk az állapotegyenlet tartományonként lineáris közelítését. Az állapotegyenlet közelítő megoldásának menete ezek után a következő. A kezdeti állapot (rendszerint $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) kijelöli azt az Ω_p tartományt, amelyben a megoldás indul. A lineáris, invariáns állapotegyenlet megoldása a korábbiakban tárgyaltak alapján nem okoz elvi nehézséget.

Szerencsés esetben ebben a tartományban van olyan stabilis egyensúlyi állapot, ahová a trajektória tart a nélkül, hogy a tartományból kilépne. Ekkor a feladatot ebben a közelítésben megoldottuk.

Többnyire azonban van egy olyan t_1 időpont, amikor a ξ változó elér induló tartományának határára, tehát átkerül valamelyik szomszédos tartományba. Elfajuló esetektől eltekintve ez a szomszédos tartomány egyértelműen kiválasztható. A t_1 időpont többnyire numerikusan számítható. Az új tartományban $\mathbf{x}(t_1)$ a kezdeti állapot. Most ismét egy lineáris, invariáns rendszert kell vizsgálnunk, csak más paraméterekkel.

Az állapotvektor esetleg a második tartományban egy egyensúlyi állapothoz tart, de többnyire egy t_2 időpontban a ξ változó eléri a tartomány határát, a trajektória átkerül egy harmadik (speciálisan az első) tartományba. Az eljárás így folytatandó, amíg nincs okunk a megállásra (beáll valamilyen állandósult állapot, elérkezünk a vizsgálat valamilyen határához).

A számítás eredménye többféle lehet.

(1) Az állapotvektor egy *stabilis egyensúlyi állapothoz tart* (a trajektória egy stabilis egyensúlyi pontban végződik).

(2) Az állapotvektor egy *periodikus állapothoz tart* (a trajektória egy zárt görbéhez simul). Ez lehet a periodikus gerjesztés által meghatározott, ekkor a periodikus állapot periódusideje a gerjesztés periódusideje által meghatározott, gyakran azzal megegyező. Előállhat periodikus gerjesztés más (például állandó) gerjesztés esetén, ekkor a periódusidő a rendszer által meghatározott. Utóbbi esetben a trajektória egy *stabilis határciklus*, a környezetéből (esetleg az állapottér minden pontjából) induló minden trajektória ehhez a zárt trajektóriához tart.

(3) Az állapotvektor *korlátlanul* növekszik. Ez arra utal, hogy modellünk csak bizonyos határig érvényes, hiszen a valóságban a változók nem növekedhetnek korlátlanul.

(4) Az állapotvektor korlátos marad, de nem mutat periodikus ismétlődést. Ekkor *kaotikus* viselkedésről beszélünk. Ez is mutat bizonyos szabályosságot, de részletezése meghaladja kereteinket.

A tartományi linearizálás módszerét gyakran csak első közelítésként, például az *egyensúlyi állapotok* meghatározására és stabilitásának eldöntésére használjuk. Az így kapott megoldást esetleg valamilyen módszerrel finomítjuk.

Ha célunk csak az egyensúlyi állapotok számának és körülbelüli helyének felderítése, akkor a (7) szerinti $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ nemlineáris egyenletrendszer megoldása helyett minden Ω_p tartományra egy *lineáris egyenletrendszert* kell megoldanunk. Ha a lineáris egyenletrendszer megoldása a választott tartományba esik, akkor az egy lehetséges egyensúlyi állapot, ellenkező esetben egy „hamis megoldás”, vagyis csak azt állapítottuk meg, hogy a választott tartományban nincs stabilis egyensúlyi állapot.

Nem jelent elvi bonyodalmat, ha az állapotváltozós leírásban több egyváltozós függvény szerepel. Ez a helyzet, ha a hálózati reprezentáció több egybemenetű, $\eta_i = \Phi(\xi_i)$ karakterisztikájú nemlineáris erősítőt tartalmaz. Ekkor több egyváltozós függvény intervallumonkénti lineáris közelítését kell előállítani és alkalmazni. Két független változó esetén egy Ω_i tartomány a $\hat{\xi}_{1,p} < \xi_1 < \hat{\xi}_{1,p+1}$, $\hat{\xi}_{2,q} < \xi_2 < \hat{\xi}_{2,q+1}$ egyenlőtlenségek által meghatározott téglalap a ξ_1, ξ_2 síkon. Értelem szerint az Ω_i tartomány jelentése több független változó esetén. Új tartomány adódik, ha bármelyik független változó eléri intervallumának határát.

Ha a feladatban kétváltozós nemlineáris függvény szerepel, akkor annak tartományonként lineáris közelítése

$$\eta = \Phi(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow \eta = K_{i,1}\xi_1 + K_{i,2}\xi_2 + L_i, \quad \xi_1, \xi_2 \in \Omega_i. \quad (2.5-18)$$

Kézenfekvő azt gondolni, hogy az Ω_i tartomány most is a $\hat{\xi}_{1,p} < \xi_1 < \hat{\xi}_{1,p+1}$, $\hat{\xi}_{2,q} < \xi_2 < \hat{\xi}_{2,q+1}$ értékek által kijelölt téglalap. Nem lehet azonban a három szabad paramétert úgy megválasztani, hogy a közelítő érték a pontos értékkel a téglalap mind a négy sarkában megegyezzek. Ezért nem lehet a folytonos két- vagy többváltozós függvényt ilyen tartományonként lineáris és folytonos függvénnyel közelíteni. Ez viszont a megoldás során különféle bonyodalmakat okoz. Az Ω_i tartományt ezért kétváltozós esetben háromszögeknek, háromváltozós esetben tetraédereknek kell választani, és így tovább. Ezek kezelése természetesen körülményesebb, de elvileg nem jelent újdonságot.

A tartományonkénti lineáris közelítés nagy előnye, hogy elegendő a szereplő nem lineáris függvények *néhány pontját* ismernünk a közelítő függvény előállításához. Nincs szükség tehát arra, hogy előállítsuk a nemlineáris függvények elemi függvényekkel (például polinomokkal) történő közelítését. Ez többnyire nehéz feladat, egyszerű közelítésekkel ritkán lehet elfogadhatóan kis hibát biztosítani.

1. példa A 2.5-1.3. pont példájában már vizsgált $\Phi(\xi) = 300\xi - 45\xi^2 + 2\xi^3$ függvénynek könnyen beláthatóan $\Phi(5) = 625$ a lokális maximuma és $\Phi(10) = 500$ egy lokális minimuma. A $\Phi(0) = 0$ és $\Phi(15) = 1125$ további pontokra támaszkodó tartományonkénti (esetünkben intervallumonkénti) lineáris közelítés

$$\Phi(\xi) \approx \Phi_1(\xi) = \begin{cases} 125\xi, & -5 \leq \xi < 5, & (\Omega_1) \\ 750 - 25\xi, & 5 \leq \xi < 10, & (\Omega_2) \\ 125\xi - 750, & 10 \leq \xi < 20, & (\Omega_3). \end{cases}$$

A további példákban ezt a $\Phi_1(\xi)$ közelítést fogjuk használni és a $\Phi(\xi)$ függvényt pontosnak tekintjük (holott az valószínűleg maga is közelítés). #

2. példa Egy folytonos idejű, invariáns rendszer állapotegyenlete (2.5-1.5. pont)

$$x' = -\Phi(x) + u,$$

ahol Φ az előző példában megadott függvény.

Határozzuk meg az előző példában megadott közelítés felhasználásával az állapotváltozó $x(t)$ időfüggvényét, ha a belépő gerjesztést $u(t) = 550 \varepsilon(t)$ írja le!

Az egyensúlyi állapotok a $\Phi(x) - 550 = 0$ egyenlet megoldásai. A $\Phi_1(x) - 550 = 0$ közelítő lineáris egyenlet megoldásai (zárójelben a 2.5-1.3. pont példájának pontosnak tekintett eredményei)

$$-5 < x < 5: \quad \bar{x}_1 = 4,40; \quad (\bar{x}_1 = 3,012);$$

$$5 < x < 10: \quad \bar{x}_2 = 8,00; \quad (\bar{x}_2 = 7,835);$$

$$10 < x < 20: \quad \bar{x}_3 = 10,40; \quad (\bar{x}_3 = 11,653).$$

Mindhárom megoldás a megfelelő tartományba esik, tehát három egyensúlyi pont van. A linearizált állapotegyenlet a három tartományban

$$x' = -125x + u, \quad \Omega_1: \quad -5 < x < 5;$$

$$x' = 25x - 750 + u, \quad \Omega_2: \quad 5 < x < 10;$$

$$x' = -125x + 750 + u, \quad \Omega_3: \quad 10 < x < 20.$$

Esetünkben $u = 550$ a t pozitív értékeire.

Mivel $x(0) = 0$, ezért a trajektória Ω_1 -ben indul. Könnyen beláthatóan

$$x(t) = 4,4 \left\{ 1 - e^{-125t} \right\}, \quad 0 \leq t < t_1.$$

Mivel $x(t) < 5$, ezért $t_1 = \infty$, vagyis ekkor az \bar{x}_1 egyensúlyi állapot áll be monoton növekedéssel.

Valójában $x(t)$ nem exponenciális változású, egyensúlyi értéke nem 4,4 (hanem 3,01). Az azonban hihető, hogy a valódi folyamat monoton, a stabilis egyensúly beállításához szükséges idő $3/125 = 0,024$ körüli érték. #

3. példa Oldjuk meg az előző példát, ha $u(t) = 750 \varepsilon(t)$.

Az 1. példa szerinti közelítéssel az egyetlen egyensúlyi állapot $\bar{x} = 12,0$ (az Ω_3 tartományban) és ez stabilis. A pontos $\Phi(x)$ alapján $\bar{x}_3 = 13,39$ az egyensúlyi állapot.

Az Ω_1 tartományban az állandósult állapot $750/125 = 6$, ami nincs Ω_1 -ben. Ennek megfelelően a trajektória első szegmense

$$x(t) = 6 \left\{ 1 - e^{-125t} \right\}, \quad 0 \leq t < t_1; \quad 6 \left\{ 1 - e^{-125t_1} \right\} = 5 \Rightarrow t_1 = 0,0143.$$

Ezután a trajektória az Ω_2 tartományba kerül, amelyben az állandósult állapot éppen 0 (ami nincs Ω_2 -ben). Az $x(t_1) = 5$ felhasználásával (az állapotváltozó folytonos)

$$x(t) = 5 e^{25(t-t_1)}, \quad t_1 \leq t < t_2; \quad 5 e^{25(t_2-t_1)} = 10 \Rightarrow t_2 = 0,0421.$$

Ezután a trajektória az Ω_3 tartományba kerül. Az előzőhöz hasonló eljárással

$$x(t) = 12 - 2 e^{-125(t-t_2)}, \quad t_2 \leq t < t_3,$$

ahol esetünkben $t_3 = \infty$. Ezzel a folyamat számítását be is fejeztük. #

4. példa Egy folytonos idejű, invariáns rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{aligned}x_1' &= -10x_1 - \Phi(x_1) + 6x_2, \\x_2' &= -10x_1 - x_2 + 10u; \quad y = x_1,\end{aligned}$$

ahol Φ az 1. példában megadott függvény.

Határozzuk meg az $u(t) = 18,5 \varepsilon(t)$ belépő gerjesztéshez tartozó választ!

Az egyensúlyi állapotok az $x_1' = 0, x_2' = 0$ alapján adódó lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned}\Omega_1 (-5 \leq x_1 < 5): \quad & \bar{x}_1 = 5,692 \text{ (hamis)}, \quad \bar{x}_2 = 128,1; \\ \Omega_2 (5 \leq x_1 < 10): \quad & \bar{x}_1 = 8 \text{ (valódi)}, \quad \bar{x}_2 = 105; \\ \Omega_3 (10 \leq x_1 < 20): \quad & \bar{x}_1 = 9,538 \text{ (hamis)}, \quad \bar{x}_2 = 89,62.\end{aligned}$$

Az állapotegyenlet lineáris közelítésben

$$\begin{aligned}x_1' &= Ax_1 + 6x_2 + B, \quad A_1 = -135, \quad A_2 = +15, \quad A_3 = -135, \\x_2' &= -10x_1 - x_2 + 185; \quad B_1 = 0, \quad B_2 = -750, \quad B_3 = +750.\end{aligned}$$

A karakterisztikus egyenlet

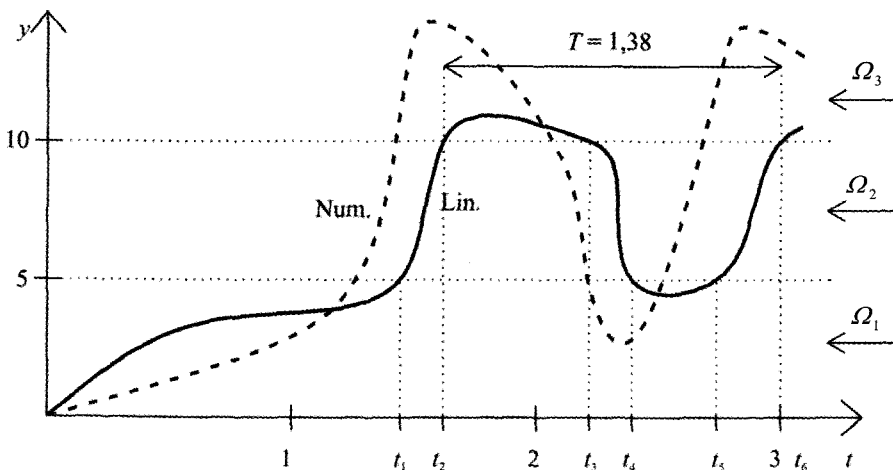
$$\begin{vmatrix} \lambda - A & -6 \\ 10 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + (1 - A)\lambda + (60 - A) = 0.$$

Ennek megoldásai a sajátértékek:

$$\Omega_1, \Omega_3: \lambda_a = -134,55, \quad \lambda_b = -1,4493, \quad \Omega_2: \lambda_a = +9, \quad \lambda_b = +5.$$

Mivel az Ω_1 és az Ω_3 tartománybeli (hamis) egyensúlyi állapot stabilis, ezért a trajektória ahhoz tart, de mivel nincsen benne a tartományban, azt nem éri el. Az Ω_2 tartománybeli valódi egyensúlyi állapot viszont nem stabilis! Ennek alapján azt várjuk, hogy állandósult rezgés (stabilis határciklus) fog kialakulni.

Az állapotegyenlet megoldásának általános alakja a $t_i < t < t_{i+1}$ intervallumban



2.5-5. ábra A példában vizsgált rendszer válasza a tartományi linearizálással (folytonos vonal) és pontonkénti számítással (szaggatott vonal)

$$x_1(t) = \bar{x}_1 + M_{1a} e^{\lambda_a(t-t_1)} + M_{1b} e^{\lambda_b(t-t_1)}, \quad M_{1a} = -\frac{\lambda_b + 1}{10} M_{2a},$$

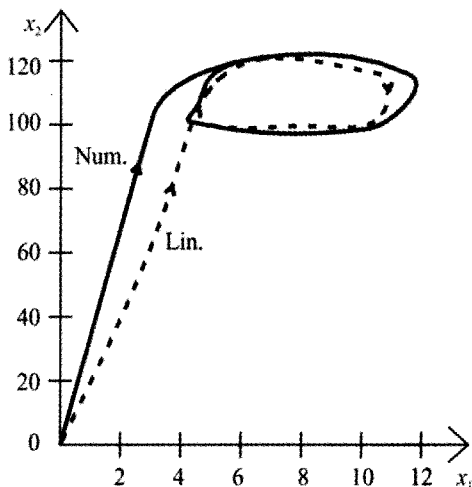
$$x_2(t) = \bar{x}_2 + M_{2a} e^{\lambda_a(t-t_1)} + M_{2b} e^{\lambda_b(t-t_1)}; \quad M_{1b} = -\frac{\lambda_a + 1}{10} M_{2b}.$$

Az M_{2a} , M_{2b} állandók $x_1(t_1)$ és $x_2(t_1)$ ismeretében számíthatók az állapotváltozók folytonossága alapján.

Az 5. ábrán vázoltuk az $x_1 = y$ állapotváltozó (és egyben a válasz) időfüggését. Ennek értelmében a folyamat a kezdeti felfutás után viszonylag hamar (kb. a $t_2 = 1,63$ időpont után) periodikussá válik, a periódusidő $T = 1,38$ időegység.

Az időfüggvény pontosságát illetően lehetnek kételyeink, de kvalitatíven az eredmény helyesnek tekinthető, vagyis valószínűleg van periodikus állandósult válasz, amely kb. $y_{\min} = 4,5$ és $y_{\max} = 10,5$ között változik.

Az 5. ábrán szaggatott vonallal megadtuk egy numerikus közelítő számítás eredményét is. Látható, hogy a két eredmény jellegre megegyezik. A tartományi linearizálással kisebb amplitúdójú és kisebb periódusidejű rezgés adódik (a pontosabb számítás szerint $T = 1,57$). A pontonkénti számítás eredménye szerint az állandósult állapot jóval később áll be (ez az 5. ábrából nem olvasható le).



2.5-6. ábra A trajektória az állapotsíkon. Szaggatott vonal: tartományi linearizálás eredménye; folytonos vonal: pontonkénti számítás eredménye

A 6. ábrán az állapotsíkon ábrázoltuk a trajektóriákat a tartományonkénti linearizálás módszerével számítva (szaggatott vonal), illetve a pontonkénti numerikus eljárással számolva (folytonos vonal). Ezen is megfigyelhetők az előbb említett és az 5. ábrán szemléltetett jellegzetességek. Így például a tartományonkénti linearizálás alapján a trajektória az első „körülfordulás” után már olyan közel kerül a határciklushoz, hogy az eltérés már nem is ábrázolható. A pontosabb számítás szerint ehhez legalább két körülfordulásra van szükség. #

2.5-2.4. A diszkrét idejű állapotegyenlet megoldása

A diszkrét idejű, $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k)$ alakú, vagy részletesebben felírva az

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k], k) \quad (2.5-19)$$

alakú állapotegyenlet megoldása az $\mathbf{u}[k]$, $k \in \mathbf{N}$ gerjesztés és az $\mathbf{x}[0]$ kezdeti állapot ismeretében igen egyszerű a fokozatos behelyettesítés módszerével („lépésről lépés módszer”):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[1] &= \mathbf{F}(\mathbf{x}[0], \mathbf{u}[0], 0), \\ \mathbf{x}[2] &= \mathbf{F}(\mathbf{x}[1], \mathbf{u}[1], 1), \\ \mathbf{x}[3] &= \mathbf{F}(\mathbf{x}[2], \mathbf{u}[2], 2), \dots \end{aligned} \quad (2.5-20)$$

Mint már említettük (2.5-2.1. pont) e megoldási módszer hátránya, hogy ismeretében nehéz általános következtetéseket levonni. Előnye viszont, hogy nem igényli a nemlineáris kapcsolatok elemi függvényekkel történő (gyakran nagy hibát okozó) közelítését. Míg lineáris, invariáns rendszer esetén adható a megoldásra általános képlet, nemlineáris rendszerre ez csak nagyon kivételesen fordul elő.

Az állapotvektor ismeretében a válaszvektor értékei az $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k)$ egyenletbe helyettesítéssel ugyancsak ütemenként számíthatók.

1. példa A diszkrét idejű, elsőrendű rendszer állapotegyenlete $x' = wx(1-x)$, ahol w egy valós paraméter.

E rendszer a $k=0$ ütemtől gerjesztetlen, az ismertnek tekintett $x[0]$ kezdeti állapotot a gerjesztés korábbi értékei hozzák létre.

Vizsgáljuk meg e rendszer lehetséges egyensúlyi állapotait!

Az $\bar{x} = w\bar{x}(1-\bar{x})$ egyenlet megoldásával a két egyensúlyi állapot $\bar{x}_1 = 0$ és $\bar{x}_2 = 1 - w^{-1}$. Az egyensúlyi állapot körüli linearizált állapotegyenlet ($x = \bar{x} + \tilde{x}$)

$$\bar{x}_1 = 0: \quad \tilde{x}' = w\tilde{x}; \quad \bar{x}_2 = 1 - w^{-1}: \quad \tilde{x}' = (2-w)\tilde{x}.$$

Ebből látható, hogy \bar{x}_1 akkor stabilis egyensúlyi állapot, ha $-1 < w < +1$, míg \bar{x}_2 akkor stabilis egyensúlyi állapot, ha $1 < w < 3$. Ha $w < -1$, vagy ha $w > 3$, akkor a kezdeti állapottól függően az állapotváltozó vagy korlátlanul növekszik, de elképzelhető, hogy egy véges intervallumban marad, esetleg periodikusan változik. #

2. példa Egy diszkrét idejű, másodrendű rendszer állapotegyenlete

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,7 & -1,0 \\ 0,9 & 0,8 \end{bmatrix}, x_1 + x_2 < 1; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,4 \\ 0,7 & 0,5 \end{bmatrix}, x_1 + x_2 > 1.$$

E gerjesztetlen rendszer tartományonként lineáris. Az $\mathbf{x}[0]$ kezdeti állapotot a korábbi gerjesztés hozza létre.

Az állapotegyenlet megoldása a fokozatos behelyettesítés módszerével nem jelent nehézséget. Mindkét tartományban az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyensúlyi állapot. Az első tartományban az egyensúlyi pont nem stabilis, a második tartományban nincs egyensúlyi pont. Ebből sejthető, hogy bizonyos kezdeti állapotok esetén oszcilláló (esetleg periodikus) folyamat állhat elő. Az Olvasóra bízunk annak numerikus ellenőrzését, hogy $x_1[0]=1,2$; $x_2[0]=0$ kezdeti állapot esetén olyan $\mathbf{x}[k]$ állapotvektor adódik, amelyre a

$0 < k < 100$ intervallumban $-2,1 < x_1[k], x_2[k] < 4$, és nem ismétlődik. Ebből természetesen még nem következik biztosan, hogy nem kezd-e az állapotváltozó később másként viselkedni. #

2.5-2.5. A folytonos idejű állapotegyenlet megoldása

Mint korábban már említettük, a folytonos idejű, nemlineáris rendszer állapotegyenletének csak kivételesen tudjuk megtalálni a zárt alakú megoldását. Közelítő megoldás előállítására sokféle módszer ismeretes. Kereshetjük például a megoldást egy kiválasztott intervallumban előre megválasztott függvények (például hatványfüggvények) szerinti sor alakjában. Ilyenkor a feladat a függvények együtthatóinak (valamilyen értelemben) optimális értékének meghatározása.

A továbbiakban azt az elterjedtebb módszert ismertetjük, amikor az állapotvektort bizonyos időpontokban számítjuk. Ezek a t_r időpontok lehetnek előre megválasztottak (rendszerint $t_r = rT, r \in \mathbf{N}$) vagy lehetnek a számítás során adaptívan választottak ($t_{r+1} = t_r + h_r$; a h_r lépésközt alkalmasan választjuk meg). A második eljárás körülményesebb, de sokkal hatékonyabb.

Meg kell adni annak kritériumát is, hogy meddig kívánjuk a számítást elvégezni. Ez lehet előre rögzített (megadjuk t_{\max} értékét), de függhet a megoldástól is (például amikor az állapotvektor már alig változik vagy periodikussá válik).

Általános áttekintés

Tekintsük adottnak a folytonos idejű rendszer állapotegyenletét és kezdeti állapotát

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.5-21)$$

alakban adottnak. Az időtől való függést okozhatja a gerjesztés ismert időbeli változása, vagy a rendszer variáns jellege. Célunk az $\mathbf{x}(t_r)$ értékek meghatározása. A közelítő értéket jelölje \mathbf{x}_r , vagyis

$$\mathbf{x}_r \approx \mathbf{x}(t_r). \quad (2.5-22)$$

Feladatunk a $t_{r+1} = t_r + h_r$ időpontbeli \mathbf{x}_{r+1} közelítő érték (minél pontosabb) meghatározása, ha a korábbi $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r-1}, \dots$ értékek már ismertek. Az eljárás közelítő jellege miatt \mathbf{x}_{r+1} még akkor sem lenne pontos, ha az előző értékek pontosak lennének, de természetesen azok is csak közelítések (az \mathbf{x}_0 kivételével).

Mint már említettük, gyakran célszerű az állapotváltozókon kívül a nemlineáris kapcsolatok független változóit is bevezetni (például a nemlineáris erősítők bemeneti változói). Ezeket nem célszerű vagy nem is lehet függvényként kiküszöbölni. Az alább tárgyalandó numerikus eljárások során e változók értékeit minden t_r időpontban numerikusan határozzuk meg \mathbf{x}_r ismeretében.

A közelítő megoldást szolgáltató algoritmusokat a következő szempontok szerint csoportosítjuk (a magyarázatot l. alább):

- egylépéses és többlelépéses (k -lépéses) algoritmusok;
- elsőrendű és magasabbrendű (p -edrendű) algoritmusok;
- explicit és implicit algoritmusok.

A megoldó algoritmus *egylépéses*, ha \mathbf{x}_{r+1} számításához csak \mathbf{x}_r értékét használjuk, *kétlépéses*, ha \mathbf{x}_r és \mathbf{x}_{r-1} értékét használjuk, stb. Az \mathbf{x}_1 csak *egylépéses*

algoritmussal számítható, az \mathbf{x}_2 csak egylépéses vagy kétlépéses algoritmussal és így tovább, vagyis a magasabbrendű algoritmusokat alacsonyabb rendűekkel kell indítani. Minél több lépéses az algoritmus, annál pontosabb eredményt szolgáltat.

A p -edrendű algoritmusok pontosan megadják \mathbf{x}_{r+1} értékét, ha $\mathbf{x}(t)$ egy p -edfokú polinom lenne és ha a felhasznált $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r-1}, \dots$ értékek pontosak lennének. Természetesen egyik feltétel sem teljesül, de az nyilvánvaló, hogy minél nagyobb p , annál kisebb az algoritmus hibája.

Az algoritmus *explicit*, ha \mathbf{x}_{r+1} az $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r-1}, \dots$ értékekkel explicit módon kifejezett, míg *implicit*, ha \mathbf{x}_{r+1} meghatározásához nemlineáris egyenlet vagy egyenletrendszer megoldására van szükség. Utóbbi esetben rendszerint úgy járunk el, hogy egy explicit algoritmussal számítunk egy első becslést (prediktor), majd ezt iterációkkal pontosítjuk (korrektor). Többnyire néhány korrektor lépés után az eredmény nem változik, ekkor a korrekciót abbahagyjuk. Az implicit algoritmusok nem csak pontosabbak, de jobban védettek numerikus instabilitás ellen is.

A bonyolultabb eljárások ugyanannyi számítási munkával többnyire pontosabb eredményt szolgáltatnak, mint az egyszerűbbek. (Az „ugyanannyi számítási munka” azonban nem egyértelmű mérőszám.) A számítási pontosság növelésének kézenfekvő módja a lépésközök minél kisebbre választása, de legalább ennyire fontos a lépésközök célszerű megválasztása és a megoldó algoritmus kiválasztása is. A szakirodalom korántsem egységes a „legcélszerűbb algoritmus” kijelölésében.

Alább néhány eljárásnak csak az alap gondolatát ismertetjük, nem térünk ki számítástechnikai részletekre.

Néhány algoritmus

A következőkben - a teljességre való törekvés igénye nélkül - ismertetünk néhány egyszerű algoritmust az $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ állapotegyenlet közelítő megoldására.

Az *előrelépő Euler-algoritmus* egylépéses, elsőrendű, explicit:

$$\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{x}_r + h_r \mathbf{f}(\mathbf{x}_r, t_r); \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5-23)$$

Ez az algoritmus elsőrendű esetben szemléletesen az jelenti, hogy $x(t)$ görbáját a t_r helyen az érintőjével helyettesítjük, amelynek iránytangense $x'(t_r) \approx f(x_r, t_r)$ és így számítjuk $x(t_{r+1})$ értékét.

A *hátralépő Euler-algoritmus* egylépéses, elsőrendű, implicit:

$$\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{x}_r + h_r \mathbf{f}(\mathbf{x}_{r+1}, t_{r+1}); \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5-24)$$

E nemlineáris egyenlet megoldására szolgál prediktor-korrektor algoritmus:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{r+1}^{(0)} &= \mathbf{x}_r + h_r \mathbf{f}(\mathbf{x}_r, t_r); \\ \mathbf{x}_{r+1}^{(j+1)} &= \mathbf{x}_r + h_r \mathbf{f}(\mathbf{x}_{r+1}^{(j)}, t_{r+1}); \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.5-25)$$

A korrektor iterációját addig folytatjuk, amíg a korrekció már elhanyagolhatóvá válik.

Ez az algoritmus elsőrendű esetben szemléletesen az jelenti, hogy $x(t)$ görbáját a t_r helyen a t_{r+1} pontbeli érintőjével helyettesítjük, amely azonban csak közelítően számítható.

Példa Lineáris, autonóm, elsőrendű rendszer állapotegyenlete:

$$x' = -x; x(0) = 1.$$

Ennek megoldása könnyen beláthatóan

$$x(t) = e^{-t}, t \in \mathbf{R}_+ \Rightarrow x(rh) = q^r, q \equiv e^{-h} = 1 - h + \frac{1}{2}h^2 + \dots, r \in \mathbf{N}.$$

Vizsgáljuk meg a fenti két Euler-módszerrel adódó megoldásokat állandó h lépésköz esetén. Ezek most zárt alakban előállíthatók.

Az előrelépő Euler-módszerrel a (23) alapján az

$$x_{r+1} = x_r - h x_r \equiv (1-h)x_r; x_0 = 1$$

differenciaegyenlet adódik. Ennek megoldása behelyettesítéssel beláthatóan

$$x_r = q_1^r, q_1 \equiv 1 - h, r \in \mathbf{N}.$$

A hátralépő Euler-módszerrel a (24) alapján adódó differenciaegyenlet

$$x_{r+1} = x_r - h x_{r+1} \Rightarrow x_{r+1} = \frac{1}{1+h} x_r, x_0 = 1.$$

Ennek megoldása behelyettesítéssel beláthatóan

$$x_r = q_2^r, q_2 \equiv \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - \dots, r \in \mathbf{N}.$$

Látható, hogy q_1 és q_2 elsőfokú Taylor-polinomja megegyezik pontos q elsőfokú Taylor-polinomjával. Míg q_1 felhasználásával csak $h < 1$ esetén, addig q_2 felhasználásával tetszőleges lépésköz esetén is nullához tartó sorozat adódik. Ez illusztrálja, hogy az implicit módszerek kevésbé kényesek a lépésköz megválasztására. #

A *Runge–Kutta-algoritmusok* egy lépések és explicit. Általános sémájuk

$$\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{x}_r + h_r \mathbf{m}_r, r = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5-26)$$

ahol \mathbf{m}_r a p számú $\mathbf{m}_{r,i}$ meredekség súlyozott átlaga. Az igen elterjedt $p = 4$ rendszámú algoritmus egy szokásos alakja:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{r1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_r, t_r), & \mathbf{m}_{r2} &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_r + \frac{h_r}{2} \mathbf{m}_{r1}, t_r + \frac{h_r}{2}\right), \\ \mathbf{m}_{r3} &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_r + \frac{h_r}{2} \mathbf{m}_{r2}, t_r + \frac{h_r}{2}\right), & \mathbf{m}_{r4} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_r + h_r \mathbf{m}_{r3}, t_r + h_r); \\ \mathbf{m}_r &= \frac{1}{6} \{ \mathbf{m}_{r1} + 2 \mathbf{m}_{r2} + 2 \mathbf{m}_{r3} + \mathbf{m}_{r4} \}. \end{aligned} \quad (2.5-27)$$

A Runge–Kutta-algoritmusok használhatók többlépéses algoritmusok indítására.

Megemlítjük, hogy a $p = 1$ eset az előrelépő Euler-módszer, a $p = 2$ eset pedig a módosított Euler- (trapéz-) vagy az Euler–Cauchy-algoritmust jelenti.

A *Gear-algoritmus* kétlépéses, másodrendű, implicit. Egyik szokásos alakja

$$\mathbf{x}_{r+1} = \frac{4}{3} \mathbf{x}_r - \frac{1}{3} \mathbf{x}_{r-1} + \frac{2}{3} h \mathbf{f}(\mathbf{x}_{r+1}, t_{r+1}), r = 1, 2, \dots \quad (2.5-28)$$

Az \mathbf{x}_1 valamilyen egy lépéses algoritmussal számítandó. A nemlineáris egyenlet megoldását a (25) szerinti prediktor-korrektor algoritmussal végezzük. Prediktorként bármelyik explicit algoritmus használható.

A felsorolt algoritmusok csak ízelítőt adnak a sokféle kidolgozott eljárásból.

*2.5-2.6. Stabilitásvizsgálat

A nemlineáris rendszer stabilitásának vizsgálata fogalmilag is, számítástechnikailag is jóval körülményesebb a lineáris, invariáns rendszer stabilitásának vizsgálatánál. Az egyensúlyi állapot stabilitása linearizálással eldönthető (2.5-2.2. pont). Ennek egy fogalmi és számítástechnikai általánosítását tárgyaljuk az alábbiakban. A továbbiakban folytonos idejű, *autonóm* (állandó gerjesztésű és invariáns) rendszerekre szorítkozunk.

Az egyensúlyi állapot stabilitása

Először megadjuk az egyensúlyi állapot stabilitására vonatkozó különféle fogalmi definíciókat. A pont végén megadjuk egy eljárást a stabilitás eldöntésére.

A folytonos idejű, autonóm rendszer egy $\bar{\mathbf{x}}_i$ *egyensúlyi állapotát* akkor nevezzük (Ljapunov értelemben) *stabilisnak*, ha az $\bar{\mathbf{x}}_i$ kellően kis környezetében lévő bármely $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapot esetén az $\mathbf{x}(t)$ állapotvektor az $\bar{\mathbf{x}}_i$ egyensúlyi állapot környezetében marad. Az egyensúlyi állapot *aszimptotikusan stabilis*, ha az állapotvektor a kezdeti állapotból az $\bar{\mathbf{x}}_i$ egyensúlyi állapothoz tart.

Az egyensúlyi pont stabilitásának alább részletezett pontosabb megfogalmazásánál az \mathbf{x} vektor súlyozott euklideszi normáját használjuk:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N C_i^2 x_i^2}, \quad C_i \neq 0.$$

A C_i súlyok megválaszthatók (minden $C_i = 1$ lehetséges, de nem mindig célszerű választás).

(1) Egy $\bar{\mathbf{x}}_i$ *egyensúlyi állapot* akkor stabilis (Ljapunov értelemben stabilis), ha bármely, kellően kis $\varepsilon > 0$ értékhez található egy olyan (az ε értékétől függő) $\delta > 0$ érték, hogy az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti értékű állapotvektorra teljesül, hogy

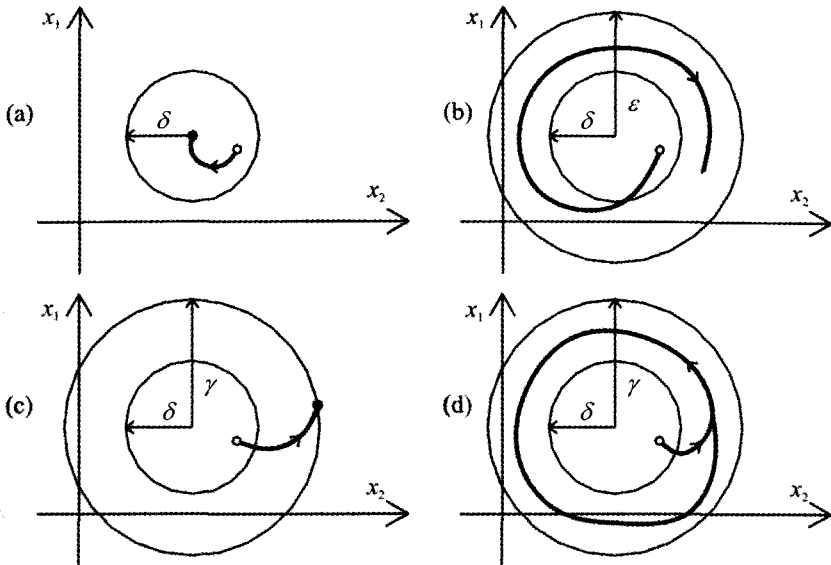
$$\|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}_i\| < \varepsilon, \quad t > 0 \Rightarrow \|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}_i\| < \delta. \quad (2.5-29)$$

(2) Egy $\bar{\mathbf{x}}_i$ *egyensúlyi állapot* akkor *aszimptotikusan stabilis*, ha (Ljapunov értelemben) *stabilis* és még

$$\|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}_i\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}_i\| = 0. \quad (2.5-30)$$

(3) Az $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapot akkor *globálisan aszimptotikusan stabilis*, ha $\mathbf{x}(t)$ bármely $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapotból az egyetlen $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapothoz tart.

A definícióban az „kellően kis” értékét azért kell kikötni, mert ha a rendszernek több stabilis egyensúlyi állapota, vagy stabilis periodikus állapota van, akkor a stabilis $\bar{\mathbf{x}}_i$ egyensúlyi állapottól „távolí” $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapot esetén az állapotvektor esetleg ezek valamelyikéhez tart. Ez indokolja a következő stabilitási definíciót.



2.5-7. ábra Másodrendű rendszer trajektóriájának viselkedése az $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapot környezetében, ha az egyensúlyi állapot (a) aszimptotikusan stabilis; (b) Ljapunov értelemben stabilis; (c) és (d) korlátos

(4) Egy $\bar{\mathbf{x}}_i$ egyensúlyi állapot *korlátos*, ha megadható egy olyan $\delta > 0$ és egy olyan (a δ értékétől függő) $\gamma > 0$, hogy az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti értékű állapotvektorra teljesül

$$\|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}_i\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}_i\| < \gamma, \quad t > 0. \quad (2.5-31)$$

A Ljapunov értelmű stabilitás értelmezésénél egy választott ε értékhez kell egy alkalmas δ értéket találni, a korlátossághoz egy δ értékhez kell egy γ értéket találni.

A fentiek szerint az egyensúlyi állapotokat a következő típusokba is sorolhatjuk:

- aszimptotikusan stabilis (globálisan vagy csak lokálisan);
- Ljapunov értelemben stabilis (globálisan vagy csak lokálisan);
- korlátos (ekkor Ljapunov értelemben vagy stabilis vagy nem stabilis);
- Ljapunov értelemben nem stabilis, nem korlátos.

Ezeket szemlélteti a 7. ábra $N = 2$ állapotváltozó esetére.

Külön megfontolást érdemel, hogy mennyiben tekinthető stabilisnak egy Ljapunov értelemben stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi állapot. Ez az eset egyébként ritkán fordul elő.

A rendszer stabilitása

A gerjesztett rendszer stabilitásáról nagyon keveset lehet általánosságban mondani.

A gerjesztetlen rendszer stabilitásával kapcsolatban a következő két definíció megadására szorítkozunk.

A gerjesztetlen rendszer *globálisan stabilis* (Lagrange értelemben stabilis), ha bármely kezdeti állapot esetén az állapotvektor korlátos marad.

A gerjesztetlen rendszer *abszolút stabilis*, ha globálisan stabilis és bármely kezdeti állapot esetén az állapotvektor ugyanahhoz az egyensúlyi állapothoz tart.

A *stabilis határciklussal* bíró rendszer (a trajektóriák egy zárt görbéhez tartanak) ezek szerint lehet globálisan stabilis, de nem abszolút stabilis.

A gerjesztetlen lineáris, invariáns rendszer egyetlen egyensúlyi állapota $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Ha a rendszer aszimptotikusan stabilis (minden trajektória az $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ponthoz tart), akkor e rendszer abszolút stabilis, így globálisan stabilis is. Ha a rendszer a stabilitás határhelyzetében van (minden trajektória korlátos), akkor a rendszer globálisan stabilis, de nem abszolút stabilis.

Stabilitásvizsgálat Ljapunov-függvénnel

Az autonóm nemlineáris rendszer egyensúlyi állapotának hatékony, habár némi intuíciót igénylő stabilitásvizsgálati módszere a következő.

Az $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ állapotegyenletű rendszernek egy, az $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ által meghatározott $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapota és annak környezetének stabilitása vizsgálható Ljapunov következő tétele („Ljapunov direkt módszere”) alapján.

A folytonos idejű autonóm rendszer egy $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapota *aszimptotikusan stabilis*, ha található az $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ változó olyan, az $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ (azaz $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$) környezetében pozitív definit $V(\tilde{\mathbf{x}})$ függvénye, amelynek $V'(\tilde{\mathbf{x}})$ idő szerinti deriváltja az állapotegyenlet $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ megoldása mentén negatív definit; az egyensúlyi állapot (Ljapunov értelemben) *stabilis*, ha $V'(\tilde{\mathbf{x}})$ negatív szemidefinit. A V függvényt ekkor *Ljapunov-függvénynek* nevezik, az ilyen $V(\tilde{\mathbf{x}})$ függvény előállítását Ljapunov direkt módszerének.

Egy $V(\tilde{\mathbf{x}})$ skalár függvény akkor pozitív definit (illetve pozitív szemidefinit) az $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ pont körüli tartományban, ha ott $V(\tilde{\mathbf{x}})$ folytonosan differenciálható, vagyis minden $\partial V / \partial \tilde{x}_i$ létezik és folytonos; $V(\mathbf{0}) = 0$; $V(\tilde{\mathbf{x}}) > 0$ (illetve $V(\tilde{\mathbf{x}}) \geq 0$) ha $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$. Egyszerű pozitív definit függvény például

$$V(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^N C_i^2 \tilde{x}_i^2, \quad C_i \neq 0. \quad (2.5-32)$$

A $V(\tilde{\mathbf{x}})$ gyakran a rendszer által tárolt energiát jelenti. Ilyenkor Ljapunov tételének az a szemléletes tartalom adható, hogy $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ (azaz $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$) akkor aszimptotikusan stabilis (illetve stabilis) egyensúlyi állapot, ha környezetében az energia a folyamat során állandóan csökken (illetve nem növekszik).

A módszer alkalmazásának lényege az, hogy alkalmazásához, vagyis a $V'(\tilde{\mathbf{x}})$ idő szerinti derivált képzéséhez nem kell az $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ megoldást ismernünk. A differenciálás láncszabályának értelmében ugyanis

$$V'(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv \frac{dV(\tilde{\mathbf{x}})}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_i} f_i(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}). \quad (2.5-33)$$

Ez a megválasztott V és az adott \mathbf{f} függvény ismeretében számítható.

Az állapotter azon része, amelyben a választott $V(\tilde{\mathbf{x}})$ valóban Ljapunov-függvény (vagyis pozitív definit, deriváltja negatív definit vagy legalább negatív szemidefinit), a vizsgált egyensúlyi állapot *stabilitási tartománya*.

Éppen a stabilitási tartomány értelmezhetősége az a többlet, amit Ljapunov direkt módszere az egyensúlyi állapotbeli linearizáláshoz képest nyújt. Utóbbi eljárással ugyancsak eldönthető az egyensúlyi pont stabilitása, de semmi információnk nincs arról a tartományról, amelyből induló trajektóriák éppen a vizsgált, aszimptotikusan stabilis egyensúlyi állapothoz tartanak.

Az egyes Ljapunov-függvények rendszerint különböző stabilitási tartományokat jelölhetnek ki. Ezek uniója is stabilitási tartomány. Szerencsés esetben kiderülhet, hogy csak egyetlen egyensúlyi állapot van és a stabilitási tartomány az egész állapottér. Ekkor a rendszer abszolút stabilis (de legalább globálisan stabilis).

Ha egy V függvény az egyensúlyi állapot környezetében pozitív definit, de deriváltja nem negatív definit (illetve negatív szemidefinit), abból még nem következik, hogy a vizsgált egyensúlyi pont nem aszimptotikusan stabilis (illetve nem Ljapunov értelemben stabilis), hiszen lehet, hogy csak ügyetlenül választottuk a V függvényt. Ha linearizálással eldönthető, hogy a vizsgált egyensúlyi állapot aszimptotikusan stabilis, akkor biztosan létezik Ljapunov-függvény. Nem ismert azonban olyan általános módszer, amellyel egy Ljapunov-függvény ténylegesen előállítható. Mint már említettük, a (32) alakkal érdemes próbálkozni, de az alkalmas együtthatók megválasztása ekkor sem egyszerű feladat. Léteznek más eljárások is, amelyek segítenek Ljapunov-függvényt választani, de ezeket nem tárgyaljuk.

Ljapunov módszerének alkalmazásához ismernünk kell az f függvény matematikai alakját. Mint már többször említettük, nem egyszerű jól kezelhető és mégis kellően pontos függvényt előállítani.

Ljapunov direkt módszere akkor is alkalmazható, ha az f függvény az egyensúlyi pontban nem differenciálható, tehát az egyensúlyi pont körüli linearizálás módszere nem értelmezett. A módszer ennyiben is általánosabb a egyensúlyi állapotbeli linearizálás módszerénél, de ennek inkább csak elvi jelentősége van.

1. példa Tekintsük azt a folytonos idejű, lineáris, invariáns autonóm rendszert, amelynek állapotegyenlete

$$x_1' = a x_1 + b x_2,$$

$$x_2' = c x_1 + d x_2.$$

Ennek egyetlen egyensúlyi állapota ismeretesen $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$. Mint tudjuk, ezen állapot aszimptotikus stabilitásának feltételei $a + d < 0$, $a d - b c > 0$.

Keressük a Ljapunov-függvényt a következő alakban (esetünkben $\tilde{x}_i = x_i$):

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + K^2 x_2^2),$$

ahol K^2 egyelőre tetszőleges. E pozitív definit függvény idő szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} V'(x_1, x_2) &= x_1 x_1' + K^2 x_2 x_2' = x_1(a x_1 + b x_2) + K^2 x_2(c x_1 + d x_2) = \\ &= a x_1^2 + (b + K^2 c) x_1 x_2 + K^2 d x_2^2. \end{aligned}$$

Ez akkor negatív definit, ha

$$a < 0, \quad d < 0, \quad (b + K^2 c)^2 - 4 K^2 a d < 0.$$

Az utolsó feltétel más alakja $ad > (b + K^2 c)^2 / 4 K^2$. A jobb oldal akkor minimális, ha $K^2 = |b/c|$. Ebből következik, hogy az egyensúlyi állapot (és a lineáris rendszer) biztosan aszimptotikusan stabilis, ha

$$a < 0, d < 0, ad > \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{c}{|b|}} b + \sqrt{\frac{|b|}{c}} c \right) = \begin{cases} bc, & bc > 0; \\ 0, & bc < 0. \end{cases}$$

Az $a < 0, d < 0$ feltétel-pár szigorúbb a valóságos $a + d < 0$ feltételnél, a harmadik feltétel pedig egyenértékű az $ad > bc$ feltétellel. #

2. példa Legyen az előző példában $a = -2, b = -4, c = 1, d = 1$. Ekkor az egyensúlyi állapot aszimptotikusan stabilis, de az előző példában választott Ljapunov-függvényből ez nem következik!

Keressünk egy másik Ljapunov-függvényt a következő alakban:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + 2 x_2^2 + H x_1 x_2.$$

A függvény pozitív definit, ha $|H| < 2$. A függvény idő szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} V'(x_1, x_2) &= x_1(-2x_1 - 4x_2) + 4x_2(x_1 + x_2) + H(-2x_1 - 4x_2)x_2 + Hx_1(x_1 + x_2) = \\ &= -(2 - H)x_1^2 + 4(1 - H)x_2^2 - Hx_1x_2. \end{aligned}$$

Ez negatív definit, ha $H < 2, H > 1$ és $H^2 < 16(2 - H)(H - 1)$ egyszerre teljesül. Bármely $1 < H < 2$ érték választható. Ennek alapján az derül ki, hogy ekkor a választott V a teljes x_1, x_2 állapotsíkon Ljapunov-függvény, vagyis a vizsgált rendszer abszolút stabilis (ezért globálisan stabilis is).

Mivel a rendszer lineáris, ezért aszimptotikusan stabilisnak is nevezhetjük, amint azt persze eleve tudtuk is. #

3. példa Tekintsük azt a folytonos idejű, invariáns, elsőrendű rendszert, amelynek állapotegyenlete

$$x' = -\Phi(x) + u; \quad \Phi(x) = 300x - 45x^2 + 2x^3; \quad u = 550, \quad t > 0.$$

Mint a 2.5-1.6. pont példájából tudjuk, a rendszernek ekkor három egyensúlyi pontja van: $\bar{x}_1 = 3,012$ (stabilis), $\bar{x}_2 = 7,835$ (nem stabilis), $\bar{x}_3 = 11,653$ (stabilis).

Az egyensúlyi állapot környezetének vizsgálatához válasszuk a $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^2 / 2$ pozitív definit függvényt. A deriváltat képezve

$$V'(\tilde{x}) = \tilde{x} \tilde{x}' = \tilde{x} \{ 550 - 300(\bar{x} + \tilde{x}) + 45(\bar{x} + \tilde{x})^2 - 2(\bar{x} + \tilde{x})^3 \}.$$

A $\Phi(\bar{x}) = 550$ figyelembe vételével ebből

$$V'(\tilde{x}) = -2\tilde{x}^2 \{ (3\bar{x}^2 - 45\bar{x} + 150) + (3\bar{x} - 22,5)\tilde{x} + \tilde{x}^2 \}.$$

Ez \bar{x}_1 és \bar{x}_3 környezetében negatív, \bar{x}_2 környezetében pozitív. Könnyen belátható, hogy V' az \bar{x}_1 környezetében $x < 7,835$ esetén negatív, az \bar{x}_3 környezetében $x > 7,835$ esetén negatív, vagyis ilyen kezdeti állapot esetén lesz \bar{x}_1 , illetve az állandó gerjesztés hatására előálló \bar{x}_3 az egyensúlyi pont. Ez elemi úton is belátható.

Ebben az egyszerű példában az egyetlen pozitív definit V függvény egyúttal Ljapunov-függvény, sőt pontosan megadja a stabilitási tartományokat is. #

2.5-2.F. Feladatok

F-1. Egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete

$$x'_1 = 50 x_1 - \Phi(x_1) + 6 x_2, \quad x'_2 = -10 x_1 - 8 x_2 + 10 u, \quad \Phi(\xi) = 300 \xi - 45 \xi^2 + 2 \xi^3.$$

Határozza meg az $\bar{u} = 50$ időben állandó gerjesztéshez tartozó egyensúlyi állapot(ok) körüli tartományban a linearizált állapotegyenletet! Döntse el az egyensúlyi pont(ok) stabilitását!

F-2. Oldja meg az előző feladatot, ha az állapotegyenletben $50x_1$ helyére $-10x_1$ kerül és az állandósult gerjesztés $\bar{u} = 100$.

$$x'_1 = -10 x_1 - \Phi(x_1) + 6 x_2, \quad x'_2 = -10 x_1 - 8 x_2 + 10 u, \quad \Phi(\xi) = 300 \xi - 45 \xi^2 + 2 \xi^3.$$

F-3. Egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete, illetve gerjesztése

$$x' = -\Phi(x) + u; \quad u(t) = 700 [1 - \varepsilon(t)] + 550 \varepsilon(t),$$

ahol Φ az előző feladatok szerinti függvény.

Határozza meg az állapotváltozó időfüggvényét t pozitív értékeire! Használja fel a 2.5-2.3. pont 1. példájában megadott tartományonkénti lineáris közelítést!

F-4. Egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete

$$x'_1 = a x_1 - \Phi(x_1) + b x_2, \quad x'_2 = -x_1 - x_2 + u, \quad \Phi(\xi) = 300 \xi - 45 \xi^2 + 2 \xi^3.$$

A továbbiakban használja a Φ függvénynek a 2.5-2.3. pont 1. példájában megadott tartományonkénti lineáris közelítését!

(a) Válassza meg az a , b és \bar{u} értékét úgy, hogy $\bar{x}_1 = 4$ és $\bar{x}_2 = 12$ egyaránt egyensúlyi értékek legyenek!

(b) Előírható-e ekkor az \bar{x}_2 egyensúlyi érték is?

(c) Mi a feltétele annak, hogy mindkét előírt egyensúlyi állapot stabilis legyen?

(d) Előírható-e, hogy az egyik egyensúlyi állapot stabilis, a másik labilis legyen?

F-5. Az előző feladatban legyen mindkét egyensúlyi állapot stabilis. A gerjesztés a $t = 0$ időponttól kezdve állandó.

Igaz-e, hogy ha a kezdeti állapot a tartományonként linearizált karakterisztika azon tartományába esik, ahová egy stabilis egyensúlyi állapot, akkor az lesz a tényleges egyensúlyi állapot?

F-6. Tekintse a 4. feladatban tárgyalt rendszert, amelynek mindkét előírt egyensúlyi állapota stabilis. A gerjesztés a $t = 0$ időponttól kezdve állandó \bar{u} érték.

Határozza meg a b paraméter azon értéktartományát, amely esetén $x_1(t)$ úgy tart $\bar{x}_1 = 4$ állandósult értékéhez, hogy nem lép ki az első linearizálási tartományból!

F-7. Egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete (az állapotváltozó arányos a válasszal) és gerjesztése $y' = -(y-1)(y-2) + u$; $u(t) = 6 \varepsilon(t)$.

Határozza meg $y(t)$ értékét a $t = 0; 0,02; 0,04; 0,1; 0,2$ és 1 időpontokban a következő módszerekkel.

(a) A differenciálegyenlet megoldásával, ami esetünkben a változók szétválasztásával lehetséges.

(b) Az előrelépő Euler-módszerral $h = 0,01$ állandó lépésköz választásával.

(c) Az Euler–Cauchy-módszerrel, amelynek sémája a (26) jelöléseivel

$$m_{r,1} = f(x_r, t_r), \quad m_{r,2} = f\left(x_r + \frac{h_r}{2} m_{r,1}, t_r + \frac{h_r}{2}\right); \quad m_r = m_{r,2};$$

$h = 0,02$ állandó lépésköz választásával.

Milyen következtetéseket tud levonni a közelítő és pontos eredmények összehasonlításával?

***F-8.** Egy $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ állapotegyenletű, folytonos idejű rendszernek adott állandó (vagy állandó értékhez tartó) gerjesztés esetén két stabilis egyensúlyi állapota van. Az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapottól függ, hogy melyik egyensúlyi állapot áll be.

A *szeparatrix* azon N -dimenziós felület az állapotterben, amely szétválasztja egymástól a kétféle egyensúlyi állapotot eredményező $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapotok halmazát.

(a) Adjon eljárást a szeparatrix meghatározására!

(b) Milyen kapcsolat van a szeparatrix és a rendszer labilis egyensúlyi pontjai között?

(c) Igaz-e, hogy egy labilis határciklus egyúttal szeparatrix is?

***F-9.** Egy folytonos idejű, másodrendű rendszer állapotegyenlete

$$x_1' = x_1 H(x_1, x_2) - \Omega x_2, \quad x_2' = x_2 H(x_1, x_2) + \Omega x_1; \quad H(x_1, x_2) = \frac{1}{2(x_1^2 + x_2^2 - 1)}.$$

(a) Határozza meg az autonóm (és gerjesztetlen) rendszer egyensúlyi állapotait, vizsgáljuk meg a stabilitásukat!

(b) Igazolja, hogy $V(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) / 2$

a rendszer egy Ljapunov-függvénye; a trajektóriák az $x_1 = 0, x_2 = 0$ egyensúlyi állapothoz tartanak, ha a kezdeti állapotra $x_1^2(0) + x_2^2(0) < 1$ teljesül! (Lásd a következő feladatot is!)

***F-10.** Tekintse az inverz alakjában megadott következő $r(t)$ függvényt:

$$r^2 - a^2 - \ln r^2 = t; \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

ahol $a^2 = r^2(0) - \ln r^2(0)$ a kezdeti értékek által meghatározott.

(a) Vázolja fel az $r(t)$ függvény görbéjét!

(b) Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozói a fenti $r(t)$ függvénnyel

$$x_1(t) = r(t) \cos \Omega t, \quad x_2(t) = r(t) \sin \Omega t$$

alakban fejezhetők ki. Mit mondhatunk ekkor a trajektóriák viselkedéséről?

(c) Lásd be, hogy az előző feladatban megadott állapotegyenlet megoldása éppen a (b) szerinti!

Mi következik ebből a 9(b) feladat megoldására?

2.5-2.M. Megoldások

M-1. Az egyensúlyi állapotokat ($x_1' = 0, x_2' = 0$) a $2x_1^3 - 45x_1^2 + 257,5x_1 - 375 = 0$ egyenlet \bar{x}_1 gyökei adják és $\bar{x}_2 = -1,25\bar{x}_1 + 62,5$. A linearizált állapotegyenlet

$$\bar{x}_1' = a\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2, \quad \bar{x}_2' = -10\bar{x}_1 - 8\bar{x}_2; \quad a = -250 + 90\bar{x}_1 - 6\bar{x}_1^2.$$

Az egyensúlyi állapot akkor stabilis, ha a karakterisztikus egyenlet együtthatói pozitívak, ami $a < 7,5$ esetén teljesül. Három egyensúlyi állapot van:

$$(a) \bar{x}_1 = 2,258, \quad \bar{x}_2 = 59,678, \quad a = -77,390; \text{ stabilis};$$

$$(b) \bar{x}_1 = 5,718, \quad \bar{x}_2 = 55,353, \quad a = +68,444; \text{ labilis};$$

$$(c) \bar{x}_1 = 14,524, \quad \bar{x}_2 = 44,344, \quad a = -208,554; \text{ stabilis}.$$

A közelítés használhatóságára vonatkozó megfontolásokat illetően l. a 2.5-2.2. pont példáját. A labilis egyensúlyi pont körüli linearizált közelítésnek csekély a gyakorlati haszna.

M-2. A megoldandó egyenlet $2x_1^3 - 45x_1^2 + 317,5x_1 - 750 = 0$. Ennek egyetlen valós gyöke van. Az egyetlen egyensúlyi állapot $\bar{x}_1 = 11,606$, ; $\bar{x}_2 = 110,494$, ekkor $a = -73,61$, ezért az egyensúlyi állapot labilis. Ez a közelítés gyakorlatilag alig használható. (L. a 2.5-2.3. pont példáját!)

M-3. Az $\bar{u} = 700$ gerjesztéshez tartozó állandósult állapot $x(0) = 11,6$ (vö. 2.5-2.3. pont 3. példa). A trajektória Ω_3 -ban indul, állandósult értéke $\bar{u} = 550$ esetén $x(\infty) = 10,4$, amely ugyancsak Ω_3 -ban van. Ebből következően

$$x(t) = 10,4 + 1,2 e^{-125t}; \quad 0 < t < t_1.$$

Mivel $x(t)$ nem lép ki Ω_3 -ból, ezért $t_1 = \infty$, vagyis a megoldás (a választott lineáris közelítésben) a t idő minden pozitív értékére érvényes.

M-4. Egyensúlyi állapotban $\bar{x}_2 = -\bar{x}_1 + \bar{u}$.

(a) A kijelölt egyensúlyi érték akkor áll be, ha

$$(a - 125 - b)4 + b\bar{u} = 0, \text{ és } (a - 125 - b)12 + 750 + b\bar{u} = 0.$$

Ebből például $a = 31,25 + b$, $\bar{u} = 375/b$, ahol b tetszőleges (nem nulla), vagyis a feladatnak végtelen sok megoldása van.

(b) Igen; az $\bar{x}_2 = -\bar{x}_1 + 375/b$ egyenletből b kifejezhető.

(c) A karakterisztikus egyenlet az egyensúlyi pontoknak megfelelő mindkét tartományban $\lambda^2 + (94,75 - b)\lambda + 93,75 = 0$. Mindkét egyensúlyi állapot akkor stabilis, ha $b < 94,75$.

(d) Mivel a választott közelítésben $\Phi(x)$ meredeksége a két tartományban megegyezik, ezért a két egyensúlyi állapot stabilitási tulajdonságai megegyeznek. A vizsgált példában ez nem függ a közelítés módjától. Egyik állítás sem általános érvényű.

M-5. Ez általában nem igaz. Ha azonban a kezdeti állapot „elég közel” van az egyensúlyi állapothoz és minden sajátérték valós része „elég nagy” negatív érték, akkor a trajektória benne fog maradni abban a tartományban, amelyben a kezdeti állapot és a stabilis egyensúlyi állapot is van. Általában azonban a trajektória ki fog lépni a kezdeti tartományból, noha lehet, hogy a trajektória végül a szóban forgó egyensúlyi ponthoz tart. A trajektória lehetséges menete nem csak a vizsgált rendszertől, hanem a tartományok megválasztásának módjától is függhet, ami ugyancsak arra utal, hogy a kérdésre általában nem lehet iglő választ adni.

M-6. A paraméterekre vonatkozó előírásokat és a karakterisztikus egyenletet lásd a 4. feladat megoldásánál. Mindkét sajátérték valós, ha $b < 94,75 - \sqrt{375} \approx 75,385$. Ekkor az előírás teljesül. Numerikusan ellenőrizhető, hogy ez a feltétel nem csak elegendő, hanem szükséges is.

M-7. (a) A kezdeti érték $y(0) = 0$. Az $u = 6$ behelyettesítésével

$$\int_0^y \frac{d\eta}{(\eta-4)(\eta+1)} = -t \Rightarrow y(t) = 4 \varepsilon(t) \frac{1 - e^{-5t}}{1 + 4 e^{-5t}}.$$

A (b) és (c) feladatok számítógéppel könnyen megoldhatók. Az eredményeket a következő összeállítás tartalmazza:

	$t =$	0	0,02	0,04	0,1	0,2	0,4	1,0
(a)	$y =$	0	0,0824	0,1696	0,4594	1,0230	2,2439	3,8688
(b)	$y =$	0	0,0812	0,1671	0,4528	1,0107	2,2336	3,8747
(c)	$y =$	0	0,0824	0,1695	0,4592	1,0229	2,2440	3,8684

Amint látjuk, mindkét közelítés hibája igen kicsi. A bonyolultabb Euler-Cauchy-módszer a kétszer akkora lépésköz ellenére is pontosabb az egyszerű Euler-módszernél. A feladat illusztrálja, hogy bonyolultabb algoritmusok alkalmazása hatékonyabb szokott lenni a lépésköz csökkentésénél.

***M-8.** (a) Ha visszafelé követjük a stabilis egyensúlyi pontba befutó trajektóriát, akkor vagy az állapottér (valamelyik) végtelen távoli pontjába vagy a szeparatrixhoz tartó görbét kapunk. Ha tehát valamilyen (rendszerint közelítő) módszerrel megoldjuk a $t \rightarrow -\tau$ helyettesítéssel előálló $\mathbf{x}' = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, -\tau)$ differenciálegyenletet különböző kezdeti értékek mellett, akkor van rá esélyünk, hogy olyan görbéket kapjunk, amelyek a szeparatrixban vannak ($N=2$ esetén: a szeparatrix görbe egy szegmensét adják). Az eljárás csak $N=1$ esetén reményteljes, amikor a szeparatrix egy pont és $N=2$ esetén, amikor a szeparatrix egy görbe az állapotsíkon.

(b) A labilis egyensúlyi pont a szeparatrix egy pontja. Ez az (a) szerint értelmezett egyes inverz trajektóriák végpontja.

(c) A labilis határciklus a szeparatrix egy görbéje. Ha $N=2$, akkor a labilis határciklus szeparatrix. Ha $N=3$, akkor a határciklus egy görbe a szeparatrixot jelentő zárt felületen, és ugyanez a helyzet nagyobb rendszám esetén is, de ez már nem szemléltethető egyszerűen.

***M-9.** (a) Könnyen belátható, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ egy egyensúlyi állapot. Több egyensúlyi állapot nincs is. Linearizálással adódik, hogy ez az egyensúlyi állapot stabilis.

(b) A függvény deriváltja $r' = [x_1^2 + x_2^2]H(x_1, x_2)$. Ez negatív, ha H nevezője negatív, ami az $x_1^2 + x_2^2 < 1$ tartományban biztosan teljesül. Más Ljapunov-függvénnyel ennél nagyobb stabilitási tartomány adódhat.

***M-10.** Az $r(t)$ függvény nem fejezhető ki explicit alakban.

(a) Ha $r(t_0) > 1$, akkor $r(t)$ monoton növekszik. Ha $0 < r(t_0) < 1$ akkor $r(t)$ monoton csökkenve nullához tart.

(b) Ha $x_1(t_0), x_2(t_0)$ az egység sugarú körön kívül van, akkor a trajektóriák kifelé spirálozódnak, ellenkező esetben pedig az origó felé. Az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ egyenletű kör ezek szerint nem stabilis határciklus, nevezik labilis határciklusnak is.

(c) A megadott függvény deriváltját képezve $r'/r = H$ adódik. Ebből egyszerű számítással már következik az állítás. A választott Ljapunov-függvény ezek szerint pontosan megadja a stabilitási tartományt, nem kell ennél „jobb” Ljapunov-függvényt keresni.

3. Analízis a frekvenciatartományban

Egy rendszernek vagy hálózatnak az időtartományban történő leírása és analízisa tekinthető a természetes eljárásnak.

Egyes esetekben azonban akár a modell számítása, akár az objektum mérése szempontjából ez a kézenfekvő eljárás körülményes. Előnyösebb lehet a rendszert a frekvenciatartományban leírni, az objektumot ilyen megfontolások alapján mérni. Bizonyos feladatok megfogalmazása és megoldása csak a frekvenciatartományban reményteljes (például a szűrőtervezés).

Míg azonban a lineáris, invariáns rendszerekre az időtartományban értelmezett állapotváltozós leírás elvileg egyszerűen általánosítható nemlineáris és variáns rendszerekre (2.5. fejezet), a frekvenciatartománybeli leírás csak lineáris, invariáns rendszerekre kényelmes.

A továbbiakban ezért lineáris, invariáns diszkrét idejű és folytonos idejű rendszerek tárgyalására szorítkozunk. Többnyire feltételezzük a rendszer GV stabilitását. A nem GV stabilis rendszerek frekvenciatartománybeli vizsgálata körültekintést igényel, mert a látszólag helyes eredmény alapvetően értelmetlen lehet. A veszteségek elhanyagolásával előáll, a stabilitás határhelyzetében lévő nem stabilis rendszerekre az e fejezetben tárgyalt módszerek többnyire alkalmazhatók.

A 3.1. fejezetben a szinuszos és a periodikus gerjesztéshez tartozó válasz (pontosabban: gerjesztett válasz) számítását tárgyaljuk. Ha a rendszer GV stabilis (ezt célszerű a számítás elkezdése előtt vagy az eredmény ismeretében megvizsgálni), akkor ez a belépő, szinuszos vagy periodikus gerjesztéshez tartozó, ugyancsak szinuszos vagy periodikus állandósult választ jelenti, amelyhez a válasz tart. Kellően hosszú idő után a válasz az állandósult válasszal egyenlőnek tekinthető. Ha a rendszer nem GV stabilis, akkor a számított szinuszos vagy periodikus válasznak nincs fizikai tartalma. A szinuszos gerjesztéshez tartozó válasz vizsgálata kapcsán bevezetjük a rendszernek a rögzített frekvenciára vonatkozó átviteli együtthatóját és frekvenciafüggő átviteli karakterisztikáját. Megmutatjuk, hogy a Fourier-felbontás (véges illetve végtelen tagszámú Fourier-sor) segítségével a periodikus válasz számítása visszavezethető szinuszos válaszok számításának szuperpozíciójára.

A 3.2. fejezetben általánosítjuk a szinuszos jelek szuperpozícióján alapuló eljárást nem periodikus jelek előállítására, továbbá a nem periodikus gerjesztéshez tartozó nem periodikus válasz előállítására (spektrális előállítás, Fourier-transzformáció). Az eljárás akkor alkalmazható elvileg egyszerűen, ha a rendszer stabilis és a gerjesztő jel is elegendően bizonyos korlátossági tulajdonságnak. Ennél általánosabb esetben a frekvenciatartománybeli analízis gondosságot igényel, ezért célszerűbb lehet a következő fejezetben tárgyalt, komplex frekvenciatartománybeli módszert alkalmazni. Frekvenciatartománybeli analízisre jól kidolgozott, gyors numerikus módszerek ismertek.

A 3.3. fejezetben megadjuk a hálózattal reprezentált rendszer átviteli együtthatójának és átviteli karakterisztikájának számításmódját is. Az átviteli karakterisztika ismeretében a hálózat stabilitása eldönthető, az átviteli együttható ismeretében erre nincs lehetőség, ezért a stabilitást előzetesen célszerű megvizsgálni.

Aki át fogja tanulmányozni a következő részt is (4. Analízis a komplex frekvenciatartományban), az a 3.3. fejezetet ki is hagyhatja. A 4.3 szakaszban tárgyalandó módon számított átviteli függvény ismeretében ugyanis a rendszer GV stabilitása egyszerűen eldönthető, majd az átviteli karakterisztika is egyszerűen számítható. Ha azonban csak egyetlen frekvencián akarjuk az átviteli együtthatót meghatározni, akkor azt esetleg célszerűbb a hálózat ismeretében a frekvenciatartományban elvégezni.

3.1. Állandósult válasz

A 2. részben leírtakból (például az állapotváltozós leírás megoldásából) következik, hogy ha egy lineáris, invariáns rendszer gerjesztése periodikus jel, akkor válaszának gerjesztett összetevője is periodikus jel. Ha a rendszer gerjesztés-válasz stabilis, akkor ez egyúttal a belépő periodikus gerjesztéshez tartozó állandósult válasz is. Sok gyakorlati esetben csak az állandósult válaszra van szükségünk (megtakaríthatjuk a sajátértékek, a kezdeti értékek, stb. számítását). A következő fejezetben látni fogjuk, hogy az itt bevezetett technika általánosítható nem periodikus gerjesztések hatásának vizsgálatára is.

A 3.1-1. szakaszban a szinuszos gerjesztéshez tarozó szinuszos válasz vizsgálatát tárgyaljuk. Bevezetjük a lineáris, invariáns rendszer átviteli együtthatóját és átviteli karakterisztikáját. A 3.1-2. szakaszban a DI és a FI periodikus jel Fourier-soros előállítását tárgyaljuk. Ennek alapján meghatározhatjuk a periodikus gerjesztéshez tartozó periodikus válasz Fourier-soros alakját. (Egy más lehetőséget a 4.2-2.4. pontban fogunk tárgyalni.)

3.1-1. Szinuszos válasz

3.1-1.1. A szinuszos jel

Egy $x = x[k]$ diszkrét idejű illetve egy $x = x(t)$ folytonos idejű *szinuszos jel* három valós adattal jellemezhető. Ezek

- az x jel X *amplitúdója* vagy csúcserőértéke ($X > 0$);
- az x jel ρ *kezdőfázisa* vagy fázisszöge ($-\pi \leq \rho < \pi$);
- az x jel ϑ vagy Θ diszkrét idejű, illetve ω vagy Ω folytonos idejű *körfrekvenciája*.

A folytonos idejű szinuszos jel mindig periodikus, a diszkrét idejű szinuszos jel csak akkor periodikus, ha $\vartheta / 2\pi$ racionális. Ebben az esetben a körfrekvencia mellett használatos a következő két jellemző is:

- az L diszkrét idejű, illetve a T folytonos idejű *periódusidő* ($\vartheta = 2\pi M / L$, $\omega = 2\pi / T$);
- az f folytonos idejű *frekvencia* ($f = 1 / T$, $\omega = 2\pi f$).

A periodicitással kapcsolatos mennyiségek SI egységének neve (jele):

DI körfrekvencia: radián (rad); DI periódusidő: dimenzió nélküli;

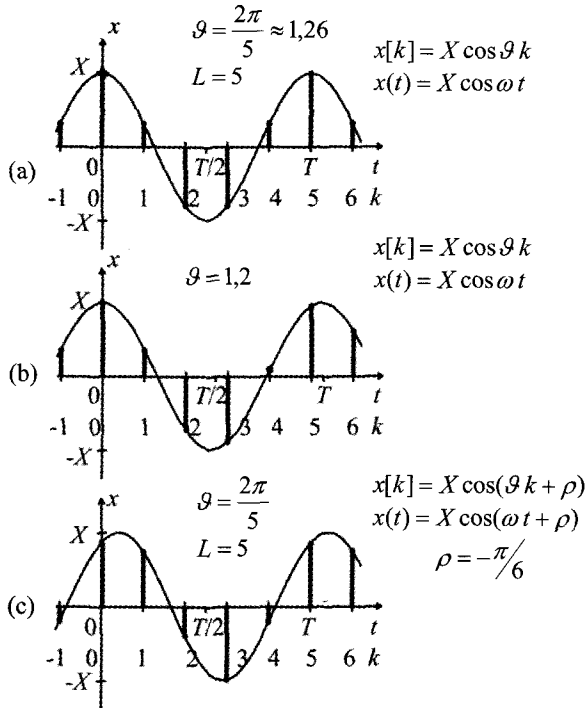
FI körfrekvencia: radián per másodperc (rad/s); FI periódusidő: másodperc (s), FI frekvencia: hertz (Hz).

Megjegyezzük, hogy a „körfrekvencia” helyett gyakran a rövid „frekvencia” is használatos, különösen összetételekben (frekvenciafüggés, frekvenciatartomány). A DI körfrekvenciára más jelek (például ω vagy Ω) is használatosak.

A szinuszos jel leírására többnyire a következő alakot fogjuk használni:

$$\text{DI: } x[k] = X \cos(\vartheta k + \rho); \quad \text{FI: } x(t) = X \cos(\omega t + \rho). \quad (3.1-1)$$

Az 1. ábrán szinuszos jelek grafikonja látható. Az ábrán a DI szinuszos jel a $T = 5$ periódusidejű FI szinuszos jel mintáit jelenti, azaz $x[k] = x(t)|_{t=kT_s}$, ahol T_s a mintavételi („sampling”) periódusidő. Mivel $\vartheta k = k\omega T_s$, ezért $\vartheta = \omega T_s = 2\pi T_s / T$. A mintavétellel előálló DI jel akkor periodikus, ha $\vartheta / 2\pi = T_s / T$ racionális. Az 1a és 1c ábrán látható esetben $\vartheta = 2\pi / 5 = 0,4\pi$, tehát a DI jel periodikus, $\vartheta / 2\pi = 1/5$, vagyis $L = 5$. Az 1b ábrán látható esetben $\vartheta = 1,2$, vagyis $\vartheta / 2\pi$ nem racionális, ez a szinuszos DI jel nem periodikus.



3.1-1. ábra Szinuszos folytonos idejű és (mintáiból alkotott) szinuszos diszkrét idejű jel. A DI jel az (a) és (c) esetben periodikus, a (b) esetben nem periodikus

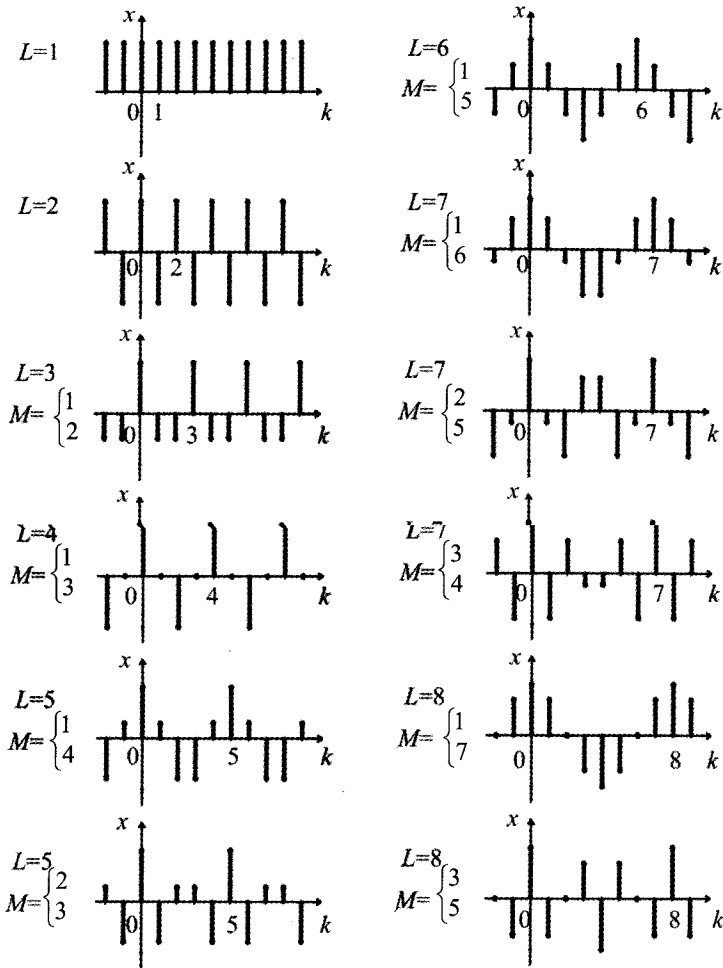
A FI szinuszos jel T periódusideje egyértelműen meghatározza a jel $\omega = 2\pi / T$ körfrekvenciáját. A DI periodikus szinuszos jel L periódusideje nem határozza meg egyértelműen a ϑ körfrekvenciáját, amely lehet $2\pi / L, 2(2\pi / L), \dots, (L-1)(2\pi / L)$, vagyis általában $M(2\pi / L)$, ahol M pozitív egész szám. Ez nem jelent feltétlenül L különböző DI jelet. A továbbiakban elsősorban a ϑ illetve ω körfrekvenciát (és nem a frekvenciát vagy a periódusidőt) használjuk a periodicitás leírására.

A 2. ábrán láthatjuk az $x[k] = \cos(2\pi M / L)k$ jelet $L = 1, 2, \dots, 8$ esetére. Nem tüntettük fel azokat, amelyekre M / L egyszerűsíthető (például $6/8 = 3/4$).

Trigonometriai azonosságokat felhasználva a szinuszos jelek felírhatók a következő alakban is:

$$\text{DI: } x[k] = X_A \cos \vartheta k + X_B \sin \vartheta k; \quad \text{FI: } x(t) = X_A \cos \omega t + X_B \sin \omega t. \quad (3.1-2)$$

Az (1) alak ismeretében a (2) előállítható és viszont:



3.1-2. ábra Néhány egyszerű periodikus diszkrét idejű szinuszos jel, $x[k] = \cos(2\pi M k / L)$

$$X_A = X \cos \rho, \quad X_B = -X \sin \rho. \quad (3.1-3)$$

$$X = \sqrt{(X_A)^2 + (X_B)^2}, \quad \rho = -\arctg \frac{X_B}{X_A} = \arccos \frac{X_A}{X}, \quad (3.1-4)$$

ahol rendszerint $-\pi \leq \rho < \pi$ vagy $0 \leq \rho < 2\pi$ választással élünk. A ρ számításánál önmagában egyik összefüggés sem ad egyértelmű értéket!

Az (1) alak közvetlenebb információkat ad a jelről. A (2) alak viszont előnyösebb jelek összeadása, eltolása vagy FI jel differenciálása esetén. A kétféle alak előnyei egyesíthetők a következő pontban tárgyalandó komplex írásmód alkalmazásával.

3.1-1.2. Szinuszos jel komplex leírása

A szinuszos DI és FI jelek komplex alakú leírásának alapja az *Euler-reláció*:

$$e^{j\alpha} \equiv \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (3.1-5)$$

ahol $j \equiv \sqrt{-1}$ a képzetes (imaginárius) egység, amelynek jeleként j és i is használatos. Az $e^{j\alpha}$ komplex szám valós (reális) és képzetes (imaginárius) része

$$\Re\{e^{j\alpha}\} \equiv \cos \alpha, \quad \Im\{e^{j\alpha}\} \equiv \sin \alpha. \quad (3.1-6)$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a komplex szám képzetes része is valós szám. Az $e^{j\alpha}$ komplex szám abszolút értéke (modulusa) egységnyi, szöge (arkusza) α :

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{(\Re\{e^{j\alpha}\})^2 + (\Im\{e^{j\alpha}\})^2} \equiv 1, \quad \arg e^{j\alpha} = \alpha. \quad (3.1-7)$$

Az Euler-relációból következik, hogy

$$\cos \alpha \equiv \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha \equiv \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}. \quad (3.1-8)$$

A valós értékű szinuszos jel kifejezhető a komplex értékű exponenciális jel valós részeként:

$$\begin{aligned} x[k] &= X \cos(\vartheta k + \rho) \equiv \Re\{X e^{j(\vartheta k + \rho)}\} \equiv \Re\{X e^{j\rho} e^{j\vartheta k}\}; \\ x(t) &= X \cos(\omega t + \rho) \equiv \Re\{X e^{j(\omega t + \rho)}\} \equiv \Re\{X e^{j\rho} e^{j\omega t}\}. \end{aligned}$$

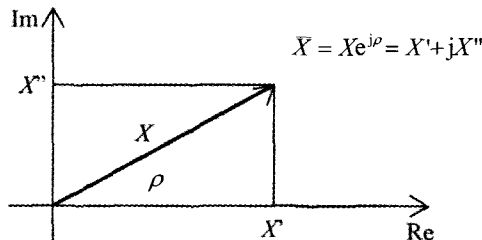
Használhatnánk a képzetes részt is, amely a szinuszos függvényt szolgáltatja.

Az $x[k]$ illetve az $x(t)$ szinuszos jel, amelynek amplitúdója X , kezdőfázisa ρ , tömören jellemezhető az \bar{X} fazorral (komplex amplitúdóval):

$$\bar{X} = X e^{j\rho}. \quad (3.1-9)$$

Az \bar{X} fazor a komplex számsíkon egy nyíllal szemléltethető, amelynek hossza X , a valós tengellyel bezárt szöge ρ , amint azt a 3. ábra szemlélteti. Az \bar{X} fazor és a ϑ illetve az ω körfrekvencia ismeretében a szinuszos jel kifejezése:

$$\text{DI: } x[k] = \Re\{\bar{X} e^{j\vartheta k}\}; \quad \text{FI: } x(t) = \Re\{\bar{X} e^{j\omega t}\}. \quad (3.1-10)$$

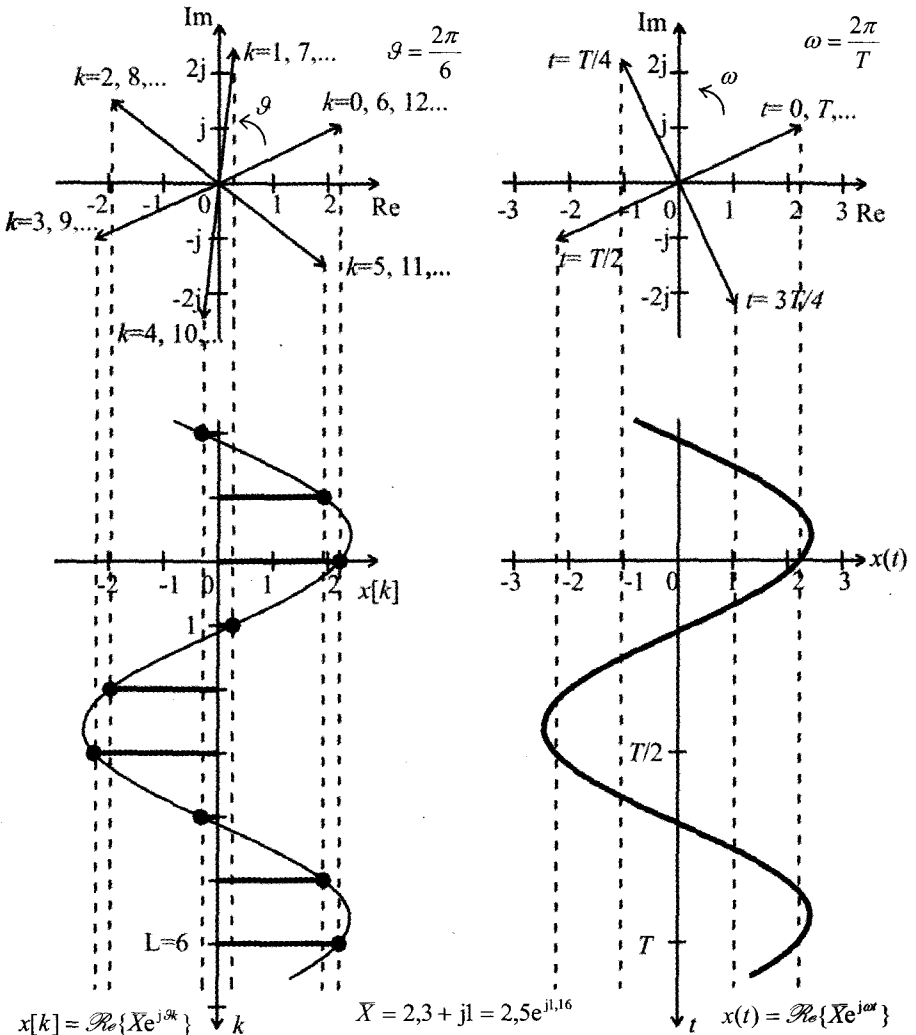


3.1-3. ábra A komplex szám ábrázolása nyíllal

Néha célszerű komplex értékű DI vagy FI jelet értelmezni, amelynek valós része adja a szinuszos időfüggvényt:

$$\text{DI: } \bar{x}[k] = \bar{X} e^{j\vartheta k}; \quad \text{FI: } \bar{x}(t) = \bar{X} e^{j\omega t} \quad (3.1-11)$$

E komplex jel grafikus reprezentációja egy nyíl, amely a matematikai pozitív irányban (az óramutató járásával ellentétesen) forog. A DI esetben $\bar{x}[0] = \bar{X}$ és a nyíl minden ütemben ϑ szöggel előre ugrik (4. ábra). Ha $\vartheta = 2\pi M/L$, akkor a $k = L$ ütemben a nyíl ugyanabban a helyzetében van, mint a $k = 0$ ütemben, tehát ekkor a jel ekkor periodikus. A FI esetben $\bar{x}(0) = \bar{X}$, a nyíl állandó ω szögsebességgel forog.



3.1-4. ábra DI és FI szinuszos jelek komplex reprezentációja és valós reprezentációja

Ha komplex értékű jeleket használunk, akkor tisztázni kell, hogy mi a komplex érték fizikai jelentése. Az előzőleg tárgyalt esetben a komplex értékű jel valós része jelenti a valós értékű szinuszos jelet. Grafikusan ez a forgó fazornak a valós tengelyre vett vetületét jelenti. A szinuszos jel fazorjának az abszolút értéke és a szöge bír fizikai tartalommal, valós és képzetes részének rendszerint nincs önálló jelentése. A továbbiakban a jeleket valós értékűnek tekintjük, ha az ellenkezőjét nem hangsúlyozzuk.

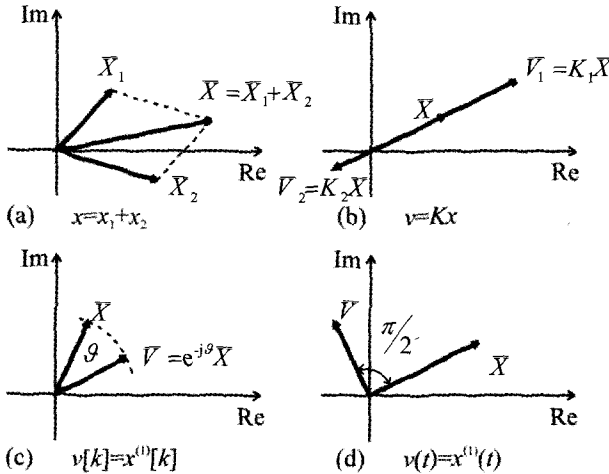
Vizsgáljuk meg a szinuszos jeleken végzett műveletek fazor reprezentációját. A következőkben minden DI illetve FI szinuszos jel \mathcal{G} illetve ω körfrekvenciája közös:

$$DI: x[k] = X \cos(\mathcal{G}k + \rho); \quad FI: x(t) = X \cos(\omega t + \rho).$$

Ha az x szinuszos jel az x_1 és x_2 szinuszos jelek összege, akkor az x fazorja az x_1 és x_2 fazorjának összege, mert komplex számok összegének valós része megegyezik a valós részek összegével:

$$x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2. \quad (3.1-12)$$

A műveletet az 5a ábra szemlélteti. Az általánosítás több tag összegére kézenfekvő.



3.5. ábra Szinuszos jeleken végzett egyes lineáris műveletek fazor reprezentációja: (a) összeadás, (b) szorzás valós állandóval, (c) DI jel késleltetése, (d) FI jel differenciálása

Ha K egy valós állandó, akkor nyilvánvaló, hogy

$$v = Kx \Leftrightarrow \bar{V} = K \bar{X}. \quad (3.1-13)$$

Ha $K > 0$, akkor v és x fázisban vannak, ha $K < 0$, akkor v és x ellenfázisban vannak, amint az a fazorokra az 5b ábra szemlélteti.

Ha x egy diszkrét idejű szinuszos jel, akkor az egy ütemmel késleltetett jelre

$$x^{(1)}[k] \equiv x[k-1] = \Re_e \{ \bar{X} e^{j\mathcal{G}(k-1)} \} = \Re_e \{ \bar{X} e^{-j\mathcal{G}} e^{j\mathcal{G}k} \}.$$

Ebből következik a fazorok kapcsolata:

$$v[k] = x^{(1)}[k] \equiv x[k-1] \Leftrightarrow \bar{V} = e^{-j\mathcal{G}} \bar{X}. \quad (3.1-14)$$

A $v[k] = x[k - 1]$ késleltetett jel az $x[k]$ jelhez képest fázisban \mathcal{G} szöggel késik (az $x[k]$ jel az $x[k - 1]$ jelhez képest \mathcal{G} szöggel siet), a \bar{V} fázor \mathcal{G} szöggel hátra van forgatva az \bar{X} fázorhoz képest. Ezt szemlélteti az 5c ábra. A fentiekből következnek a fázorok kapcsolata $n \in \mathbf{Z}_+$ ütemmel történő késleltetés vagy $n \in \mathbf{Z}_-$ ütemmel történő siettetés esetén: a \bar{V} fázor $n\mathcal{G}$ szöggel van elforgatva az \bar{X} fázorhoz képest.

Ha x egy folytonos idejű szinuszos jel, akkor deriváltjának kifejezése

$$x^{(1)}(t) = -\omega X \sin(\omega t + \rho) \equiv \omega X \cos\left(\omega t + \rho + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x^{(1)}(t) = \mathcal{R}_e \left\{ \bar{X} e^{j\omega t} \right\}^{(1)} = \mathcal{R}_e \left\{ j\omega \bar{X} e^{j\omega t} \right\}.$$

Ebből következik a fázorok kapcsolata:

$$v(t) = x^{(1)}(t) \Leftrightarrow \bar{V} = j\omega \bar{X}. \quad (3.1-15)$$

Az $x^{(1)}(t)$ jel az $x(t)$ jelhez képest fázisban $\pi/2 = 90^\circ$ szöggel siet vagyis az $x(t)$ jel az $x^{(1)}(t)$ jelhez képest $\pi/2 = 90^\circ$ szöggel késik. A \bar{V} és az \bar{X} fázorja közötti szög ugyancsak $\pi/2 = 90^\circ$. Ezt szemlélteti az 5d ábra. Ebből már következik, hogy az n -szer ($n \in \mathbf{Z}_+$) differenciált jel fázorja $(j\omega)^n$ -szerese a jel fázorjának.

A folytonos idejű szinuszos jel idő szerinti integrálja csak akkor szinuszos jel, ha feltételezhetjük, hogy az additív állandó nullának tekinthető, vagy hogy az integrálás alsó határa megfelelően van megválasztva. Ekkor az x integráljának fázorja $\bar{X}/j\omega$. Ezt a kapcsolatot a továbbiakban nem fogjuk alkalmazni.

3.1-1.3. Az átviteli karakterisztika

Legyen egy lineáris, invariáns DI illetve FI rendszer gerjesztése *szinuszos*:

$$\begin{aligned} \text{DI: } u[k] &= U \cos(\mathcal{G}k + \rho_u) \equiv \mathcal{R}_e \left\{ \bar{U} e^{j\mathcal{G}k} \right\}; \\ \text{FI: } u(t) &= U \cos(\omega t + \rho_u) \equiv \mathcal{R}_e \left\{ \bar{U} e^{j\omega t} \right\}, \end{aligned} \quad (3.1-16)$$

ahol $\bar{U} = U e^{j\rho_u}$. Az $y_g = y$ gerjesztett válasz ugyancsak szinuszos lesz azonos frekvenciával, de más amplitúdóval és kezdőfázissal:

$$\begin{aligned} \text{DI: } y[k] &= Y \cos(\mathcal{G}k + \rho_y) \equiv \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y} e^{j\mathcal{G}k} \right\}; \\ \text{FI: } y(t) &= Y \cos(\omega t + \rho_y) \equiv \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y} e^{j\omega t} \right\}, \end{aligned} \quad (3.1-17)$$

ahol $\bar{Y} = Y e^{j\rho_y}$. Ha a rendszer GV stabilis, akkor az állandósult válasz megegyezik a válasz gerjesztett összetevőjével. Ellenkező esetben a válasz gerjesztett összetevőjének nincs fizikai tartalma.

Tekintsük ismertnek a szinuszos gerjesztést (U amplitúdóját, ρ_u kezdőfázisát és \mathcal{G} illetve ω körfrekvenciáját) és a rendszer egy leírását (például állapotváltozós leírását). Meg akarjuk határozni a rendszer szinuszos válaszát. Mivel a szinuszos gerjesztett válasz körfrekvenciája megegyezik a gerjesztés körfrekvenciájával, ezért csak a válasz Y amplitúdóját és ρ_y kezdőfázisát, vagyis $\bar{Y} = Y e^{j\rho_y}$ fázorját kell meghatároznunk, amely arányos a gerjesztés fázorjával.

A lineáris, invariáns rendszer \bar{H} átviteli együtthatója a rögzített \mathcal{G} illetve ω körfrekvencián

$$\bar{H} = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}}, \quad (3.1-18)$$

ahol \bar{U} illetve \bar{Y} a szinuszos gerjesztés, illetve válasz fázorja (komplex amplitúdója). Szokásos jelöléssel $\bar{H} = K e^{j\varphi}$, ahol $K = |\bar{H}|$ az átviteli együttható nagysága (abszolút értéke), $\varphi = \arg \bar{H}$ az átviteli együttható szöge a vizsgált körfrekvencián.

Ismerve a gerjesztés \bar{U} fázorját és a vizsgált frekvencián az átviteli együttható \bar{H} értékét, meghatározhatjuk a válasz $\bar{Y} = \bar{H} \bar{U}$ fázorját vagy a válasz $Y = K U$ amplitúdóját és $\rho_y = \varphi + \rho_u$ kezdőfázisát.

Gyakran előfordul, hogy a választ különböző frekvenciákon akarjuk meghatározni (l. a 3.1-2 szakaszt és a 3.2. fejezetet). Ilyenkor célszerű a \mathcal{G} vagy az ω körfrekvenciát változóként kezelni.

A DI rendszer $H(e^{j\mathcal{G}})$ illetve a FI rendszer $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikája a rendszer átviteli együtthatója mint a \mathcal{G} illetve az ω körfrekvencia függvénye.

Az átviteli karakterisztikát rendszerint abszolút értékével és szögével adjuk meg:

$$\text{DI: } H(e^{j\mathcal{G}}) \cong K(\mathcal{G}) e^{j\varphi(\mathcal{G})}; \quad \text{FI: } H(j\omega) \cong K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (3.1-19)$$

Belátható, hogy a $K(\mathcal{G}) = |H(e^{j\mathcal{G}})|$ illetve a $K(\omega) = |H(j\omega)|$ amplitúdó-karakterisztika páros függvénye, míg a $\varphi(\mathcal{G}) = \arg H(e^{j\mathcal{G}})$ illetve a $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ fázis-karakterisztika páratlan függvénye a \mathcal{G} illetve az ω körfrekvenciának.

A $K(\mathcal{G})$ és a $\varphi(\mathcal{G})$ periodikus 2π periódussal. Ezeket ezért elegendő a $[0, \pi)$ intervallumban ismerni. A $K(\omega)$ és a $\varphi(\omega)$ függvények nem periodikusak, ezeket elegendő a $[0, \infty)$ intervallumban ismerni. Ez vonatkozik e függvények ábrázolására is (3.1-1.6. pont).

A negatív körfrekvencia fizikailag értelmetlen, de használata - mint látni fogjuk - egyes esetekben mégis célszerű. A fent említett paritásokat felhasználva szorítkozhatunk a frekvencia pozitív értékeire is, hiszen ebből a negatív frekvenciákra vonatkozó értékek már következnek.

A $H(e^{j\mathcal{G}})$ illetve a $H(j\omega)$ jelölés feleslegesen bonyolultnak tűnhet. Egy előnye például az, hogy mivel az argumentum már utal a mennyiség komplex jellegére, ezért a felülhúzást elhagyhatjuk. További előnyét később látni fogjuk.

Az irodalomban más jelölések is előfordulnak az átviteli karakterisztikára mint például $H(\mathcal{G})$ illetve $H(\omega)$, $H(f)$. A H mellett más jelek (például W , G) is használatosak. Az átviteli karakterisztikát nevezik frekvencia-átviteli függvénynek is.

A fázis-karakterisztika helyett gyakran a τ futási idő karakterisztikát (csoport futási idő karakterisztikát) szokás megadni, amely páros függvény:

$$\tau(\mathcal{G}) = -\frac{d\varphi(\mathcal{G})}{d\mathcal{G}}, \quad \tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}. \quad (3.1-20)$$

Az átviteli karakterisztika megadható a valós és képzetes részével is. A valós rész páros, a képzetes rész páratlan függvénye a körfrekvenciának. Ezeknek a függvényeknek vagy egy körfrekvencián felvett értéküknek egyes esetekben fizikai jelentése is van.

A következő pontokban megmutatjuk, miként számítható az átviteli karakterisztika akár rendszeregyenlet, akár az állapotváltozós leírás ismeretében. A 3.2-2. szakaszra halaszttuk az átviteli karakterisztika és az impulzusválasz kapcsolatának tisztázását.

Sok gyakorlati esetben a rendszer átviteli karakterisztikája az adott. Ez például a modellezendő objektumon végzett mérés eredménye lehet. Ilyenkor természetesen nem függvényt ismerünk, hanem annak bizonyos számú pontját. Ebből valamilyen eljárással előállíthatunk közelítő függvényt is, ha erre szükségünk van.

Egyes esetekben egy kívánt átviteli karakterisztika teljesen vagy részlegesen adott. Azt kívánjuk például, hogy a rendszer bizonyos frekvenciák környezetébe eső jeleket akadálytalanul átengedjen, másokat viszont ne engedjen át. Egy tipikus példa DI esetben:

$$0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1; \quad 0 \leq K(\vartheta) \leq 0,1; \quad \vartheta_1 < \vartheta_3 \leq \vartheta < \vartheta_4 \leq \pi; \quad 0,9 \leq K(\vartheta) \leq 1.$$

A FI esetben ϑ helyére ω is írható, csak ekkor $\omega_3 \leq \omega \leq \omega_4 \leq \infty$ lesz az utolsó feltétel. A fázis-karakterisztika lehet tetszőleges vagy arra is vonatkozhat valamilyen előírás (például gyakran kívánatos lineáris fázis-karakterisztika, azaz állandó futási idő karakterisztika).

Előfordulhat, hogy az átviteli karakterisztika bizonyos frekvenciákon nulla. Nem lehet azonban az átviteli karakterisztika sehol sem végtelen, mert ez azt jelentené, hogy vagy végtelen nagy amplitúdójú szinuszos válasz lép fel, vagy nulla gerjesztéshez véges szinuszos válasz tartozik (amelynek frekvenciáját a nem létező gerjesztés szabja meg). Mindkét lehetőség ellentmond a feltételezett GV stabilitásnak. Ha csak GV stabilis rendszerre értelmezzük az átviteli karakterisztikát, akkor elkerülhetjük az ilyen ellentmondásos eredményeket.

Ennek ellenére előfordulhat, hogy mégis elfogadjuk az egyes frekvenciákon végtelenné váló átviteli karakterisztikát. Ez a helyzet, ha elhanyagoljuk az objektumban fellépő veszteségeket. Ilyen esetekben meg kell győződnünk arról, hogy a stabilitás határhelyzetében lévő rendszer egy stabilis objektum közelítő modellje. Ha ugyanis egy nem stabilis objektum modelljéről van szó, akkor a kapott átviteli karakterisztikából félrevezető következtetéseket vonhatunk le.

Ebben a fejezetben arra az esetre szorítkozunk, amikor a rendszer GV stabilis és ennek következtében amplitúdó-karakterisztikája korlátos.

3.1-1.4. Átviteli karakterisztika és rendszeregyenlet

Tekintsük adottnak a lineáris, invariáns, kauzális (és FI esetben differenciális) rendszer rendszeregyenletét, amelynek szokásos alakja (2.2-1. szakasz):

$$\text{DI: } y + \sum_{i=1}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)};$$

$$\text{FI: } y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y^{(i)} = \sum_{i=0}^n b_{n-i} u^{(i)},$$

ahol $y^{(i)}[k] \equiv y[k-i]$ illetve $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ jel i -edik deriváltja (1.1-3.3. pont). Feltételezzük, hogy a rendszer GV *stabilis*. Ez teljesül, ha az a_i együtthatók kielégítenek

bizonyos feltételeket (2.2-3.2. pont). Célunk a rendszeregyenlet ismeretében a rendszer átviteli karakterisztikájának, vagy átviteli együtthatójának meghatározása.

Akit csak az eredmények érdekelnek, az a következő néhány sorban leírt gondolatmenetet átgorghatja.

Az adott szinuszos gerjesztés és a keresett szinuszos válasz kifejezését (16) és (17) adja. A rendszeregyenletbe helyettesítve, a (14) illetve a (15) ismételt felhasználásával:

$$DI: \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y} e^{j\vartheta k} \right\} + \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y} e^{-ji\vartheta} e^{j\vartheta k} \right\} = \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{R}_e \left\{ \bar{U} e^{-ji\vartheta} e^{j\vartheta k} \right\},$$

$$FI: \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y}(j\omega)^n e^{j\omega t} \right\} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y}(j\omega)^i e^{j\omega t} \right\} = \sum_{i=0}^m b_{n-i} \mathcal{R}_e \left\{ \bar{U}(j\omega)^i e^{j\omega t} \right\}.$$

A valós rész képzése tagonként elvégezhető és a valós állandóval végzett szorzással felcserélhető. A komplex amplitúdó és az időfüggő komplex exponenciális kiemelhető:

$$DI: \mathcal{R}_e \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-ji\vartheta} \right] \bar{Y} e^{j\vartheta k} \right\} = \mathcal{R}_e \left\{ \left[\sum_{i=0}^m b_i e^{-ji\vartheta} \right] \bar{U} e^{j\vartheta k} \right\},$$

$$FI: \mathcal{R}_e \left\{ \left[(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} (j\omega)^i \right] \bar{Y} e^{j\omega t} \right\} = \mathcal{R}_e \left\{ \left[\sum_{i=0}^m b_{n-i} (j\omega)^i \right] \bar{U} e^{j\omega t} \right\}.$$

Az időtől függő komplex mennyiségek valós része csak akkor lehet minden időpontban egyenlő, ha maguk a komplex mennyiségek is egyenlők. A \mathcal{R}_e művelet ezért elhagyható. Ezután az exponenciális függvénnyel egyszerűsíthetünk (hiszen ez nem lehet nulla értékű). Az így adódó egyenletből a keresett $H = Y/U$ kifejezhető. A formailag kissé különböző eredményeket külön adjuk meg a DI és a FI esetre.

A diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikája

Egy lineáris, invariáns, kauzális, gerjesztés-válasz stabilis, diszkrét idejű rendszer *rendszeregyenlete*

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m]. \quad (3.1-21)$$

E rendszer *átviteli karakterisztikája* (ha az a_i együtthatók által meghatározott sajátértékek biztosítják a rendszer GV stabilis jellegét: minden $|\lambda_i| < 1$)

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + b_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + b_m e^{-jm\vartheta}}{1 + a_1 e^{-j\vartheta} + a_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + a_n e^{-jn\vartheta}}. \quad (3.1-22)$$

Ha $\vartheta = \vartheta$ rögzített körfrekvencia, akkor ennek a behelyettesítéssel adódó $\bar{H} = H(e^{j\vartheta})$ komplex érték a rendszer *átviteli együtthatója* a rögzített frekvencián.

A számlálót és a nevezőt alkalmas $e^{j\vartheta}$ tényezővel szorozva elérhetjük, hogy csak $e^{j\vartheta}$ nem-negatív hatványai forduljanak elő. Ennek azonban nincs különösebb előnye.

Amint látjuk, a DI rendszer átviteli karakterisztikája az $e^{-j\vartheta}$ változónak valós együtthatós *racionális függvénye*, míg a ϑ változónak bonyolult, transzcendens függvénye. Ez egy indokát adja a $H(e^{j\vartheta})$ jelölésnek is. Az is látható, hogy $H(e^{j\vartheta})$

periodikus függvény 2π periódushosszal. A FIR típusú (véges impulzusválaszú) rendszer átviteli karakterisztikája az $e^{-j\vartheta}$ polinomja:

$$\text{FIR: } H(e^{j\vartheta}) = b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + b_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + b_m e^{-jm\vartheta}. \quad (3.1-23)$$

Ebben az esetben különösen nem célszerű áttérni az $e^{j\vartheta}$ pozitív hatványait tartalmazó alakra.

A $K(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})|$ amplitúdó-karakterisztika és a $\varphi(\vartheta) = \arg H(e^{j\vartheta})$ fázis-karakterisztika ábrázolásához ki kell számítnunk a $[0, \pi]$ intervallumban ezek kellő számú pontját. Az átviteli karakterisztika ábrázolásával a 3.1-1.6. pontban még foglalkozunk.

A folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája

Egy lineáris, invariáns, kauzális, gerjesztés-válasz stabilis, folytonos idejű, differenciális rendszer *rendszer egyenlete*

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_n u(t). \quad (3.1-24)$$

E rendszer *átviteli karakterisztikája* (ha az a_i együtthatók által meghatározott λ_i sajátértékek biztosítják a rendszer GV stabilis jellegét, szükséges, hogy mindegyik a_i pozitív legyen):

$$H(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^n + b_1 (j\omega)^{n-1} + b_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + b_{n-1} (j\omega) + b_n}{(j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + a_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n}. \quad (3.1-25)$$

Ha $\omega = \Omega$ rögzített körfrekvencia, akkor ennek a behelyettesítéssel adódó $\bar{H} = H(j\Omega)$ komplex érték a rendszer *átviteli együtthatója* a rögzített frekvencián.

Amint látjuk, a FI rendszer átviteli karakterisztikája a $j\omega$ változó *racionális* függvénye valós együtthatókkal, ami indokolja az alkalmazott $H(j\omega)$ jelölést. Az átviteli karakterisztika az ω változónak is racionális függvénye váltakozva valós és képzetes együtthatókkal.

Könnyen képet kaphatunk a FI átviteli karakterisztika viselkedéséről nagyon kis és nagyon nagy frekvenciákon. Attól függően, hogy melyik a számláló első és utolsó nullától különböző tagja, elsőrendű közelítésben kapjuk, hogy (az a_n együttható biztosan nem nulla)

$$\begin{aligned} \omega \approx 0: \quad H(j\omega) &\approx \frac{b_n}{a_n}, \quad H(j\omega) \approx \frac{b_{n-1}}{a_n} (j\omega), \quad H(j\omega) \approx \frac{b_{n-2}}{a_n} (j\omega)^2, \dots; \\ \omega \approx \infty: \quad H(j\omega) &\approx b_0, \quad H(j\omega) \approx b_1 \frac{1}{j\omega}, \quad H(j\omega) \approx b_2 \frac{1}{(j\omega)^2}, \dots \end{aligned} \quad (3.1-26)$$

Jobb közelítéseket is kaphatunk, ha két vagy még több tagot veszünk figyelembe. Például a polinomosztás módszerével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \omega \approx 0: \quad H(j\omega) &\approx \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_{n-1} a_n - b_n a_{n-1}}{a_n^2} (j\omega) + \dots, \\ \omega \approx \infty: \quad H(j\omega) &\approx b_0 + (b_1 - b_0 a_1) \frac{1}{j\omega} + \dots \end{aligned} \quad (3.1-27)$$

A komplex átviteli karakterisztika vagy a valós amplitúdó-karakterisztika és fázis-karakterisztika ábrázolásához meg kell határoznunk annak kellő számú pontját. Míg a DI esetben csak a $[0, \pi]$ véges intervallumot kell vizsgálnunk, az FI esetben elméletileg a $[0, \infty)$ végtelen intervallumot kellene vizsgálni, ezért többnyire el kell döntenünk, hogy milyen maximális frekvenciáig kívánjuk az ábrázolást elvégezni. Ennek eldöntését segíti elő a nagy frekvenciás viselkedés ismerete. Van azonban olyan ábrázolási módszer is, amelynél erre nincs szükség. Az ábrázolást megkönnyíti, hogy az amplitúdó-karakterisztika korlátos. Az átviteli karakterisztika ábrázolásával a 3.1-1.6. pontban még foglalkozunk.

A rendszeregyenlet előállítása

Mint már említettük, gyakran az átviteli karakterisztika adott akár az objektumon végzett mérés, akár előírás alapján. Ilyenkor a feladat lehet a rendszer rendszeregyenletének előállítása. Ehhez az átviteli karakterisztikát először megfelelő matematikai alakra kell hozni. Ez az approximációs feladat nem egyszerű (még a fokszámokat sem könnyű eldönteni, hát még az a_i, b_i együtthatókat), ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk. A következő nyilvánvaló megállapításra szorítkozunk.

Ha a DI rendszer $H(e^{j\vartheta})$ illetve az FI rendszer $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikája a (22) illetve a (25) alakban adott mint az $e^{-j\vartheta}$ illetve a $j\omega$ valós együtthatós racionális függvénye, akkor közvetlenül felírható a rendszeregyenlet a (21) illetve a (24) alakban, hiszen a gerjesztés illetve a válasz együtthatói a rendszeregyenletben megegyeznek a számláló illetve a nevező együtthatóival az átviteli karakterisztikában.

Emlékeztetünk arra, hogy ha a nevező együtthatói által meghatározott sajátértékek nem tesznek eleget a stabilitási feltételeknek, akkor a (22) illetve a (25) szerinti „átviteli karakterisztika” értelmetlen, noha formailag esetleg kifogástalannak tűnhet.

1. példa Határozzuk meg a diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikáját, ha a rendszeregyenlete

$$y - y^{(1)} + 0,24 y^{(2)} = u + 0,5 u^{(1)} - 0,2 u^{(3)}.$$

Korábbi vizsgálatainkból tudjuk (2.2-2. szakasz), hogy a rendszer GV stabilis. Átviteli karakterisztikája (22) értelmében

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{1 + 0,5 e^{-j\vartheta} - 0,2 e^{-j3\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta} + 0,24 e^{-j2\vartheta}} = \frac{(1 + 0,5 \cos \vartheta - 0,2 \cos 3\vartheta) + j(-0,5 \sin \vartheta + 0,2 \sin 3\vartheta)}{(1 - \cos \vartheta + 0,24 \cos 2\vartheta) + j(\sin \vartheta - 0,24 \sin 2\vartheta)}.$$

Behelyettesítéssel kapjuk, hogy $H(e^{j0}) = 5,417$; $H(e^{j\pi/2}) = 0,972 e^{-j1,5317}$; $H(e^{j\pi}) = 0,313$. További pontok számításával belátható, hogy $K(\vartheta)$ monoton csökken, míg $\varphi(\vartheta)$ a $[0, \pi]$ intervallumban nulláról indul és egy negatív minimummal bír (3.1-1.6. pont). #

2. példa Határozzuk meg az átviteli karakterisztikát, ha a folytonos idejű rendszer rendszeregyenlete

$$y^{(2)} + 4 y^{(1)} + 3 y = 5 u^{(1)} + u.$$

Ránézésre megállapítható, hogy a rendszer GV stabilis (a_1, a_2 pozitív). Átviteli karakterisztikája a (25) értelmében

$$H(j\omega) = \frac{5(j\omega) + 1}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} = \frac{1 + j5\omega}{3 - \omega^2 + j4\omega}.$$

Behelyettesítéssel kapjuk, hogy $H(j0) = 1/3$; $H(j1) = 1,14 e^{-j0,266}$; $H(j\infty) = 0$. További pontok számításával beláthatjuk, hogy $K(\omega)$ monoton csökken, $\varphi(\omega)$ monoton növekszik, majd csökken az ω pozitív értékeire (3.1-1.6. pont). #

3.1-1.5. Átviteli karakterisztika és állapotváltozós leírás

Tekintsük adottnak egy lineáris, invariáns, kauzális egy-gerjesztésű és egy-válaszú DI illetve FI rendszer állapotváltozós leírását:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u, \\ y &= \mathbf{C}^T \mathbf{x} + D u. \end{aligned} \quad (3.1-28)$$

A DI esetben $\mathbf{x}'[k] = \mathbf{x}[k+1]$, a FI esetben $\mathbf{x}'(t)$ az $\mathbf{x}(t)$ deriváltja. Feltételezzük, hogy a rendszer GV *stabilis*. Ez biztosan teljesül, ha a rendszer aszimptotikusan stabilis, ami az \mathbf{A} rendszermátrix sajátértékeinek vagy karakterisztikus egyenlete együtthatóinak vizsgálata alapján eldönthető (2.2-3. szakasz).

Tekintsük azt az esetet, amikor valamennyi gerjesztés szinuszos közös frekvenciával. Meg akarjuk határozni a válaszokat, amelyek ugyancsak szinuszosak a gerjesztés által meghatározott frekvenciával:

$$\begin{aligned} \text{DI: } u[k] &= \mathcal{R}_e \{ \bar{U} e^{j\vartheta k} \}, & y[k] &= \mathcal{R}_e \{ \bar{Y} e^{j\vartheta k} \}, \\ \text{FI: } u(t) &= \mathcal{R}_e \{ \bar{U} e^{j\omega t} \}, & y(t) &= \mathcal{R}_e \{ \bar{Y}_p e^{j\omega t} \}. \end{aligned} \quad (3.1-29)$$

Az $x_r[k]$ illetve az $x_r(t)$ állapotváltozók ugyanilyen alakúak. Meg akarjuk határozni a \bar{H} *átviteli együtthatót*, amelyek értelmezése:

$$\bar{H} = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}}. \quad (3.1-30)$$

Helyettesítsük a komplex alakokat az állapotváltozós leírásba. Mint az előző pontban láttuk: elhagyhatjuk a \mathcal{R}_e operációt és egyszerűsíthetünk az időfüggő exponenciális tényezővel. A komplex amplitúdókra adódó mátrixegyenleteket:

$$\begin{aligned} \text{DI: } e^{j\vartheta} \bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \bar{U}, & \bar{Y} &= \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{X}} + D \bar{U}; \\ \text{FI: } j\omega \bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \bar{U}, & \bar{Y} &= \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{X}} + D \bar{U}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\bar{\mathbf{X}}$ a következő mátrixegyenlet megoldása:

$$\text{DI: } [e^{j\vartheta} \mathbf{I} - \mathbf{A}] \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{B} \bar{U}; \quad \text{FI: } [j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}] \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{B} \bar{U}.$$

Az $\bar{\mathbf{X}}$ ismeretében a válasz komplex amplitúdója kifejezhető:

$$\bar{Y} = \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{X}} + D \bar{U}$$

Behelyettesítve az $\bar{\mathbf{X}}$ előzőleg kapott kifejezését a következő alakhoz jutunk:

$$\bar{Y} = \bar{H} \bar{U}. \quad (3.1-31)$$

Itt \bar{H} az átviteli együttható az adott frekvencián, ha azonban a frekvenciát változóként kezeljük, akkor $\bar{H} = H(e^{j\vartheta})$ illetve $\bar{H} = H(j\omega)$ az *átviteli karakterisztika*.

Az átviteli karakterisztikára képletet is adhatunk. Az \bar{X} -re vonatkozó mátrixegyenlet megoldása felírható mátrixinverzióval:

$$\bar{X} = [e^{j\vartheta} I - A]^{-1} B \bar{U}; \quad \bar{X} = [j\omega I - A]^{-1} B \bar{U}.$$

Itt I az N -dimenziós egységmátrix. Ezt \bar{Y} kifejezésébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{DI: } H(e^{j\vartheta}) &= C^T [e^{j\vartheta} I - A]^{-1} B + D; \\ \text{FI: } H(j\omega) &= C^T [j\omega I - A]^{-1} B + D \end{aligned} \quad (3.1-32)$$

Eredményünk kétféleképpen használható.

Az egyik lehetőség az, hogy számítjuk az átviteli karakterisztika kellő számú és megfelelő eloszlású pontját. Ehhez felvesszünk $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n = \pi$ diszkrét idejű illetve $\omega_0 = 0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n = \infty$ folytonos idejű körfrekvenciákat, mindegyiken számítjuk $H(e^{j\vartheta_i})$ illetve $H(j\omega_i)$ értékét ($i = 1, 2, \dots, N$) akár a lineáris egyenletrendszer megoldásával, akár a komplex elemű mátrix invertálásával. Az alkalmas ϑ_i értékek megválasztása nem jelent különösebb nehézséget, egyenletes eloszlás választása célszerű. Az alkalmas ω_i értékek megválasztása nehezebb feladat. Ezzel a kérdéssel a 3.2-2.5. pontban még foglalkozunk.

A másik lehetőség az átviteli karakterisztika (22) illetve (25) szerinti alakjában szereplő valós együtthatók meghatározása, vagyis az átviteli karakterisztika mint racionális függvény előállítás.

Példa Határozzuk meg annak a diszkrét idejű rendszernek az átviteli karakterisztikáját, amelynek állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,24 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [-0,2 \quad -0,24 \quad 1,5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u.$$

Megállapíthatjuk, hogy a rendszer GV stabilis (2.3-1.F-3. feladat). A (32) értelmében az átviteli karakterisztika kifejezése

$$H(e^{j\vartheta}) = [-0,2 \quad -0,24 \quad 1,5] \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} & -1 & 0 \\ 0 & e^{j\vartheta} & -1 \\ 0 & -0,24 & e^{j\vartheta} - 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1.$$

Ebben az egyszerű esetben a számítás papír-ceruza módszerrel is elvégezhető. Az eredmény

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{e^{j3\vartheta} + 0,5e^{j2\vartheta} - 0,2}{e^{j3\vartheta} - e^{j2\vartheta} + 0,24e^{j\vartheta}} \equiv \frac{1 + 0,5e^{-j\vartheta} - 0,2e^{-j3\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta} + 0,24e^{-j2\vartheta}}.$$

Ez megegyezik az előző pont 1. példájában kapottal. Ez nem meglepő, hiszen ugyanannak a rendszernek az állapotváltozós leírásáról és rendszeregyenletéről van szó (2.3-1.F-3.). #

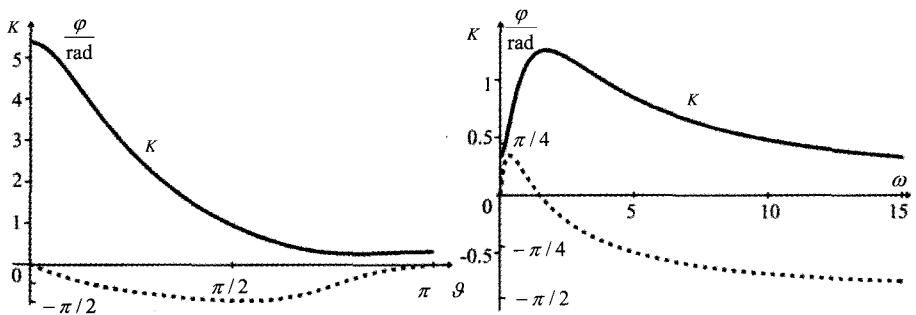
3.1-1.6. Az átviteli karakterisztika ábrázolása

Ebben a pontban az átviteli karakterisztika ábrázolásának néhány módszerét tárgyaljuk. Példaként azt a DI illetve FI rendszert vizsgáljuk, amelynek az átviteli karakterisztikáját a 3.1-1.4. pont 1. és 2. példájában számítottuk:

$$\text{DI: } H(e^{j\vartheta}) = \frac{1 + 0,5e^{-j\vartheta} - 0,2e^{-j3\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta} + 0,24e^{-j2\vartheta}}; \quad \text{FI: } H(j\omega) = \frac{5(j\omega) + 1}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}.$$

Az amplitúdó és a fázis lineáris ábrázolása

Egy kézenfekvő ábrázolási lehetőség a $K(\vartheta) \equiv |H(e^{j\vartheta})|$ és a $\varphi(\vartheta) = \arg H(e^{j\vartheta})$ illetve a $K(\omega) \equiv |H(j\omega)|$ és a $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ amplitúdó-karakterisztika és fázis-karakterisztika görbéjének megadása a szokásos derékszögű koordináta-rendszerben. A DI esetben csak a $0 \leq \vartheta < \pi$ intervallummal kell foglalkoznunk. A FI esetben azonban kénytelenek vagyunk a $0 \leq \omega < \omega_{\max}$ vagy egy $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$ intervallumra szorítkozni. A vizsgált átviteli karakterisztika ilyen ábrázolása látható a 6. ábrán. A fázis-karakterisztika ábrázolásánál rendszerint a $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ intervallumba eső értékeket ábrázoljuk (a 2π vagy a 360° egész többszöröseinek hozzáadásával vagy levonásával), de néha más választások előnyösebbek lehetnek, például a fázis-karakterisztika folytonosságának megtartása. A fázis-karakterisztika esetleges ugrása $\pm\pi = \pm 180^\circ$.



3.1-6. ábra Az amplitúdó-karakterisztika és a fázis-karakterisztika ábrázolása a derékszögű Descartes-koordináta-rendszerben. Más ábrázolások a 7. és 8. ábrán láthatók

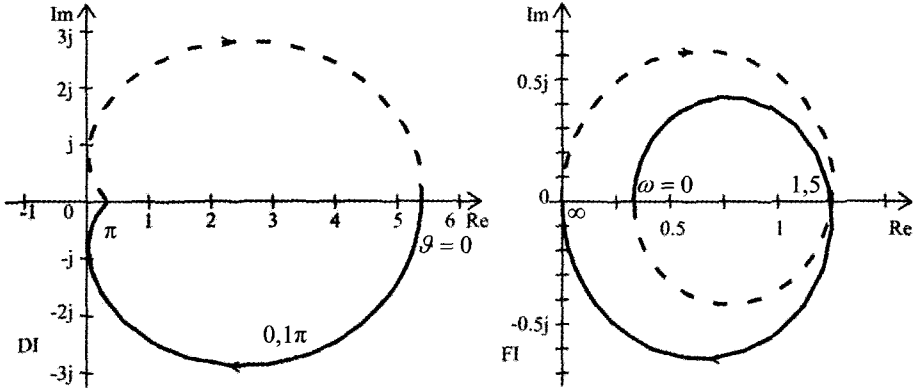
Hasonló módon ábrázolható az átviteli karakterisztika valós és képzetes része a körfrekvencia függvényében. Ez azonban csak akkor célszerű, ha e mennyiségeknek fizikai jelentésük van.

A Nyquist-diagram

Az átviteli karakterisztika *Nyquist-diagramja* egy olyan görbe a H komplex számsíkon, amelynek pontjai a $H(e^{j\vartheta})$ illetve a $H(j\omega)$ átviteli karakterisztika értékei egy-egy rögzített ϑ illetve ω körfrekvencián.

A 7. ábrán láthatók a megadott átviteli karakterisztikák Nyquist-diagramja. A szaggatott vonalú görberész a negatív frekvenciákhoz tartozik. Ez a másik görberésznek a tükörképe a valós tengelyre, mivel a ϑ illetve az ω előjelváltása az átviteli karakterisztika

konjugálását eredményezi. Ez a görberész el is hagyható. A görbén három frekvenciához tartozó pontot megjelöltünk.



3.1-7. ábra A vizsgált DI illetve FI átviteli karakterisztika Nyquist-diagramja. Ezeknek az átviteli karakterisztikának más ábrázolása látható a 6. és a 8. ábrán

A Nyquist-diagram jellegzetessége, hogy együtt ábrázolja az abszolút értéket és a szöveget. Ennek van előnye is és hátránya is.

Mivel az esetek többségében a $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztika még $\omega = \infty$ esetén is korlátos, ezért - a lineáris ábrázolással ellentétben - többnyire nincs szükség egy maximális FI körfrekvencia megválasztására.

A Nyquist-diagramot a fenti tulajdonságai miatt csak speciális esetekben és főként tájékoztató jelleggel használják.

A Nyquist-diagram alkalmazható olyan komplex mennyiség ábrázolására is, amely egy valós változótól függ. A komplex mennyiség lehet egy szinuszos mennyiség fázorja is, a valós változó nem feltétlenül a frekvencia.

Használatos a Nyquist-diagramra a helygörbe elnevezés is.

A Bode-diagram

A tárgyalt két ábrázolási módszer közös hátrányos tulajdonsága, hogy az ábrázolás nehezen használható, ha K_{\max} / K_{\min} nagyon nagy (például 100 vagy még nagyobb), hiszen ekkor a kis értékek leolvashatatlanok. A FI esetben hasonló nehézséget okoz, ha az ábrázolandó frekvencia-intervallum nagyon széles. Ezeket a nehézségeket kiküszöböli az átviteli karakterisztika *Bode-diagramja* (logaritmikus amplitúdó- és fázis-görbéje). Ennek során nem az amplitúdót, hanem annak logaritmusát, pontosabban a

$$k \equiv (20 \log K) \text{ dB} \quad \text{vagy} \quad k \equiv (\ln K) \text{ Np} \quad (3.1-33)$$

mennyiséget ábrázoljuk, ahol dB a decibel, Np a neper logaritmikus mértékegység jele (néha db, illetve N is előfordul). Ha például $K = 100$, akkor $k = 40 \text{ dB} = 4,605 \text{ Np}$. A visszatérés a számértékre

$$K = 10^{(k/20 \text{ dB})} \quad \text{vagy} \quad K = e^{k/\text{Np}}. \quad (3.1-34)$$

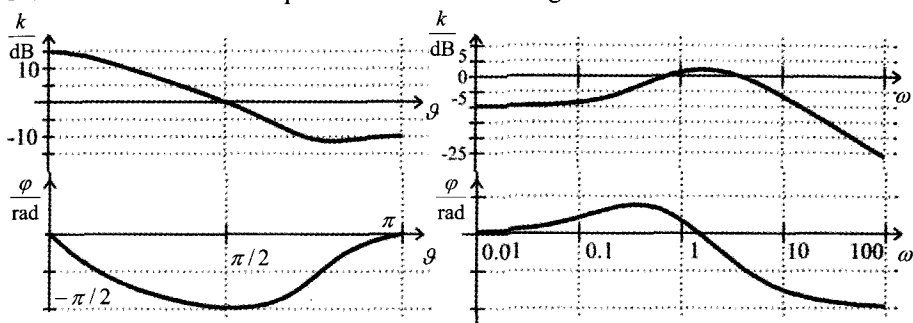
A k logaritmikus amplitúdó helyett az $a = -k$ csillapítás (vagyis $1/K$ logaritmusa), a fázis-karakterisztika helyett a $b = -\varphi$ forgatás vagy a $\tau = -\varphi'$ futási idő karakterisztika is használatos.

Az FI esetben a frekvenciatengely skálázása *logaritmikus*; az $\omega_2 / \omega_1 = 10$ arány neve 1 dekád, az $\omega_2 / \omega_1 = 2$ arány neve 1 oktáv. Ezek az ábrán állandó távolságok (például 1 dekádnak megfelel 20 mm). Ezzel a skálázással széles frekvenciatartomány is átfogható (viszont az $\omega = 0$ pont nem ábrázolható, csak például $\omega = 0,01$ rad/s). A FI esetben a gyakorlatban az abszcissa változója többnyire nem a körfrekvencia, hanem a frekvencia (Hz, kHz, stb. egységben).

A lineáris skálázás alkalmazásánál az abszolút hiba, a logaritmikus ábrázolásnál vagy logaritmikus egységben történő ábrázolásnál a relatív hiba tekinthető az ábrázolás bizonytalansága (például vonalvastagság) által meghatározottnak.

A vizsgált átviteli karakterisztika Bode-diagramja a 8. ábrán látható.

A lineáris ábrázoláshoz hasonlóan a logaritmikus ábrázolás során is szorítkozhatunk csak az amplitúdó-karakterisztika megadására.



3.1-8. ábra Az átviteli karakterisztika Bode-diagramja (logaritmikus amplitúdó- és fázis-karakterisztikája). Más ábrázolások a 6. és 7. ábrán láthatók

A FI racionális átviteli karakterisztika Bode-diagramjának közelítése egyes esetekben kényelmesen megszerkeszthető, de ennek technikájával nem foglalkozunk.

3.1-1.F. Feladatok

F-1. Vázzolja fel az $x[k] = 2 \cos \vartheta k$ diszkrét idejű jelet a $-2 \leq k \leq 12$ ütemekre, ha a diszkrét idejű körfrekvencia

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $\vartheta = 0,2 \pi$; | (b) $\vartheta = 0,4 \pi$; | (c) $\vartheta = 0,6 \pi$; | (d) $\vartheta = 0,8 \pi$; |
| (e) $\vartheta = 1,0 \pi$; | (f) $\vartheta = 1,2 \pi$; | (g) $\vartheta = 1,4 \pi$; | (h) $\vartheta = 1,6 \pi$; |
| (i) $\vartheta = 1,8 \pi$; | (j) $\vartheta = 2,0 \pi$; | (k) $\vartheta = 2,2 \pi$; | (l) $\vartheta = 2,4 \pi$. |

Ha a jel periodikus, határozza meg a periódus hosszát (a diszkrét periódusidőt)! Mely körfrekvenciájú jelek azonosak?

F-2. Vázzolja fel az $x[k] = 4 \sin(0,8 k)$ diszkrét idejű jelet a $-2 \leq k \leq 12$ ütemekre! Ha a jel periodikus, határozza meg a periódus hosszát (a diszkrét periódusidőt)!

F-3. Vázzolja fel az alábbi diszkrét idejű jelek egy periódusát:

- (a) $x[k] = 2 \cos(0,2 \pi k - 0,1 \pi) \equiv 2 \cos 0,1 \pi (2k - 1)$.
 (b) $x[k] = 2 \sin(0,2 \pi k + 0,4 \pi) \equiv 2 \sin 0,2 \pi (k + 2)$.
 (c) $x[k] = 2 \cos(0,2 \pi k - 18^\circ)$.

$$(d) x[k] = 2 \cos(36^\circ k - 0,1 \pi).$$

$$(e) x[k] = 2 \cos(36^\circ k - 18^\circ) \equiv 2 \cos 18^\circ (2k - 1).$$

F-4. Adja meg egyszerűbb alakban a következő DI jelet:

$$x[k] = 3 \cos(\vartheta k - 0,4) + 4 \cos(\vartheta k + 0,6), \quad \vartheta = \frac{4\pi}{3}.$$

Periodikus ez a jel?

F-5. Határozza meg az

$$x[k] = 5 \sin \vartheta k; \quad y_1[k] = x[k - 1]; \quad y_2[k] = x[k - 2]; \quad y_3[k] = x[k - 3]$$

diszkrét idejű jelek komplex amplitúdóját, ha a körfrekvencia (a) $\vartheta = 2\pi/3$. (b) $\vartheta = 2$.

Mi a lényeges különbség a két eset között?

F-6. Határozza meg a következő szinuszos FI jelek komplex amplitúdóját:

$$x(t) = -2 \cos 5t; \quad y_1(t) = x^{(1)}(t); \quad y_2(t) = x^{(2)}(t); \\ u(t) = x(t - 1,2); \quad v(t) = x(t - 0,4\pi); \quad w(t) = x(t + 0,2\pi).$$

F-7. Egy gerjesztés-válasz stabilis DI illetve FI rendszer gerjesztése

$$(a) \text{ DI: } u[k] = 5 \cos(\vartheta k + 0,2). \quad (b) \text{ FI: } u(t) = 5 \cos(\omega t + 0,2).$$

A rendszer átviteli együtthatója a gerjesztés frekvenciáján $\bar{H} = 0,4 e^{j0,3}$.

Határozza meg a válasz időfüggvényét!

F-8. Egy diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikája

$$H(e^{j\vartheta}) = 1 + b_1 e^{-j\vartheta} + b_2 e^{-j2\vartheta}.$$

Határozza meg a b_1 és b_2 együtthatókat úgy, hogy egy előírt $\vartheta = \vartheta$ körfrekvencián az átviteli karakterisztika értéke nulla legyen!

Gerjesztés-válasz stabilis a rendszer?

Vázolja fel az amplitúdó- és a fáziskarakterisztikát, továbbá az átviteli karakterisztika Nyquist-diagramját!

F-9. Egy stabilis folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája

$$H(j\omega) = \frac{1}{a_0 + a_1(j\omega) + (j\omega)^2}; \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0.$$

Az ω körfrekvencia mely Ω értékénél lesz maximális az amplitúdó-karakterisztika? Fejeze ki ezt a maximális értéket! Megállapítható-e az átviteli karakterisztikából, hogy a rendszer GV stabilis? Vázolja fel az amplitúdó- és a fázis-karakterisztikát, továbbá az átviteli karakterisztika Nyquist-diagramját, ha a paraméterek értéke $a_0 = 0,4$, $a_1 = 0,2$.

***F-10.** Igazolja, hogy az alább megadott DI, illetve FI átviteli karakterisztika Nyquist-diagramja kör, amelynek középpontja C , sugara R . (Az igazolás elemi módszerekkel is elvégezhető. A komplex függvénytan ismeretében egy közismert tétel alkalmazásáról van szó.)

$$(a) H(e^{j\vartheta}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\vartheta}}{1 + a_1 e^{-j\vartheta}}, \quad |a_1| < 1; \quad C = \frac{b_0 - a_1 b_1}{1 - a_1^2}, \quad R = \frac{|b_1 - a_1 b_0|}{1 - a_1^2}.$$

$$(b) H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega)}{a_0 + (j\omega)}, \quad a_0 > 0; \quad C = \frac{b_0}{2a_0} + \frac{b_1}{2}, \quad R = \left| \frac{b_0}{2a_0} - \frac{b_1}{2} \right|.$$

(c) Mint a (b) esetben, de ω helyett tetszőleges valós $f(\omega)$ írható.

3.1-1.M. Megoldások

M-1. Mindegyik jel periodikus $L = 10$ periódusidővel; a (b), (d), (f), (h), (l) jeleknek $L_1 = 5$, az (e) jelnek $L_2 = 2$, a (j) jelnek $L_3 = 1$ is periódusideje (az utolsó jel állandó). Az $\{(a), (i), (k)\}$, a $\{(b), (h), (l)\}$, a $\{(c), (g)\}$ és a $\{(d), (f)\}$ jelek azonosak.

M-2. A DI körfrekvencia $\vartheta = 0,8$; e szinuszos jel nem periodikus.

M-3. A jelek azonosak, mindegyik periodikus, $\vartheta = \pi/5$, $L = 10$.

M-4. A két összeadandó szinuszos jel fázorja $\bar{X}_1 = 3e^{-j0,4} = 2,76 - j1,17$, illetve $\bar{X}_2 = 4e^{j0,6} = 3,30 + j2,26$. A frekvencia közös, ezért

$$\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 = 6,06 + j1,09 = 6,16e^{j0,18} \Rightarrow x[k] = 6,16 \cos(\vartheta k + 0,18).$$

A jelek periodikusak, a periódusidő $L = 3$.

M-5. Mivel $\bar{X} = -j5 = 5e^{-j\pi/2}$ és $\bar{Y}_p = e^{-j p \vartheta} \bar{X}$, ezért

$$(a) Y_1 = 5e^{-j7\pi/6} = 5e^{j5\pi/6}; \quad Y_2 = 5e^{j\pi/6}; \quad Y_3 = 5e^{-j3\pi/6} = 5e^{-j\pi/2}.$$

$$(b) \bar{Y}_1 = 5e^{-j(\pi/2-2)} \approx 5e^{-j3,57} = 5e^{j2,71}; \quad \bar{Y}_2 \approx 5e^{j0,71}; \quad \bar{Y}_3 \approx 5e^{-j1,29}.$$

Az (a) esetben $\bar{Y}_3 = \bar{X}$, a (b) esetben nincs olyan p , amelyre $\bar{Y}_p = \bar{X}$ érvényes lenne.

M-6. Mivel $\bar{X} = -2 = 2e^{j\pi}$, ezért $\bar{Y}_1 = (j5)(2e^{j\pi}) = 10e^{-j\pi/2}$, $\bar{Y}_2 = (j5)(10e^{-j\pi/2}) = 50$, továbbá

$$u(t) = -2 \cos(5t - 6); \quad \bar{U} = 2e^{-j(6-\pi)} \approx 2e^{-j2,86}.$$

$$v(t) = -2 \cos 5(t - 0,4\pi) = -2 \cos(5t - 2\pi) = -2 \cos 5t; \quad \bar{V} = 2e^{j\pi}.$$

$$w(t) = -2 \cos 5(t + 0,2\pi) = -2 \cos(5t - \pi); \quad \bar{W} = 2.$$

M-7. A válasz komplex amplitúdója $\bar{Y} = \bar{H}\bar{U} = 2e^{j0,5}$. Az időfüggvények

$$(a) y[k] = \Re\{e^{j\vartheta k}\} = 2 \cos(\vartheta k + 0,5). \quad (b) y(t) = \Re\{\bar{Y}e^{j\omega t}\} = 2 \cos(\omega t + 0,5).$$

A ϑ illetve az ω számértékét nem kell ismernünk.

M-8. $K^2(\vartheta) = [1 + b_1 \cos \vartheta + b_2 \cos 2\vartheta]^2 + [b_1 \sin \vartheta + b_2 \sin 2\vartheta]^2$. A második tag nulla, ha $b_1 = -2b_2 \cos \vartheta$, az első tag is nulla, ha $b_2 = 1/(2 \cos \vartheta - \cos 2\vartheta)$.

Ehhez az átviteli karakterisztikához egy nemrekurzív rendszer egyenlet és véges impulzusválasz tartozik, azaz egy FIR típusú, tehát GV stabilis rendszer.

M-9. $K^2(\omega) = 1 / \left\{ [a_0 - \omega^2]^2 + [a_1 \omega]^2 \right\}$. A nevező minimális, vagyis $K(\omega)$ maximális, ha

$$(a) \ a_0 < \frac{a_1^2}{2} \text{ esetén } \Omega = 0, \quad K(\Omega) = \frac{1}{a_0};$$

$$(b) \ a_0 > \frac{a_1^2}{2} \text{ esetén } \Omega = \sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \quad K(\Omega) = \frac{1}{a_1 \sqrt{a_0 - a_1^2/4}}.$$

Ehhez az átviteli karakterisztikához egy olyan rendszeregyenlet tartozik, amelynek sajátértékei a bal félsíkon vannak (a_1 és a_2 pozitív), ezért a rendszer biztosan GV stabilis.

***M-10.** Fejezze ki a $|H(\cdot) - C|$ függvényt és mutassa meg, hogy értéke R , vagyis független a \mathcal{G} illetve az ω változótól.

Ha kiszámítjuk a kör három pontját (célszerűen $\mathcal{G} = 0$ és a $\mathcal{G} = \pi$ illetve az $\omega = 0$ és az $\omega = \infty$ átmérős pontok és egy közbülső frekvenciához tartozó pont), akkor a kör megrajzolható. A szerkesztés szempontjából ez az eljárás egyszerűbb lehet, mint C és R meghatározása.

3.1-2. Periodikus válasz

3.1-2.1. Általános megfontolások

Legyen egy lineáris, invariáns, GV stabilis rendszer *gerjesztése periodikus*, a DI illetve a FI periódusidő L illetve T , az (alap)körfrekvencia $\Theta = 2\pi/L$, illetve $\Omega = 2\pi/T$. A periodikus gerjesztés alapvető tulajdonsága

$$\text{DI: } u[k+L] = u[k], \quad L \in \mathbf{N}; \quad \text{FI: } u(t+T) = u(t), \quad T \in \mathbf{R}_+ \quad (3.1-35)$$

A rendszer (gerjesztett) *válasza* ugyancsak *periodikus* lesz ugyanazzal a periódusidővel:

$$\text{DI: } y[k+L] = y[k]; \quad \text{FI: } y(t+T) = y(t). \quad (3.1-36)$$

Az általános periodikus válasz számítása sokkal bonyolultabb, mint a szinuszos válaszé. Az utóbbi esetben ugyanis ismerjük a jel alakját, csak az amplitúdót és a kezdőfázist kell számítanunk. Az általános esetben azonban a gerjesztés alakjából nem tudunk következtetni a válasz alakjára, két valós állandó nem elegendő annak leírására.

A vázolt feladat akkor egyszerű, ha a periodikus gerjesztés olyan szinuszos jelek összegeként adott, amelyek periódusideje egy L illetve T alap-periódusidő, annak fele, harmada, negyede, stb. és ennek megfelelően a körfrekvenciák egy $\Theta = 2\pi/L$ illetve egy $\Omega = 2\pi/T$ alap-körfrekvencia egész számú többszörösei. A szinuszos jelekhez egy állandó még hozzáadható. Ennek megfelelően a gerjesztés kifejezése

$$u[k] = U_0 + U_1 \cos(\Theta k + \rho_{u1}) + U_2 \cos(2\Theta k + \rho_{u2}) + \dots + U_N \cos(N\Theta k + \rho_{uN}), \quad (3.1-37)$$

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(\Omega t + \rho_{u1}) + U_2 \cos(2\Omega t + \rho_{u2}) + \dots + U_N \cos(N\Omega t + \rho_{uN}).$$

A periodikus gerjesztéshez tartozó válasz ugyancsak periodikus lesz és a szuperpozíció elve értelmében ugyanilyen alakban fejezhető ki:

$$y[k] = Y_0 + Y_1 \cos(\Theta k + \rho_{y1}) + Y_2 \cos(2\Theta k + \rho_{y2}) + \dots + Y_N \cos(N\Theta k + \rho_{yN}), \quad (3.1-38a)$$

$$y(t) = Y_0 + Y_1 \cos(\Omega t + \rho_{y1}) + Y_2 \cos(2\Omega t + \rho_{y2}) + \dots + Y_N \cos(N\Omega t + \rho_{yN}). \quad (3.1-38b)$$

Az ismeretlenek az Y_k amplitúdók, a ρ_{yk} kezdőfázisok és az Y_0 állandó összetevő.

A válasz minden szinuszos összetevője számítható az előző szakaszban bemutatott módszerrel, ha ismerjük a rendszer $H(e^{j\vartheta})$ illetve $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikáját és számítjuk értékeit a $\vartheta = 0, \Theta, 2\Theta, \dots, N\Theta$ illetve az $\omega = 0, \Omega, 2\Omega, \dots, N\Omega$ körfrekvenciákon. Természetesen az is elegendő, ha csak ezeket az értékeket ismerjük, vagyis a rendszer átviteli együtthatóját ezeken a körfrekvenciákon.

A számítás gyakorlati menete a következő.

(1) A gerjesztést az $\bar{U}_p = U_p e^{j\rho_p}$ ($p = 0, 1, 2, \dots, N$) komplex amplitúdókkal jellemezzük. Természetesen előfordulhat, hogy egyesek zérus értékűek vagy például minden páros indexű zérus. Ezek a p értékek a továbbiakban figyelmen kívül hagyhatók.

(2) Meghatározzuk a $\bar{H}_p = H(e^{j\rho_p})$ illetve a $\bar{H}_p = H(jp\Omega)$ komplex értékű $\bar{H}_p = K_p e^{j\varphi_p}$ átviteli együtthatókat a figyelembe veendő p értékekre. Adott lehet a rendszer átviteli karakterisztikája, a rendszeregyenlete vagy az állapotváltozós leírása.

(3) Meghatározzuk a válasz $\bar{Y}_p = \bar{H}_p \bar{U}_p$ komplex amplitúdóit és ezekből vagy akár közvetlenül az $Y_p = K_p U_p$ és a $\rho_{yp} = \varphi_p + \rho_{up}$ ($p = 0, 1, 2, \dots, N$) értékeket.

(4) Ezek után kifejezhető a válasz a (38) szerinti alakban.

Megjegyezzük, hogy a komplex vagy a valós amplitúdók összegének nincs fizikai tartalma, hiszen mindegyik más frekvenciájú szinuszos jelet jellemez.

Ha a választ ábrázolni akarjuk, akkor kiszámítjuk $y[k]$, $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$ értékeit illetve kellő számú $y(t_i)$, $0 \leq t_i < T$ értéket. Célszerű lehet például a $t_i = i \cdot (T/M)$ választás, ahol $i = 0, 1, 2, \dots, M-1$ és $M > 4N$.

A periodikus válasz jelalakja lényegesen eltérhet a periodikus gerjesztés jelalakjától, de periódusidejük közös.

Vizsgáljuk például azt az esetet, amikor a gerjesztés állandó összetevőt, továbbá Θ és 3Θ illetve Ω és 3Ω körfrekvenciájú szinuszos összetevőt tartalmaz. A 9. ábra bal oldalán láthatjuk a három FI szinuszos jelet (x_0, x_1, x_3), jobb oldalán pedig három olyan jelet, amelyek ezek szuperpozíciójával adódnak (u_a, u_b, u_c). Az eltérés csak a harmadik komponens kezdőfázisában van, a jelek mégis erősen különböznek egymástól.

Példa Legyen két folytonos idejű szinuszos jel kifejezése

$$u(t) = U \cos \Omega t, \quad v(t) = V_0 + V_1 \cos \omega t; \quad 0 < \omega < \Omega.$$

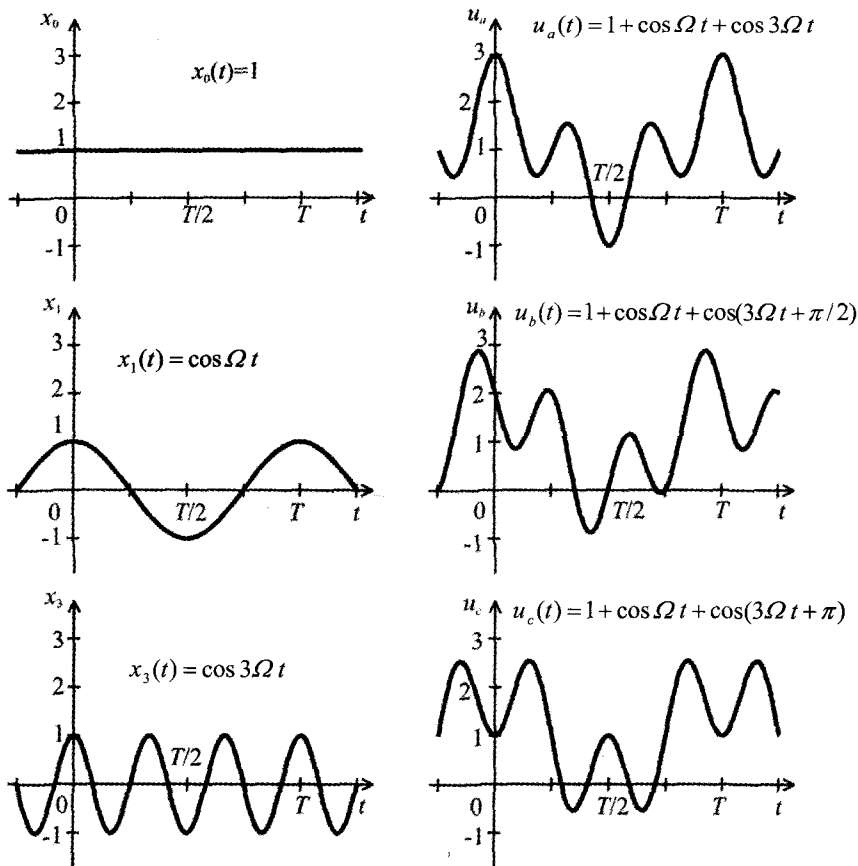
Alkossunk ezekből egy új jelet (a szorzás nem lineáris művelet!):

$$y(t) = u(t)v(t).$$

Egyszerű átalakítással kapjuk az $Y = UV_0$, $m = V_1/V_0$ jelölések bevezetésével:

$$y(t) = Y [1 + m \cos \omega t] \cos \Omega t = Y \left[\frac{m}{2} \cos(\Omega - \omega)t + \cos \Omega t + \frac{m}{2} \cos(\Omega + \omega)t \right].$$

Az $y(t)$ első alakjából az látható, hogy $y(t)$ egy gyorsan változó (és pedig Ω körfrekvenciájú) szinuszos jelnek tekinthető, amelynek amplitúdója azonban nem állandó, hanem lassan (ω körfrekvenciával) változik. Az $u(t)$ ekkor a gyorsan változó vivőjel, amelyet a lassan változó $v(t)$ jel amplitúdójában modulál.



3.1-9. ábra Három folytonos idejű szinuszos jel és ezek szuperpozíciójával előállított három periodikus jel. Az előbbieket lehetnek az utóbbiakhoz tartozó válaszok

Az $y(t)$ második alakjából az látható, hogy az három olyan szinuszos jel összege, amelyek körfrekvenciája $\Omega - \omega, \Omega, \Omega + \omega$. A jel csak akkor periodikus, ha Ω/ω racionális. A gyakorlati esetek többségében $\Omega \gg \omega$, ekkor a körfrekvenciák az Ω körfrekvencia körüli keskeny sávba esnek. Érdekes az $\Omega \approx \omega$ eset is, mivel ily módon lehet $\Omega - \omega$ körfrekvenciájú, tehát nagyon kis körfrekvenciájú jelet előállítani. #

Az előzőkből következik, hogy szinuszos jelek szuperpozíciójával nagyon különböző alakú periodikus jelek állíthatók elő.

Felmerül a kérdés: megválaszthatók-e szinuszos jelek úgy, hogy összegük előírt periodikus jelet szolgáltatson? A válasz erre a kérdésre diszkrét idejű jelek esetén igenlő, és pedig véges tagszámú (mintegy $L/2$ számú) szinuszos jelre van csak szükség. Folytonos idejű jel esetén azonban általában ez többnyire csak közelítőleg lehetséges, a szinuszos jelek összege még akkor sem konvergál minden időpontban feltétlenül az eredeti jelhez, ha a tagok számát minden határon túl növeljük. A DI és a FI periodikus jelek szinuszos jelekre történő felbontása ebből is láthatóan különböző, ezért a következő pontokban a felbontást és alkalmazását külön tárgyaljuk a két esetre.

3.1-2.2. Diszkrét idejű jel Fourier-sora

Komplex értékű jel Fourier-sora

A periodikus DI jel Fourier-soros alakját először komplex értékű jelre mutatjuk be, majd ennek speciális eseteként kapjuk a valós értékű periodikus DI jel Fourier-soros alakját.

Legyen $\bar{x} = \bar{x}[k]$ egy diszkrét idejű, komplex értékű, periodikus jel L periódusidővel:

$$\bar{x}[k+L] = \bar{x}[k]; \quad k \in \mathbf{Z}, \quad L \in \mathbf{N}. \quad (3.1-39)$$

A jel L számú komplex adattal jellemezhető, mint például $\bar{x}[0], \bar{x}[1], \bar{x}[2], \dots, \bar{x}[L-1]$.

Különösen fontosak a diszkrét idejű periodikus jelhez rendelt X_p^C komplex Fourier-együtthatók, amelyek a jelet előállítják L -tagú Fourier-sor (DFS) alakjában:

$$\bar{x}[k] = \sum_{p=\langle L \rangle} X_p^C e^{j p \Theta k}; \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \Theta \equiv \frac{2\pi}{L}. \quad (3.1-40)$$

Itt és a továbbiakban $p = \langle L \rangle$ a p egymást követő L számú egész értékét jelenti, például $p = 0, 1, 2, \dots, L-1$. Ez azt jelenti, hogy a komplex értékű jelet L számú, komplex értékű, különböző frekvenciájú szinuszos jel összegeként állítjuk elő. Az egymást követő L értéket a következőképpen célszerű választani:

$$p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \begin{cases} \pm(L-1)/2, & \text{ha } L = 1, 3, 5, \dots, \\ \pm(L/2-1), +L/2, & \text{ha } L = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.1-41)$$

Ebből az alakból látszik, hogy a Fourier-sorban a legnagyobb ténylegesen előforduló körfrekvencia $\Theta \cdot (L-1)/2 \approx \pi$ vagy $\Theta \cdot L/2 \equiv \pi$. Alább megmutatjuk, hogy a komplex Fourier-együtthatók a következő összefüggéssel számíthatók:

$$X_p^C = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} \bar{x}[k] e^{-j p \Theta k}; \quad p \in \mathbf{Z}, \quad \Theta \equiv \frac{2\pi}{L}. \quad (3.1-42)$$

Az \bar{X}_0 együttható az $\bar{x}[k]$ értékek számtani közepe.

Könnyen belátható, hogy ha ismerünk L számú ilyen X_p^C értéket, akkor a többi ebből számítható, mivel $X_{L+p}^C = X_p^C$, $X_{L-p}^C = X_{-p}^C$. Mint a (40)-ből következik, csak L számú együtthatóra van szükségünk, célszerűen a (41) szerintiekre.

A (42) igazolásához szorozzuk meg a (40) előállítás mindkét oldalát $e^{-j r \Theta k}$ tényezővel, majd összegezzünk k szerint 0 és $L-1$ között:

$$\sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] e^{-j r k \Theta} = \sum_{k=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=\langle L \rangle} X_p^C e^{j p k \Theta} \right\} e^{-j r k \Theta} = \sum_{p=\langle L \rangle} X_p^C \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} e^{j(p-r)k \Theta} \right\}.$$

A mértani sorozat összege $p-r=0$ esetén L , egyébként

$$\sum_{k=0}^{L-1} (e^{-j m \Theta})^k = \frac{1 - e^{-j m L \Theta}}{1 - e^{-j m \Theta}} = \frac{1 - e^{-j m (2\pi)}}{1 - e^{-j m (2\pi/L)}} = 0.$$

Ezek szerint a p szerinti összegezés során csak a $p = r$ tag nem nulla:

$$\sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] e^{-jrk\theta} = L X_r^C, \quad r \in \mathbf{Z}.$$

Ebből a (42) már következik.

A korlátos periodikus jel egy fontos jellemzője a *négyzetes középértéke* vagy röviden a *teljesítménye*, amelynek definíciója

$$P_x \equiv \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} |\bar{x}[k]|^2. \quad (3.1-43)$$

Az összeg (vagyis $P_x \cdot L$) a jel *energiája* egy periódusra. Igazolni fogjuk, hogy a teljesítmény kifejezhető a Fourier-együtthatók ismeretében:

$$P_x = \sum_{p=\langle L \rangle} |X_p^C|^2. \quad (3.1-44)$$

A (44) speciális alakja *Parseval tételének*, amely szerint két komplex értékű periodikus jelre (a * a komplex szám konjugáltját jelöli)

$$\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] \cdot \bar{y}^*[k] = \sum_{p=\langle L \rangle} X_p^C \cdot (Y_p^C)^*. \quad (3.1-45)$$

Ha $\bar{y} = \bar{x}$, akkor $\bar{x} \bar{x}^* = |\bar{x}|^2$ és $X_p^C (X_p^C)^* = |X_p^C|^2$, tehát a (43) és (44) egyenlősége adódik.

Az igazoláshoz használjuk fel a jelek (40) Fourier-soros előállítását:

$$\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] \bar{y}^*[k] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] \left\{ \frac{1}{L} \sum_{p=0}^{L-1} (Y_p^C e^{jp\theta k})^* \right\} = \frac{1}{L} \sum_{p=0}^{L-1} (Y_p^C)^* \sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] e^{-jp\theta k}.$$

Az utolsó szumma a (42) értelmében X_p^C amivel Parseval tételét igazoltuk.

Valós értékű jel Fourier-sora

Tekintsük most azt a speciális, de gyakorlatilag fontos esetet, amikor a periodikus jel *valós értékű* vagyis amikor $x = \bar{x} = \bar{x}^*$. Az X_p^C konjugáltja ekkor

$$(X_p^C)^* = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] e^{jp\theta k} = X_{-p}^C = X_{L-p}^C.$$

Ebből következik, hogy L periódusidejű *valós* x esetén

$$x = \mathcal{R}_e\{x\} \Rightarrow X_{-p}^C = (X_p^C)^*, \quad X_{L-p}^C = (X_p^C)^*. \quad (3.1-46)$$

Elegendő tehát ekkor az $X_0^C, X_1^C, \dots, X_{(L-1)/2}^C$ vagy $X_{L/2}^C$ komplex Fourier-együtthatókat számítani. A p és a $-p$ indexekhez tartozó összetevő összege a (40) előállításban

$$X_p^C e^{jp\theta k} + X_{-p}^C e^{-jp\theta k} = X_p^C e^{jp\theta k} + (X_p^C e^{jp\theta k})^* = 2 \mathcal{R}_e\{X_p^C e^{jp\theta k}\}.$$

Foglaljuk össze eredményeinket.

Egy diszkrét idejű, L periódusidejű, valós értékű jel Fourier-sorának egy valós alakja

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^M X_p \cos(p\Theta k + \xi_p) + X_{L/2}(-1)^k; \quad \Theta \equiv \frac{2\pi}{L}, \quad (3.1-47)$$

L páratlan: $M=(L-1)/2$, $X_{L/2}=0$; L páros: $M=(L/2)-1$.

Az itt szereplő amplitúdók és szögek kifejezése az \bar{X}_p^C komplex Fourier-együtthatókkal:

$$X_0 = X_0^C; \quad X_p = 2|X_p^C|, \quad \xi_p = \arg X_p^C, \quad p=1, 2, \dots, M; \quad X_{L/2} = X_{L/2}^C. \quad (3.1-48)$$

A komplex Fourier-együtthatók kifejezése a jel ismeretében:

$$X_p^C \equiv \frac{1}{2} X_p e^{j\xi_p} = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] e^{-j p \Theta k}; \quad p=1, 2, \dots, M; \quad \Theta \equiv \frac{2\pi}{L};$$

$$X_0^C = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k]; \quad X_{L/2}^C = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] (-1)^k, \quad (L \text{ páros}). \quad (3.1-49)$$

A Θ körfrekvenciájú összetevő a jel *alapharmonikusa*, a $2\Theta, 3\Theta, \dots$ körfrekvenciájú összetevők a jel *felharmonikusai*. A periodikus jel Fourier-soros alakját nevezik a *spektrális előállításának* is.

A valós értékű jel *teljesítményének* (44) szerinti kifejezése az X_p valós együtthatókkal

$$P_x = X_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M X_p^2 + X_{L/2}^2. \quad (3.1-50)$$

Egyesek előnyben részesítik az eltolt koszinusz függvény helyett koszinusz és szinusz függvény összegét alkalmazni. A Fourier-sor ennek megfelelő másik valós alakja páratlan és páros L esetre

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^M (X_p^A \cos p\Theta k + X_p^B \sin p\Theta k), \quad M = \frac{L-1}{2};$$

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^M (X_p^A \cos p\Theta k + X_p^B \sin p\Theta k) + X_{L/2}(-1)^k, \quad M = \frac{L}{2} - 1. \quad (3.1-51)$$

Az itt szereplő valós Fourier-együtthatók kifejezése a jel ismeretében

$$X_0 = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k]; \quad X_{L/2} = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] (-1)^k, \quad (L \text{ páros});$$

$$X_p^A = \frac{2}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] \cos p\Theta k, \quad X_p^B = \frac{2}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] \sin p\Theta k; \quad p=1, 2, \dots, M. \quad (3.1-52)$$

Könnyen belátható, hogy $X_p^A = 2 \Re\{X_p^C\}$, $X_p^B = -2 \Im\{X_p^C\}$. Ennek alapján a valós X_p^A , X_p^B együtthatók ismeretében a komplex X_p^C együtthatók vagy az (47)-ben

szereplő X_p amplitúdók és ξ_p kezdőfázisok is számíthatók. Az összefüggések felírását az Olvasóra bizzuk.

1. példa Határozzuk meg $x[k]$ Fourier-sorát, ha periódusideje $L = 6$; továbbá a 10. ábrán láthatóan $x[0] = x[1] = 1$, $x[2] = x[3] = x[4] = x[5] = 0$.

Az alapharmónikus körfrekvenciája $\Theta = 2\pi/L = \pi/3$. A szükséges komplex Fourier-együtthatók a (49) értelmében

$$X_0 = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 x[k] = \frac{1}{3},$$

$$X_1^C = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 x[k] e^{-jk\pi/3} = \frac{3 - j\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6} e^{-j\pi/6},$$

$$X_2^C = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 x[k] e^{-jk2\pi/3} = \frac{1 - j\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{6} e^{-j\pi/3}.$$

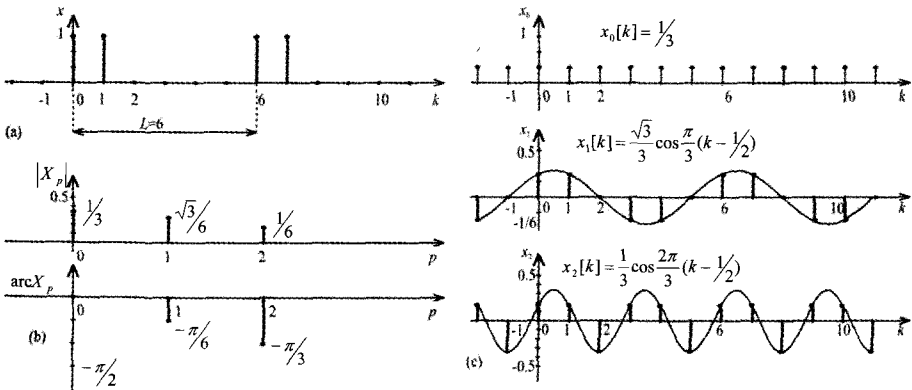
Az X_p amplitúdókat (48) alapján számítjuk. A Fourier-sor (47) értelmében (esetünkben $M = L/2 - 1 = 2$):

$$x[k] = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - \frac{\pi}{3}\right).$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy bármely k esetén az adott $x[k]$ érték helyesen kiadódik.

Az amplitúdókat és a kezdőfázisokat szemlélteti a 10b ábra.

A 10c ábrán megadtuk a jel három szinuszos összetevőjét.



3.10-10. ábra Periodikus diszkrét idejű jel Fourier-soros előállítása.

(a) A periodikus jel. (b) A komplex Fourier-együtthatók abszolút értéke és szöge. (c) A szinuszos összetevők, amelyek körfrekvenciája $0, \pi/3$ és $2\pi/3$

Az Olvasó beláthatja, hogy a komplex értékű jelre is érvényes (40) alapján ugyanez a Fourier-sor adódik. #

2. példa Egy diszkrét idejű periodikus jel a következő alakban adott:

$$x[k] = 6 \cos(1,2 \pi k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Határozzuk meg a jel Fourier-soros alakját!

E diszkrét idejű szinuszos jel körfrekvenciája $\vartheta_0 = 1,2 \pi = 3(2\pi/5)$, vagyis a periódusidő $L = 5$, az alapharmonikus körfrekvenciája $\Theta = 2\pi/5 = 0,4\pi$. A jel Fourier-sora a 0 , a Θ és a 2Θ körfrekvenciájú összetevőket tartalmazza, a $\vartheta_0 = 3\Theta$ körfrekvenciáját azonban nem!

Elemi trigonometriai megfontolás alapján (vagyis a Fourier-együtthatók számítása nélkül) is belátható, hogy a megadott jelnek

$$x[k] = 6 \cos(0,8 \pi k), \quad k \in \mathbf{Z}$$

egy egyenértékű alakja és egyben Fourier-sora. Valójában tehát a jel Fourier-sora csak a 2Θ körfrekvenciájú összetevőt tartalmazza. A két jel egyenértékűsége a korábban megadott 2. ábra $L = 5$ eseteként ábrázolva van.

A példa azt illusztrálja, hogy a diszkrét idejű periodikus jelnek célszerű a periódusidejét és az abból következő alap-körfrekvenciáját meghatározni annak érdekében, hogy minél egyszerűbb (és a Fourier-soros előállításnak megfelelő) alakhoz juthassunk. Első ránézésre aligha gondolunk arra, hogy a példában megadott, látszólag különböző jelek összege bármelyiknek a kétszerese. #

3.1-2.3. A diszkrét idejű periodikus válasz

A lineáris, invariáns, DI rendszernek a periodikus gerjesztéshez tartozó periodikus válasza elvileg egyszerűen számítható a Fourier-soros felbontás alkalmazásával.

Ismert az $u[k]$ diszkrét idejű, L periódusidejű ($\Theta = 2\pi/L$ alap-körfrekvenciájú) periodikus gerjesztés. Állítsuk elő ennek (47) szerinti Fourier-soros alakját:

$$u[k] = U_0 + \sum_{p=1}^M U_p \cos(p \Theta k + \nu_p) + U_{L/2} (-1)^k. \quad (3.1-53)$$

Célunk a válasz meghatározása ugyanilyen alakban:

$$y[k] = Y_0 + \sum_{p=1}^M Y_p \cos(p \Theta k + \eta_p) + Y_{L/2} (-1)^k. \quad (3.1-54)$$

A válasz $\bar{Y}_p^C = \bar{H}_p \bar{U}_p^C$ komplex Fourier-együtthatóit a rendszernek a $p\Theta$ körfrekvenciához tartozó $\bar{H}_p = H(e^{j p \Theta}) = K_p e^{j \varphi_p}$ átviteli együtthatója ismeretében számíthatjuk, amiből következik a valós alakban szereplő amplitúdók és szögek alábbi kifejezése:

$$Y_0 = K_0 U_0; \quad Y_p = K_p U_p, \quad \eta_p = \varphi_p + \nu_p, \quad p = 1, 2, \dots, L/2. \quad (3.1-55)$$

Az összefüggések azt fejezik ki, hogy a választ az egyes frekvenciákhoz tartozó válaszok összegeként állítjuk elő.

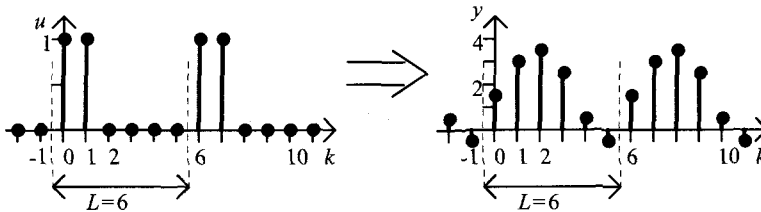
Példa A DI rendszer $u[k]$ gerjesztése periodikus, a periódus hossza $L=6$, az első periódusra $u[0]=u[1]=1, u[2]=u[3]=u[4]=u[5]=0$. A rendszer átviteli karakterisztikája

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{1 + 0,5e^{-j\vartheta} - 0,2e^{-j2\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta} + 0,24e^{-j2\vartheta}}.$$

(3.1-1.4. pont, 1. példa). Határozzuk meg a periodikus választ. Ez az állandósult válasz is jelenti, mivel e rendszer GV stabilis.

A gerjesztés Fourier-sora az előző pont 1. példája szerint (11. ábra)

$$u[k] = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - \frac{\pi}{3}\right).$$



3.1-11. ábra A példában szereplő periodikus gerjesztés és válasz

Az átviteli karakterisztika következő három értékére van szükségünk:

$$H(e^{j0}) = 5,417, \quad H(e^{j\pi/3}) = 1,991e^{-j1,337}, \quad H(e^{j2\pi/3}) = 0,400e^{-j1,328}.$$

A válasz Fourier-sora (55) értelmében nehézség nélkül számítható:

$$y[k] = 1,806 + 1,150 \cos\left(\frac{\pi}{3}k - 1,861\right) + 0,133 \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - 2,375\right).$$

Az eredményt a 11. ábra szemlélteti. A rendszer teljesen átalakítja a gerjesztést. #

3.1-2.4. Folytonos idejű jel Fourier-sora

Tekintsünk egy folytonos idejű T periódusidejű, tehát $\Omega = 2\pi/T$ alap-körfrekvenciájú, valós értékű, $x(t)$ jelet:

$$x(t+T) = x(t); \quad t \in \mathbf{R}, T \in \mathbf{R}_+, \quad \Omega \equiv \frac{2\pi}{T}. \quad (3.1-56)$$

Egy ilyen jel közelítőleg (esetleg pontosan) előállítható $0, \Omega, 2\Omega, \dots, N\Omega$ körfrekvenciájú szinuszos jelek szuperpozíciójával. Minél nagyobb N értéket választunk, annál kisebbé tehető a közelítés hibája a hiba értelmezésétől függetlenül.

Jelölje $x_N = x_N(t)$ az $x(t)$ jel N -edrendű (általános esetben $2N+1$ tagú) közelítését, az $x(t)$ jel N -edrendű Fourier-polinomját

$$x_N(t) = X_0 + \sum_{p=1}^N [X_p^A \cos p\Omega t + X_p^B \sin p\Omega t]. \quad (3.1-57)$$

Tekintsük a közelítést annál jobbnak, minél kisebb a H négyzetes középhibája:

$$H = \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_N(t) - x(t)]^2 dt \right\}^{1/2}. \quad (3.1-58)$$

Más hibamértéket is lehetne választani. Ezt a választást az indokolja, hogy ekkor az együtthatókra egyszerű kifejezés adódik, amelyet alább igazolunk:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \\ X_p^A &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos p\Omega t dt, \\ X_p^B &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin p\Omega t dt; \quad p = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.1-59)$$

Ezek az $x(t)$ periodikus jel *Fourier-együtthatói*. Lényeges, hogy ezek értéke független a választott N tagszámtól. A továbbiakban a (57)-től eltérő alakot fogunk használni.

Ha $N \rightarrow \infty$, akkor a H hibamérték nullához tart, vagyis $x_N(t)$ négyzetes közép értelemben konvergál az $x(t)$ jelhez. Ha $x(t)$ folytonos, akkor a konvergencia minden pontban is fennáll. Ha $x(t)$ korlátos és véges számú ugrása van egy perióduson belül, akkor $x_N(t)$ a szakadási helyen a jobb és bal oldali határérték számtani közephez konvergál (amely a helyettesítési érték a többi helyen):

$$x_N(t) \rightarrow \frac{x(t-0) + x(t+0)}{2}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.1-60)$$

Véges tagszám esetén a $\max |x_N(t) - x(t)|$ hiba a szakadási hely környezetében nem szorítható egy korlát alá, amely az ugrás nagyságának mintegy 10%-a. Ez a *Gibbs-jelenség*. Ez rámutat arra, hogy a négyzetes középhiba minimalizálása nem minden szempontból jelent optimális közelítést.

A gyakorlatban rendszerint azt mondják, hogy a periodikus $x(t)$ jel megadható az (általában végtelen tagszámú) *Fourier-sorával*, amelyet egy részletösszegével közelítünk:

$$x(t) = X_0 + \sum_{p=1}^{\infty} [X_p^A \cos p\Omega t + X_p^B \sin p\Omega t]. \quad (3.1-61)$$

Ezt a nem precíz jelölést a továbbiakban is alkalmazni fogjuk részletes magyarázat nélkül.

Lássuk be az (59) összefüggések érvényességét! A

$$H = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[X_0 + \sum_{p=1}^N \{X_p^A \cos p\Omega t + X_p^B \sin p\Omega t\} - x(t) \right]^2 dt$$

hibamértéknek ott lehet minimuma, ahol az együtthatók szerinti minden deriváltja nulla:

$$\frac{\partial H}{\partial X_0} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[X_0 + \sum_{p=1}^N \{X_p^A \cos p\Omega t + X_p^B \sin p\Omega t\} - x(t) \right] dt = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial X_k^A} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[X_0 + \sum_{p=1}^N \{X_p^A \cos p \Omega t + X_p^B \sin p \Omega t\} - x(t) \right] \cos k \Omega t \, dt = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial X_k^B} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[X_0 + \sum_{p=1}^N \{X_p^A \cos p \Omega t + X_p^B \sin p \Omega t\} - x(t) \right] \sin k \Omega t \, dt = 0.$$

Mivel a $\cos p \Omega t$ és $\sin p \Omega t$ függvények integrálja egy periódusra nulla és érvényesek a következő ortogonalitási összefüggések (az alábbi összefüggésben δ_{pk} a Kronecker-szimbólum, értéke: $\delta_{pp} = 1$ és $\delta_{pk} = 0$, $p \neq k$):

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos p \Omega t \cos k \Omega t \, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sin p \Omega t \sin k \Omega t \, dt = \frac{T}{2} \delta_{pk}, \quad \int_{-T/2}^{T/2} \cos p \Omega t \sin k \Omega t \, dt = 0.$$

A parciális deriváltak akkor válnak nullává, amikor az (57) összefüggések teljesülnek. Nyilvánvaló, hogy a hibamérték valóban minimális.

A továbbiakban a (61) helyett *Fourier-sor* alábbi, szemléletesebb alakját fogjuk használni:

$$x(t) = X_0 + \sum_{p=1}^{\infty} X_p \cos(p \Omega t + \xi_p); \quad \Omega \equiv 2\pi / T. \quad (3.1-62)$$

Ebben X_0 a jel középértéke (ez negatív is lehet), X_1 az *alapharmonikus*, X_p a p -edik harmonikus (a $p \Omega$ körfrekvenciájú összetevő vagy felharmónikus) amplitúdója. A Fourier-soros alakot nevezik a periodikus jel *spektrális előállításának* is.

Ténylegesen a sort részletösszegével (rendszerint első $N+1$ tagjával) közelítjük. Az X_p amplitúdók és a ξ_p szögek célszerűen a komplex Fourier-együtthatók számításával határozhatók meg:

$$X_p^C = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jp \Omega t} \, dt; \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1-63)$$

Az integrál bármely T hosszúságú intervallumra, például a $[0, T)$ intervallumra is számítható. A komplex Fourier-együtthatók ismeretében

$$X_0 = X_0^C; \quad X_p = 2 |X_p^C|, \quad \xi_p = \arccos X_p^C, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.1-64)$$

Az amplitúdók és a szögek meghatározhatók az (59) szerinti X_p^A, X_p^B együtthatók ismeretében is:

$$X_p = \sqrt{(X_p^A)^2 + (X_p^B)^2}, \quad \xi_p = -\arctg \frac{X_p^B}{X_p^A} = \arccos \frac{X_p^B}{X_p}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.1-65)$$

A jel Fourier-sora közvetlenül is kifejezhető a komplex Fourier-együtthatókkal:

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C e^{jp \Omega t}. \quad (3.1-66)$$

Valós x esetén X_{-p}^C az X_p^C konjugáltja.

A (66) akkor is használható, ha az x jel komplex értékű. Ekkor X_p^C a szükséges negatív p értékekre is számítandó és a végtelen összeget szimmetrikus határok közötti részletösszeggel kell közelíteni. A valós alakok ekkor nem érvényesek.

Könnyen belátható, hogy ha a jel páros, akkor a komplex együtthatók valós értékűek, a valós alakú sorban a kezdőfázis 0 vagy π , illetve csak koszinusz függvények szerepelnek; ha a jel páratlan, akkor a komplex együtthatók képzetes értékűek, a valós alakú sorban a kezdőfázis $\pi/2$ vagy $-\pi/2$, illetve csak szinusz függvények szerepelnek; ha $x(t+T/2)=-x(t)$, vagyis ha a két félpériódus egymás tükörképe az abszcisszára, akkor a $2n\Omega$ körfrekvenciájú tagok (páros harmonikusok) együtthatója nulla.

Igazolható, hogy ha $x(t)$ folytonos, akkor a Fourier-együtthatók $p \rightarrow \infty$ esetén legalább úgy tartanak nullához, mint $1/p^2$. Ha $x(t)$ legalább m -szer folytonosan differenciálható, akkor a Fourier-együtthatók $p \rightarrow \infty$ esetén legalább úgy tartanak nullához, mint $1/p^{2+m}$. Ez ad némi támpontot arra, hogy egy jelet legalább hány tagú sorral célszerű közelíteni.

Sokkal nehezebb annak megállapítása, hogy ha a jelnek csak véges tagszámú Fourier-polinomja ismert, akkor az milyen pontosságú közelítést jelent, hiszen még a hibamérték sem egyértelmű. Ha egy jelet adott tagszámú Fourier-polinommal akarunk közelíteni, akkor nem mindig a végtelen sor első tagjait célszerű figyelembe venni.

A valós értékű periodikus jel *teljesítményének* (matematikailag: négyzetes középértékének) definíciója

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt. \quad (3.1-67)$$

Ha a jel teljesítménye véges, akkor *Parseval tétele* értelmében meghatározható a

$$P_x = X_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} X_p^2 \quad (3.1-68)$$

összefüggéssel a Fourier-együtthatók ismeretében. A teljesítmény kifejezhető a X_p^A, X_p^B valós együtthatók vagy a komplex együtthatókkal is.

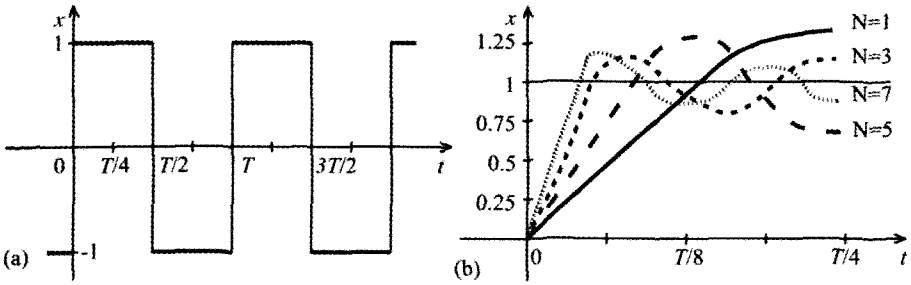
Példa Határozzuk meg a 12a ábrán látható jel Fourier-sorát:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -T/2 < t < 0, \\ +1, & 0 < t < T/2; \end{cases} \quad x(t+T) = x(t).$$

A jel komplex Fourier-együtthatói

$$X_p^C = \frac{1}{T} \left\{ \int_{-T/2}^0 (-1) e^{-jp\Omega t} dt + \int_0^{T/2} (+1) e^{-jp\Omega t} dt \right\} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{1 - e^{jp\Omega T/2}}{+jp\Omega} + \frac{e^{-jp\Omega T/2} - 1}{-jp\Omega} \right\}.$$

Az Euler-reláció és $\Omega T = 2\pi$ felhasználásával kapjuk, hogy



3.1-12. ábra A folytonos idejű periodikus jel (a) grafikonja, (b) néhány Fourier-polinomjának grafikonja

$$X_p^c = \frac{1 - \cos p\pi}{j\pi p} = \begin{cases} 0, & p = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2}{j\pi p}, & p = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

A jel szimmetriatulajdonságaiból is következik, hogy páros p esetén $X_p = 0$. Páratlan p esetén $X_p = 4/(\pi p)$, $\xi_p = -\pi/2$. A jel Fourier-soros alakja

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left\{ \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right\}.$$

Esetünkben kényelmesebb lehet az ezzel egyenértékű

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right\}$$

alakot használni, amelyből világosan kitűnik a jel páratlan tulajdonsága.

A 12b ábrán láthatjuk a jel egy negyed periódusának és annak néhány $x_N(t)$ Fourier-polinomjának grafikonja. A tagszám növelésével a közelítés láthatóan egyre jobb lesz, a maximum egyre jobbra tolódik és csökken, de nem szorítható a kb. 1,09 érték alá. Ez a *Gibbs-jelenség*. Mivel ez az $x(t)$ jel nem folytonos, ezért a sor konvergenciája meglehetősen lassú. #

3.1-2.5. A folytonos idejű periodikus válasz

A folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszernek a periodikus gerjesztéshez tartozó periodikus válasza a Fourier-soros előállítás felhasználásával egyszerűen számítható. A válasz kifejezése rendszerint közelítő, mert Fourier-polinomjának annyi tagját tudjuk számítani, ahány tagja a gerjesztés Fourier-polinomjának ismert. A periodikus válasz csak GV stabilis rendszer esetén jelenti az állandósult választ.

Állítsuk elő az ismert $u(t)$ folytonos idejű, T periódusidejű ($\Omega = 2\pi/T$ alapkörfrekvenciájú) periodikus gerjesztés Fourier-soros alakját, pontosabban ennek (62) szerinti N -edrendű közelítését, vagyis N -edrendű *Fourier-polinomját*:

$$u(t) \approx U_0 + \sum_{p=1}^N U_p \cos(p\Omega t + \nu_p). \quad (3.1-69)$$

Minél nagyobb N értéket választunk, annál pontosabb lesz a válasz kifejezése, amelyet ugyanilyen alakban keresünk:

$$y(t) \approx Y_0 + \sum_{p=1}^N Y_p \cos(p \Omega t + \eta_p). \quad (3.1-70)$$

A válasz kifejezésében szereplő Y_p amplitúdókat és η_p kezdőfázisokat a rendszernek a $p\vartheta$ körfrekvenciához tartozó $\bar{H}_p \approx H(e^{j p \vartheta}) = K_p e^{j \varphi_p}$ átviteli együtthatója ismeretében számíthatjuk:

$$Y_0 = K_0 U_0; \quad Y_p = K_p U_p, \quad \eta_p = \varphi_p + \nu_p, \quad p = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1-71)$$

A kielégítő pontossághoz szükséges N rendszám megválasztása nehéz feladat. Ehhez el kell döntenünk, hogy milyen p sorszámtól kezdődően hanyagolható el $Y_p = K_p U_p$. Ennek eldöntését segíti a $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztika ismerete. Ha a gerjesztésnek eleve csak az N -edrendű Fourier-polinomját ismerjük, ekkor a válasz ennél nagyobb rendű Fourier-polinomját nem is tudjuk meghatározni.

Példa Egy folytonos idejű rendszer periodikus gerjesztése

$$u(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0, \\ +1, & 0 < t < 1; \end{cases} \quad u(t+2) \approx u(t); \quad T = 2, \quad \Omega = \pi.$$

A GV stabilis rendszer átviteli karakterisztikája ($c > 0$)

$$H(j\omega) = \frac{100(25\pi)^2}{(25\pi)^2 + c(j\omega) + (j\omega)^2}; \quad (a) \ c = 100\pi, \quad (b) \ c = 0,25\pi.$$

Határozzuk meg a válasz Fourier-soros alakját!

A válasz Fourier-sora az előző pont példája értelmében

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \left\{ \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right\}.$$

A gerjesztést, az átviteli együtthatót és ennek alapján a választ meghatározó amplitúdók és szögek *nehézség nélkül számíthatók*.

Ha $c = 100\pi$, akkor az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza:

$p =$	1	3	5	7
$U_p =$	$4/\pi$	$4/3\pi$	$4/5\pi$	$4/7\pi$
$\nu_p =$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$
$K_p =$	98,90	91,22	80,02	68,95
$\varphi_p =$	-0,16	-0,45	-0,69	-0,89
$Y_p =$	125,92	38,71	20,38	12,54
$\eta_p =$	-1,73	-2,02	-2,27	-2,45

Az U_p és a K_p értékei monoton csökkennek, ezért ez az Y_p értékekre is igaz. A válasz Fourier-sorának nyolcadrendű közelítése

$$y_a(t) \approx 125,9 \cos(\pi t - 1,73) + 38,7 \cos(3\pi t - 2,02) + \\ + 20,4 \cos(5\pi t - 2,27) + 12,5 \cos(7\pi t - 2,45).$$

További tagok figyelembe vételével javíthatunk a közelítés pontosságán.

Tekintsük most a $c = 0,25\pi$ esetet. A fentihez hasonló közelítés hibája ekkor nagyon nagy lenne, mert az amplitúdó-karakterisztikának a $p = 25$ értéknél éles maximuma van. Ez a legnagyobb amplitúdójú tag a válasz Fourier-sorában! Az előzőhöz hasonló számítással kapjuk, hogy a négy legnagyobb amplitúdójú tagot tartalmazó Fourier-polinom a $p = 1, 3, 23, 25$ sorszámokhoz tartozik:

$$y_b(t) \approx 127,5 \cos(\pi t - 1,57) + 43,1 \cos(3\pi t - 1,57) + \\ + 36,0 \cos(23\pi t - 1,63) + 509,3 \cos(25\pi t - 3,14).$$

A következő két figyelembe veendő tag a 27. és az 5. harmonikus.

Nyilvánvaló, hogy a két esetben a válasz jelalakja erősen különböző. #

3.1-2.F. Feladatok

F-1. Az $x[k]$ diszkrét idejű jel periodikus, a periódus hossza $L = 6$. A jel a $0 \leq k \leq L - 1$ intervallumban $x[k] = x_L[k]$.

Határozza meg a DI jel Fourier-soros alakját, ha

- (a) $x_L[k] = \delta[k]$.
- (b) $x_L[k] = \delta[k] + \delta[k - 1]$.
- (c) $x_L[k] = \delta[k] + \delta[k - 5]$.
- (d) $x_L[k] = \delta[k] - \delta[k - 5]$.
- (e) $x_L[k] = \delta[k - 1] + 2\delta[k - 2] + 3\delta[k - 3] + 2\delta[k - 4] + \delta[k - 5]$.
- (f) $x_L[k] = 3\delta[k] + 2\delta[k - 1] + \delta[k - 2] + \delta[k - 4] + 2\delta[k - 5]$.

Vázolja fel a jeleket és a szinuszos összetevőket! Ellenőrizze a sor összegét k néhány értékére (például a $k = 0$ helyen)!

F-2. Az $x[k]$ diszkrét idejű jel periodikus, a periódus hossza $L = 5$. A jel a $0 \leq k \leq L - 1$ intervallumban $x[k] = x_L[k]$.

Határozza meg a DI jel Fourier-soros alakját, ha

- (a) $x_L[k] = \delta[k]$.
- (b) $x_L[k] = \delta[k] + \delta[k - 1]$.
- (c) $x_L[k] = \delta[k] + \delta[k - 4]$.

Vázolja fel a jeleket és a szinuszos összetevőket! Ellenőrizze a sor összegét k néhány értékére (például a $k = 0$ helyen)!

F-3. Egy DI rendszer átviteli karakterisztikája a 3.1-2.3. pont példájában adott. A rendszer gerjesztését az F-1(c) szerinti periodikus jel írja le.

Határozza meg a periodikus válasz Fourier-sorát!

F-4. Egy lineáris, invariáns, GV stabilis, diszkrét idejű rendszer gerjesztése periodikus:

$$u[k] = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-8] + \delta[k-9], \quad 0 \leq k \leq 9; \quad u[k+10] = u[k].$$

A rendszer átviteli karakterisztikája

$$(a) \quad H(e^{j\theta}) = 1 - 2 \cos \theta_0 e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}, \quad \theta_0 = 3\pi/5.$$

$$(b) \quad H(e^{j\theta}) = 1 - 1,8 \cos \theta_0 e^{-j\theta} + 0,81 e^{-j2\theta}, \quad \theta_0 = 3\pi/5.$$

Határozza meg a válasz Fourier-sorát, továbbá a válasz értékeit az első periódusban. Mi a jellegzetes különbség a két eset között?

F-5. Egy folytonos idejű periodikus jel

$$(a) \quad x(t) = \begin{cases} X \cos \frac{2\pi}{T} t, & 0 < |t| < T/4, \\ 0, & T/4 < |t| < T/2, \end{cases} \quad x(t+T) = x(t).$$

$$(b) \quad x(t) = X \left| \cos \frac{2\pi}{T} t \right|.$$

Vázolja fel a jelet! Határozza meg a jel Fourier-sorát! Határozza meg a jel teljesítményét pontosan és Fourier-sorának első két tagja alapján közelítőleg is!

***F-6.** Egy folytonos idejű periodikus jel kifejezése

$$(a) \quad x(t) = X \tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT).$$

$$(b) \quad x(t) = X \tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta(t - iT) - \delta\left(t - iT - \frac{T}{2}\right) \right\}.$$

Vázolja fel a jelet! Határozza meg a jel Fourier-sorát! Határozza meg a jel teljesítményét pontosan és Fourier-sorának első két tagja alapján közelítőleg is, ha ez lehetséges!

F-7. Egy folytonos idejű periodikus jel kifejezése

$$x(t) = \begin{cases} X \frac{T+2t}{T}, & -\frac{T}{2} < t < 0, \\ X \frac{T-2t}{T}, & 0 < t < \frac{T}{2}; \end{cases} \quad x(t+T) = x(t).$$

Vázolja fel a jelet! Határozza meg a jel Fourier-sorát! Határozza meg a jel teljesítményét pontosan és Fourier-sorának első két tagja alapján közelítőleg is!

***F-8.** Egy folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája a 3.1-2.5. pont példájában adott, $c = 0,25\pi$. A rendszer gerjesztése

(a) az előző feladatban megadott jel.

(b) az F-6(a) feladat szerinti Dirac-impulzusok sorozata.

Határozza meg az $M_{25} = Y_{25}/Y_1$ viszonyszámot, ahol Y_{25} a válasz 25. harmónikusának amplitúdója ($p = 25$ esetén az amplitúdó-karakterisztika maximális), és Y_1 a válasz alap-harmónikusának amplitúdója.

*F-9. Egy folytonos idejű, periodikus jel (57) szerinti Fourier-polinómjának és (61) szerinti Fourier-sorának együtthatói az (59) szerinti összefüggésekkel számítva az (58) szerinti H négyzetes középhiba minimális, a (61) szerinti Fourier-sor négyzetes közép értelemben vagyis energia normában konvergál a periodikus jelhez.

(a) Adjon más hibamértéket vagy hibamértékeket, amelyek minimalizálása ugyancsak jó közelítésre vezetne.

(b) Milyen szempontokból előnyösebb illetve hátrányosabb a négyzetes hibamérték a többi hibamértékkel összehasonlítva?

3.1-2.M. Megoldások

M-1. Az alapharmonikus körfrekvenciája $\Theta = 2\pi/L = \pi/3$. Elegendő négy \bar{X}_i^C számítása.

$$(a) X_0 = \bar{X}_1^C = \bar{X}_2^C = \bar{X}_3^C = 1/6;$$

$$x[k] = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) + \frac{1}{6} \cos(\pi k).$$

$$(b) x[k] = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - \frac{\pi}{3}\right); \quad (3.1 - 2.2. \text{pont}).$$

$$(c) x[k] = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$(d) x[k] = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cos(\pi k).$$

$$(e) x[k] = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \pi\right) + \frac{1}{6} \cos(\pi k + \pi).$$

$$(f) x[k] = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + \frac{1}{6} \cos(\pi k).$$

M-2. Az alapharmonikus körfrekvenciája $\Theta = 2\pi/L = 0,4\pi$. Elegendő három \bar{X}_i^C számítása.

$$(a) x[k] = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{4\pi}{5}k\right).$$

$$(b) x[k] = 0,40 + 0,65 \cos(0,4\pi k - 0,63) + 0,25 \cos(0,8\pi k - 1,26).$$

$$(c) x[k] = 0,40 + 0,25 \cos(0,4\pi k + 1,26) + 0,65 \cos(0,8\pi k - 0,63).$$

M-3. Az átviteli együtthatók számítása után a válasz Fourier-sora

$$y[k] = 1,81 + 1,15 \cos\left(\frac{\pi}{3}k - 0,833\right) + 0,134 \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - 0,281\right).$$

M-4. A válasz Fourier-sora ($\Theta = 2\pi/10 = 0,2\pi$) és első periódusának időfüggvénye

$$(a) y[k] = 1,047 + 1,376 \cos(\Theta k - 0,314) + 0,247 \cos(2\Theta k - 0,628) + 0,2 \cos(4\Theta k - 1,257);$$

$$y[k] = 2,617 \delta[k] + 2,617 \delta[k-1] + 1,617 \delta[k-2] + 1,713 \delta[k-3] + 1,000 \delta[k-4] + 1,000 \delta[k-8] + 1,618 \delta[k-9]; \quad 0 \leq k \leq 9.$$

A válasz nem tartalmaz 3θ körfrekvenciájú összetevőt.

$$(b) \quad y[k] = 1,893 + 1,246 \cos(\theta k - 0,259) + 0,226 \cos(2\theta k - 0,468) + 0,026 \cos(3\theta k - 2,470) + 0,183 \cos(4\theta k - 1,379);$$

A válaszban a 3θ körfrekvenciájú összetevő a most nem nulla.

M-5. Az alapharmonikusú komplex Fourier-együttható számítása figyelmet igényel!

$$(a) \quad x(t) = X \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \Omega t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2 - 1} \cos 2n \Omega t \right\}; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T};$$

$$P_x = \frac{1}{4} X^2 = 0,25 X^2, \quad P_{x,2} = \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} X^2 \approx 0,226 X^2; \quad P_{x,2} = 0,905 P_x.$$

$$(b) \quad x(t) = X \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2 - 1} \cos 2n \Omega t \right\}; \quad \Omega = \frac{\pi}{T};$$

$$P_x = \frac{1}{2} X^2 = 0,5 X^2, \quad P_{x,2} = \left\{ \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 \right\} X^2 \approx 0,495 X^2; \quad P_{x,2} = 0,991 P_x.$$

***M-6.** A komplex Fourier-együtthatók egyszerűen számíthatók.

$$(a) \quad x(t) = \frac{\tau}{T} X \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos p \Omega t \right\}; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

$$(b) \quad x(t) = \frac{4\tau}{T} X \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)\Omega t; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

A jelek teljesítménye nem véges.

M-7. Az alap-körfrekvencia $\Omega = 2\pi/T$

$$x(t) = \frac{1}{2} X + \frac{4}{\pi^2} X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\Omega t;$$

$$P_x = \frac{1}{3} X^2 \approx 0,3333 X^2, \quad P_{x,2} = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi^2} \right)^2 \right\} X^2 \approx 0,3321 X^2.$$

***M-8.** $K_{25}/K_1 = 99,84$; ezért (a) $M_{25} = 99,84/25^2 = 0,160$, míg (b) $M_{25} = 99,84$. A válaszban a 25. harmonikus az (a) esetben domináns, a (b) elhanyagolható.

*M-9. (a) A hibamértékek egy családja a hiba függvény abszolút értéke n -edik hatványának középértéke egy periódusra. Az $n = 1$ választás a hibafüggvény abszolút értékének középértékét adja. Egy másik logikus hibamérték a hibafüggvény abszolút értékének maximuma, ekkor a legjobb közelítést azok az együtthatók jelentik, amelyekre a maximális hiba minimális (ez a „minimax” elv).

(b) A négyzetes hibamérték egyik nagy előnye, hogy az együtthatók számítására formula adható. További előnye, hogy az együtthatók értéke független a választott tagszámtól. A többi hibamértéket minimáló együtthatók számítása hosszadalmas, továbbá minden tagszámra újból el kell végezni valamennyi együttható kiszámítását. A négyzetes (és az annál nagyobb fokszámú) hibamértékek a viszonylag nagy lokális hibákat igyekeznek lecsökkenteni, a minimax eljárásra ez még inkább igaz. Talán a hibafüggvény abszolút értékének minimuma adja a legjobbnak tekinthető közelítést. Általánosan nem lehet legjobbnak nevezhető hibamértéket kijelölni, ezért szinte kizárólagos a legegyszerűbben minimalizálható négyzetes középhiba.

3.2. Jelek és rendszerek spektrális leírása

Az előző fejezetben láttuk, hogy periodikus jelek leírhatók szinuszos jelek szuperpozíciójaként. Az egyes szinuszos összetevők körfrekvenciája az alapharmonikusú körfrekvenciának egész számú többszöröse. Meghatározva a rendszer gerjesztésének Fourier-sorát és ismerve a rendszer átviteli karakterisztikáját nehézség nélkül számíthatjuk a válasz Fourier-soros alakját.

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy a jelek széles osztálya leírható szinuszos jelek szuperpozíciójaként, ha nem csak bizonyos Ω , illetve ω , diszkrét körfrekvenciákat veszünk figyelembe, hanem valamennyi körfrekvenciát.

Ismerve a gerjesztés eme spektrális alakját. (Fourier-transzformáltját, Fourier-reprezentációját, Fourier-integrálos alakját) és a rendszer átviteli karakterisztikáját, nehézség nélkül meghatározható a válasz spektrális alakja. Ennek ismeretében a válasz időfüggvénye is számítható.

Az utóbbi művelet (vagyis az inverz Fourier-transzformáció) rendszerint csak numerikusan végezhető el valamilyen (célszerűen adaptív) integrálási eljárással vagy egy FFT („Fast Fourier Transform”) algoritmujjal. Sok feladat megoldása során azonban nincs is szükség az időfüggvényre, mert már a spektrális alakból, vagyis a frekvenciatartománybeli leírásból is fontos megállapításokat tudunk tenni. Gyakran az adott időfüggvény Fourier-transzformáltjának számítását is numerikusan számítjuk.

A 3.2-1. szakaszban bemutatjuk a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek spektrális leírását (Fourier-integrálos alakját). Látni fogjuk, hogy ha a jel a végtelenben elég gyorsan nullához tart (ami véges energiájú jelre teljesül), akkor spektrumának meghatározása nem jelent elvi nehézséget. Ebben a szakaszban lesz szó a sávkorlátozott és időkorlátozott jelek tulajdonságairól is.

A 3.2-2. szakaszban tárgyaljuk a lineáris, invariáns rendszer adott gerjesztéshez tartozó válaszának spektrális leírásának és ennek ismeretében a válasz időfüggvényének a számítását. Ebben a szakaszban tárgyaljuk a jelátvitel néhány, a jel és a rendszer spektrális leírásával kapcsolatos fogalmát, mint a rendszer sávszélessége, a jel sávszélessége, a torzításmentes jelátvitel feltételei. Ezzel illusztráljuk, hogy az időtartományba történő visszatérés nélkül is fontos megállapítások tehetők.

3.2-1. A Fourier-transzformáció

3.2-1.1. A Fourier-transzformáció definíciója

A diszkrét idejű és a folytonos idejű Fourier-transzformáció alap gondolata közös, definíciójuk és alapvető tulajdonságaik hasonlóak. A két transzformációt ezért együtt tárgyaljuk, néhány speciális tulajdonságukra kitérünk.

A valós vagy komplex értékű $x[k]$ diszkrét idejű, illetve $x(t)$ folytonos idejű jel

$$\text{DI: } X(e^{j\theta}) = \mathcal{F} \{x[k]\}; \quad \text{FI: } X(j\omega) = \mathcal{F} \{x(t)\} \quad (3.2-1)$$

komplex *spektruma* vagy *Fourier-transzformáltja* egy olyan valós változós (esetleg általánosított) függvény, amelynek alapvető tulajdonsága, hogy ismeretében a jel előállítható a következő alakban:

$$\begin{aligned} \text{DI: } x[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta; \\ \text{FI: } x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.2-2)$$

E művelet neve *inverz Fourier-transzformáció*, szimbolikus alakja

$$\text{DI: } x[k] = \mathcal{F}^{-1} \{X(e^{j\vartheta})\}; \quad \text{FI: } x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{X(j\omega)\}. \quad (3.2-3)$$

Az integrálok ϑ illetve ω körfrekvenciájú szinuszos jelek szuperpozícióját jelentik. Az $X(e^{j\vartheta})d\vartheta/2\pi$, illetve az $X(j\omega)d\omega/2\pi$ mennyiség úgy tekinthető, mint egy ϑ illetve ω körfrekvenciájú szinuszos jel komplex amplitúdója.

Ha $x[k]$ abszolút összegezhető, illetve ha $x(t)$ abszolút integrálható, akkor spektruma a következő összefüggéssel számítható:

$$\begin{aligned} \text{DI: } X(e^{j\vartheta}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\vartheta k}, \quad \Leftarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty; \\ \text{FI: } X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \Leftarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \end{aligned} \quad (3.2-4)$$

Ha $x(t)$ abszolút integrálható, de nem folytonos, akkor a (4) alapján számított $X(j\omega)$ a (2) szerinti inverz transzformáltja az $[x(t-0) + x(t+0)]/2$ értéket állítja elő, azaz a folytonossági helyeken az $x(t)$ értéket, a szakadási helyeken a bal és a jobb oldali határérték számtani közepét. Az ennél általánosabb eseteknek kicsi a gyakorlati jelentősége, ezekkel nem is foglalkozunk.

A következő pontban néhány példával illusztrálni fogjuk, hogy bizonyos nem abszolút összegezhető DI jelnek illetve nem abszolút integrálható FI jelnek is előállítható a spektruma.

Az $X(e^{j\vartheta})$, illetve az $X(j\omega)$ jelölés talán feleslegesen bonyolultnak tűnik az egyszerűbb $X(\vartheta)$, illetve $X(\omega)$ helyett. Az utóbbi is elterjedt az irodalomban, sokan az ω körfrekvencia helyett az f frekvenciát használják független változóként. Az általunk használt jelölés előnyeinek egy részét már láttuk, további előnyöket ebben a fejezetben és a következő részben fogunk látni. A jelölés jól kifejezi, hogy a DI spektrum *periodikus* függvénye a ϑ változónak, ezért elegendő a $0 \leq \vartheta < \pi$ értékekre ismerni.

A *véges hosszúságú* korlátos jelek mindig abszolút összegezhetőek, illetve abszolút integrálhatóak. Ezekre tehát a (4) alkalmazható. Egyszerű példaként tekintsük az egységnyi amplitúdójú, L hosszúságú DI, illetve T hosszúságú FI négyszögimpulzus spektrumát:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} = \sum_{k=0}^{L-1} 1 \cdot e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=0}^{L-1} (e^{-j\vartheta})^k,$$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} = \int_0^T 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right]_0^T.$$

A mértani sor összegének számítása, illetve a határok behelyettesítése után

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} = \frac{1 - e^{-j\vartheta L}}{1 - e^{-j\vartheta}}, \quad \mathcal{F}\{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}. \quad (3.2-5)$$

Egy másik fontos abszolút összegehető illetve abszolút integrálható jelosztályt alkotnak az olyan *korlátos* jelek, amelyek nullához tartó exponenciális függvényvel majorálhatók:

$$\begin{aligned} |x[k]| \leq M \quad \text{és} \quad |x[k]| \leq a^{|k|}, \quad |k| > k_0, \quad 0 < a < 1, \\ |x(t)| \leq M \quad \text{és} \quad |x(t)| \leq e^{-\alpha t}, \quad |t| > t_0, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (3.2-6)$$

Fontos példa ilyen típusú jelekre a belépő *DI* illetve *FI* exponenciális jel:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a e^{-j\vartheta})^k,$$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t) e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{-1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \right]_0^{\infty}.$$

Nehézség nélkül kapjuk a belépő exponenciális jel spektrumát:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = \frac{1}{1 - a e^{-j\vartheta}}, \quad |a| < 1; \quad \mathcal{F}\{\varepsilon(t) e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\alpha + j\omega}, \quad \alpha > 0. \quad (3.2-7)$$

Ha $|a| \geq 1$, akkor a sor nem konvergál, illetve ha $\alpha \leq 0$, akkor az integrál nem konvergál. A kikötést figyelembe kell vennünk, mert az eredményből nehéz kikövetkeztetni, hogy az csak a megadott feltételek mellett érvényes.

Mielőtt további részletekbe mennénk, adjunk közelítő összefüggést a (2) szerinti spektrális előállításra. Közelítsük az integrált véges tagszámú összeggel, amelyben $\Delta\vartheta = 2\pi/L$, illetve $\Delta\omega = 2\pi/T$, ahol L kellően nagy pozitív páros szám, illetve T kellően nagy pozitív érték:

$$x[k] \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-L/2}^{L/2} X(e^{jp2\pi/L}) e^{jp(2\pi/L)k} \frac{2\pi}{L} = \frac{1}{L} \sum_{p=-L/2}^{L/2} X(e^{jp\vartheta}) e^{jp\vartheta k}, \quad \vartheta = \frac{2\pi}{L};$$

$$x(t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-L/2}^{L/2} X\left(jp \frac{2\pi}{T}\right) e^{jp(2\pi/T)t} \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{T} \sum_{p=-L/2}^{L/2} X(jp\Omega) e^{jp\Omega t}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Hasonlítsuk ezt össze a (3.1-40), illetve a (3.1-60) összefüggéssel, akkor láthatjuk, hogy egy periodikus jel Fourier-sorát kaptuk, amelyben

$$X(e^{jp\vartheta}) = L X_p^C, \quad X(jp\Omega) = T X_p^C.$$

Hasonló módon látható be, hogy (4) a Fourier-együtthatókat adja $\vartheta = p\Theta$, illetve $\omega = p\Omega$ értelmezéssel. Ez azt jelenti, hogy L és T megválasztása után egy olyan periodikus jel Fourier-soros előállítását kapjuk, amely a $-L/2 \leq k \leq L/2$, illetve a $-T/2 \leq t < T/2$ intervallumban közelíti a vizsgált (nem periodikus) jelet. Minél nagyobbra választjuk L illetve T értékét, annál kisebb lesz $\Delta\vartheta$ illetve $\Delta\omega$, vagyis az integrál összeggel történő közelítése egyre kisebb hibát okoz, a jel közelítése periodikus jellel egyre hosszabb intervallumban elfogadható. Ezek a megfontolások nem bizonyítják a Fourier-transzformációs összefüggések helyességét, de némi bepillantást engednek annak lényegébe, továbbá lehetőséget adnak a transzformációnak és inverzének numerikus elvégzésére. Mint látható, a Fourier-integrál numerikus közelítése megegyezik a Fourier-sor numerikus eljárásával, amelyre a már említett FFT algoritmusok állnak rendelkezésre.

A diszkrét idejű Fourier-transzformáció igazolásához helyettesítsük a spektrum (4) szerinti kifejezését az időfüggvény (2) szerinti alakjába:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\vartheta})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] e^{-j\vartheta p} e^{j\vartheta k} d\vartheta.$$

A végtelen sor tagonként integrálható, ha egyenletesen konvergens. Ez teljesül, ha $|x[k]|$ összegezhető. Erre az esetre szorítkozva, kapjuk hogy

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\vartheta})\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(k-p)\vartheta} d\vartheta.$$

Az integrál eredménye $p=k$ esetén 2π , egyébként nulla. Ezek szerint az inverz transzformáció (2) képlete valóban az eredeti jelet adja k minden egész értékére.

A folytonos idejű jelle vonatkozó igazolás körülményesebb, ezért nem is tárgyaljuk. A Fourier-sorhoz hasonlóan igazolhatjuk, hogy a Fourier-integrálos előállítás akkor adja a legkisebb négyzetes eltérést, ha a spektrumot a megadott alakúnak választjuk. Az igazoláshoz célszerű áttérni a később megadandó valós alakra.

3.2-1.2. Néhány jel spektruma

A Fourier-transzformáció néhány fontos tételének bemutatása előtt meghatározzuk néhány fontos DI illetve FI jel spektrumát.

Abszolút összegezhető diszkrét idejű jelek

A véges hosszúságú négyszögimpulzus és a belépő exponenciálisan csökkenő jel spektrumát már meghatároztuk. Az *egységimpulzus* spektruma a (4)-ből közvetlenül adódik:

$$\mathcal{F}\{\delta[k]\} = 1; \quad \mathcal{F}\{\delta[k-i]\} = e^{-ji\vartheta}, \quad i \in \mathbf{Z}. \quad (3.2-8)$$

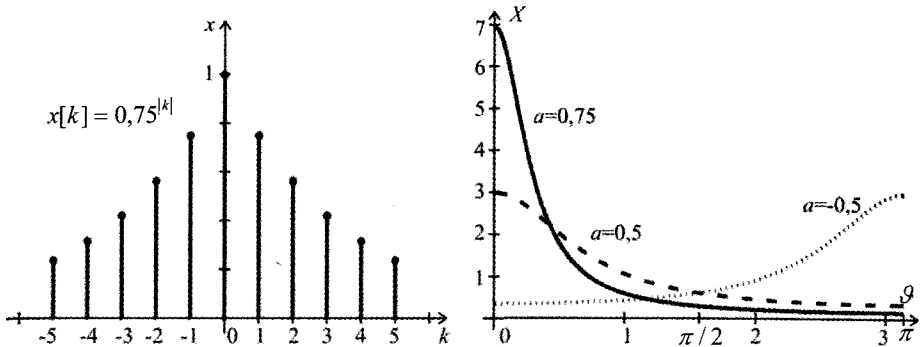
Az exponenciálisan csökkenő páros függvény spektruma a (4) alapján számítható:

$$\mathcal{F}\{a^{|k|}\} = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} e^{-j\vartheta k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\vartheta k} = \frac{1}{1-a e^{j\vartheta}} - 1 + \frac{1}{1-a e^{-j\vartheta}}, \quad |a| < 1.$$

Elemi átalakítások után kapjuk, hogy valós a esetén

$$\mathcal{F}\{a^{|k|}\} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\vartheta}, \quad -1 < a < 1. \quad (3.2-9)$$

E valós értékű spektrum grafikonját az a paraméter néhány értékére az 1. ábra mutatja.



3.2-1. ábra A diskret idejű, páros, nullához tartó DI exponenciális jel és valós értékű spektruma

Legyen egy DI jel spektruma a következő alakban adott:

$$X(e^{j\vartheta}) = 1 + 4 \cos 3\vartheta + j 6 \sin 2\vartheta \equiv 2e^{j3\vartheta} + 3e^{j2\vartheta} + 1 - 3e^{-j2\vartheta} + 2e^{-j3\vartheta}.$$

Az időfüggvény a (2) felhasználásával bármelyik alakból számítható. A spektrum (4) szerinti kifejezése alapján a jel komplex alakjából

$$x[k] = 2\delta[k+3] + 3\delta[k+2] + \delta[k] - 3\delta[k-2] + 2\delta[k-3]$$

ránézésre is felismerhető. A példa mintájára bármely, Fourier-polinom alakjában megadott spektrumhoz tartozó DI jel időfüggvénye meghatározható.

Abszolút integrálható folytonos idejű jelek

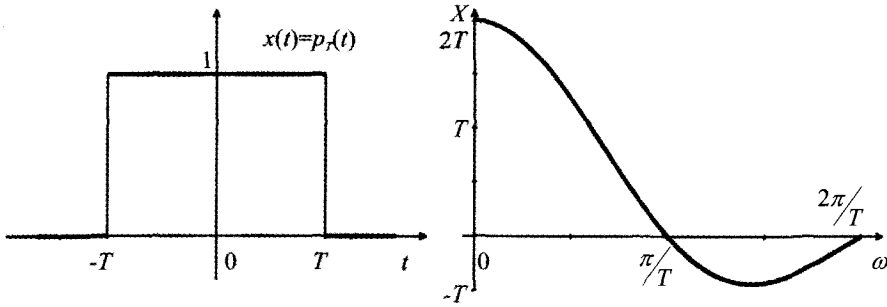
A belépő négyszögletes impulzus és a belépő, exponenciálisan csökkenő jel spektrumát már meghatároztuk. Egyszerűen számítható a szimmetrikus *négyszögletes impulzus* spektruma is. A részletszámításokat az Olvasóra bízunk, csak az eredményt adjuk meg:

$$p_T(t) \equiv \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T), \quad \mathcal{F}\{p_T(t)\} = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \quad (3.2-10)$$

A 2. ábrából láthatjuk, hogy e jel spektrális előállításában a kisfrekvenciás komponensek játszanak meghatározó szerepet. Első becslésként azt mondhatjuk, hogy az $\omega_0 = \pi/T$ helyen fellépő első nullahely utáni frekvenciakomponensek már elhanyagolhatók. Ennek a körfrekvenciának $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 1/2T$ frekvencia (az impulzus hosszának reciproka) felel meg. Ez más alakú impulzusra (például háromszögimpulzusra) is használható becslés, csak az impulzus hosszát kell megfelelően értelmezni.

A *Dirac-impulzus* abszolút integrálható jel, ezért spektruma a (4) alapján számítható:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt.$$



3.2-2. ábra A folytonos idejű, szimmetrikus négyzetes impulzus és spektruma

Ebből és hasonló megfontolással az eltoltt Dirac-impulzusra azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{F}\{\delta(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau}. \quad (3.2-11)$$

A Dirac-impulzus spektrumában minden frekvencia egyforma súllyal szerepel. A (11) inverz alakja, vagyis a Dirac-impulzus spektrális kifejezése

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t). \quad (3.2-12)$$

Megjegyezzük, hogy a bal oldalon álló integrál nem konvergens klasszikus értelemben és valóban nem is reprezentál (közönséges) függvényt.

Nem abszolút összegezhető diszkrét idejű jelek

Legyen egy diszkrét idejű jel spektruma Dirac-impulzusok végtelen sorozata:

$$X(e^{j\vartheta}) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - p 2\pi).$$

A spektrumhoz tartozó diszkrét idejű jel a (2) definíció értelmében

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - p 2\pi) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} 1,$$

mivel a $[-\pi, \pi)$ intervallumban csak a $p = 0$ sorszámú tag nem nulla. Ezzel előállítottuk a mindenütt *állandó* DI jel spektrumát:

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - p 2\pi) \Rightarrow \mathcal{F}\{1\} = 2\pi \delta(\vartheta), \quad -\pi \leq \vartheta < \pi. \quad (3.2-13)$$

Az állandó jel spektrális előállításában csak a $\vartheta = 0$ körfrekvenciájú összetevő (és periodikus ismétlődése) szerepel, ami nem meglepő eredmény. Ezt az eredményt (4) alapján nem tudjuk előállítani, mivel az előálló sor nem konvergens.

Nem egyszerű annak igazolása (ezért mellőzzük is), hogy

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k]\} = \pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - p 2\pi) + \frac{1}{1 - e^{-j\vartheta}} \Rightarrow \mathcal{F}\{\varepsilon[k]\} = \pi \delta(\vartheta) + \frac{1}{1 - e^{-j\vartheta}}, \quad |\vartheta| \leq \pi. \quad (3.2-14)$$

Az utolsó tag a (7) értelmében az $\mathcal{F}\{\varepsilon[k]a^k\}$ kifejezése $a=1$ esetén, amikor azonban a (7) nem érvényes, amint azt (14) járulékos tagja mutatja. A (13) és a (14) alapján határozhatjuk meg a következő két, nem abszolút összegezhető jel spektrumát is:

$$\mathcal{F}\{2\varepsilon[k]-1\} = \frac{2}{1-e^{-j\vartheta}}, \quad (3.2-15)$$

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn} k\} = \frac{1+e^{-j\vartheta}}{1-e^{-j\vartheta}} \equiv \frac{1}{j \operatorname{tg}(\vartheta/2)}, \quad \operatorname{sgn} k \equiv \begin{cases} -1, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ 0, & k = 0, \\ +1, & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases} \quad (3.2-16)$$

Noha e két jel nem abszolút összegezhető, egyikük spektruma sem tartalmaz Dirac-impulzus összetevőt.

Nem korlátos jelek spektrumának előállítására további matematikai bonyodalmakkal jár, ezért az ilyeneket a továbbiakban nem tekintjük Fourier-transzformálhatónak.

Nem abszolút integrálható folytonos idejű jelek

Az *állandó* (az időtől független) jel spektruma a Dirac-impulzus:

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \delta(\omega), \quad (3.2-17)$$

mivel $X(j\omega) = 2\pi \delta(\omega)$ esetén a (2) alapján valóban $x(t) = 1$ adódik. Az állandó jel spektruma csak $\omega = 0$ körfrekvenciájú összetevőt tartalmaz, amint az várható is.

Alább igazolni fogjuk, hogy

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn} t\} = \frac{2}{j\omega}, \quad \operatorname{sgn} t \equiv \begin{cases} -1, & t \in \mathbf{R}_-, \\ 0, & t = 0, \\ +1, & t \in \mathbf{R}_+. \end{cases} \quad (3.2-18)$$

Az $1 + \operatorname{sgn} t = 2\varepsilon(t)$, továbbá (17) és (18) felhasználásával:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}; \quad (3.2-19)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin \Omega t}{\Omega t}\right\} = \frac{\pi}{\Omega} p_\Omega(\omega), \quad p_\Omega(\omega) \equiv \begin{cases} 1, & |\omega| < \Omega, \\ 0, & |\omega| > \Omega. \end{cases} \quad (3.2-20)$$

A $\sin \Omega t / \Omega t$ függvény nem abszolút integrálható, amint arról némi fáradsággal meggyőződhetünk.

A transzformáció vagy az inverz transzformáció számításakor az integrál Cauchy-főértékét kell figyelembe venni azokban az esetekben, amikor a jel vagy a spektruma valahol (például a nulla helyen) nem véges.

További jelek spektrumát a következő pontban még ki fogjuk számítani a Fourier-transzformáció tételeinek ismertetése után, azok felhasználásával.

A (18) igazolásához írjuk fel (10) inverz alakját:

$$p_r(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega T}{\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

A $t = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $(\cos \omega T / \omega)$ páratlan függvény)

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega T}{\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\omega} e^{j\omega T} d\omega, \quad T > 0.$$

Ha $T < 0$, akkor az integrál értéke -1 . Ez éppen a (18) szerinti állítás.

A (20) igazolásához végezzük el $p_T(t)$ fenti kifejezésében a változók következő cseréjét: $t = \omega'$, $\omega = t'$, $T = \Omega$, akkor

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t' \Omega}{t'} e^{j t' \omega'} dt' = p_{\Omega}(\omega').$$

Ez a $\sin \Omega t / \pi t$ jel Fourier-integrálos alakja, ami a (20) szerinti összefüggés.

A jel csonkítása

Az előzőekben tárgyalt példák mutatják, hogy a nem abszolút összegezhető illetve nem abszolút integrálható jelek spektrális előállításuk körülményes. Ezek a nehézségek megkerülhetők a következő megfontolással.

Egy valódi folyamatot leíró jel mindig egy $k = k_0$ illetve $t = t_0$ időpontban kezdődik és egy véges L illetve T időpont után vagy végződik vagy érdektelenné válik. A szokásos kezdeti időpont választás $k_0 = 0$ illetve $t_0 = 0$ (esetleg $k_0 = -L$ illetve $t_0 = -T$). Az esetleg nem abszolút összegezhető illetve nem abszolút integrálható jelek helyett vizsgáljuk azok csonkított és belépő megfelelőjét:

$$x[k, L] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - L]\} x[k]; \quad x(t, T) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\} x(t). \quad (3.2-21)$$

A csonkított jel megegyezik az eredeti jellel a $0 \leq k \leq L-1$ illetve a $0 \leq t < T$ intervallumban és nulla az intervallumomon kívül. Ha x korlátos az intervallumban (mint szinte mindig), akkor a csonkított jel abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható, ezért spektruma elvileg nehézség nélkül számítható.

A kényes feladat a csonkítási intervallum helyes megválasztása és annak szem előtt tartása, hogy bármilyen következtetés az intervallumon kívüli tartományra alapos megfontolást igényel.

Példa Legyenek az eredeti DI illetve FI jelek belépő exponenciális függvények:

$$x[k] = \varepsilon[k] a^k, \quad x(t) = \varepsilon(t) e^{-\alpha t}.$$

Az ezekhez rendelt csonkított jelek

$$x[k, L] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - L]\} a^k, \quad x(t, T) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\} e^{-\alpha t}.$$

A csonkított jelek spektruma az (5)-höz hasonlóan számítható. Az eredmény

$$\mathcal{F}\{x[k, L]\} = \frac{1 - a^L e^{-jL\vartheta}}{1 - a e^{-j\vartheta}}; \quad \mathcal{F}\{x(t, T)\} = \frac{1 - e^{-\alpha T} e^{-jT\omega}}{\alpha + j\omega}.$$

Három esetet célszerű megkülönböztetnünk.

Ha $|a| < 1$ illetve $\alpha > 0$, akkor $|a^L|$ illetve $e^{-\alpha T}$ tetszőlegesen kicsivé tehető az L vagy T megfelelő választásával. Ezt a tényezőt tartalmazó tagot elhanyagolva megkapjuk az eredeti, exponenciálisan csökkenő jel (7) szerinti spektrumát.

Ha viszont $a=1$ illetve $\alpha=0$, akkor az eredeti jel az egységugrás, spektrumát (14) illetve (17) adja, amely Dirac-impulzust és a nulla helyen nem véges függvényt tartalmaz. A csonkított jel spektruma viszont L illetve T értékű a $k=0$ illetve a $t=0$ helyen. Ízlés kérdése, hogy melyik leírást tekintjük megfelelőbbnek.

A harmadik esetben $|a|>1$ illetve $\alpha<0$. Az eredeti, exponenciálisan növekvő jel spektrumát nem vizsgáltuk, mert az bonyolultabb matematikai apparátust igényelne. A csonkított jel spektruma egy komplex értékű „közönséges” függvény. Előfordulhat azonban hogy az $|a^t|$ illetve az $e^{-\alpha t}$ tényező olyan nagy, hogy az numerikus problémát okoz. Ismét ízlés kérdése, hogy ebben az esetben azt mondjuk, hogy a jelhez még csonkítással sem rendelhető spektrum vagy elfogadjuk a csonkítással kapott eredményt. #

3.2-1.3. A Fourier-transzformáció néhány tétele

Ebben a pontban x valós értékű DI illetve FI jel, noha a tételek többsége komplex értékű jelekre is érvényes. A tételek bizonyítását többnyire mellőzzük, mivel azok formális igazolása a (2) definíció vagy a (4) inverz összefüggés alapján igen egyszerű, a szigorú igazolás hosszadalmas, gyakran magasabb szintű matematikai ismereteket igényel.

Linearitás

Mind a Fourier-transzformáció, mind az inverze lineáris operáció, ezért érvényes a szuperpozíció elve DI illetve FI jelekre egyaránt:

$$\mathcal{F}\{C_1 x_1 + C_2 x_2\} = C_1 \mathcal{F}\{x_1\} + C_2 \mathcal{F}\{x_2\}, \quad (3.2-22)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{C_1 X_1 + C_2 X_2\} = C_1 \mathcal{F}^{-1}\{X_1\} + C_2 \mathcal{F}^{-1}\{X_2\}, \quad (3.2-23)$$

bármely C_1, C_2 állandó esetén. Az általánosítás véges számú tag összegére kézenfekvő, végtelen sok tagra csak megfelelő konvergencia feltételek teljesülése esetén.

A valós spektrumok

Az X komplex spektrum két valós spektrummal írható le. Ez lehet az $A_x = |X|$ amplitúdó-spektrum és a $\varphi_x = \arg X$ fázis-spektrum, vagyis

$$X(e^{j\vartheta}) \equiv A_x(\vartheta) e^{j\varphi_x(\vartheta)}, \quad X(j\omega) = A_x(\omega) e^{j\varphi_x(\omega)}. \quad (3.2-24)$$

Használható azonban a P_x valós rész és a Q_x képzetes rész is:

$$X(e^{j\vartheta}) = P_x(\vartheta) + jQ_x(\vartheta), \quad X(j\omega) = P_x(\omega) + jQ_x(\omega). \quad (3.2-25)$$

A (4)-ből következik, hogy valós értékű x esetén A_x és P_x változójának páros függvénye, φ_x és Q_x változójának páratlan függvénye. Vizsgálatainkat vagy az ábrázolást ezért a $0 \leq \vartheta < \pi$ illetve a $0 \leq \omega < \infty$ intervallumra korlátozhatjuk. Javasoljuk az Olvasónak a már vizsgált jelekre e tulajdonságok ellenőrzését. A valós spektrumok paritási tulajdonságai a komplex spektrummal is kifejezhetők. Ha x valós értékű, akkor

$$X(e^{-j\vartheta}) = X^*(e^{j\vartheta}), \quad X(-j\omega) = X^*(j\omega), \quad (3.2-26)$$

ahol a csillag a konjugált komplexet jelöli.

A (2) szerinti integrálok átírhatók a változó pozitív értékeire vonatkozó integrálókká. Szokásos a Fourier-transzformációt és inverzét koszinusz és szinusz függvényekkel kifejezni.

Eltolás az időtartományban

Ha $\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\vartheta})$ illetve $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$, akkor az *eltolási tétel* értelmében

$$\mathcal{F}\{x[k-r]\} = e^{-jr\vartheta} X(e^{j\vartheta}), \quad r \in \mathbf{Z}; \quad \mathcal{F}\{x(t-\tau)\} = e^{-j\tau\omega} X(j\omega), \quad \tau \in \mathbf{R}. \quad (3.2-27)$$

Az időbeli eltolás megfelel a frekvenciatartományban komplex exponenciális függvényvel végzett szorzásnak. Az A_x amplitúdó-spektrumot az időbeli eltolás nem befolyásolja.

Az igazolás a (2) alapján egyszerűen elvégezhető.

Moduláció az időtartományban

Ha $\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\vartheta})$ illetve $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$, akkor a *modulációs tétel* értelmében

$$\mathcal{F}\{x[k]e^{j\vartheta_0 k}\} = X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)}), \quad \mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\} = X(j(\omega-\omega_0)). \quad (3.2-28)$$

A ϑ_0 illetve az ω_0 körfrekvenciájú szinuszos vivőjel modulációja az x jellel az x jel spektrumának eltolását jelenti ϑ_0 illetve ω_0 körfrekvenciával.

Az igazolás a (2) alapján egyszerűen elvégezhető.

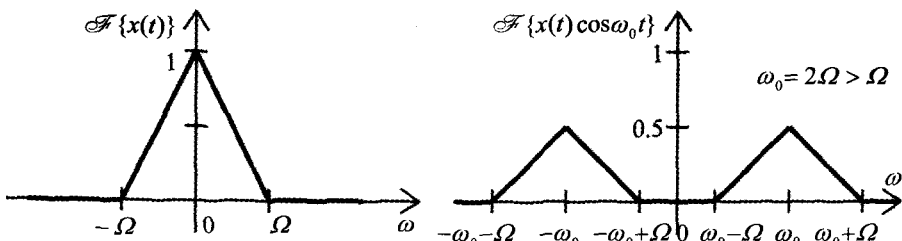
A (28)-ból egyszerűen következnek a modulációs tételek alábbi alakjai:

$$\mathcal{F}\{x[k] \cos \vartheta_0 k\} = \frac{1}{2} [X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)}) + X(e^{j(\vartheta+\vartheta_0)})], \quad (3.2-29a)$$

$$\mathcal{F}\{x[k] \sin \vartheta_0 k\} = \frac{1}{2j} [X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)}) - X(e^{j(\vartheta+\vartheta_0)})];$$

$$\mathcal{F}\{x(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} [X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))], \quad (3.2-29b)$$

$$\mathcal{F}\{x(t) \sin \omega_0 t\} = \frac{1}{2j} [X(j(\omega-\omega_0)) - X(j(\omega+\omega_0))].$$



3.2-3. ábra Sávkorlátozott folytonos idejű jel spektruma és azon szinuszos jel spektruma, amelyet a sávkorlátozott jel modulál

Az utolsó előtti összefüggést szemlélteti a 3. ábra egy olyan FI jelre, amelynek spektruma $|\omega| > \Omega$ esetén nulla (vagy elhanyagolhatóan kicsi, ún. sávkorlátozott jel). Az ábra az $\omega_0 > \Omega$ esetre vonatkozik.

Az ábra érzékelteti az amplitúdó-moduláció lényegét: a kisfrekvenciás x jel átvihető a nagyfrekvenciás vivőjel felhasználásával. Különböző vivőfrekvenciák felhasználásával sok kisfrekvenciás jel közös csatormán átvihető egymás zavarása nélkül.

Ha a $v(t) = x(t) \cos \omega_0 t$ modulált jellel ismét moduláljuk a $2 \cos \omega_0 t$ vivőjelet, akkor az $y(t) = x(t) 2 \cos^2 \omega_0 t = x(t) [1 + \cos 2 \omega_0 t]$ jel adódik. Egy olyan aluláteresztő szűrő felhasználásával, amely átérteszti az $|\omega| < \Omega$ körfrekvenciájú jeleket, de nem ereszti át az $|\omega| > 2\omega_0 - \Omega$ körfrekvenciájú jeleket, vissza tudjuk állítani az eredeti x jelet (demoduláció). Ha $x(t)$ nem sávkorlátozott, vagy ha $\omega_0 > \Omega$ nem teljesül, vagy ha a szűrés nem tökéletes, akkor a moduláció és a demoduláció során „idegen” frekvenciák is fellépnek és ezért a jel visszaállítása nem lesz tökéletes.

1. példa Határozzuk meg a következő diszkrét idejű jel spektrumát:

$$x[k] = \varepsilon[k] a^k \cos \vartheta_0 k; \quad -1 < a < 1.$$

A (7) értelmében $\mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = 1/(1 - a e^{-j\vartheta})$. A modulációs tétel értelmében

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - a e^{-j(\vartheta - \vartheta_0)}} + \frac{1}{1 - a e^{-j(\vartheta + \vartheta_0)}} \right] = \frac{1 - a \cos \vartheta_0 e^{-j\vartheta}}{1 - 2a \cos \vartheta_0 e^{-j\vartheta} + a^2 e^{-j2\vartheta}}.$$

Ha $a = \pm 1$, akkor a jel nem abszolút összegezhető, ezért ha ezt helyettesítjük a fenti kifejezésbe, akkor nem kapjuk meg a belépő szinuszos jel spektrumát. #

Az $x[k] = 1$ illetve az $x(t) = 1$ jel spektrumát (13) vagy (15) adja. A (28) modulációs tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{j\vartheta_0 k}\} &= 2\pi \delta(\vartheta - \vartheta_0), \quad -\pi < \vartheta < \pi, \quad -\pi < \vartheta_0 < \pi; \\ \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} &= 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (3.2-30)$$

A $\cos \vartheta_0 k$, $\sin \vartheta_0 k$ illetve a $\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$ jelek spektruma ebből az Euler-reláció felhasználásával meghatározható. Az összefüggések előállítását az Olvasóra bizzuk. Az eredmények azt a nyilvánvaló tényt fejezik ki, hogy a ϑ_0 illetve az ω_0 körfrekvenciájú szinuszos jel spektruma mindenütt nulla, kivéve a $\pm \vartheta_0$ (és a $\vartheta_0 \pm n2\pi$) illetve a $\pm \omega_0$ körfrekvenciákat. A Fourier-sor felhasználásával előállíthatjuk bármely periodikus jel spektrumát is összeg alakjában.

Hasonló módon kapjuk a (14) vagy a (17) és a (28) felhasználásával, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\varepsilon[k] e^{j\vartheta_0 k}\} &= \pi \delta(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{1}{1 - e^{-j(\vartheta - \vartheta_0)}}, \quad -\pi < \vartheta < \pi, \quad -\pi < \vartheta_0 < \pi; \\ \mathcal{F}\{\varepsilon(t) e^{j\omega_0 t}\} &= \pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)}. \end{aligned} \quad (3.2-31)$$

Az $\varepsilon[k] \cos \vartheta_0 k$, $\varepsilon[k] \sin \vartheta_0 k$ illetve az $\varepsilon(t) \cos \omega_0 t$, $\varepsilon(t) \sin \omega_0 t$ belépő jelek spektruma ebből az Euler-reláció felhasználásával egyszerűen előállítható.

A belépő szinuszos jelek spektruma a $\pm \vartheta_0$ (és a $\vartheta_0 \pm n2\pi$) illetve a $\pm \omega_0$ körfrekvencián végtelenné válik, és véges értékű a többi körfrekvencián. Ha figyelmen kívül hagyjuk a spektrum Dirac-impulzus összetevőjét, akkor az inverz transzformáció nem az eredeti jelet adja, hanem a (30) felhasználásával számítható más jelet. A spektrum jellegét tekintve viszont a spektrum Dirac-impulzus típusú összetevője nem jelent lényeges információt, hiszen a másik tag is végtelenné válik ott, ahol a Dirac-impulzus nem nulla.

Szorzás hatványfüggvénnyel

Ha $x[k]$ illetve $x(t)$ véges hosszúságú, korlátos jel és $\mathcal{F}\{x[k]\}=X(e^{j\vartheta})$ illetve $\mathcal{F}\{x(t)\}=X(j\omega)$, akkor

$$\mathcal{F}\{k x[k]\}=j \frac{dX(e^{j\vartheta})}{d\vartheta}, \quad \mathcal{F}\{t x(t)\}=j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}. \quad (3.2-32)$$

A tétel ismételten alkalmazható. Ennek alapján megállapítható, hogy a jel szorzása az időtartományban a k^n illetve a t^n ($n \in \mathbf{N}$) tényezővel megfelel a frekvenciatartományban n -szeri differenciálásnak és j^n tényezővel végzett szorzásnak. A tétel alkalmazható nem véges hosszúságú jelekre is, ha nem csak $x[k]$, hanem $k^n x[k]$ is abszolút összegezhető illetve ha nem csak $x(t)$, hanem $t^n x(t)$ is abszolút integrálható. Ez a helyzet például, ha $x[k]=\varepsilon[k]a^k$, $|a|<1$, vagy ha $x(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$.

A tétel formálisan könnyen igazolható a spektrum (4) kifejezése alapján.

2. példa A (32) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}\{(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L])k\}=j \frac{d}{d\vartheta} \frac{1-e^{-jL\vartheta}}{1-e^{-j\vartheta}} = \frac{e^{-j\vartheta} - L e^{-jL\vartheta} + (L-1)e^{-j(L+1)\vartheta}}{(1-e^{-j\vartheta})^2}.$$

Az $L \rightarrow \infty$ határátmenet nem értelmezett, ami megfelel annak, hogy az $\varepsilon[k]k$ jelet nem tekintjük Fourier-transzformálhatónak. #

Folytonos idejű jelek deriváltja és integrálja

Ha $\mathcal{F}\{x(t)\}=X(j\omega)$, akkor a folytonos idejű jel általánosított deriváltjának spektruma

$$\mathcal{F}\{x'(t)\}=j\omega X(j\omega). \quad (3.2-33)$$

A tétel ismételten is alkalmazható. Ennek alapján az mondható, hogy a jel n -szeres differenciálása megfelel a $(j\omega)^n$ tényezővel végzett szorzásnak. A tétel nem meglepő, hiszen az inverz Fourier-transzformáció a jelet $e^{j\omega t}$ alakú jelek szuperpozíciójaként állítja elő. Feltételeztük, hogy ha $x(t)$ abszolút integrálható, akkor ez deriváltjaira is igaz. Ez csak kellően sima függvényekre teljesül.

A tétel a (2) mindkét oldalának t szerinti differenciálásával formálisan könnyen igazolható.

Példaként tekintsük az egységugrást és deriváltját (a Dirac-impulzust): valamint ezek már ismert spektrumát:

$$x(t) = \varepsilon(t), \quad X(j\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}; \quad x'(t) = \delta(t), \quad \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1;$$

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = j\omega \left\{ \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right\} = 1,$$

mivel $\delta(\omega) = 0$, ha $\omega \neq 0$, míg az $\omega = 0$ helyen a $j\omega$ tényező nulla.

Ha $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$, továbbá ha $x(t)$ integrálja és $X(j0)$ létezik, akkor

$$\mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0) \delta(\omega). \quad (3.2-34)$$

Ha $x(t)$ abszolút integrálható, akkor (4)-ből következik, hogy

$$X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt.$$

Az időtartománybeli integrálás nem egyszerűen osztásnak felel meg a frekvenciatartományban, hanem még egy additív tag is megjelenik. Ez azért nincs ellentmondásban a (33)-mal, mivel $j\omega \delta(\omega) = 0$.

A (34) igazolása körülményes. Ez nem is meglepő, mert az integrálás gyakran elrontja az eredeti jel abszolút integrálhatóságát.

A (34) ellenőrizhető például $x(t) = \delta(t)$ esetére, amelynek integrálja $\varepsilon(t)$. Ha azonban $x(t) = 1$, $X(j\omega) = 2\pi \delta(\omega)$, akkor (34) nem alkalmazható. E tételt nem fogjuk alkalmazni.

A skálázás megváltoztatása

Ha $\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\theta})$ és $M \in \mathbf{N}$, illetve ha $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$, akkor

$$f[k] = \begin{cases} x\left(\frac{k}{M}\right), & \frac{k}{M} \in \mathbf{Z}, \\ 0, & \text{egyébként;} \end{cases} \quad \mathcal{F}\{f[k]\} = X(e^{jM\theta}) \quad (3.2-35a)$$

$$g[k] = x[Mk], \quad \mathcal{F}\{g[k]\} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j(\theta - l2\pi/M)})$$

$$g(t) = x(at), \quad \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right). \quad (3.2-35b)$$

Az $f[k]$ jel „szélesebb”, a $g[k]$ jel „keskenyebb” mint az $x[k]$ jel. A $g(t)$ jel $|a| < 1$ esetén „szélesebb”, $|a| > 1$ esetén „keskenyebb” mint az $x(t)$ jel. Ezt legegyszerűbben egy véges hosszúságú jellel szemléltethetjük. A szélesebb jelhez keskenyebb spektrum tartozik és viszont. Az $f[k]$ jel spektruma nem csak 2π , hanem $2\pi/M$ szerint is periodikus.

Az $x[k] \rightarrow f[k]$ jelátalakítást szokás *interpolálásnak* is nevezni (az f két, egymást követő, az x -ből származó értéke közé $M-1$ számú 0 értéket iktatunk), az $x[k] \rightarrow g[k]$ jelátalakítást pedig *decimálásnak* (a g csak az x minden M -edik értékét veszi figyelembe, „megtizedeli” az x jelet).

A tétel igazolása a (2) felhasználásával igen egyszerű.

Parseval tétele

Egy valós vagy komplex értékű DI illetve FI jel *energiája* az (1.1-38) definíció szerint

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2, \quad E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (3.2-36)$$

Ha a jel energiája véges (a DI jel négyzetesen összegezhető, illetve a FI jel négyzetesen integrálható) továbbá ha $\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\vartheta})$ illetve $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$ létezik, akkor *Parseval tétele* értelmében

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta, \quad E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.2-37)$$

Az $|X(e^{j\vartheta})|^2$ az $x[k]$ DI jel, illetve az $|X(j\omega)|^2$ az $x(t)$ FI jel *energiaspektruma*, hiszen a (37) úgy értelmezhető, hogy a jel energiája el van osztva a frekvenciák mentén, az $|X(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta = A_x^2(\vartheta) d\vartheta$ illetve az $|X(j\omega)|^2 d\omega = A_x^2(\omega) d\omega$ arányos a $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ illetve az $(\omega, \omega + d\omega)$ frekvenciasávban tárolt energiával. Spektruma páros, az energia a fél intervallumra vett integrál kétszerese.

Parseval tételének általánosabb alakja két, komplex értékű jelre

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y^*[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) Y^*(e^{j\vartheta}) d\vartheta, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y^*(j\omega) d\omega. \quad (3.2-38)$$

Feltételeztük, hogy az összeg és az integrálok véges értékűek.

Igazoljuk a (38) összefüggést a folytonos idejű esetre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\}^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\} d\omega,$$

ami éppen a (38)-at adja. A DI eset igazolása hasonlóan végezhető el.

Konvolúció

Mint már láttuk, a h és u DI, illetve FI jel konvolúciója definíció szerint

$$h[k] * u[k] \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i] u[i], \quad h(t) * u(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau. \quad (3.2-39)$$

Ha $\mathcal{F}\{h[k]\} = H(e^{j\vartheta})$, $\mathcal{F}\{u[k]\} = U(e^{j\vartheta})$ illetve ha $\mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega)$, $\mathcal{F}\{u(t)\} = U(j\omega)$ egyaránt létezik, akkor *konvolúciójuk spektruma* a spektrumuk szorzata:

$$\mathcal{F}\{h[k] * u[k]\} = H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta}), \quad \mathcal{F}\{h(t) * u(t)\} = H(j\omega) U(j\omega). \quad (3.2-40)$$

Ez a tétel nagyon fontos elvi szempontból, alkalmazása már a választott jelölésekből is sejtethető. Számítástechnikai célokra ritkán használjuk.

A tétel formális igazolása a FI esetben:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)U(j\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Feltételeztük, hogy az integrálások sorrendje felcserélhető, ami biztosan jogos, ha $h(t)$ és $u(t)$ abszolút integrálható. Hasonló a DI eset igazolása is.

Az időtartománybeli szorzásnak frekvenciatartománybeli konvolúció felel meg:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f[k]g[k]\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\lambda})G(e^{j(\vartheta-\lambda)})d\lambda \equiv F(e^{j\vartheta}) * G(e^{j\vartheta}), \\ \mathcal{F}\{g(t)g(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\lambda)GV(j(\omega-\lambda))d\lambda \equiv F(j\omega) * G(j\omega).\end{aligned}\tag{3.2-41}$$

Ezt a tételt ritkán használjuk. Formális igazolása az előzőhöz hasonló. A frekvenciatartománybeli konvolúciót szokás úgy is értelmezni, hogy $F * G$ előtt egy 2π osztó szerepel.

Folytonos idejű jelek szimmetria tulajdonsága

Legyen $\mathcal{F}\{u(t)\}=U(j\omega)$ és $\mathcal{F}\{v(t)\}=V(j\omega)$. Ha $u(t)$ úgy tekinthető, mint a $V(j\omega)$, ha abban ω helyére a t változót írjuk, akkor $u(t)$ spektruma a $v(t)$ ismeretében a következő módon állítható elő:

$$\text{ha } u(t)=V(j\omega)\Big|_{\omega=t}, \text{ akkor } U(j\omega)=2\pi v(t)\Big|_{t=-\omega}.\tag{3.2-42}$$

A tétel a transzformáció és inverzének szimmetriájából következik. A részletszámításokat az Olvasóra bizzuk. A tétel felhasználásával ismert $u(t), U(j\omega)$ párból esetleg újabb párokat állíthatunk elő. A tétel akkor használható, ha a jelek párosak, ezért spektrumuk valós értékű.

Láttuk például, hogy ha $v(t)=\delta(t)$, akkor $V(j\omega)=1$. A (42) értelmében ezért $\mathcal{F}\{1\}=2\pi\delta(-\omega)\equiv 2\pi\delta(\omega)$, amint azt ugyancsak tudjuk.

A tétel egy alkalmazásaként igazoljuk, hogy a Gauss-jel (amely páros) spektruma maga is Gauss függvény:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-(\alpha t)^2}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-(\omega/2\alpha)^2}.\tag{3.2-43}$$

Legyen ugyanis $u(t)=e^{-(\alpha t)^2}$, akkor $V(j\omega)=e^{-(\alpha\omega)^2}$. Ha a (43) helyes, akkor a $V(j\omega)$ inverz transzformáltja $2\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$ helyettesítéssel

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\alpha} e^{-(t/2\alpha)^2}, \quad U(j\omega) = 2\pi \frac{1}{2\sqrt{\pi}\alpha} e^{-(\omega/2\alpha)^2},$$

vagyis a feltételezett (43) kiadódik.

Pozitív frekvenciák tartománya

Mint már említettük, valós x esetén a spektrumnak a negatív frekvencián felvett értéke a pozitív frekvencián felvett értékének konjugáltja. Ezért például DI jel esetén

$$\begin{aligned} x[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta + \int_0^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} X(e^{-j\lambda}) e^{-j\lambda k} d\lambda + \int_0^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta \right\}. \end{aligned}$$

Az első integrál a második konjugáltja, összegük a valós rész kétszerese. Hasonló módon adódik a FI jelre vonatkozó összefüggés. Végeredményben *valós értékű* jel esetén

$$x[k] = \frac{1}{\pi} \mathcal{R}_e \left\{ \int_0^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta \right\}; \quad x(t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{R}_e \left\{ \int_0^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\}. \quad (3.2-44)$$

Ez az összefüggés számítástechnikai egyszerűsítést jelenthet. Fogalmi előnye, hogy nem tartalmazza a fizikailag értelmetlen negatív frekvenciákat.

3.2-1.4. Speciális jelek spektruma

Vannak olyan speciális jelek, amelyek spektruma ugyancsak speciális tulajdonságú. Ezek közül néhányat ebben a pontban, két további a következő pontban tárgyalunk.

Páros és páratlan jelek

Ha x egy valós értékű *páros jel*, akkor spektruma *valós értékű*, ha x egy valós értékű *páratlan jel*, akkor spektruma *képzetes értékű*. Formálisan megfogalmazva:

$$x \text{ páros} \Leftrightarrow X = X^*, \quad x \text{ páratlan} \Leftrightarrow X = -X^*. \quad (3.2-45)$$

A csillag a konjugáltat jelöli. A (2) értelmében ugyanis például DI jelre

$$x[-k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{-j\vartheta k} d\vartheta = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta \right\}^*.$$

Az utolsó "csillag" elhagyható, mivel x valós értékű. Hasonló az igazolás FI jelekre.

Ajánljuk az Olvasónak az összefüggések ellenőrzését korábban tárgyalt páros és páratlan jelekre. Például a Dirac-impulzus páros jelnek tekinthető, spektruma, mint láttuk, $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ amely valóban valós értékű.

Belépő jelek

Egy v *belépő jel* nulla értékű a $k = 0$ illetve a $t = 0$ időpont előtt:

$$v[k] = 0, \quad t \in \mathbf{Z}; \quad v(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}_-. \quad (3.2-46)$$

Mint már láttuk, a valódi folyamatot többnyire belépő jellel célszerű leírni, ezért érdekes a spektrumára vonatkozó alábbi, főként elvi szempontból lényeges tétel.

Egy valós értékű v belépő jel spektrumának valós részét jelölje P_v , képzetes részét jelölje Q_v , vagyis

$$\mathcal{F}\{v\} = P_v + jQ_v \quad (3.2-47)$$

Ezek kölcsönösen meghatározzák egymást, más szóval *Hilbert-transzformációs párt* alkotnak (szokás az összefüggésekre *Bode-tételként* is hivatkozni):

$$Q_v(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P_v(\lambda)}{\operatorname{tg}([\lambda - \vartheta]/2)} d\lambda, \quad P_v(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_v(\vartheta) d\vartheta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Q_v(\lambda)}{\operatorname{tg}([\lambda - \vartheta]/2)} d\lambda; \quad (3.2-48)$$

$$Q_v(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_v(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda, \quad P_v(\omega) = P_v(\infty) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_v(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda.$$

Az integrálokat Cauchy-főértékként kell értelmezni (lásd a példát), tényleges számításuk rendszerint csak közelítőleg lehetséges.

Ha felhasználjuk, hogy P_v páros és Q_v páratlan függvény, akkor az integrálok átírhatók a pozitív féltengelyre vonatkozó integrálókká. Ez különösen FI jelek esetén lehet hasznos, ezért az erre vonatkozó összefüggések megadására szorítkozunk:

$$Q_v(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_v(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda, \quad P_v(\omega) = P_v(\infty) - \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_v(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda. \quad (3.2-49)$$

Ha még feltételezzük, hogy a P illetve a Q függvény differenciálható, akkor az összefüggés átalakítható:

$$Q_v(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P'_v(\lambda) \ln \left| \frac{\lambda - \omega}{\lambda + \omega} \right| d\lambda, \quad P_v(\omega) = P_v(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q'_v(\lambda) \ln |\lambda^2 - \omega^2| d\lambda. \quad (3.2-50)$$

Ez az alak akkor lehet hasznos, ha $P_v(\omega)$, illetve $Q_v(\omega)$ jól közelíthető intervallumonként lineáris függvénnyel, tehát deriváltja intervallumonként állandó értékkel.

A tételek további alakjai is ismertek.

Mivel a belépő jel spektrumának akár a valós, akár a képzetes része meghatározza a másikat, ezért bármelyik meghatározza a belépő jelet. Igazolhatók a következő összefüggések a $v[k]$ illetve $v(t)$ belépő jellel:

$$v[k] = v[0] \delta[k] + \frac{2}{\pi} \varepsilon[k-1] \int_0^{\pi} P_v(\vartheta) \cos \vartheta k d\vartheta, \quad v[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_v(\vartheta) d\vartheta; \quad (3.2-51a)$$

$$v[k] = v[0] \delta[k] - \frac{2}{\pi} \varepsilon[k-1] \int_0^{\pi} Q_v(\vartheta) \sin \vartheta k d\vartheta,$$

$$v(t) = P_v(\infty) \delta(t) + \frac{2}{\pi} \varepsilon(t) \int_0^{\infty} P_v(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (3.2-51b)$$

$$v(t) = P_v(\infty) \delta(t) - \frac{2}{\pi} \varepsilon(t) \int_0^{\infty} Q_v(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

A spektrum valós része teljesen, képzetes része egy additív állandó erejéig határozza meg a belépő jelet.

Példa Legyen $P_v(\omega) = 1, |\omega| < \Omega$ és $P_v(\omega) = 0, |\omega| > \Omega$.

Határozzunk meg egy $Q_v(\omega)$ függvényt úgy, hogy $V(j\omega) = P_v(\omega) + jQ_v(\omega)$ egy folytonos idejű, belépő jel spektruma legyen.

A (48) értelmében $0 < \omega < \Omega$ esetén

$$\begin{aligned} Q_v(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\Omega}^{\omega - \varepsilon} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} + \frac{1}{\pi} \int_{\omega + \varepsilon}^{\Omega} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \ln \frac{-\varepsilon}{-\Omega - \omega} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Omega - \omega}{\varepsilon} \right\} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Omega - \omega}{\Omega + \omega}. \end{aligned}$$

Ha $\omega > \Omega$, akkor

$$Q_v(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Omega - \omega}{-\Omega - \omega} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\omega - \Omega}{\Omega + \omega}.$$

Ezek szerint a $v(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V(j\omega)\}$ jel akkor belépő, ha

$$V(j\omega) = 1 + \frac{j}{\pi} \ln \frac{\Omega - \omega}{\Omega + \omega}, \quad 0 \leq \omega < \Omega; \quad V(j\omega) = \frac{j}{\pi} \ln \frac{\omega - \Omega}{\Omega + \omega}, \quad \Omega < \omega < \infty.$$

Nem könnyű belátni, hogy e spektrumhoz a

$$v(t) = \varepsilon(t) \frac{\Omega \sin \Omega t}{\pi \Omega t}$$

belépő jel tartozik. Ez nullához tart, de nem abszolút integrálható. #

3.2-1.5. Sávkorlátozott folytonos idejű jelek

Egy folytonos idejű és véges energiájú jel spektruma - Parseval tételéből következően - nullához tart a frekvencia növekedésével. Ilyen jelekre ezért mindig választható egy olyan frekvencia, amely fölött az amplitúdó-spektruma elhanyagolhatóan kicsi.

Egy $x(t)$ sávkorlátozott folytonos idejű jel $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ spektruma azonosan nulla egy Ω sávkorlát fölött:

$$X(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \Omega. \quad (3.2-52)$$

Többnyire Ω a legkisebb lehetséges értékét jelenti. Szokásos a sávkorlátot az Ω körfrekvencia helyett az $f_B = \Omega / 2\pi$ frekvenciával vagy az $f_N = 2f_B = \Omega / \pi$ Nyquist-frekvenciával jellemezni. Az Ω vagy az f_B helyett a B ("bandwidth") jel is használatos.

Megmutatjuk, hogy a véges energiájú sávkorlátozott jel egyértelműen meghatározott $x(pT)$; $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ mintái által, ahol T olyan időköz, amelyre $T \leq \pi / \Omega$ vagyis $T \leq T_N \equiv 1 / f_N$ teljesül.

A sávkorlátozott jel spektruma a $-\Omega < \omega < \Omega$ intervallumban leírható a Fourier-sorával. Az ω -beli periódus hossza 2Ω az ennek megfelelő ω -beli "alap körfrekvencia" $2\pi / 2\Omega = \pi / \Omega$. A Fourier-sor és a Fourier-együtthatók kifejezése (3.1-2.4. pont)

$$X(j\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C e^{jp\omega\pi/\Omega}, \quad -\Omega < \omega < \Omega; \quad X_p^C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(j\omega) e^{-jp\omega\pi/\Omega} d\omega, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Fejazzük ki az időfüggvényt inverz Fourier-transzformációval:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C e^{jp\omega\pi/\Omega} \right\} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{j\omega(t+p\pi/\Omega)} d\omega.$$

A tagonkénti integrálás a jel véges energiátartalma miatt jogos. Az integrál nehézség nélkül számítható. A jel kifejezése

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C \frac{e^{j\Omega(t+p\pi/\Omega)} - e^{-j\Omega(t+p\pi/\Omega)}}{j(t+p\pi/\Omega)} = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C \frac{\sin \pi(t/T + p)}{\pi(t/T + p)}, \quad T \equiv \frac{\pi}{\Omega}.$$

Hasonlítsuk össze X_p^C és az $x(t)$ inverz Fourier-transzformált alakját:

$$X_p^C = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(j\omega) e^{-jp\omega T} d\omega, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

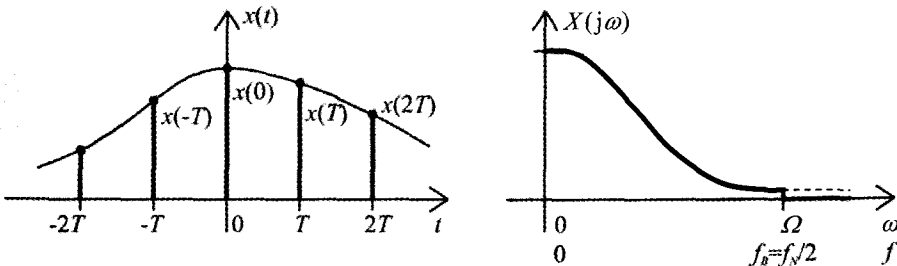
Látható, hogy $X_p^C = T x(-pT)$. Helyettesítsük ezt az $x(t)$ előállított kifejezésébe, akkor megkapjuk az előzetesen már elmondott tétel konkrét alakját.

A folytonos idejű, véges energiájú, Ω sávkorlátú sávkorlátozott $x(t)$ jel rekonstruálható $x(pT)$ mintái ismeretében (T a mintavételi periódusidő):

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(pT) \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T} - p \right)}{\pi \left(\frac{t}{T} - p \right)}, \quad T \equiv \frac{\pi}{\Omega}. \quad (3.2-53)$$

Ez a sávkorlátozott jelekre vonatkozó *mintavételi tétel* vagy *Nyquist-tétel*.

A jelet, mintáit és a spektrumot szemlélteti a 4. ábra. A sávkorlátozott jel folytonos, nem lehet időkorlátozott.



3.2-4. ábra Sávkorlátozott jel időfüggvénye, mintái és amplitúdó-spektruma

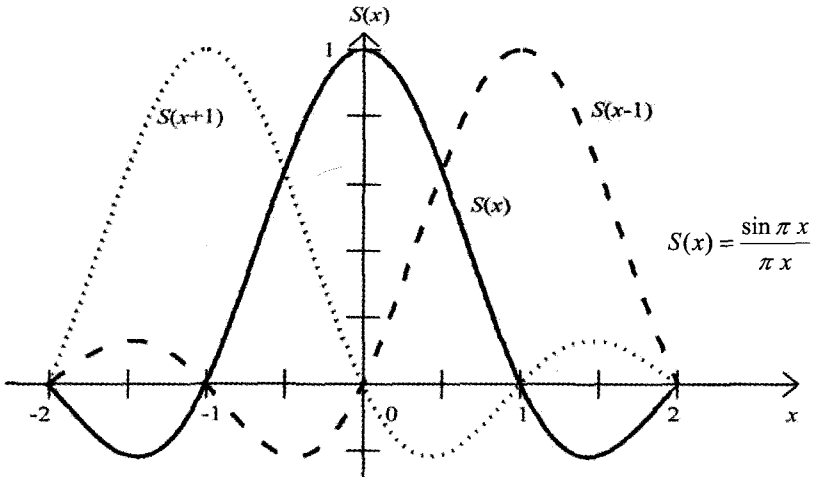
A gyakorlatban csak véges számú mintát vehetünk figyelembe, továbbá egy valódi jel ritkán sávkorlátozott a definíció szigorú értelmében. A mintavételi tétel következő megfogalmazása ezért gyakran hasznosabb az eredetinél.

Egy $x(t)$ jel $x(pT)$; $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ mintái ismeretében előállíthatjuk a jel egy $\Omega = \pi/T$ sávkorlátú $x_\Omega(t)$ sávkorlátozott közelítését:

$$x_\Omega(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(pT) S\left(\frac{t}{T} - p\right); \quad S(\xi) \equiv \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}. \quad (3.2-54)$$

A közelítés a mintavételi időpontokban hibátlan, azaz $x_\Omega(pT) = x(pT)$, $p \in \mathbf{Z}$. Az $S(\xi)$ függvényre a sinc(ξ) jel is használatos.

Az (54) közelítő alkalmazása során az összegezés határait szimmetrikusan kell választani, azaz $p_{\min} = -N$, $p_{\max} = +N$. Az N választását a pontossági igény határozza meg. A közelítés természetesen annál jobb, minél kisebb T mintavételi periódusidőt választunk, hiszen annál nagyobb a közelítő jel Ω sávkorlátja.



3.2-5. ábra A mintavételi tételben szereplő $S(x)$ függvény és két eltolt változata

Ha a sávkorlátozott $x(t)$ jelnek nem csak az $x(pT)$ mintái ismertek, hanem $x'(t)$ deriváltjának $x'(pT)$ mintái is, akkor a jel rekonstruálható $T_1 = 2\pi / \Omega = 2T$ mintavételi periódusidővel is. Az $x(t)$ kifejezése ekkor is az (53)-ra hasonlít, de annál bonyolultabb.

A mintavételi tételnek gyakorlati jelentőségét az adja, hogy a tétel értelmében egy FI jel feldolgozható egy DI jelként (rendszerint digitális jelként). A "felülmintavételezés" azt jelenti, hogy a feltétlenül szükségesnél kisebb mintavételi periódusidőt, vagyis nagyobb mintavételi frekvenciát választunk, tehát pontosabb sávkorlátozott közelítést tudunk előállítani.

Példa Legyen a jel egy négyszögimpulzus (2. ábra). A (10) értelmében

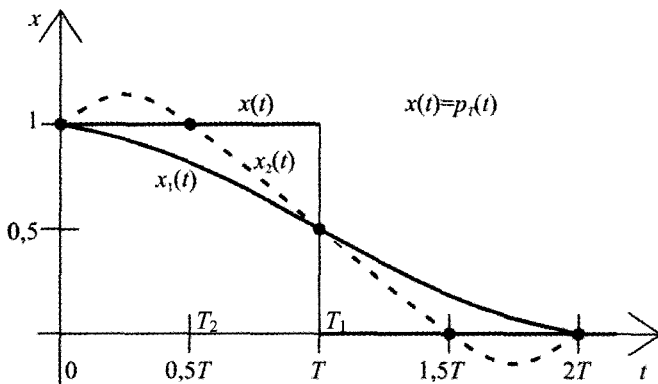
$$x(t) = p_T(t) \equiv \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T); \quad X(j\omega) = 2T S\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) \equiv 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}.$$

Ez a jel nem sávkorlátozott, de mivel $|X(j\omega)| \rightarrow 0$, $|\omega| \rightarrow \infty$ teljessül rá, ezért közelítőleg sávkorlátozottnak tekinthetjük.

Első közelítésben tekintsük sávkorlátnak a spektrum első nullahelyét, azaz legyen $\Omega_1 = \pi/T$. A mintavételi periódusidő ekkor $T_1 = T$, vagyis az impulzus hosszának fele.

A jel mintái $x(0) = 1, x(\pm T_1) = 0,5$ (a számtani közép a szakadási helyen) és minden más $x(pT_1) = 0$. A sávkorlátozott közelítés ekkor

$$x_1(t) = S\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{2} S\left(2\frac{t}{T} - 1\right) + \frac{1}{2} S\left(2\frac{t}{T} + 1\right).$$



3.2-6. ábra A négyszögimpulzus fele és két sávkorlátozott közelítése

Második közelítésként legyen $\Omega_2 = 2\pi/T, T_2 = T/2$. A minták ekkor $x(0) = x(\pm T_2) = 1, x(\pm 2T_2) = 0,5$, minden további $x(pT_2) = 0$. A sávkorlátozott közelítés ekkor

$$x_2(t) = S\left(2\frac{t}{T}\right) + S\left(2\frac{t}{T} - 1\right) + S\left(2\frac{t}{T} + 1\right) + \frac{1}{2} S\left(4\frac{t}{T} - 2\right) + \frac{1}{2} S\left(4\frac{t}{T} + 2\right).$$

A 6. ábra mutatja a jelet és két fenti sávkorlátozott közelítését. A mintavételi időpontokban a közelítés hibamentes. Nagyobb sávkorlátot (kisebb mintavételi periódusidőt) választva a közelítés hibája csökkenthető. Hibamentes közelítés nem biztosítható ilyen módon, mert a jel nem sávkorlátozott. #

Egy folytonos idejű jel sávkorlátozott közelítése értelmezhető az (54)-től eltérő módon is, hiszen nem magától értetődő, hogy az a közelítés optimális, amely bizonyos időpontokban megegyezik a pontos értékkel.

Egy folytonos idejű, valós értékű $x(t)$ jel *négyszetes közép értelemben optimális sávkorlátozott közelítésének* nevezzük azt az $\hat{x}_\Omega(t)$ sávkorlátozott jelet, amelyre a

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{x}_\Omega(t) - x(t)]^2 dt \quad (3.2-55)$$

hibamérték minimális. Igazolni fogjuk, hogy ennek spektruma az $x(t)$ jel spektrumának a csonkítottja:

$$\hat{X}_\Omega(j\omega) = p_\Omega(\omega) X(j\omega). \quad (3.2-56)$$

Itt a (10) értelmében a frekvenciatománybeli négyszögimpulzus és időfüggvénye

$$p_\Omega(\omega) = \varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega); \quad \mathcal{F}^{-1}\{p_\Omega(\omega)\} = \frac{\Omega}{\pi} \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}. \quad (3.2-57)$$

A választott hibamérték ugyanis Parseval tétele értelemben kifejezhető a jelek spektrumával:

$$\begin{aligned} 2\pi J &= \int_{-\infty}^{\infty} |X_{\Omega}(j\omega) - X(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{-\Omega} |X(j\omega)|^2 d\omega + \int_{-\Omega}^{\Omega} |X_{\Omega}(j\omega) - X(j\omega)|^2 d\omega + \int_{\Omega}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Csak a középső integrál függ $X_{\Omega}(j\omega)$ megválasztásától. Mivel ennek integrandusza nemnegatív, ezért nyilván akkor minimális, ha nullának választható, ami a megadott spektrum csonkítását jelenti.

Az ilyen értelemben sávkorlátozott közelítés időfüggvénye a Fourier-transzformáció konvolúció tétele értelmében

$$\hat{x}_{\Omega}(t) = \frac{\Omega}{\pi} \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} * x(t) \equiv \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega \tau}{\Omega \tau} x(t - \tau) d\tau. \quad (3.2-58)$$

Nyilvánvaló, hogy általában nincs olyan T időköz, amelynek egész számú sokszorosainál a közelítő jel megegyezik az eredetivel.

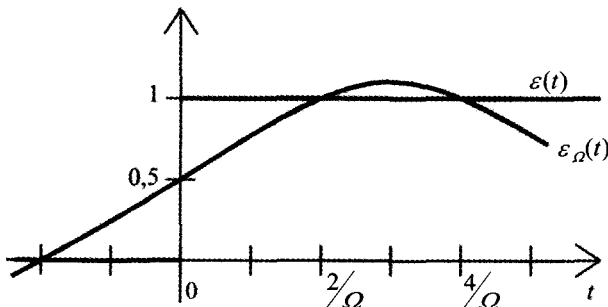
Az egységugrás négyzetes közép értelemben optimális sávkorlátozott közelítése

$$\hat{\varepsilon}_{\Omega}(t) = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega \tau}{\Omega \tau} \varepsilon(t - \tau) d\tau = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\sin \Omega \tau}{\Omega \tau} d\tau \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\Omega t} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda.$$

Az úgynevezett integrálszínusz (jele: Si) függvény bevezetésével:

$$\hat{\varepsilon}_{\Omega}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\Omega t); \quad \text{Si}(\xi) \equiv \int_0^{\xi} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda. \quad (3.2-59)$$

Az egységugrás és sávkorlátozott közelítésének grafikonja a 7. ábrán látható. Minél nagyobb sávkorlátot választunk, annál kisebb a négyzetes hiba. Az első maximum helye egyre közelebb kerül a $t = 0$ helyhez (ahol a közelítő függvény értéke $1/2$), de a maximum a sávkorlát növelésekor nem csökken egy korlát alá, amely kb. 1,09 értékű. Ez a *Gibbs-jelenség*. (Ennek megfelelőjét a periodikus jel véges tagszámú közelítő Fourier-soros előállításánál már említettük.) A belépő egységugrás csonkításos sávkorlátozott közelítése nem belépő jel. Általában is igaz, hogy egy belépő jel sávkorlátozott közelítése nem belépő jel. A 7. ábrából az is látható, hogy az egységugrás csonkításos sávkorlátozott



3.2-7. ábra Az egységugrás és csonkításos (négyzetes közép értelemben optimális) sávkorlátozott közelítése; megfigyelhető a Gibbs-jelenség

közelítése körülbelül a $2/\Omega$ idő egész többszöröseinél pontos.

A csonkításos sávkorlátozott közelítő jel és az eredeti jel értékei bizonyos időpontokban megegyezhetnek, de ezek az időpontok nem mutatnak szabályosságot. A csonkításból fakadó túllendülést is figyelembe véve nyilvánvaló, hogy a csonkításos sávkorlátozás sem minden szempontból optimális. Ezzel a problémával a duális feladat (időkorlátozott jelek) tárgyalása során még foglalkozunk a 3.2-1.7. pontban.

Megemlítjük, hogy ha a túllendülést valamilyen módon lecsökkentjük vagy kiküszöböljük, akkor az ugrás helyén a felfutás kevésbé lesz meredek. Ez ismét rámutat arra, hogy nem lehet egyértelműen optimális sávkorlátozott közelítést értelmezni.

*3.2-1.6. Időkorlátozott folytonos idejű jelek

Egy valódi jel mindig időkorlátozott, vagyis nulla egy adott időpont előtt és egy másik időpont után. Az egyszerűsítés érdekében azonban gyakran feltételezzük, hogy a jel örökké tart (például az egységugrás) vagy végtelenül régen kezdődött (például a szinuszos jel). Figyelembe véve a FI Fourier-transzformáció és inverze közötti hasonlóságot, az előző pont eredményei alapján a következő tétel nem igényel részletes magyarázatot.

Egy $x(t)$ időkorlátozott jel azonosan nulla $t = -T$ előtt és $t = +T$ után:

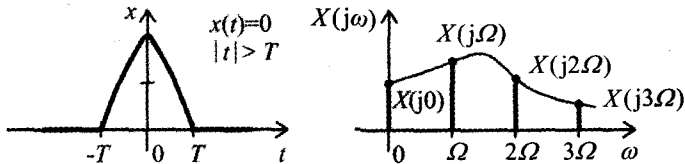
$$x(t) = 0, \quad |t| > T. \quad (3.2-60)$$

A $2T$ hosszúságú időkorlátozott, véges energiájú jel $X(j\omega)$ spektruma meghatározható $X(jn\Omega)$ mintái ismeretében a következő alakban:

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jn\Omega) S\left(\frac{\omega}{\Omega} - n\right); \quad S(\xi) \equiv \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}, \quad \Omega = \frac{\pi}{T}. \quad (3.2-61)$$

Többnyire T a legkisebb lehetséges értéket jelenti. Az időkorlátozott jelre a szimmetrikus határokat csak kényelmi okokból választottuk, az időtengely eltolásával ez mindig elérhető.

Ha a jel valós értékű és páros, akkor spektruma is valós értékű, tehát annak mintái is valós értékűek.



3.2-8. ábra Időkorlátozott jel, spektruma és a spektrum mintái

A jel, a spektruma és annak mintái a 8. ábrán láthatók. Egy időkorlátozott jel sohasem sávkorlátozott, de ha energiataralma véges, akkor spektruma a frekvencia növekedésével nullához tart, tehát értelmezhető rá közelítőleg egy sávkorlát. Az állításban az időkorlát és a sávkorlát szerepe meg is fordítható.

Az időkorlátozott jel spektrumára vonatkozó mintavételi tételt is átfogalmazhatjuk közelítő összefüggést kifejező alábbi alakra.

Ismerve egy tetszőleges jel $X(j\omega)$ spektrumának $X(jn\Omega)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ mintáit, képezhetjük az

$$X_T(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jn\Omega) S\left(\frac{\omega}{\Omega} - n\right); \quad S(\xi) \equiv \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}, \quad T = \frac{\pi}{\Omega} \quad (3.2-62)$$

spektrumot. Ennek inverz Fourier-transzformáltja egy $x_T(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_T(j\omega)\}$ időkorlátozott jel. Az $X(j\omega)$ és az $X_T(j\omega)$ spektrum értékei az $\omega = n\Omega$, $n \in \mathbf{Z}$ körfrekvenciákon megegyeznek.

A spektrumot a mintái alapján a fentiek szerint egy olyan spektrummal helyettesítjük, amely egy időkorlátozott jelet állít elő. Ténylegesen természetesen csak véges számú tag összegét képezzük szimmetrikus határok között (tehát valamilyen $-N$ és $+N$ között).

Az időkorlátozott jel időkorlátai nem mindig a jel kezdetét és végét jelentik, hanem gyakran a jel *megfigyelésének* időtartamát, amely természetesen mindig véges.

A megfigyelt jelhez nem feltétlenül időkorlátozott (csonkított) jelet rendelünk. Egyes esetekben ugyanis a megfigyelt jelet egyik vagy mindkét irányban extrapolálhatjuk. Ha például a megfigyelés során a jel egy időpont után már gyakorlatilag állandó, akkor olyan jellel írhatjuk le, amely ezt az állandó értéket megőrzi. Gyakran azt tudjuk, hogy a jel belépő, ekkor értékei egy időpont előtt nullának tekintendők.

A következő pontban részletesebben foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy egy tetszőleges DI vagy FI jelhez miként célszerű egy előírt hosszúságú, vagyis időkorlátozott jelet rendelni. Mint látni fogjuk, nem feltétlenül az a kézenfekvő megoldás az optimális, amely szerint tekintjük a jelet a megfigyelési időközben az eredetivel egyezőnek, hanem célszerűbb lehet a jelet a megfigyelési időn belül súlyozni.

Egy másik lehetőség abban áll, hogy a jelet nem időkorlátozott jellel közelítjük, hanem olyan módon súlyozzuk, hogy eredményül balra és jobbra egyaránt eltűnő jel adódjék. Tipikus megoldás erre az, hogy eredeti jelet egy harang-alakú, a végtelenben mindkét irányban nullához tartó jellel szorozzuk, a szorzó jel alakját valamilyen szempont alapján megválasztjuk. Ez a jel az időkorlátozott jel egy közelítésének tekinthető, illetve megfordítva: az időkorlátozott jelet a végtelenben nullához tartó jellel közelítjük. Ezt a módszert nem részletezzük.

*3.2-1.7. Ablakozott jelek spektruma

Legyen $x[k]$ egy DI jel illetve $x(t)$ egy FI jel. Definiáljunk egy új $x_L[k]$ illetve $x_T(t)$ jelet, amely nulla $|k| > L$ illetve $|t| > T$ esetén és "hasznos" az eredeti jelhez $|k| \leq L$ illetve $|t| < T$ esetén. Az ilyen jelet az eredeti jel *ablakozott jelének* nevezzük. Az elnevezés azt érzékelteti, hogy az x jelet egy $2L + 1$ vagy $2T$ szélességű "ablakon" keresztül látjuk. A nem látható részhez zérus értéket rendelünk. A legegyszerűbb ablak mindenütt egyformán átlátszó. A gyakorlatban használt ablakok többnyire középen maximálisan átlátszók, átláthatóságuk szimmetrikus. Az ablak lehet ettől eltérő tulajdonságú is.

Egy ablakozó jel vagy röviden egy *ablak* egy olyan időkorlátozott jel, amely a

$$\begin{aligned} \text{DI: } & w_L[k] = 0, \quad |k| > L; \quad w_L[k] \geq 0, \quad |k| \leq L; \quad w_L[-k] = w_L[k]; \quad w_L[0] = 1; \\ \text{FI: } & w_T(t) = 0, \quad |t| > T; \quad w_T(t) \geq 0, \quad |t| \leq T; \quad w_T(-t) = w_T(t); \quad w_T(0) = 1 \end{aligned} \quad (3.2-63)$$

tulajdonságokkal rendelkezik. Az ablak hossza $2L + 1$, illetve $2T$.

Egy nagyon egyszerű ablakozó jel a négyzetes (derékszögű, állandó) ablak:

$$w_L[k] = p_L[k] \equiv \varepsilon[k+L] - \varepsilon[k-L-1], \quad w_T(t) = p_T(t) \equiv \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T). \quad (3.2-64)$$

Az $x[k]$ illetve az $x(t)$ jelhez a $w_L[k]$ illetve $w_T(t)$ ablakozó jellel rendelt $x_L[k]$ illetve $x_T(t)$ *ablakozott jel* értelmezése

$$\text{DI: } x_L[k] = w_L[k]x[k]; \quad \text{FI: } x_T(t) = w_T(t)x(t). \quad (3.2-65)$$

Az ablakozott jel hossza $2L+1$, illetve $2T$. Az ablak értelmezéséből következik, hogy $x_L[k] = 0, |k| > L$ illetve $x_T(t) = 0, |t| > T$.

Az ablakozással okozott torzítás annál kisebb, minél szélesebb az ablak vagy másként fogalmazva: minél jobban hasonlít az ablak a végtelen szélességű négyzetleges ablakra:

$$\text{DI: } w_\infty[k] = 1, k \in \mathbf{Z}; \quad \text{FI: } w_\infty(t) = 1, t \in \mathbf{R}. \quad (3.2-66)$$

A frekvenciatartományban ez a következőképpen fogalmazható meg. Az ablakozással okozott torzítás annál kisebb, minél jobban hasonlít az ablak $W_L(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{w_L[k]\}$ illetve $W_T(j\omega) = \mathcal{F}\{w_T(t)\}$ spektruma a végtelen szélességű ablak W_∞ spektrumához, amely a (13) vagy a (14) értelmében

$$\begin{aligned} \text{DI: } W_\infty(e^{j\vartheta}) &= 2\pi \delta(\vartheta), |\vartheta| \leq \pi; \\ \text{FI: } W_\infty(j\omega) &= 2\pi \delta(\omega). \end{aligned} \quad (2.3-67)$$

Az ablakozott jel spektruma (41) értelmében kifejezhető az ablak spektrumának és a jel spektrumának frekvenciatartománybeli konvolúciójaként:

$$\begin{aligned} X_L(e^{j\vartheta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_L(e^{j(\vartheta-\lambda)}) X(e^{j\lambda}) d\lambda; \\ X_T(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_T(j(\omega-\lambda)) X(j\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (2.3-68)$$

Ha $W_L = W_\infty$ illetve ha $W_T = W_\infty$, akkor természetesen $X_L = X$ illetve $X_T = X$ adódik. Általános ablak esetén annak spektruma nem a Dirac-impulzus, hanem egy "elkenődött" Dirac-impulzus. A torzítás annál kisebb, minél élesebb maximummal bír az ablak spektruma. Ezen elv alapján választhatjuk ki az optimálisnak tekinthető ablakot vagy ablakokat, amint ezt néhány ablak bemutatásával érzékeltetni fogjuk.

A *négyzetleges ablak* és spektruma

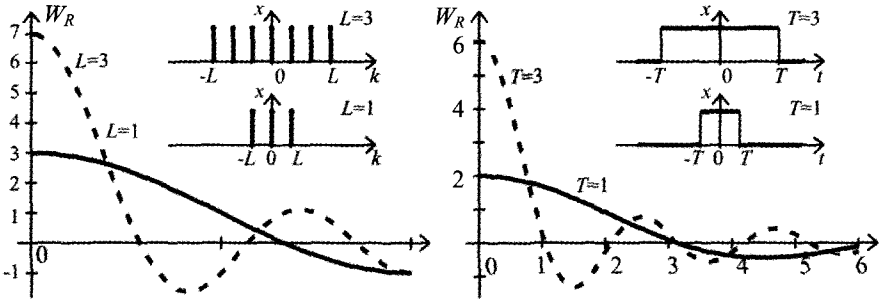
$$\begin{aligned} w_{L,R}[k] &= p_L[k] \equiv \varepsilon[k+L] - \varepsilon[k-L-1], \quad W_{L,R}(e^{j\vartheta}) = \frac{\sin([2L+1]\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)}; \\ w_{T,R}(t) &= p_T(t) \equiv \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T), \quad W_{T,R}(j\omega) = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \end{aligned} \quad (3.2-69)$$

A valós értékű spektrumok grafikonja a 9. ábrán látható. A spektrum maximuma a $\vartheta = 0$ illetve az $\omega = 0$ helyen lép fel.

Az ablak spektruma élességének egyik jellemzője az a ϑ_B illetve ω_B körfrekvencia, ahol az amplitúdó-karakterisztika aránya maximális értékéhez $(1/\sqrt{2}) \approx 0,7$. Minél kisebb ϑ_B illetve ω_B , annál jobban hasonlít az ablak spektruma a Dirac-impulzusra, tehát annál jobbnak tekinthető az ablak. Látható, hogy minél nagyobb L

vagy T , annál kisebb \mathcal{G}_B illetve ω_B , amint annak lennie kell. A spektrum jóságát a szélessége mellett szokás második maximumának és első (legnagyobb) maximumának arányával is jellemezni. Minél kisebb ez, annál jobb az ablak. Látható, hogy minél nagyobb L vagy T , annál kisebb ez az arány, ami szintén megfelel várakozásainknak.

Nyilván további jellemzőket is lehetne találni az ablak amplitúdó-karakterisztikájának és a Dirac-impulzus "hasonlóságának" jellemzésére. Nem lehet egyértelműen optimális ablakot választani, mert az ablak alakjának változtatásával rendszerint az egyik jellemzőt javítjuk, a másikat pedig elrontjuk.



3.2-9. ábra A négyszögletes ablak és amplitúdó-karakterisztikája két ablakszélesség esetére

A háromszögletű vagy *Bartlett*-ablak és spektruma

$$w_{L,B}[k] = p_L[k] \left\{ 1 - \frac{|k|}{L} \right\}, \quad W_{L,B}(e^{j\vartheta}) = \left(\frac{\sin[(2L+1]\vartheta/4]}{\sin(\vartheta/2)} \right)^2; \tag{3.2-70}$$

$$w_{T,B}(t) = p_T(t) \left\{ 1 - \frac{|t|}{T} \right\}, \quad W_{T,B}(j\omega) = T \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2.$$

A folytonos idejű Bartlett-ablak és spektruma a 10. ábrán látható.

A *Hamming*-ablak és spektruma

$$w_{L,H}[k] = p_L[k] \left\{ 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi k}{L} \right\},$$

$$W_{L,H}(e^{j\vartheta}) = 0,54 W_{L,R}(e^{j\vartheta}) + 0,23 W_{L,R}(e^{j(\vartheta-\pi/L)}) + 0,23 W_{L,R}(e^{j(\vartheta+\pi/L)}); \tag{3.2-71}$$

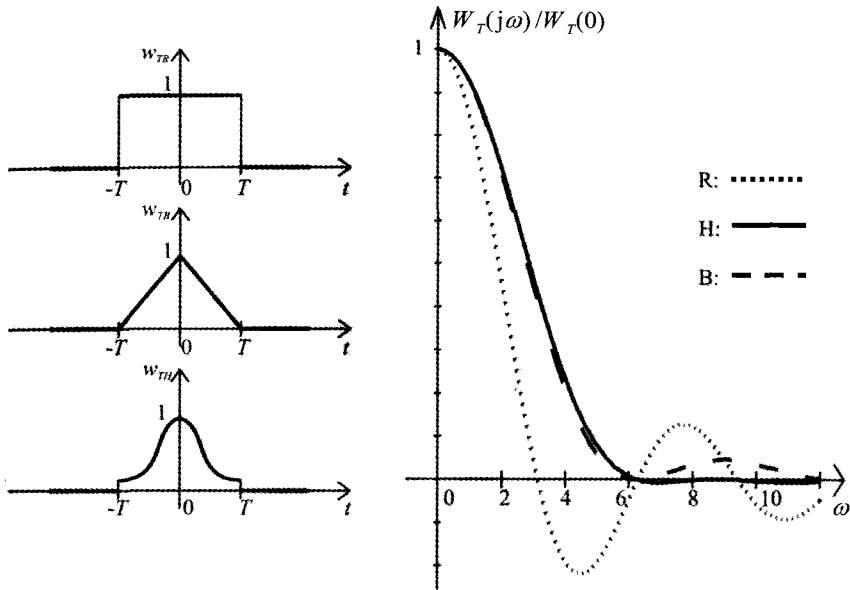
$$w_{T,H}(t) = p_T(t) \left\{ 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi t}{T} \right\},$$

$$W_{T,H}(j\omega) = 0,54 W_{T,R}(j\omega) + 0,23 W_{T,R}(j(\omega T - \pi)) + 0,23 W_{T,R}(j(\omega T + \pi)).$$

Itt $W_{L,R}$ illetve $W_{T,R}$ a (69) szerinti négyszögletes ablak spektrumát jelöli.

A folytonos idejű Hamming-ablak és spektruma is látható a 10. ábrán. A 0,54 és 0,46 helyett néha más pozitív számok is használatosak, összegük mindig 1 értékű.

A 10. ábrából látható, hogy a négyszögletes ablaknál kisebb, a spektrum első hullámának szélessége, viszont a második maximum relatív maximuma nagyobb, mint a Bartlett-ablaknál. A Hamming-ablak szélessége hasonló a Bartlett-ablakéhoz, a relatív maximuma még kisebb.



3.2-10. ábra A folytonos idejű négyszögletes, Bartlett- és Hamming-ablak, valamint ezek spektruma

Számos további ablakozó jel is használatos, ezek között kicsi az eltérés. A lényeges az, hogy a spektrum alapján összehasonlítván az ablakokat az derül ki, hogy nem feltétlenül a jel véges hosszúságúra történő csonkítása a legelőnyösebb ablakozás. Ha ugyanis a folytonos idejű ablak nem folytonos függvénye az időnek (mint a négyszögletes ablak), akkor az ablakozás az eredetileg többnyire folytonos jelet ugrásos jellé alakítja át, míg a Bartlett-ablak megtartja a jel folytonosságát. A Hamming-ablak ugyan nem folytonos, de kisebb az ugrása. A Hamming-ablaknak más változatai is használatosak. A 0,54 és a 0,46 helyett más olyan pozitív számok szerepelnek, amelyek összege 1 és az első nagyobb a másodiknál, de a megadottakat tekintik optimálisnak.

3.2-1.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a következő véges hosszúságú DI jelek spektrumát (Fourier-transzformáltját):

- $x[k] = 2\delta[k] - \delta[k-1] + 0,5\delta[k-2]$.
- $x[k] = 2\delta[k-1] - \delta[k-2] + 0,5\delta[k-3]$.
- $x[k] = 0,5\delta[k+2] - \delta[k+1] + 2\delta[k] - \delta[k-1] + 0,5\delta[k-2]$.
- $x[k] = -0,5\delta[k+2] + \delta[k+1] - \delta[k-1] + 0,5\delta[k-2]$.

F-2. Határozza meg a következő véges, $L \in \mathbf{N}$ hosszúságú DI jelek spektrumát (Fourier-transzformáltját):

- $x[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]$.
- $x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} e^{j\theta k}$.
- $x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} \cos \theta k$.

F-3. Határozza meg az $x[k] = \varepsilon[k] 0,9^k \cos \Theta k$ DI jel spektrumát! Vázolja fel az amplitúdó-spektrumot $\Theta = \pi/4$, $\Theta = \pi/2$ és $\Theta = \pi$ esetére!

F-4. Határozza meg a DI jelet, ha spektruma

$$(a) X(e^{j\vartheta}) = 2 \cos \vartheta + j2 \sin 2\vartheta.$$

$$(b) X(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - e^{-j\vartheta}}{4 - e^{-j\vartheta}}.$$

$$(c) X(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - 0,25 e^{-j2\vartheta}}{1 + 0,5 e^{-j\vartheta}}.$$

***F-5.** Határozza meg az alábbi, nem abszolút összegezhető DI jel spektrumát:

$$x[k] = A \cos \Theta k + B \sin \Theta k, \quad 0 \leq |\Theta| < \pi.$$

***F-6.** Igazolja, hogy ha $X(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{x[k]\}$ és $|x[k]|$ összegezhető, akkor

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = X(e^{j\vartheta}) \Big|_{\vartheta=0}.$$

E tételt alkalmazva határozza meg a következő összegeket $-1 < a < 1$ esetén:

$$(a) S = \sum_{k=0}^{\infty} a^k. \quad (b) S = \sum_{k=0}^{\infty} k a^k. \quad (c) S = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a^k.$$

***F-7.** (a) Legyen $x[k]$ olyan DI jel, amelynek értéke nulla a $[0, L]$ intervallumon kívül. Milyen tulajdonságú a (35) szerinti $M \in \mathbf{N}$ pontos interpolációval előállított $f[k]$ jel, illetve az $M \in \mathbf{N}$ pontos decimálással előállított $g[k]$ jel?

(b) Legyen $x[k]$ olyan DI jel, amelynek spektruma nulla a $0 < \Theta < |\vartheta| < \pi$ intervallumban és természetesen periodikus 2π periódussal. Milyen tulajdonságú az $M \in \mathbf{N}$ pontos interpolációval előállított $f[k]$ jel spektruma, illetve az $M \in \mathbf{N}$ pontos decimálással előállított $g[k]$ jel spektruma?

(c) Legyen $x(t)$ olyan FI jel, amelynek értéke nulla a $(0, T)$ intervallumon kívül. Milyen tulajdonságú a $g(t) = x(at)$ jel?

(d) Legyen $x(t)$ olyan FI jel, amelynek spektruma nulla a $(-\Omega, \Omega)$ intervallumon kívül. Milyen tulajdonságú a $g(t) = x(at)$ jel spektruma?

F-8. Határozza meg a következő véges $T > 0$ hosszúságú, FI jelek spektrumát (Fourier-transzformáltját)! Vázolja fel a jelet és az amplitúdó-karakterisztikát is!

$$(a) x(t) = \varepsilon(t - T_0) - \varepsilon(t - T_0 - T).$$

$$(b) x(t) = \varepsilon(t + T) - 2\varepsilon(t) + \varepsilon(t - T).$$

$$(c) x(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\} \frac{t}{T}.$$

$$(d) x(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\} \{1 - e^{-\alpha t}\}, \quad \alpha > 0$$

$$(e) x(t) = \{\varepsilon(t+T) - \varepsilon(t)\} \frac{T+t}{T} + \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} \frac{T-t}{T}.$$

$$(f) x(t) = \{\varepsilon(t+T) - \varepsilon(t+T_0)\} \frac{T+t}{T-T_0} + \{\varepsilon(t+T_0) - \varepsilon(t-T_0)\} + \\ + \{\varepsilon(t-T_0) - \varepsilon(t-T)\} \frac{T-t}{T-T_0}, \quad T > T_0 > 0.$$

Ellenőrizze az utolsó eredményt, ha $T_0 \rightarrow T$ és ha $T_0 \rightarrow 0$. Ekkor korábban már vizsgált jelek adódnak.

F-9. Határozza meg a következő FI jelek spektrumát!

$$(a) x(t) = \{1 - \varepsilon(t)\} e^{\alpha t} \equiv \varepsilon(-t) e^{\alpha t}, \quad \alpha > 0. \quad (b) x(t) = \varepsilon(t) \alpha t e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

$$(c) x(t) = \{1 - \varepsilon(t)\} e^{\alpha t} + \varepsilon(t), \quad \alpha > 0.$$

$$*(d) x(t) = \frac{2}{\pi \Omega t^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2}.$$

$$*(e) x(t) = \frac{1}{\pi T} \frac{1}{1 + (t/T)^2}.$$

(Útmutatás. A két utolsó feladatnál használja fel a Fourier-transzformáció szimmetriatulajdonságát!)

F-10. Határozza meg a következő FI jel spektrumát:

$$x(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} \cos \Omega t, \quad \Omega = 2\pi / T_0.$$

Vázolja fel az amplitúdó-spektrumot $n = 1, 2, 3$ és 4 esetre, ha $T = nT_0/4$.

***F-11.** Határozza meg a következő, nem abszolút integrálható jelek spektrumát:

$$(a) x(t) = \cos^2 \Omega t. \quad (b) x(t) = |\cos \Omega t|.$$

(Útmutatás. Állítsa elő a jel Fourier-sorát!)

F-12. Határozza meg a Dirac-impulzusok véges tagszámú sorából álló FI jel spektrumát:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(t - kT) \equiv \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \dots + \delta(t - (N-1)T).$$

***F-13.** Igazolja a következő tételt: $\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right)$.

(Útmutatás. Alkalmazza a Fourier-transzformáció szimmetria-tulajdonságát!)

F-14. A $g(t)$ egy Ω sávkorlátú FI jel. Képezzünk ezzel egy $x(t) = g(t) \cos \omega_0 t$ modulált jelet; $0 < \Omega \leq \omega_0$.

Milyen T mellett rekonstruálható a $g(t)$ jel az $x(iT)$, $i \in \mathbf{Z}$ mintákból? Szükséges-e az $\omega_0 \geq \Omega$ kikötés?

***F-15.** Igazolja a $\mathcal{F} \{1/t^2\} = -\pi |\omega|$ összefüggést! Ennek felhasználásával igazolja az $|\omega| X(j\omega) = \mathcal{F} \{[1/\pi t] * x'(t)\}$ összefüggést!

F-16. Egy véges hosszúságú DI jel kifejezése $x[k] = 2\delta[k] + 3\delta[k-2] - 5\delta[k-3]$.

Határozza meg az $X(e^{j\vartheta})$ függvény kiszámítása nélkül a spektrum értékét a $\vartheta = 0$ és a $\vartheta = \pi$ helyen, továbbá $X(e^{j\vartheta})$ és $|X(e^{j\vartheta})|^2$ integrálját a $(-\pi, \pi)$ intervallumra!

***F-17.** Egy $x = a + jb$ DI vagy FI jel spektruma $X = P + jQ$. Az a, b, P, Q valós értékű függvények felbonthatók páros és páratlan összetevőjükre, például $a = a^{(e)} + a^{(o)}$.

Igazolja, hogy akár diszkrét idejű, akár folytonos idejű jelekre

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{a^{(e)}\} &= P^{(e)}, & \mathcal{F}\{a^{(o)}\} &= jQ^{(o)}, \\ \mathcal{F}\{b^{(e)}\} &= Q^{(e)}, & \mathcal{F}\{b^{(o)}\} &= -jP^{(o)}. \end{aligned}$$

Valós értékű jelekre ebből az következik, hogy páros függvény spektruma valós értékű, páratlan függvény spektruma képzetes értékű, amint azt tudjuk.

F-18. Egy FI jel spektruma

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{\Omega} \{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)\}, \quad \Omega > 0.$$

Milyen típusú ez a jel? Határozza meg a jel időfüggvényét!

F-19. Egy FI, valós értékű $x(t)$ jel $X(j\omega)$ spektruma sávkorlátozott Ω sávkorlattal. Képezzünk ebből egy olyan $y(t)$ jelet, amelynek spektruma $Y(j\omega) = X(j(\omega - \Omega))$.

Milyen típusú az $y(t)$ jel? Határozza meg az időfüggvényét!

3.2-1.M. Megoldások

M-1. Az eltolási tétel és $\mathcal{F}\{\delta[k]\} = 1$ felhasználásával

$$(a) X(e^{j\vartheta}) = 2 - e^{-j\vartheta} + 0,5 e^{-j2\vartheta} = (2 - \cos \vartheta + 0,5 \cos 2\vartheta) + j(\sin \vartheta - 0,5 \sin 2\vartheta).$$

$$(b) X(e^{j\vartheta}) = 2 e^{-j\vartheta} - e^{-j2\vartheta} + 0,5 e^{-j3\vartheta}. \text{ Az (a) -ből is adódik.}$$

$$(c) X(e^{j\vartheta}) = 0,5 e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 2 - e^{-j\vartheta} + 0,5 e^{-j2\vartheta} = 2 - \cos \vartheta + \cos 2\vartheta. \text{ Páros } x, \text{ valós } X.$$

$$(d) X(e^{j\vartheta}) = -0,5 e^{j2\vartheta} + e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta} + 0,5 e^{-j2\vartheta} = j 2 \sin \vartheta - j \sin 2\vartheta. \text{ Páratlan } x, \text{ képzetes } X.$$

M-2. (a) A mértani sor összegképlete alapján $X(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - e^{-jL\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta}}$.

$$(b) \text{ Hasonlóan vagy a modulációs tétellel } X(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - e^{-jL(\vartheta - \vartheta)}}{1 - e^{-j(\vartheta - \vartheta)}}.$$

(c) Az Euler-formulát és az előző eredményt felhasználva

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - \cos \vartheta e^{-j\vartheta} - \cos L \vartheta e^{-jL\vartheta} + \cos(L+1)\vartheta e^{-j(L+1)\vartheta}}{1 - 2 \cos \vartheta e^{-j\vartheta} + e^{-j2\vartheta}}.$$

Ez egyszerűsödik, ha ϑ a $\pi/2$ egész többszöröse.

M-3. Alkalmazható a modulációs tétel.

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-0,9 e^{-j(\vartheta-\alpha)}} + \frac{1}{1-0,9 e^{-j(\vartheta+\alpha)}} \right) = \frac{1-1,8 \cos \Theta e^{-j\vartheta}}{1-1,8 \cos \Theta e^{-j\vartheta}+0,81 e^{-j2\vartheta}}.$$

Az $|X(e^{j\vartheta})|$ függvénynek maximuma van $\vartheta = \alpha$ környezetében. Ez nagyobb és élesebb $\alpha = \pi/4$ és $\alpha = 3\pi/4$ esetén, kisebb és laposabb $\alpha = \pi/2$ esetén. A minimum a $\vartheta = 0$ és $\vartheta = \pi$ helyen lép fel.

M-4. (a) $x[k] = \delta[k+2] + \delta[k+1] + \delta[k-1] - \delta[k-2]$.

$$(b) x[k] = \frac{1}{4} \varepsilon[k] \left(\frac{1}{4} \right)^k - \frac{1}{4} \varepsilon[k-1] \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} = \frac{1}{4} \delta[k] - \frac{3}{16} \varepsilon[k-1] \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1}.$$

$$(c) x[k] = \delta[k] - 0,5 \delta[k-1]$$

***M-5.** A spektrum csak $\vartheta = \pm(\Theta + n2\pi)$ körfrekvenciájú összetevőket tartalmazhat:

$$X(e^{j\vartheta}) = \pi [A - jB] \delta(\vartheta - \Theta) + \pi [A + jB] \delta(\vartheta + \Theta), \quad \pi < \vartheta < \pi.$$

***M-6.** A tétel a (4) következménye $\vartheta = 0$ helyettesítéssel.

$$(a) \mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = \frac{1}{1-a e^{-j\vartheta}}, \quad S = \frac{1}{1-a}.$$

$$(b) \mathcal{F}\{\varepsilon[k] k a^k\} = j \frac{d}{d\vartheta} \mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = \frac{a e^{-j\vartheta}}{(1-a e^{-j\vartheta})^2}, \quad S = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

$$(c) \mathcal{F}\{\varepsilon[k] k^2 a^k\} = j \frac{d}{d\vartheta} \mathcal{F}\{\varepsilon[k] k a^k\} = \frac{a e^{-j\vartheta} + a^2 e^{-j2\vartheta}}{(1-a e^{-j\vartheta})^3}, \quad S = \frac{a(1+a)}{(1-a)^3}.$$

***M-7.** (a) Az interpolált $f[k]$ nulla a $[0, ML]$ intervallumon kívül. A decimált $g[k]$ nulla a $[0, L/M]$ intervallumon kívül, ahol L/M csak egész szám lehet.

(b) Az interpolált jel $F(e^{j\vartheta}) = X(e^{jM\vartheta})$ spektruma nulla a $(-\Theta/M, \Theta/M)$ intervallumon kívül. A decimált jel $G(e^{j\vartheta})$ spektrumának nincs egyszerű jellegzetessége.

(c) A $g(t) = x(at)$ jel nulla $a > 0$ esetén a $(0, T/a)$ intervallumon kívül, míg $a < 0$ esetén nulla a $(T/a, 0)$ intervallumon kívül.

(d) A $\mathcal{F}\{x(at)\}$ spektrum nulla a $(-\Omega/|a|, \Omega/|a|)$ intervallumon kívül.

$$\mathbf{M-8.} \quad (a) X(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T_0} - e^{-j\omega(T_0+T)}}{j\omega} \equiv T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega(T_0+T/2)}.$$

$$(b) X(j\omega) = j\omega T^2 \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2.$$

$$(c) X(j\omega) = T \frac{1 - (1 + j\omega T) e^{-j\omega T}}{(j\omega T)^2}.$$

$$(d) X(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\omega T}}{\alpha + j\omega}.$$

$$(e) X(j\omega) = T \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2.$$

$$(f) X(j\omega) = (T + T_0) \frac{\sin \frac{\omega(T+T_0)}{2}}{\frac{\omega(T+T_0)}{2}} \frac{\sin \frac{\omega(T-T_0)}{2}}{\frac{\omega(T-T_0)}{2}}.$$

Ha $T_0 \rightarrow T$, akkor a négyszög-impulzus, ha $T_0 \rightarrow 0$, akkor a háromszög-impulzus ismert spektruma adódik.

M-9. (a) $X(j\omega) = \frac{1}{\alpha - j\omega}.$

(b) $X(j\omega) = \frac{\alpha}{(\alpha + j\omega)^2}.$

(c) $X(j\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{j\omega}.$

(d) $X(j\omega) = [\varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega)] \frac{\omega + \Omega}{\Omega} + [\varepsilon(\omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)] \frac{\Omega - \omega}{\Omega}.$

(e) $X(j\omega) = e^{-T|\omega|}.$

M-10. Például az integrál számításával

$$X(j\omega) = T \left\{ \frac{\sin(\omega + \Omega)T}{(\omega + \Omega)T} + \frac{\sin(\omega - \Omega)T}{(\omega - \Omega)T} \right\}.$$

Az n és a T növelésével a maximum az $|\omega| \approx \Omega$ körfrekvencia környezetében egyre nagyobb értékű lesz.

***M-11.** (a) $X(j\omega) = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + 2\Omega) + 2\delta(\omega) + \delta(\omega - 2\Omega)].$

(b) $x(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\Omega t}{(2k)^2 - 1},$

$$X(j\omega) = 4\delta(\omega) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta(\omega - 2k\Omega) + \delta(\omega + 2k\Omega)}{(2k)^2 - 1}.$$

M-12. $X(j\omega) = \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} e^{-j(N-1)\omega T/2}.$

***M-13.** $x(t) = G(j\omega)|_{\omega=t}$, ahol $G(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kT)$. A tétel alkalmazásával kifejezhető $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)\}$, majd $X(j\omega) = 2\pi g(t)|_{t=-\omega}$ felhasználásával adódik a megadott összefüggés.

M-14. Az $x(t)$ jel spektruma

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \{G(j(\omega + \omega_0)) + G(j(\omega - \omega_0))\}.$$

Ebből következik, hogy $x(t)$ sávkorlátozott $\Omega + \omega_0$ sávkorláttal, tehát $T \leq \pi / (\Omega + \omega_0)$ a feltétel. Ez független ω_0 és Ω arányától. Ha azonban $\omega_0 < \Omega$, akkor az $X(j\omega)$ spektrumából nehezebb a $G(j\omega)$ spektrumot szűrővel előállítani, mert $\omega = 0$ környezetében a két eltolts spektrum átlapolódik.

***M-15.** Mivel $\mathcal{F}\{\operatorname{sgn} t\} = 2/j\omega$, ezért $\mathcal{F}\{2jt\} = -2\pi \operatorname{sgn} \omega$, az idő szerinti deriváltat képezve $\mathcal{F}\{2jt^2\} = -2\pi j\omega \operatorname{sgn} \omega = -2\pi j|\omega|$. Ebből adódik $\mathcal{F}^{-1}\{|\omega|\} = -1/\pi t^2$. A $(-j\operatorname{sgn} \omega)j\omega = |\omega|$ azonosság felhasználásával kapjuk a második összefüggést.

M-16. Könnyen belátható, hogy

$$X(e^{j0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = 0; \quad X(e^{j\pi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x[k] = 10;$$

továbbá

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) d\vartheta = 2\pi x[0] = 8\pi; \quad \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = 76\pi.$$

***M-17.** Az értelmezés szerint $X = A^{(e)} + A^{(o)} + jB^{(e)} + jB^{(o)}$, továbbá például FI esetben $X^*(j\omega) = X(-j\omega)$ felhasználásával

$$P(j\omega) = \frac{X(j\omega) + X(-j\omega)}{2}, \quad P^{(e)}(j\omega) = \frac{P(j\omega) + P(-j\omega)}{2},$$

és így tovább. Figyelembe véve a függvények páros, illetve páratlan tulajdonságát például $P = A^{(e)} + jB^{(o)}$ adódik, majd ezekből a megadott összefüggések.

M-18. Az amplitúdó-spektrum nem páros, ezért a jel komplex értékű. Inverz Fourier-transzformációval

$$x(t) = \frac{e^{j\Omega t} - 1}{j\Omega t} = \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} + j \frac{1 - \cos \Omega t}{\Omega t}.$$

M-19. Mivel az Y amplitúdó-spektrum nem páros, ezért az y jel komplex értékű. A modulációs tétel értelmében

$$y(t) = x(t)e^{j\Omega t} = x(t)\cos \Omega t + jx(t)\sin \Omega t.$$

Az olyan komplex értékű FI jelet, amelynek spektruma nulla $\omega < 0$ esetén (l. a 18. és a 19. feladatot) szokás analitikus jelnek nevezni, a jel valós és képzetes része ekkor Hilbert-párt alkot.

3.2-2. A válasz spektrális előállítása

3.2-2.1. A válasz spektruma és időfüggvénye

Tételezzük fel, hogy ismerjük egy lineáris, invariáns, DI illetve FI rendszer $H(e^{j\vartheta})$ illetve $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikáját. Tételezzük fel továbbá, hogy ismerjük a DI illetve a FI gerjesztésnek az $U(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{u[k]\}$ illetve az $U(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ spektrumát, amellyel a gerjesztés

$$\text{DI: } u[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta; \quad (3.2-72)$$

$$\text{FI: } u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

alakban előállítható. Az $U(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k}$ illetve az $U(j\omega) e^{j\omega t}$ gerjesztéshez tartozó válasz bármely frekvencián ismeretesen $H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k}$ illetve $H(j\omega) U(j\omega) e^{j\omega t}$. A szuperpozíció elvének értelmében a válasz a következő alakban fejezhető ki:

$$\text{DI: } y[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta; \quad (3.2-73)$$

$$\text{FI: } y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Ebből kiolvasható a válasz spektruma.

A $H(e^{j\vartheta})$ illetve a $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikájú lineáris, invariáns DI illetve FI rendszer válaszának spektruma, vagyis $Y(e^{j\vartheta})$ illetve $Y(j\omega)$ kifejezhető gerjesztése spektrumának ismeretében:

$$\text{DI: } Y(e^{j\vartheta}) = H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta}); \quad \text{FI: } Y(j\omega) = H(j\omega) U(j\omega). \quad (3.2-74)$$

Ismerve a válasz spektrumát meghatározhatjuk a válasz időfüggvényét is inverz Fourier-transzformációval:

$$\text{DI: } y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\vartheta})\}; \quad \text{FI: } y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\}. \quad (3.2-75)$$

Gyakran csak a válasz spektrumára van szükségünk. Az időfüggvényt rendszerint numerikusan számítjuk egy FFT algoritmussal.

A gerjesztés E_u , illetve a válasz E_y energiáját Parseval tétele értelmében meghatározza az $|U|^2$, illetve az $|Y|^2$ energiaspektrum. Ezek kapcsolatát $|Y|^2 = K^2 |U|^2$ alakban megadja a rendszer $K^2(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})|^2$ illetve $K^2(\omega) = |H(j\omega)|^2$ energiaátviteli karakterisztikája, amely az amplitúdó-karakterisztika négyzete. A FI energiaátviteli karakterisztika többnyire az ω racionális függvénye.

A rendszeregyenletből vagy az állapotváltozós leírásból közvetlenül csak akkor számítható az átviteli karakterisztika, ha a rendszer GV stabilis. Általánosan azonban a GV stabilitás csak elegendő feltétele az átviteli karakterisztika létezésének, amire a következő pontban példát is fogunk látni.

3.2-2.2. Az átviteli karakterisztika és az impulzusválasz

Korábban már láttuk, hogy miként állítható elő a GV stabilis rendszer átviteli karakterisztikája a rendszeregyenlet vagy az állapotváltozós leírás ismeretében (3.1-1.4. és 5. pont). Most vizsgáljuk meg kapcsolatát az impulzusválasszal.

Legyen a vizsgált DI illetve FI rendszer gerjesztése $u[k]=\delta[k]$, $\mathcal{F}\{\delta[k]\}=1$ illetve $u(t)=\delta(t)$, $\mathcal{F}\{\delta(t)\}=1$. Ekkor a rendszer válasza definíció szerint a $h[k]$ vagy a $h(t)$ impulzusválasz. Helyettesítsük ezt (74)-be, akkor

$$\text{DI: } \mathcal{F}\{h[k]\}=H(e^{j\theta}); \quad \text{FI: } \mathcal{F}\{h(t)\}=H(j\omega) \quad (3.2-76)$$

adódik. Szavakban: az impulzusválasz spektruma (ha létezik) az átviteli karakterisztika. Ez tekinthető az átviteli karakterisztika legáltalánosabb *definíciójának* is, mert ez nem feltételezi a rendszer GV stabilitását. Az összefüggést az átviteli karakterisztika számítására is használhatjuk, ha az impulzusválasz (például mérési eredményként) ismert.

Az *átviteli karakterisztika* inverz Fourier-transzformáltja az *impulzusválasz*:

$$\text{DI: } h[k]=\mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\theta})\}; \quad \text{FI: } h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}. \quad (3.2-77)$$

Az impulzusválaszra illetve az átviteli karakterisztikára alkalmazott jelölések következtében ezek az összefüggések azonosságnak tűnnek.

Ha a rendszer impulzusválasza a következő, tipikus alakban adott (vagy abba átirható), akkor az átviteli karakterisztika kifejezése

$$\begin{aligned} h[k]&=\varepsilon[k]\sum_{i=1}^n A_i q_i^k, \quad |q_i|<1 \Rightarrow H(e^{j\theta})=\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{1-q_i e^{-j\theta}}; \\ h(t)&=\varepsilon(t)\sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}, \quad \Re\{p_i\}<0 \Rightarrow H(j\omega)=\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{j\omega-p_i}. \end{aligned} \quad (3.2-78)$$

Mivel az impulzusválasz valós értékű, ezért a konjugált komplex q_i, q_{i+1} illetve p_i, p_{i+1} pároknak megfelelő A_i, A_{i+1} párok egymás konjugáltjai. Mivel $h[k]$ tartalmazhat $A_0 \delta[k]$ illetve $h(t)$ tartalmazhat $A_0 \delta(t)$ tagot, ezért az átviteli karakterisztika nevezője n -edfokú, a számlálója legfeljebb n -edfokú polinomja az $e^{-j\theta}$ illetve a $j\omega$ változónak, az együtthatók valósak:

$$\begin{aligned} H(e^{j\theta})&=\frac{b_0+b_1 e^{-j\theta}+b_2 e^{-j2\theta}+\dots+b_n e^{-jn\theta}}{1+a_1 e^{-j\theta}+a_2 e^{-j2\theta}+\dots+a_n e^{-jn\theta}}; \\ H(j\omega)&=\frac{b_0(j\omega)^n+b_1(j\omega)^{n-1}+b_2(j\omega)^{n-2}+\dots+b_{n-1}(j\omega)+b_n}{(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+a_2(j\omega)^{n-2}+\dots+a_{n-1}(j\omega)+a_n}. \end{aligned} \quad (3.2-79)$$

Az impulzusválasz tartalmazhat $\varepsilon[k]A_{i,r}k^r q_i^k$ illetve $\varepsilon(t)A_{i,r}t^r e^{p_i t}$ alakú tagokat is. Ezek az átviteli karakterisztika nevezőjében a Fourier-transzformáció értelmében $(1-q_i e^{-j\theta})^r$ illetve $(j\omega-p_i)^r$ tagokat jelentenek a (78) alakban, míg a (79) alak nem változik.

Ha ismerjük az átviteli karakterisztikát a (78) szerinti alakban, akkor szinte „ránézésre” előállíthatjuk a rendszeregyenletet, majd abból az állapotváltozós leírás egy Frobenius-alakját is (3.1-4. és 5. pont).

1. példa Határozzuk meg az átviteli karakterisztikát, ha a DI, illetve a FI rendszer impulzusválasza

$$h[k] = A \varepsilon[k] a^k; \quad h(t) = A \varepsilon(t) e^{-\alpha t}.$$

Ha $-1 < a < 1$ illetve ha $\alpha > 0$, akkor

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{A}{1 - a e^{-j\vartheta}}, \quad H(j\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega}.$$

A nevező semmilyen körfrekvencián sem válik nullává, az átviteli karakterisztika nem válik végtelenné. Ez a megállapítás minden GV stabilis rendszerre érvényes.

Ha $a = 1$ illetve ha $\alpha = 0$ és $A = 1$, azaz ha $h[k] = \varepsilon[k]$ illetve ha $h(t) = \varepsilon(t)$, akkor (14) vagy (19) értelmében az átviteli karakterisztika kifejezése

$$H(e^{j\vartheta}) = \pi \delta(\vartheta) + \frac{1}{1 - e^{-j\vartheta}}, \quad -\pi < \vartheta < \pi; \quad H(j\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

Ez nem az előző eredmény határértéke $A = 1$ esetén!

Ha $|a| > 1$ illetve ha $\alpha < 0$, akkor az átviteli karakterisztika értelmezése bonyolultabb matematikai megfontolást igényel, amit nem tárgyalunk. Úgy tekintjük, hogy ekkor a rendszer átviteli karakterisztikája nem értelmezett. #

2. példa A lineáris fázisú DI illetve FI *ideális aluláteresztő* egy olyan rendszer, amelynek átviteli karakterisztikája

$$H(e^{j\vartheta}) = \{\varepsilon(\vartheta + \Theta) - \varepsilon(\vartheta - \Theta)\} e^{-jn\vartheta}, \quad -\pi < \vartheta < \pi, \quad 0 < \Theta < \pi, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$H(j\omega) = \{\varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)\} e^{-j\tau\omega}, \quad -\infty < \Omega < \infty, \quad \tau \geq 0.$$

A gerjesztés „kisfrekvenciás” összetevői változtatás nélkül megjelennek a válaszban, míg a „nagyfrekvenciás” összetevők tökéletesen el vannak nyomva. Ez magyarázza az „aluláteresztő” elnevezést.

A lineáris fázisú ideális aluláteresztő impulzusválasza

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Theta}^{\Theta} e^{-jn\vartheta} e^{j\vartheta k} d\vartheta, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-j\tau\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

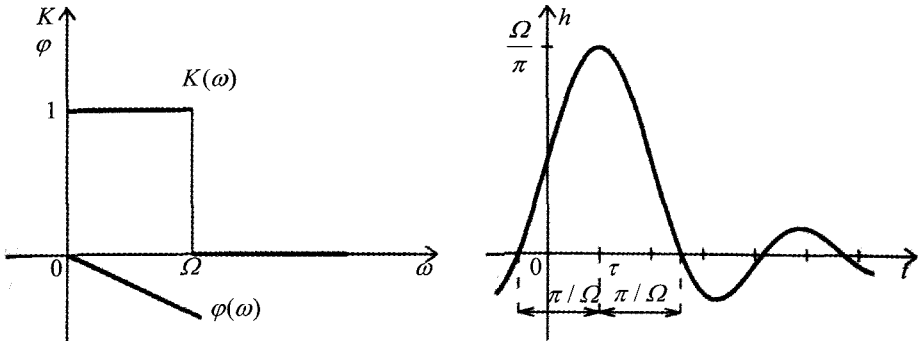
Az **integrálok** nehézség nélkül számíthatók:

$$h[k] = \frac{\Theta}{\pi} \frac{\sin \Theta(k-n)}{\Theta(k-n)}; \quad h(t) = \frac{\Omega}{\pi} \frac{\sin \Omega(t-\tau)}{\Omega(t-\tau)}.$$

A grafikonok a 11. ábrán láthatók a FI esetre, ha $\tau > 0$. Hasonlók a DI esetre vonatkozó ábrák is.

Az ideális aluláteresztő még lineáris fázis esetén is eltorzítja a rá ható a $\delta[k]$ illetve $\delta(t)$ gerjesztést. Az impulzusválasz $h_{\max} = h[n] = \Theta/\pi$ illetve $h_{\max} = h(\tau) = \Omega/\pi$ maximális értéke annál nagyobb, minél szélesebb az áteresztősáv, azaz minél nagyobb Θ illetve az Ω körfrekvencia. Természetesen más jel is torzul a lineáris fázisú, ideális aluláteresztő hatására. A válasz inverz Fourier-transzformációval számítható, többnyire csak numerikus módszerrel.

A példában számított $h[k]$ illetve $h(t)$ úgy tekinthető, mint $\delta[k]$ illetve $\delta(t)$ „elkent” és n illetve τ idővel késleltetett változata.



3.2-11. ábra A lineáris fázisú ideális FI aluláteresztő amplitúdó-karakterisztikája, fázis-karakterisztikája illetve impulzusválasza

A rendszer ideális abban az értelemben, hogy amplitúdó-karakterisztikája ugrásszerűen változik, szakaszonként állandó, fázis-karakterisztikája lineáris. Ez pontosan nyilván nem valósítható meg. Mivel a rendszer impulzusválasza nem belépő, a rendszer nem kauzális. Ebből következően a vizsgált rendszer elvileg sem megvalósítható. Feltételezhetjük, hogy a $h_1[k] = \varepsilon[k]h[k]$ illetve a $h_1(t) = \varepsilon(t)h(t)$ belépő impulzusválasz az ideális aluláteresztő egy - valamilyen értelemben optimális - kauzális közelítése. Az aluláteresztő gyakorlati tervezése azonban rendszerint más megközelítéssel történik.

Az ideális aluláteresztő nem GV stabilis, a h és a h_1 egyike sem abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható. A FI esetben például

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin u|}{u} du = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{|\sin u|}{k\pi + \pi} du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}.$$

Az utolsó sor ismeretesen nem konvergens, tehát az integrál nem véges. A DI eset valamivel több megfontolást igényel ezzel nem foglalkozunk.

A vizsgált rendszernek nincs a megszokott alakú rendszeregyenlete vagy állapotváltozós leírása, hiszen átviteli karakterisztikája nem racionális. #

*3.2-2.3. Kauzális rendszerek átviteli karakterisztikája

A valódi objektumok kauzálisak. A kauzális rendszerek átviteli karakterisztikájának speciális tulajdonságai vannak.

Ha a rendszer *kauzális*, azaz ha a h impulzusválasz nulla a $k = 0$ illetve a $t = 0$ időpont előtt, akkor H átviteli karakterisztika valós része is, képzetes része is elegendő az impulzusválasz meghatározására, vagyis a rendszer jellemzésére. Vezessük be a

$$H(e^{j\vartheta}) = P(\vartheta) + jQ(\vartheta), \quad H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (3.2-80)$$

jelölést, ahol P és Q valós értékű. Az (59) értelmében a (77) helyett a következő is írható:

$$h[k] = 0, k \in \mathbf{Z}_- \Rightarrow$$

$$h[k] = h[0] \delta[k] + \frac{2}{\pi} \varepsilon[k-1] \int_0^{\pi} P(\vartheta) \cos \vartheta k \, d\vartheta, \quad (3.2-81a)$$

$$h[k] = h[0] \delta[k] - \frac{2}{\pi} \varepsilon[k-1] \int_0^{\pi} Q(\vartheta) \sin \vartheta k \, d\vartheta; \quad h[0] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P(\vartheta) \, d\vartheta.$$

$$h(t) = 0, t \in \mathbf{R}_- \Rightarrow$$

$$h(t) = A \delta(t) + \frac{2}{\pi} \varepsilon(t) \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \quad (3.2-81b)$$

$$h(t) = A \delta(t) - \frac{2}{\pi} \varepsilon(t) \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t \, d\omega; \quad A = \lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega).$$

A K amplitúdó-karakterisztika ismeretében elegendő feltétel adható a rendszer kauzalitására (az impulzusválasz számítása nélkül). eldönésére az átviteli karakterisztika ismeretében (tehát az impulzusválasz számítása nélkül). Az erre vonatkozó *Paley–Wiener*-kritériumot igazolás nélkül közöljük. Vezessük be az eddig is alkalmazott

$$H(e^{j\vartheta}) = K(\vartheta) e^{j\varphi(\vartheta)}, \quad H(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.2-82)$$

jelölést. Ha a $K = |H|$ amplitúdó-karakterisztika kielégíti a következő feltételt (Ω tetszőleges)

$$\text{DI: } \int_0^{\pi} |\ln K(\vartheta)| \, d\vartheta < \infty; \quad \text{FI: } \int_0^{\infty} \frac{|\ln K(\omega)|}{\omega^2 + \Omega^2} \, d\omega < \infty, \quad \int_0^{\infty} K^2(\omega) \, d\omega < \infty, \quad (3.2-83)$$

akkor a rendszer biztosan *kauzális*. Ha K adott amplitúdó-karakterisztika, akkor található olyan φ fázis-karakterisztika, hogy a (82) szerinti H átviteli karakterisztika inverz Fourier-transzformáltja belépő jelet eredményez. A megfelelő fázis-karakterisztika tényleges előállítására nehéz feladat. A tételből következik, hogy ha K nulla egy véges frekvencia-intervallumban, akkor a rendszer biztosan nem kauzális (példa erre az ideális aluláteresztő). Egyes frekvenciákon K lehet nulla.

Például a Gauss-típusú, folytonos idejű aluláteresztő amplitúdó-karakterisztikája $K(\omega) = \exp(-T^2 \omega^2)$. Ez nem kauzális rendszert ír le, mert $|\ln K(\omega)| = T^2 \omega^2$ és $\omega^2 / (\omega^2 + \Omega^2) = 1 - \Omega^2 / (\omega^2 + \Omega^2)$ integrálja nem véges.

Ha $K^2(\omega)$ integrálja (vagyis az impulzusválasz energiája) nem véges, akkor a feltétel sem nem szükséges, sem nem elegendő. Például a $H(j\omega) = e^{-j\omega T}$ átviteli karakterisztikájú rendszer impulzusválasza $h(t) = \delta(t - T)$. A rendszer kauzális, ha $T \geq 0$ és nem kauzális, ha $T < 0$. Mivel ekkor $K(\omega) = 1$, ezért a *Paley–Wiener*-kritérium ki van elégítve T bármely értékére. Ez azonban nem jelent ellentmondást, hiszen $K(\omega)$ nem négyzetesen integrálható, ezért a kritérium nem alkalmazható.

Ha az átviteli karakterisztika valós értékű, akkor az impulzusválasz páros jel, ezért a rendszer a $H = C$ (állandó) átviteli karakterisztika kivételével nem lehet kauzális.

3.2-2.4. Torzításmentes jelátvitel

Egy gyakorlatilag fontos feladat vizsgálatával megmutatjuk, hogy miként lehet egy problémát megfogalmazni és megoldani a frekvenciatartományban. Ennek mintájára más feladatok is megoldhatók. Természetesen nem minden időtartománybeli feladat fogalmazható át egyszerűen frekvenciatartománybeli feladattá.

El akarjuk dönteni, hogy egy lineáris, invariáns rendszer alkalmas-e bizonyos osztályba tartozó jelek *torzításmentes átvitelére*. Ez azt jelenti, hogy az y válasz csak kevésbé különbözik az u gerjesztéstől. Megengedünk egy C állandó szorzót (ezt a továbbiakban pozitívnak tekintjük) és egy L illetve T késleltetést.

Az *ideális* torzításmentes átvitelt biztosító rendszer gerjesztés-válasz kapcsolata ebből következően

$$\begin{aligned} y_0[k] &= C u[k-L], \quad C > 0, \quad L \in \mathbf{N}; \\ y_0(t) &= C u(t-T), \quad C > 0, \quad T \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \quad (3.2-84)$$

Ebből következik, hogy az ideálisan torzításmentes rendszer impulzusválasza

$$\begin{aligned} h_0[k] &= C \delta[k-L], \quad C > 0, \quad L \in \mathbf{N}; \\ h_0(t) &= C \delta(t-T), \quad C > 0, \quad T \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \quad (3.2-85)$$

Az ideális rendszer válasza és gerjesztése spektrumának kapcsolata a (27) értelmében

$$Y_0(e^{j\vartheta}) = C e^{-j\vartheta L} U(e^{j\vartheta}); \quad Y_0(j\omega) = C e^{-j\omega T} U(j\omega). \quad (3.2-86)$$

Ezek szerint az ideális rendszer átviteli karakterisztikája

$$\begin{aligned} H_0(e^{j\vartheta}) = C e^{-j\vartheta L} &\Rightarrow K_0(\vartheta) = C, \quad \varphi_0(\vartheta) = -L\vartheta; \quad C \in \mathbf{R}_+, \quad L \in \mathbf{N}; \\ H_0(j\omega) = C e^{-j\omega T} &\Rightarrow K_0(\omega) = C, \quad \varphi_0(\omega) = -T\omega; \quad C \in \mathbf{R}_+, \quad T \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \quad (3.2-87)$$

A jelátvitel akkor *torzításmentes*, ha az *amplitúdó-karakterisztika* állandó, a *fázis-karakterisztika* nulláról lineárisan csökken (tehát a futási idő karakterisztika állandó).

Valamely rendszer annál kisebb hibával biztosítja a torzításmentes átvitelt, minél jobban közelíti impulzusválasza vagy átviteli karakterisztikája az ideálíst. A következőkben a második megközelítést tárgyaljuk.

Szorítkozzunk olyan gerjesztésekre, amelyek spektruma nullának tekinthető vagy legalábbis elhanyagolható egy frekvenciasávon kívül (ez a feltételezés FI jelekre teljesen indokolt, hiszen egyébként a jel nem lenne véges energiájú):

$$\begin{aligned} U(e^{j\vartheta}) &\approx 0, \quad 0 \leq |\vartheta| < \vartheta_{u1}, \quad \vartheta_{u2} < |\vartheta| < \pi; \\ U(j\omega) &\approx 0, \quad 0 \leq |\omega| < \omega_{u1}, \quad \omega_{u2} < |\omega| < \infty. \end{aligned} \quad (3.2-88)$$

A $(\vartheta_{u1}, \vartheta_{u2})$ illetve az $(\omega_{u1}, \omega_{u2})$ körfrekvencia-intervallum az u jel *sávszélessége*. Néha nem az intervallumot, hanem az intervallum $\Delta\vartheta_u = \vartheta_{u2} - \vartheta_{u1}$ illetve a $\Delta\omega_u = \omega_{u2} - \omega_{u1}$ hosszát nevezik sávszélességnek, mert például a sáv közepét adottnak lehet tekinteni. Sok gyakorlati esetben ϑ_{u1} illetve ω_{u1} nulla, ekkor $\Delta\vartheta_u = \vartheta_{u2}$ illetve $\Delta\omega_u = \omega_{u2}$. Ha a jel sávkorlátozott Θ illetve Ω sávkorláttal, akkor $\vartheta_{u2} \leq \Theta$ illetve $\omega_{u2} \leq \Omega$. A véges energiájú FI jelekre mindig értelmezhető sávszélesség. A gyakorlatban a FI sávszélességet a frekvenciára (nem a körfrekvenciára) adják meg.

A torzításmentes jelátvitelt közelítőleg olyan rendszer biztosítja, amelynek amplitúdó-karakterisztikája állandó, fáziskarakterisztikája lineárisan csökken (futási idő karakterisztikája állandó) a gerjesztés sáv szélességén belül. Megelégedhetünk azzal is, ha e két feltétel csak közelítőleg van kielégítve.

Nevezzük a rendszer sáv szélességének azt a $(\vartheta_{H1}, \vartheta_{H2})$ diszkrét idejű illetve $(\omega_{H1}, \omega_{H2})$ folytonos idejű körfrekvencia-intervallumot, amelyen belül a rendszer $K = |H|$ amplitúdó-karakterisztikája csak kevésbé (rendszerint egy megengedett arányban) tér el maximális értékétől:

$$\begin{aligned} \text{DI: } K(\vartheta) &\approx K_{\max}, \quad \vartheta_{H1} \leq |\vartheta| \leq \vartheta_{H2}; \\ \text{FI: } K(\omega) &\approx K_{\max}, \quad \omega_{H1} \leq |\omega| \leq \omega_{H2}. \end{aligned} \quad (3.2-89)$$

A rendszer sáv szélessége nem egyezik meg impulzusválaszának (mint jelnek) a sáv szélességével. Utóbbi ritkán használatos a rendszer jellemzésére.

A torzításmentes átvitelhez biztosítani kell, hogy a rendszer sáv szélessége magába foglalja a gerjesztés sáv szélességét, azaz

$$\text{DI: } \vartheta_{H1} \leq \vartheta_{u1}, \quad \vartheta_{u2} \leq \vartheta_{H1}; \quad \text{FI: } \omega_{H1} \leq \omega_{u1}, \quad \omega_{u2} \leq \omega_{H2}. \quad (3.2-90)$$

teljesüljön. Ennek $\Delta\vartheta_u \leq \Delta\vartheta_H$ illetve $\Delta\omega_u \leq \Delta\omega_H$ egy szükséges feltétele, ahol $\Delta\vartheta_u \equiv \vartheta_{u2} - \vartheta_{u1}$, $\Delta\vartheta_H \equiv \vartheta_{H2} - \vartheta_{H1}$ illetve $\Delta\omega_u \equiv \omega_{u2} - \omega_{u1}$, $\Delta\omega_H \equiv \omega_{H2} - \omega_{H1}$. Ez a feltétel azért nem elegendő, mert H sáv szélességének frekvencia-intervallumának magába kell foglalnia u sáv szélességének frekvencia-intervallumát.

A (90) csak egyik feltétele a torzításmentes átvitelnek, hiszen (87) értelmében teljesülnie kell még a fáziskarakterisztikára vonatkozó alábbi feltételnek is:

$$\varphi(\vartheta) \approx -L\vartheta, \quad \vartheta_{u1} \leq |\vartheta| \leq \vartheta_{u2}; \quad \varphi(\omega) \approx -T\omega, \quad \omega_{u1} \leq |\omega| \leq \omega_{u2}. \quad (3.2-91)$$

A következő két pontban részletesebben tárgyaljuk a rendszer és a jel sáv szélességét, hiszen ezeket eddig csak kvalitatíven értelmeztük. Az alábbi példa előkészíti az általános értelmezést.

A torzításmentes jelátvitel biztosítására vonatkozó előző megfontolásunk egy illusztrációja annak, hogy miként lehet a rendszerrel szemben támasztott követelményt a frekvenciatartományban megfogalmazni.

Példa Torzításmentesen át akarjuk vinni a FI négyszögimpulzust (12a ábra):

$$u(t) = U_m \{ \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T) \}, \quad T > 0$$

egy olyan rendszeren, amelynek átviteli karakterisztikája (12c ábra)

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \Rightarrow K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega\tau; \quad \tau > 0.$$

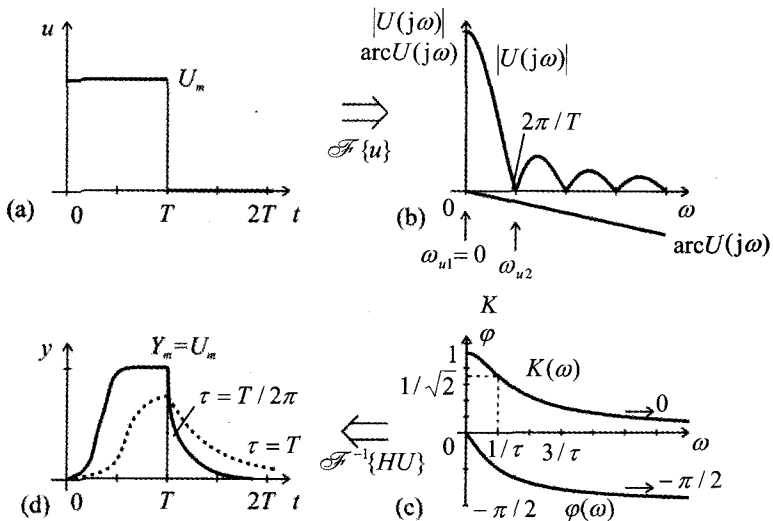
Határozzuk meg a T és τ kapcsolatára vonatkozó feltételt!

A gerjesztőjel spektruma (5) értelmében

$$U(j\omega) = U_m T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}.$$

Amint a 12b ábrából is látható $|U(j\omega)|_{\max} = U_m T$ és $\omega_{u1} = 0$. Válasszuk meg ω_{u2} körfrekvenciát az $|U(j\omega)|$ első nullahelyénél. (Ilyen nullahely nem minden spektrumnál létezik, ezért ez nem lehet egy általánosan követhető eljárás.) Ezzel a választással $\omega_{u2} = 2\pi/T$ adódik, vagyis $\Delta\omega_u = 2\pi/T$ és $\Delta f_u \equiv \Delta\omega_u / 2\pi = 1/T$, utóbbi az impulzus T szélességének reciproka. A $\Delta f_u = 1/T$ összefüggés más alakú impulzus sávzélességének becslésére is használható. Az $|U(j\omega)|$ maximuma a sávzélességen kívül $0,21|U(j\omega)|_{\max}$, ami nem „nagyon kicsi”, ezért a gerjesztés sávzélességét indokolt a fenténél nagyobbak választani, de első becslésként az előző választás elfogadható.

A rendszer amplitúdó-karakteristikája monoton csökkenő (12c ábra). Látható, hogy $K_{\max} = 1$, $\omega_{H1} = 0$. Válasszuk meg ω_{H2} értékét annak alapján, hogy ott az energiaátvitel a maximálisnak fele legyen: $K^2(\omega_{H2}) = K_{\max}^2 / 2$, $K(\omega_{H2}) = K_{\max} / \sqrt{2}$. Ebből $\omega_{H2} = \Delta\omega_H = 1/\tau$ adódik a rendszer sávzélességére. A fázis értéke a sávhatárokon $\varphi(\omega_{H1}) = 0$, $\varphi(\omega_{H2}) = -\pi/4 = -0,785$. A $\varphi(\omega)$ kezdeti meredeksége $-1/\tau$, tehát a lineáris extrapoláció a sávhatáron $(-1/\tau) \cdot \omega_{H2} = -1$ értéket ad. Ebből az következik, hogy a fázis lineáris menete gyenge közelítésként elfogadható.



3.2-12. ábra A négyzetjellel torzításmentes átvitelének közelítő biztosítása. (a) A gerjesztés időfüggvénye. (b) Az átvendő jel spektruma. (c) A rendszer amplitúdó- és fázis-karakteristikája. (d) A válasz időfüggvénye

A torzításmentes átvitel (89) feltétele a $\Delta\omega_u \leq \Delta\omega_H$ alakra egyszerűsödik. Előző eredményeink alapján ebből a $2\pi/T \leq 1/\tau$, vagyis a $\tau \leq T/2\pi \approx 0,16T$ feltétel következik.

A 12d ábrán a folytonos vonal mutatja a válasz menetet $\tau = T/2\pi$ esetén. Ez a négyzetgimpulzus egy elfogadható közelítésének tekinthető. A 11d ábra szaggatott vonalú görbéje azt szemlélteti, hogy ha a sávzélességek nincsenek megfelelően választva (az ábrán a $\tau = T$ eset, akkor a válasz jelalakja nem is hasonlít a gerjesztés jelalakjára. #

3.2-2.5. A rendszer sáv szélességei

A rendszer sáv szélességének alap gondolatát az előző pontban már megadtuk. Most pontosabb definíciót tárgyalunk. A témára a 4.2-3.6. pontban még visszatérünk.

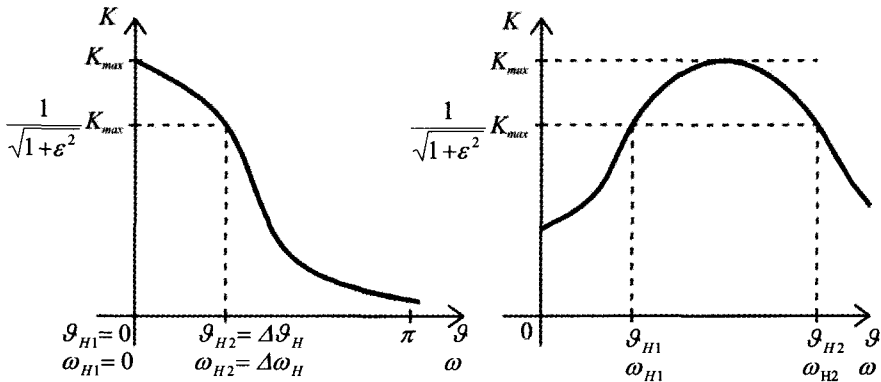
A $K(\vartheta)$ illetve $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztikájú DI illetve FI rendszer sáv szélessége az a frekvencia-intervallum, amelyben közelítőleg állandónak tekinthető, vagyis értéke nem tér el nagyon maximumától. A pontosabb megfogalmazás érdekében válasszunk egy $0 < \varepsilon \leq 1$ értéket. A rendszer sáv szélességének azt a frekvencia-intervallumot tekintjük, amelyben (13. ábra)

$$\begin{aligned} \text{DI: } & \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} K_{\max} \leq K(\vartheta) \leq K_{\max}, \quad \vartheta_{H1} \leq \vartheta \leq \vartheta_{H2}; \\ \text{FI: } & \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} K_{\max} \leq K(\omega) \leq K_{\max}, \quad \omega_{H1} \leq \omega \leq \omega_{H2} \end{aligned} \quad (3.2-92)$$

teljesül. Néha a $\Delta\vartheta_H \equiv \vartheta_{H2} - \vartheta_{H1}$ illetve a $\Delta\omega_H \equiv \omega_{H2} - \omega_{H1}$ értéket, vagyis az intervallum hosszát nevezik a rendszer sáv szélességének.

A FI esetben gyakran a $\Delta f_H = \Delta\omega_H / 2\pi$ értéket adják meg, amelyre a B jel („bandwidth”) is használatos. A frekvencia-intervallum helyett megadható annak szélessége és középértéke is.

Az előző pontban önkényesen az $\varepsilon = 1$ választással éltünk. Ha ε értéke nincs explicite megadva, akkor rendszerint erről az értékről van szó. Ez megfelel a sáv szélességen belül legfeljebb $1 - 1/\sqrt{2} \approx 0,3 = 30\%$ vagyis 3 dB ingadozásnak. Sok gyakorlati esetben ennél kisebb ingadozás engedhető csak meg, vagyis kisebb ε értéket kell választanunk.



3.2-13. ábra A rendszer sáv szélességének értelmezése

Könnyen belátható (lásd a 4.2-3.6. pontot is), hogy például

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\omega / \Omega)^{2n}}}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

egy ilyen FI rendszer amplitúdó-karakterisztikája, amelynek sáv szélességét $\omega_{H1} = 0$, $\omega_{H2} = \Delta\omega \equiv \Omega$ jellemzi

Az amplitúdó-karakterisztika első, második, ..., $(n-1)$ -edik deriváltja nulla az $\omega = 0$ helyen. A karakterisztikát vagy a rendszert ezért szokás maximális laposságúnak (vagy

Butterworth-típusúnak) nevezni. Igazolható, hogy az átviteli karakterisztika racionális, általános alakja (figyeljük meg, hogy $a_i = a_{n-i}$):

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)^n + a_1\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)^{n-1} + a_2\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)^{n-2} + \dots + a_2\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 + a_1\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right) + 1}$$

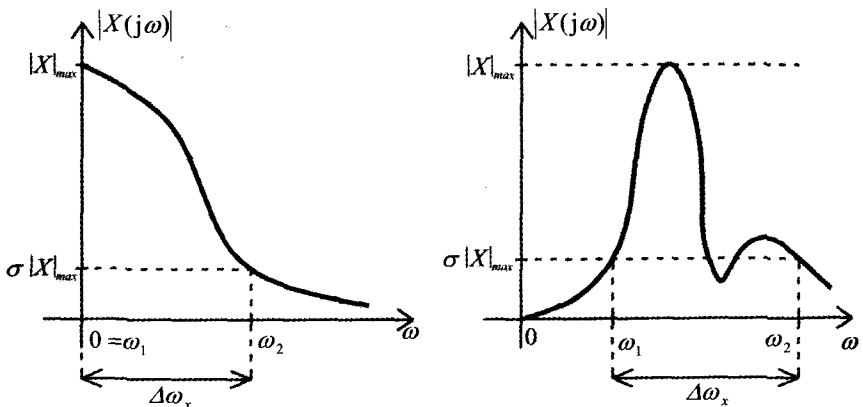
Ha $n = 2$, akkor $a_1 = \sqrt{2}$, ha $n = 3$, akkor $a_1 = 2$, ha $n = 4$, akkor $a_1 \approx 2,613$, $a_2 \approx 3,414$. Tetszőleges fokszámokra vonatkozó összefüggést később adunk meg. Minél nagyobb n értéket választunk, annál laposabb az amplitúdó-karakterisztika a sáv szélességen belül és annál kisebb a sáv szélességen kívül. Az n értékét például annak alapján választjuk, hogy egy bizonyos frekvencia fölött az amplitúdó-karakterisztika egy előírt értéknél kisebb legyen.

3.2-2.6. A jel sáv szélességei

Egy $x[k]$ illetve $x(t)$ jel sáv szélessége az a $(\vartheta_{x1}, \vartheta_{x2})$ illetve $(\omega_{x1}, \omega_{x2})$ körfrekvencia-intervallum, amelyen kívül a jel $X(e^{j\vartheta})$ illetve $X(j\omega)$ spektruma elhanyagolható. A sáv szélesség fenti, kissé laza értelmezése néha egyértelmű eredményre vezet. Ha például egy ω_0 körfrekvenciájú szinuszos FI jel amplitúdóját egy ω_m körfrekvenciájú másik szinuszos jel modulálja, akkor az $x(t)$ modulált jel spektruma mindenütt nulla, kivéve a $\pm \omega_0, \pm(\omega_0 - \omega_m), \pm(\omega_0 + \omega_m)$ körfrekvenciákat (a 3.1-2.1. pont példája). Ekkor $\omega_{x1} = \omega_0 - \omega_m, \omega_{x2} = \omega_0 + \omega_m$ és $\Delta\omega_x = 2\omega_m$. Sok gyakorlati feladatnál a jel egy olyan rendszer válasza, amely csak egy frekvenciasávban enged át jeleket (például egy sáváteresztő szűrő).

Nincs azonban általánosan elfogadott definíció a jel sáv szélességére. Egy lehetséges értelmezés a következő (14. ábra).

Egy $x[k] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\vartheta})\}$ illetve egy $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$ jel sáv szélessége az a $(\vartheta_{x1}, \vartheta_{x2})$ illetve $(\omega_{x1}, \omega_{x2})$ körfrekvencia-intervallum, amelyen kívül



3.2-14. ábra A jel sáv szélességének értelmezése az amplitúdó-karakterisztika alapján

$$\begin{aligned} \text{DI: } & |X(e^{j\theta})| < \sigma |X(e^{j\theta})|_{\max}, \quad 0 \leq |\theta| < \vartheta_{x1}, \quad \vartheta_{x2} < |\theta| < \pi; \\ \text{FI: } & |X(j\omega)| < \sigma |X(j\omega)|_{\max}, \quad 0 \leq |\omega| < \omega_{x1}, \quad \omega_{x2} < |\omega| < \infty \end{aligned} \quad (3.2-93)$$

ki van elégítve, ahol $0 < \sigma < 1$ egy előírt szám (például $\sigma = 0,1$). A $\Delta\vartheta_x = \vartheta_{x2} - \vartheta_{x1}$ illetve a $\Delta\omega_x = \omega_{x2} - \omega_{x1}$ mennyiséget (vagyis a frekvencia-intervallum hosszát) is szokták a jel sávzsélességének nevezni.

Ha az amplitúdó-karakterisztika erősen ingadozik, akkor célszerű helyette a burkolóját tekinteni (lásd a példát).

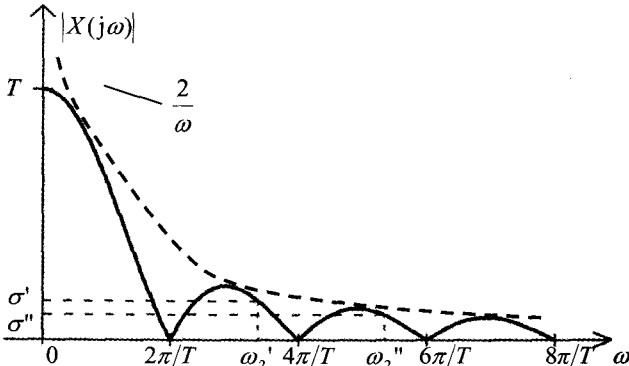
Az előző definíció értelmében a jel energiaspektrumára a sávzsélességen kívüli tartományban $|X|^2 < \sigma^2 |X|_{\max}^2$ érvényes. A DI esetben ez egy biztosítéka annak, hogy a jel energiájának döntő része a sávzsélességen belülré esik. Ez nem mindig igaz a FI esetben, mert a sávzsélességen kívüli frekvenciatartomány nem véges. Célszerű lehet ezért úgy definiálni a sávzsélességet, hogy a jel energiájának (azaz FI esetben $|X(j\omega)|^2/2\pi$ integráljának) egy előírt nagy hányada (például 90 %-a) essék a sávzsélességen belülré. Ez a definíció azonban nem ad egyértelmű megoldást, ezért valamilyen további megkötésre is szükség van. Másféle definíciók is használatosak, de sajnos mindegyikükkel kapcsolatban felléphetnek értelmezési nehézségek.

Példa Határozzuk meg a folytonos idejű, T hosszúságú, négyszögletes impulzus sávzsélességét! A jel amplitúdó-spektruma, mint már láttuk

$$|X(j\omega)| = \left| \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} \right|, \quad |X(j\omega)|_{\max} = |X(j0)| = T.$$

A (93) értelmében $\omega_{x1} = 0$.

Az ω_{x2} értékét annak alapján kell meghatározni, hogy ha $\omega > \omega_{x2}$, akkor $|X(j\omega)| < \sigma T$ teljesüljön. A 15. ábrából azonban látható, hogy ekkor ω_{x2} nem lesz σ folytonos függvénye, ami nem logikus. Elfogadhatóbb eredményt kapunk, ha az amplitúdó-spektrumot burkolójával, a $|2/\omega|$ függvénnyel közelítjük (szaggatott vonalú görbe a 15. ábrán). Ekkor ω_{x2} a $2/\omega_{x2} = \sigma T$ összefüggésből számítható és $\omega_{x2} = \Delta\omega_x = 2/\sigma T$ adódik.



3.2-15. ábra A négyszögletes impulzus sávzsélességének meghatározása

A $\sigma = 0,02$ választással $\Delta\omega_x = 100/T$, $\Delta f_x \approx 16/T$ adódik. A 3.2-2.4. pont példájában önkényesen $\Delta\omega_x = 2\pi/T$ választással éltünk, amihez $\sigma = 1/\pi \approx 0,318$ tartozik. #

*3.2-2.7. A sávszélesség és a jelszélesség kapcsolata

Egy $x(t)$ folytonos idejű, valós értékű, véges energiátartalmú jel Δt jelszélességének egy lehetséges értelmezése a következő. Tekintsük az $x^2(t)$ függvényt egy vonalmenti tömegsűrűségnek és határozzuk meg ennek t_1 „tömegközéppontját” és Δt „inerciasugarát”. Matematikai értelmezésben:

$$t_1 \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t x^2(t) dt,$$

$$(\Delta t)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_1)^2 x^2(t) dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - 2t t_1 + t_1^2) x^2(t) dt.$$

Ebből adódik a Δt jelszélesség következő kifejezése:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{J_2}{J_0} - \left(\frac{J_1}{J_0}\right)^2}; \quad t_1 = \frac{J_1}{J_0}; \quad J_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t^n x^2(t) dt, \quad n = 0, 1, 2. \quad (3.2-94)$$

A jelszélességet úgy tekinthetjük, hogy a jel a t_1 időpont körüli $2\Delta t$ szélességű intervallumban, például a $(t_1 - \Delta t, t_1 + \Delta t)$ intervallumban koncentrálódik, azon kívül esetleg el is hanyagolható.

Látható, hogy $J_0 = E_x$ az $x(t)$ jel energiátartalma, J_2 pedig a $t x(t)$ jel energiátartalma. Eredményünk csak akkor értelmes, ha ezek végesek. Tipikusan ez a helyzet, ha a jel korlátos és időkorlátozott. Ha $x(t)$ páros függvénnyel leírható, akkor $J_1 = 0$ és ekkor $t_1 = 0$. A $t = 0$ időpont mindig megválasztható úgy, hogy $t_1 = 0$ legyen.

Analóg módon értelmezhetjük egy valós értékű FI jel $\Delta\omega$ sávszélességét spektrumának abszolút értékére támaszkodva és pozitív frekvenciákra szorítkozva:

$$\Delta\omega_1 = \sqrt{\frac{I_2}{I_0} - \left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2}; \quad \omega_1 = \frac{I_1}{I_0}; \quad I_n = \int_0^{\infty} \omega^n |X(j\omega)|^2 d\omega, \quad n = 0, 1, 2. \quad (3.2-95)$$

Az ω_1 körüli $\Delta\omega_1$ hosszúságú intervallumot úgy kell megválasztani, hogy alsó határa pozitív legyen. Ez az értelmezés akkor célszerű, ha a jel spektruma egy, viszonylag nagy frekvencia környezetére koncentrálódik (például modulált jel). Ha viszont a jel spektrumában a kisfrekvenciás komponensek dominálnak, akkor célszerűbb lehet a sávszélességet a következőképpen értelmezni:

$$\Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{J_2}{I_0}}; \quad I_n = \int_0^{\infty} \omega^n |X(j\omega)|^2 d\omega; \quad n = 0, 2. \quad (3.2-96)$$

Ilyenkor a $(0, \Delta\omega_0)$ intervallumon kívül tekintjük a jel spektrumát elhanyagolhatónak.

A feladat természetétől függően a most értelmezett jelszélesség és sávzélesség egy többszörösét célszerű azon intervallum szélességének tekinteni, amelyen kívül a jel, illetve a spektruma elhanyagolható.

Mindkét most definiált sávzélesség létezésének feltétele az, hogy $\omega^2 |X(j\omega)|^2$ integrálható, vagyis még a jel deriváltja is véges energiátartalmú legyen. Ennek szükséges feltétele az, hogy $\omega X(j\omega)$ nullához tartson, ha $\omega \rightarrow \infty$, illetve hogy $x(t)$ folytonos legyen. Az utóbbi kikötés miatt sok fontos jelre ezek a sávzélességek nem értelmezhetők (például négyszögimpulzus). Ebből az is következik, hogy folytonos, de nagyon gyors változású jelekre az így értelmezett sávzélesség félrevezető értékű lehet.

Szorítkozzunk most arra az esetre, amikor Δt és $\Delta\omega_0$ egyaránt értelmezett, továbbá $t = 0$ alkalmas választásával $t_1 = 0$ is biztosított. Igazolni fogjuk, hogy ekkor

$$(\Delta t) \cdot (\Delta\omega_0) \geq \frac{1}{2}; \quad \Delta t = \sqrt{\frac{J_2}{J_0}}, \quad \Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{I_2}{I_0}}. \quad (3.2-97)$$

Ez azt fejezi ki, hogy minél keskenyebb egy jel, annál szélesebb a spektruma. Ez összhangban van az előző pontban a négyszögimpulzusra vonatkozó eredményünkkel.

Az igazoláshoz használjuk fel a következő (Bunyakovszkij-, Cauchy-, Schwartz-) egyenlőtlenséget:

$$\left| \int_a^b f(t) g^*(t) dt \right|^2 \leq \left\{ \int_a^b |f(t)|^2 dt \right\} \left\{ \int_a^b |g(t)|^2 dt \right\}.$$

Legyen $f = t x$, $g = x'$ (feltételezzük, hogy ez is függvény, tehát x folytonos), akkor

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) x'(t) dt \right|^2 \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t) dt \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [x'(t)]^2 dt \right\}.$$

A bal oldal (parciális integrálás után és $t x(t)$ feltételezett viselkedését figyelembe véve) értéke $J_0^2 / 4$. A jobb oldal első tényezője $(\Delta t)^2 J_0$. A jobb oldal második tényezője (Parseval tételét felhasználva a deriváltra) pedig $(\Delta\omega_0)^2 J_0$. Ezekkel valóban (97) adódik.

Az egyenlőtlenség akkor élesedik egyenlőséggé, ha a benne szereplő f és g függvények arányosak. Esetünkben ennek feltétele x' és $t x$ arányossága, vagyis $x' = -2\alpha^2 t x$ teljesülése. Ennek az $x(0) = A$ feltételt kielégítő megoldása könnyen beláthatóan a Gauss-függvény, amelynek spektruma is Gauss-függvény:

$$x(t) = A e^{-(\alpha t)^2}, \quad X(j\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} A e^{-(\omega/2\alpha)^2}. \quad (3.2-98)$$

Belátható, hogy erre $\Delta t = 1/2\alpha$, $\Delta\omega_0 = \alpha$, tehát szorzatuk éppen $1/2$.

Példa Határozzuk meg az

$$x(t) = A e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$

jel most értelmezett jelszélességét és sávzélességeit!

A szimmetria következtében $J_1 = 0$, továbbá beláthatóan

$$J_0 = 2 \int_0^{\infty} A^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{\alpha}, \quad J_2 = 2 \int_0^{\infty} A^2 t^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{2\alpha^3}.$$

Ebből a (94) szerinti jelszélesség $\Delta t = 1/(\sqrt{2}\alpha) \approx 0,707/\alpha$. Mivel $x(\Delta t) \approx 0,49 x(0)$ viszonylag nagy érték, ezért Δt -nél nagyobb (például $5\Delta t$) értéket célszerű jelszélességnek tekinteni.

A jel spektruma integrálással nehézség nélkül számítható:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-j\omega)t} dt + A \int_0^{\infty} e^{(-\alpha-j\omega)t} dt = \frac{A}{\alpha-j\omega} + \frac{A}{\alpha+j\omega} = \frac{2A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Belátható, hogy (az érdektelen $2A\alpha$ szorzótól eltekintve)

$$I_n = \int_0^{\infty} \omega^n \frac{1}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} d\omega = \begin{cases} \pi/\alpha, & n=0; \\ 2, & n=1; \\ \pi\alpha, & n=2. \end{cases}$$

Ennek felhasználásával azt kapjuk, hogy $\omega_1 = 2\alpha/\pi \approx 0,637\alpha$, továbbá

$$\Delta\omega_1 = \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} \alpha \approx 0,784\alpha, \quad X(j2\Delta\omega_1) \approx 0,296X(j0);$$

$$\Delta\omega_0 = \alpha, \quad X(j\Delta\omega_0) = 0,5X(j0).$$

A kétféle sávzélesség meglehetősen eltérő, továbbá egyik sem tekinthető elég nagyoknak, hiszen a sávzélességen kívül a spektrum nem elhanyagolható. Ebből is az következik, hogy a sávzélességre és a jelszélességre az ebben a pontban megadott definíció inkább elméletileg érdekes, gyakorlatilag kevésbé hasznos.

A példában vizsgált jelre $(\Delta t)(\Delta\omega_0) \approx 0,707$, tehát a (97) egyenlőtlenség az itt definiált jelszélesség és sávzélesség szorzatára valóban teljesül. #

3.2-2.8. Moduláció

Tekintsünk egy $x(t)$ folytonos idejű jelet, amely sávkorlátozottnak tekinthető Ω sávkorláttal, vagyis a jel $X(j\omega)$ spektruma a $0 \leq \omega \leq \Omega$ körfrekvencia-intervallumon kívül elhanyagolható. (A negatív frekvenciákkal nem kell foglalkozunk.) Ezt a jelet kívánjuk egy csatornán (például egy kábelben) átvinni.

A moduláció célja az $x(t)$ jelből egy olyan $y(t)$ jel előállítása, amelynek $Y(j\omega)$ spektruma az $(\omega_c - \Omega, \omega_c + \Omega)$ körfrekvencia-intervallumon belüli része hordozza az $x(t)$ jelre vonatkozó információt, ahol ω_c a vivő-körfrekvencia („carrier”). Ha különböző x_1, x_2, \dots, x_n jeleink vannak és ezekkel úgy moduláljuk az $\omega_{c1}, \omega_{c2}, \dots, \omega_{cn}$ vivő-körfrekvenciájú jeleket, hogy az $(\omega_{ci} - \Omega_i, \omega_{ci} + \Omega_i)$ intervallumok ne lapolódjanak át, akkor ugyanazon a csatornán egyidejűleg vihetjük át e jeleket anélkül, hogy egymást zavarnák. Mint látni fogjuk, az átlapolásra vonatkozó feltételek még enyhíthetők is.

Ebben a pontban azzal az esettel foglalkozunk, amikor a modulált jelet

$$y(t) = a(t) \cos(\omega_c t + \rho(t)) \quad (3.2-99)$$

írja le. Ennek pillanatnyi amplitúdója $a(t)$, pillanatnyi körfrekvenciája

$$\omega(t) = \omega_c + \rho'(t). \quad (3.2-100)$$

Ennek a modulációnak három alapvető típusa az amplitúdó-moduláció (AM), a fázis-moduláció (PM, „phase”) és a frekvencia-moduláció (FM). Léteznek másféle modulációk is, de ezekkel nem foglalkozunk.

Az egyszerűsítés érdekében azt az esetet részletezzük, amikor az átvendő $x(t)$ szinuszos jel, noha ez önmagában gyakorlatilag érdektelen feladat. Az általános eset azonban a Fourier-transzformáció felhasználásával erre visszavezethető.

Az átvitt $y(t)$ modulált jelet demodulációval még vissza kell alakítani az eredeti $x(t)$ jellé. A demodulációval azonban nem foglalkozunk.

Amplitúdó-moduláció

Az amplitúdó-moduláció során a modulált jel $a(t)$ amplitúdója hordozza az átvendő $x(t)$ jelet. Ekkor $\rho(t) = \rho_0$ állandó, amelyet a továbbiakban nullának választunk.

Az amplitúdó-modulált jel tipikusan

$$y_{AM}(t) = [A + m x(t)] \cos \omega_c t \quad (3.2-101)$$

alakú, ahol A nulla is lehet, de többnyire $A > m > 0$.

Tekintsünk szinuszos átvendő jelet:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos \omega_x t, \quad \omega_x \ll \omega_c; \\ y_{AM}(t) &= [A + m X \cos \omega_x t] \cos \omega_c t = \\ &= A \cos \omega_c t + \frac{1}{2} m X \{ \cos (\omega_c - \omega_x) t + \cos (\omega_c + \omega_x) t \}. \end{aligned} \quad (3.2-102)$$

Az amplitúdó-modulált jel az ω_c vivőfrekvenciás összetevőn kívül két oldalsávú összetevőt tartalmaz, amelyek körfrekvenciája $\omega_c - \omega_x$ és $\omega_c + \omega_x$.

Elegendő az egyik oldalsávot átvinni, hiszen az is hordozza az átvendő jelre vonatkozó információt. Az oldalsáv leválasztása a jel szűrésével oldható meg.

Általános esetben az $X(j\omega)$ spektrumú jellel amplitúdó-modulált szinuszos jel időfüggvénye és spektruma (vö. 3.2-3. ábra a 240. oldalon)

$$y_{AM}(t) = m x(t) \cos \omega_c t, \quad Y_{AM}(j\omega) = \frac{1}{2} m \{ X(j(\omega + \omega_c)) + X(j(\omega - \omega_c)) \}. \quad (3.2-103)$$

Egyszerűsödik a helyzet, ha $x(t)$ sávkorlátozott és Ω sávkorlátja sokkal kisebb mint ω_c .

Fázis-moduláció

A fázis-moduláció során a modulált jel $\rho(t)$ kezdőfázisa hordozza az átvendő $x(t)$ jelet. Ekkor az amplitúdó $a(t) = A$ állandó.

A fázis-modulált jel tipikusan

$$y_{PM}(t) = A \cos (\omega_c t + m x(t)) \quad (3.2-104)$$

alakú. Ennek pillanatnyi körfrekvenciája a fázis deriváltja:

$$\omega(t) = \omega_c + m x'(t), \quad |m x'(t)| < \omega_c. \quad (3.2-105)$$

A kikötés biztosítja, hogy $\omega(t)$ pozitív legyen.

Tekintsünk szinuszos átvendő jelet:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \sin \omega_x t, \\ y_{\text{PM}}(t) &= A \cos(\omega_c t + m X \sin \omega_x t), \\ \omega_{\text{PM}}(t) &= \omega_c + m X \omega_x \cos \omega_x t; \quad |m| X \omega_x < \omega_c. \end{aligned} \quad (3.2-106)$$

Még a legegyszerűbb szinuszos átvendő (fázis-moduláló) jel esetén sem könnyű áttekinteni a modulált jel frekvenciatartománybeli tulajdonságait. Ezért először egy egyszerűsített esetet vizsgálunk.

Tételezzük fel, hogy $|m X| \ll 1$. Ekkor a (106) közelítőleg egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned} y_{\text{PM}}(t) &= A \{ \cos \omega_c t \cos(m X \sin \omega_x t) - \sin \omega_c t \sin(m X \sin \omega_x t) \} \\ &\approx A \{ \cos \omega_c t - m X \sin \omega_x t \sin \omega_c t \} = \\ &= A \cos \omega_c t + \frac{1}{2} m X A \{ \cos(\omega_c + \omega_x) t - \cos(\omega_c - \omega_x) t \}. \end{aligned} \quad (3.2-107)$$

Mint látjuk: ebben a közelítésben ugyanazok a frekvencia-komponensek lépnek fel, mint amplitúdó-moduláció esetén. Az átvendő jelre vonatkozó információt továbbra is bármelyik oldalsáv hordozza.

Ha az $|m X| \ll 1$ egyszerűsítő feltétel nem teljesül, akkor a (107)-ben szereplő $\cos(m X \sin \omega_x t)$ és $\sin(m X \sin \omega_x t)$ periodikus függvények Fourier-sorba fejthetők, az alap-körfrekvencia ω_x . Igazolható, hogy a Fourier-együtthatók kifejezhetők Bessel-függvényekkel. A fázis-modulált jel spektrumában az ω_c vivőfrekvencia mellett elvileg végtelen sok további frekvencia is fellép. Ebben az általános esetben a moduláló és a modulált jel spektrumának kapcsolata is bonyolult. Nem vizsgáljuk tovább a fázis-moduláció általános esetét.

Frekvencia-moduláció

A frekvencia-moduláció során a modulált jel $\omega(t)$ pillanatnyi körfrekvenciája függ az $x(t)$ átvendő jeltől, a vivőjel amplitúdója állandó. Tipikus választás

$$\omega_{\text{FM}}(t) = \omega_c + \mu x(t), \quad |\mu x(t)| < \omega_c. \quad (3.2-108)$$

Tekintsünk ismét szinuszos átvendő jelet:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos \omega_x t, \quad |\mu X| < \omega_c; \quad \omega_{\text{FM}}(t) = \omega_c + \mu X \cos \omega_x t; \\ y_{\text{FM}}(t) &= A \cos \left(\omega_c t + \frac{\mu X}{\omega_x} \sin \omega_x t \right). \end{aligned} \quad (3.2-109)$$

Amint látjuk, $m = \mu / \omega_x$ megfeleltetéssel a frekvencia-moduláció és a fázis-moduláció között ebben az egyszerű esetben nincs érdemi különbség. Annyi azonban látható, hogy a pillanatnyi frekvencia változó összetevőjének amplitúdója fázis-moduláció esetén arányos az átvendő szinuszosnak tekintett jel ω_x körfrekvenciájával.

3.2-2.F. Feladatok

F-1. Egy DI illetve egy FI rendszer impulzusválasza és gerjesztése adott:

$$\text{DI: } h[k] = A \delta[k] + B \varepsilon[k-1] b^{k-1}, \quad |b| < 1; \quad u[k] = C \varepsilon[k] c^k, \quad |c| < 1.$$

$$\text{FI: } h(t) = A \delta(t) + B \varepsilon(t) e^{-\beta t}, \quad \beta > 0; \quad u(t) = C \varepsilon(t) e^{-\gamma t}, \quad \gamma > 0.$$

Határozza meg a válasz Y spektrumát egyszer y számításával majd annak Fourier-transzformálásával, másodsor $\mathcal{F}\{y\} = \mathcal{F}\{h\} \cdot \mathcal{F}\{u\}$ felhasználásával! Melyik módszer egyszerűbb? Miért szükségesek az egyenlőtlenségek által kifejezett feltételek?

***F-2.** Oldja meg az előző feladatot, ha

(a) a feltételek egyike nem teljesül.

(b) egyik feltétel sem teljesül. (Útmutatás. Ez alapos megfontolást igényel!)

F-3. Ismeretes, hogy ha az impulzusválasz λ^k illetve $e^{\lambda t}$ alakú összetevőt tartalmaz (λ a DI illetve a FI rendszer egy sajátértéke), és a gerjesztés is tartalmaz ilyen összetevőt, akkor speciális eset áll elő.

Hogyan jelentkezik ez a frekvenciatartománybeli analízisnél?

F-4. Határozza meg annak a DI illetve FI rendszernek az átviteli karakterisztikáját, amelynek impulzusválasza

$$\text{DI: } h[k] = A \varepsilon[k] a^k \cos(\Theta k + \rho), \quad |a| < 1.$$

$$\text{FI: } h(t) = A \varepsilon(t) e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \rho), \quad \alpha > 0.$$

***F-5.** Egy DI illetve FI rendszer átviteli karakterisztikája adott:

$$\text{DI: } H(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{1 - 2e^{-j\vartheta}}; \quad \text{FI: } H(j\omega) = \frac{1}{j\omega - 0,5}.$$

Határozza meg a rendszer impulzusválaszát! (Útmutatás. Alkalmazható a 3.2-2.2. pont 1. példájának eredménye $a = 2$ illetve $\alpha = -0,5$ helyettesítéssel?)

F-6. Egy diszkrét idejű illetve egy folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája valós értékű. Lehet-e kauzális egy ilyen rendszer?

F-7. Egy DI rendszer átviteli karakterisztikája adott:

$$(a) H(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{(1 - 0,9 e^{-j\vartheta} e^{-j\vartheta})(1 - 0,9 e^{+j\vartheta} e^{-j\vartheta})} \equiv \frac{1}{1 - 1,8 \cos \vartheta e^{-j\vartheta} + 0,81 e^{-j2\vartheta}}.$$

$$(b) H(e^{j\vartheta}) = (1 - e^{-j\vartheta} e^{-j\vartheta})(1 - e^{+j\vartheta} e^{-j\vartheta}) \equiv 1 - 2 \cos \vartheta e^{-j\vartheta} + e^{-j2\vartheta}.$$

Határozza meg az $u[k] = \varepsilon[k] 0,9^k \cos \Theta k$ gerjesztéshez tartozó válasz spektrumát!

Adja meg az $\eta_U = |U(e^{j\vartheta})|/|U(e^{j0})|$ és az $\eta_Y = |Y(e^{j\vartheta})|/|Y(e^{j0})|$ arányokat, ha $\Theta = \pi/2$.

F-8. A DI illetve FI lineáris fázisú, ideális felüláteresztő átviteli karakterisztikája

$$\text{DI: } H(e^{j\vartheta}) = 0, \quad 0 \leq |\vartheta| < \vartheta_c, \quad H(e^{j\vartheta}) = e^{-jn\vartheta}, \quad \vartheta_c < |\vartheta| < \pi, \quad n \in \mathbf{N}.$$

$$\text{FI: } H(j\omega) = 0, \quad 0 \leq |\omega| < \omega_c, \quad H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}, \quad \omega_c < |\omega| < \infty, \quad \tau \in \mathbf{R}_+.$$

Határozza meg a rendszer impulzusválaszát! Kauzális-e ez a rendszer?

F-9. Egy FI rendszer átviteli karakterisztikája adott:

$$H(j\omega) = 0, \quad 0 \leq |\omega| < \omega_1; \quad H(j\omega) = \frac{\omega_2 - |\omega|}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \omega_1 < |\omega| < \omega_2; \quad H(j\omega) = 0, \quad \omega_2 < |\omega| < \infty.$$

Határozza meg e sáváteresztő rendszer impulzusválaszát! Ellenőrizze az eredményt a $t = 0$ helyen!

F-10. Határozza meg a következő FI jeleknek a (93) definíció szerinti sávészélességét tetszőleges σ esetére, ha

$$(a) \quad x(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0. \quad (b) \quad x(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0. \quad (c) \quad x(t) = \varepsilon(t)\alpha t e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

$$(d) \quad x(t) = [\varepsilon(t) - 1]e^{\alpha t} + \varepsilon(t)e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0. \quad (e) \quad x(t) = e^{-(\alpha t)^2}.$$

Adjon közelítő összefüggést σ kis értékére és numerikus eredményt, ha $\sigma = 0,1$.

F-11. Adja meg a az előző feladat (a) és (b) szerinti jeleinek a sávészélességen belüli frekvenciatartományba eső relatív energiataralmát!

F-12. Oldja meg a 10. feladatot az $x(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t} \sin \Omega t$, $\alpha > 0$ folytonos idejű jelre, ha

$$(a) \quad \alpha = 2\Omega. \quad (b) \quad \alpha = \Omega. \quad (c) \quad \alpha = 0,1\Omega. \quad (d) \quad \alpha = 0,01\Omega.$$

F-13. Oldja meg a 10. feladatot a következő véges idejű FI jelekre:

$$(a) \quad x(t) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T).$$

$$(b) \quad x(t) = \varepsilon(t+T-T_0) - \varepsilon(t-T-T_0).$$

$$(c) \quad x(t) = [\varepsilon(t+T) - \varepsilon(t)] \frac{T+t}{T} + [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] \frac{T-t}{T}.$$

$$(d) \quad x(t) = [\varepsilon(t+T) - \varepsilon(t)] - [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)].$$

F-14. Legyen $x(t)$ egy valós értékű FI jel, amelynek energiataralma (Parseval tétele)

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \Rightarrow E_x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Értelmezzük a jel $\Delta\omega_E = \omega_2 - \omega_1$ sávészélességét a következő egyenlettel:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(j\omega)|^2 d\omega = (1 - \eta) E_x, \quad 0 < \eta < 1,$$

ahol η egy választható paraméter. Az egyértelműség biztosítására valamilyen ésszerű feltételezést kell tennünk az $\omega_1, (\omega_1 + \omega_2)/2, \sqrt{\omega_1\omega_2}$, stb. paraméterek egyikére.

Határozza meg ezt a sávészélességet a 10. feladat (a) és (b) szerinti jeleire.

Mutassa meg, ebben az esetben mindkét sávészélesség ugyanúgy függ az α paramétertől, ha $\sigma = 0,1$ és $\eta = 0,1$.

***F-15.** Legyen $x(t)$ egy valós értékű, páros FI jel, amelyre $x(0) \geq x(t)$ és $X(j0) \geq X(j\omega)$ érvényes. Defináljunk egy Δt_0 jelszélességet és egy $\Delta\omega_0$ sávészélességet a következő módon (feltételezzük, hogy az integrálok léteznek):

$$\Delta t_0 = \frac{1}{x(0)} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt, \quad \Delta \omega_0 = \frac{1}{X(j\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega.$$

Igazolja, hogy $\Delta t_0 \cdot \Delta \omega_0 = 2\pi$, vagyis minél nagyobb a jelszélesség, annál kisebb a sávzélesség és viszont. Más értelmezéssel már jutottunk hasonló eredményre.

F-16. A folytonos idejű, lineáris fázisú aluláteresztő átviteli karakterisztikájának egy közelítése (vö. 3.2-2.2. pont, 2. példa)

$$H(j\omega) = K(\omega) e^{-j\omega\tau}; \quad K(\omega) = 0, \quad |\omega| > \Omega; \quad \tau > 0.$$

(a) Mutassa meg, hogy a $h(t)$ impulzusválasz szimmetrikus a $t = \tau$ egyenesre. Milyen következtetés vonható le ebből?

*(b) Mutassa meg, hogy a rendszer helyettesíthető különböző késleltetési idejű, lineáris fázisú, ideális aluláteresztők párhuzamos kapcsolásával! (Útmutatás. Állítsa elő az amplitúdó-karakterisztikát Fourier-sor alakjában!)

F-17. Egy FI, lineáris fázisú ideális aluláteresztő (3.2-2.1. pont, 2. példa) jellemzői Ω és τ , gerjesztése $u(t) = A \sin \omega_1 t / \omega_1 t$, $\omega_1 > 0$.

Határozza meg a válasz $y(t)$ időfüggvényét!

F-18. Egy FI rendszer gerjesztés-válasz kapcsolata (csúszó átlagot képező rendszer)

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(t) dt, \quad T > 0.$$

Határozza meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!

F-19. Egy FI kauzális rendszer átviteli karakterisztikájának adott (a) a valós része, illetve (b) a képzetes része:

$$(a) \Re\{H(j\omega)\} = \frac{5\omega^2 + 75}{\omega^2 + 9}; \quad (b) \Im\{H(j\omega)\} = \frac{-10\omega}{\omega^2 + 9}.$$

Határozza meg elemi megfontolással a rendszer impulzusválaszát! Szükséges-e kikötni, hogy a rendszer kauzális vagy gerjesztés-válasz stabilis legyen?

F-20. A folytonos idejű $u(t)$ gerjesztő jel sávkorlátozott Ω sávkorláttal. A rendszer átviteli karakterisztikáját az $|\omega| < \Omega$ intervallumban Fourier-sorával írjuk le:

$$H(j\omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} H_q^C e^{jq\pi\omega/\Omega}.$$

Fejezze ki a rendszer $y(t)$ válaszában $y(p\pi/\Omega)$, $p \in \mathbf{Z}$ mintáit!

***F-21.** A Paley–Wiener-kritérium felhasználásával igazolja a következő két állítást.

(a) Egy véges energiájú FI jel nem lehet sávkorlátozott is és időkorlátozott is.

(b) Egy aluláteresztő típusú, négyzetesen integrálható amplitúdó-karakterisztikájú

FI rendszerre igaz, hogy $K(\omega) \rightarrow C e^{-(\omega/\Omega)^n}$, $\omega \rightarrow \infty$. Egy ilyen rendszer csak $n \leq 1$ esetén lehet kauzális. (Ezért nem kauzális a Gauss-szűrő, amelyre $n = 2$.)

F-22. Egy $u_c(t)$ FI jel sávkorlátozott Ω sávkorláttal. E jel $T = \pi / \Omega$ időközönként vett mintái által meghatározott $u_D[k] = u_c(kT)$ DI jel egy $H_D(e^{j\vartheta})$ átviteli karakterisztikájú DI rendszer gerjesztése.

Fejezze ki a DI rendszer $y_D[k]$ válaszáának kifejezését az $U_C(j\omega)$ spektrum ismeretében!

***F-23.** Jelölje a lineáris fázisú ideális FI aluláteresztő átviteli karakterisztikáját

$$H_a(j\omega) = \{\varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)\} e^{-j\omega\tau}, \tau \geq 0$$

és jelölje impulzusválaszát $h_a(t)$.

Rendeljünk ehhez egy $h(t) = \varepsilon(t) h_a(t)$ impulzusválaszt!

Kauzális-e és gerjesztés-válasz stabilis-e a $h(t)$ impulzusválaszú rendszer?

***F-24.** Oldja meg az előző feladatot, ha

$$H_a(j\omega) = e^{-j\omega\tau}, |\omega| < \Omega_1; \quad H_a(j\omega) = \frac{\Omega_2 - |\omega|}{\Omega_2 - \Omega_1} e^{-j\omega\tau}, \Omega_1 < |\omega| < \Omega_2;$$

és $H_a(j\omega) = 0, \Omega_2 < |\omega| < \infty$. Ez a lineáris fázisú ideális aluláteresztő egy folytonos függvénnyel történő közelítése.

***F-25.** A sávkorlátozott FI differenciátor átviteli karakterisztikája

$$H(j\omega) = j\omega, |\omega| < \Omega; \quad H(j\omega) = 0, |\omega| > \Omega.$$

Határozza meg e rendszer impulzusválaszát! Kauzális-e és gerjesztés-válasz stabilis-e ez a rendszer?

3.2-2.M. Megoldások

M-1. Mindkét módszerrel azt kapjuk, hogy

$$\text{DI: } Y(e^{j\vartheta}) = C \frac{A + (B - Ab)e^{-j\vartheta}}{(1 - be^{-j\vartheta})(1 - ce^{-j\vartheta})}; \quad |b| < 1, |c| < 1.$$

$$\text{FI: } Y(j\omega) = C \frac{(B + A\beta) + jA\omega}{(\beta + j\omega)(\gamma + j\omega)}; \quad \beta > 0, \gamma > 0.$$

Ha az egyenlőtlenségek nincsenek kielégítve, akkor az eredmény nem érvényes, mivel ekkor vagy a rendszer nem GV stabilis, vagy a gerjesztés nem abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható.

***M-2.** (a) Ha például $|b| < 1, c = 1$ illetve ha $\beta < 0, \gamma = 0$, akkor mindkét módon

$$\text{DI: } Y(e^{j\vartheta}) = C \left\{ \pi \frac{A + B - Ab}{1 - b} \delta(\vartheta) + \frac{A + (B - Ab)e^{-j\vartheta}}{(1 - e^{-j\vartheta})(1 - be^{-j\vartheta})} \right\}, \quad -\pi < \vartheta < \pi.$$

$$\text{FI: } Y(j\omega) = C \left\{ \pi \frac{B + A\beta}{\beta} \delta(\omega) + \frac{(B + A\beta) + jB\omega}{j\omega(\beta + j\omega)} \right\}.$$

(b) Ha az impulzsválasz és a gerjesztés egyaránt tartalmaz állandó összetevőt, akkor a feladatot nem tudjuk megoldani, mert az y egy Mk illetve Mt összetevőt tartalmaz, amelynek Fourier-transzformáltját nem értelmeztük. A frekvenciatartományban formálisan $[\delta(\vartheta)]^2$ illetve $[\delta(\omega)]^2$ összetevő adódik, amelynek jelentése tisztázásra szorul.

M-3. Az $Y(e^{j\vartheta})$ nevezője $(1 - \lambda e^{-j\vartheta})^2$, $|\lambda| < 1$ tényezőt, illetve az $Y(j\omega)$ nevezője $(j\omega - \lambda)^2$, $\Re\{\lambda\} < 0$ tényezőt tartalmaz.

M-4. A $H = \mathcal{F}\{h\}$ számításával

$$H(e^{j\vartheta}) = A \frac{\cos \rho - a \cos(\rho - \Theta) e^{-j\vartheta}}{1 - 2a \cos \Theta e^{-j\vartheta} + a^2 e^{-j2\vartheta}}.$$

$$H(j\omega) = A \frac{(\alpha \cos \rho + \Omega \sin \rho) + \cos \rho (j\omega)}{\alpha^2 + \Omega^2 + 2\alpha(j\omega) + (j\omega)^2}.$$

***M-5.** A 3.2-1.F.9(a) felhasználásával belátható, hogy

$$h[k] = \{\varepsilon[k] - 1\} 2^k = -2^{-1} \delta[k+1] - 2^{-2} \delta[k+2] - \dots; \quad h(t) = \{\varepsilon(t) - 1\} e^{0,5t}.$$

Ezek a rendszerek nem kauzálisak, nevezik antikauzálisnak is őket. A javasolt eljárás nem helyes.

M-6. Ha $\mathcal{M}\{H\} = 0$, akkor h páros jel (3.2-1.4. pont), ezért a „nem” válasz látszik helyesnek. Az $\mathcal{F}\{A \delta[k]\} = A$ illetve az $\mathcal{F}\{A \delta(t)\} = A$ összefüggések mutatják, hogy az $y = Au$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatú, tehát memóriamentes rendszer kauzális és mégis valós átviteli karakterisztikájú.

M-7. Ismert összefüggések felhasználásával adódik, hogy

$$(a) Y(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - p e^{-j\vartheta}}{(1 - 2p e^{-j\vartheta} + 0,81 e^{-j2\vartheta})^2}, \quad p \equiv 0,9 \cos \Theta.$$

Ha $\Theta = \pi/2$, akkor $\sigma_U = 9,53$ és $\sigma_Y = \sigma_U^2 = 90,75 > \sigma_U$.

$$(b) Y(e^{j\vartheta}) = 1 - p e^{-j\vartheta}, \quad p = 0,9 \cos \Theta \Rightarrow y[k] = \delta[k] - p \delta[k-1].$$

Ha $\Theta = \pi/2$, akkor $\sigma_U = 9,53$ és $\sigma_Y = 1 < \sigma_U$.

M-8. Használja fel, hogy $H_{\text{felülát}} = 1 - H_{\text{alulát}}$ és $\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta[k]$ illetve $\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(t)$.

$$h[k] = \delta[k] - \frac{\varrho_c}{\pi} \frac{\sin \varrho_c(k-n)}{\varrho_c(k-n)}; \quad h(t) = \delta(t) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(t-\tau)}{\omega_c(t-\tau)}.$$

Sem a DI, sem a FI rendszer nem kauzális és nem GV stabilis.

M-9. Használja fel, hogy $\int x \cos x \, dx = (\cos ax - ax \sin ax)/a^2$. Ezzel

$$h(t) = \frac{\sin \omega_1 t}{\pi t} - \frac{\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t}{\pi(\omega_2 - \omega_1)t^2}.$$

A rendszer nem kauzális. $h(0) = (\omega_2 - \omega_1)/2\pi$ véges érték.

M-10. A spektrumokat korábban már meghatároztuk.

$$(a) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = \alpha \sqrt{\frac{1}{\sigma} - 1} \approx \alpha \frac{1}{\sqrt{\sigma}}; \quad \Delta\omega|_{\sigma=0,1} = 3\alpha.$$

$$(b) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = \alpha \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} - 1} \approx \alpha \frac{1}{\sigma}; \quad \Delta\omega|_{\sigma=0,1} = 9,95\alpha.$$

Ez a jel nem folytonos, sávszélessége nagyobb az előző jel sávszélességénél.

(c) Az eredmények megegyeznek az (a) szerinti eredményekkel.

(d) Maximum van az $\omega = \alpha$ helyen. Rövid számolással: $\omega_{1,2} = \left\{1 \pm \sqrt{1 - \sigma^2}\right\} \alpha / \sigma$;

$$\Delta\omega = 2\alpha \sqrt{1 - \sigma^2} / \sigma \approx 2\alpha / \sigma, \quad \Delta\omega|_{\sigma=0,1} = 19,9\alpha.$$

(e) $\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = 2\alpha \sqrt{\ln(1/\sigma)}, \quad \Delta\omega|_{\sigma=0,1} = 3,03\alpha.$

M-11. Parseval tétele értelmében

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega, \quad \Delta E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

$$(a) \frac{\Delta E}{E} = \frac{2}{\pi} \left\{ \arctg \sqrt{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \sqrt{\sigma(1-\sigma)} \right\} \approx \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{1}{\sigma}} = 0,986.$$

$$(b) \frac{\Delta E}{E} = \arctg \sqrt{\frac{1-\sigma^2}{\sigma}} \approx \frac{2}{\pi} \arctg \frac{1}{\sigma} = 0,936.$$

A (a) esetben az energia valamivel nagyobb része esik a sávszélességbe.

M-12. A jel spektruma

$$X(j\omega) = \frac{\Omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \Omega^2} = \frac{\Omega}{(\alpha^2 + \Omega^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega}.$$

Az $|X(j\omega)|$ maximuma $\alpha > \Omega$ esetén az $\omega = 0$ helyen, egyébként az $\omega = \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}$ helyen van.

$$(a) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = 6,48\Omega. \quad (b) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = 4,46\Omega.$$

$$(c) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = 1,73\Omega. \quad (d) \omega_1 = 0,89\Omega, \quad \omega_2 = 1,09\Omega, \quad \Delta\omega = 0,20\Omega.$$

Minél kisebb α/Ω , annál jobban hasonlít $x(t)$ egy belépő szinuszos jelre, amelynek sávszélessége nulla. Ez fejeződik ki az egyre csökkenő sávszélességekben.

M-13. Helyettesítse a spektrumot a burkolójával! Alább $\text{sinc } \xi \equiv \sin \xi / \xi$.

$$(a) X(j\omega) = 2T \text{sinc } \omega T; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = \frac{1}{\sigma T}.$$

$$(b) X(j\omega) = 2T \text{sinc } \omega T e^{-j\omega T_0}; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = \frac{1}{\sigma T}.$$

$$(c) X(j\omega) = T \left(\text{sinc } \frac{\omega T}{2} \right)^2; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = \frac{2}{\sqrt{\sigma} T}.$$

$$(d) X(j\omega) = j\omega T^2 \left(\text{sinc } \frac{\omega T}{2} \right)^2; \quad \omega_1 \approx \frac{1,45}{\sigma T}, \quad \omega_2 = \frac{2,76}{\sigma T}, \quad \Delta\omega = \frac{1,31}{\sigma T}.$$

Az utolsó eredmény numerikus számítást igényel.

M-14. Az integrálok számítása nem okoz nehézséget. Mindkét jel spektrumára $\omega_1 = 0$ a logikus választás.

(a) Az $u = \Delta\omega_E / \alpha$ mennyiségre a következő transzcendens egyenlet adódik:

$$\frac{u}{1+u^2} + \text{arctg } u = (1-\eta) \frac{\pi}{2}.$$

Ha $\eta = 0,1$, akkor az egyenlet megoldásával $\Delta\omega_E = 1,36 \alpha$, vagy az F-10. szerinti $\Delta\omega$ sáv szélességgel kifejezve $\Delta\omega_E = 0,45 \Delta\omega$ adódik.

(b) $\Delta\omega_E = \alpha \text{tg} (1-\eta) \frac{\pi}{2}$. Ha $\eta = 0,1$, akkor $\Delta\omega_E = 6,31 \alpha$, vagy az F-10. szerinti $\Delta\omega$ sáv szélességgel kifejezve $\Delta\omega_E = 0,63 \Delta\omega$ adódik.

***M-15.** A jel spektruma valós. Az $\omega = 0$, illetve a $t = 0$ helyettesítést elvégezve

$$X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt, \quad x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega.$$

Ezek szorzata a megadott eredményre vezet.

M-16. (a) Az impulzusválasz kifejezése

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} K(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega} K(\omega) \cos \omega(t-\tau) d\omega.$$

Ebből látható, hogy ez $t-\tau$ páros függvénye, ami igazolandó volt. Ez azt jelenti, hogy a rendszer biztosan nem kauzális!

(b) Az $|\omega| < \Omega$ tartományban értelmezett $K(\omega)$ függvényt tekintsük periodikusnak 2Ω periódushosszal. A Fourier-sor (komplex) együtthatói

$$C_p = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} K(\omega) e^{-j p \omega (2\pi/2\Omega)} d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} K(\omega) \cos \left(p \frac{\pi}{\Omega} \omega \right) d\omega.$$

Ezek ismeretében és a $p_{\Omega}(\omega) \equiv \varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)$ jelölést használva

$$H(j\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p p_{\Omega}(\omega) e^{-j\omega(\tau - p\pi/\Omega)}$$

A sor egyes tagjai ideális aluláteresztőket jellemeznek $\varphi_p(\omega) = -\omega(\tau - p\pi/\Omega)$ lineáris fázis-karakterisztikával vagyis $\tau_p(\omega) = \tau - p\pi/\omega_c$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ állandó futási idő karakterisztikával.

M-17. A gerjesztés ω_1 sávkorlátú, a válasz $\min(\omega_1, \Omega)$ sávkorlátú. Ennek alapján:

$$\omega_1 < \Omega: y(t) = A \frac{\sin \omega_1(t - \tau)}{\omega_1(t - \tau)};$$

$$\Omega < \omega_1: y(t) = A \frac{\Omega \sin \Omega(t - \tau)}{\omega_1 \Omega(t - \tau)}.$$

M-18. A gerjesztés-válasz kapcsolat deriváltja $T y'(t) = u(t) - u(t - T)$. Ebből már következik, hogy $H(j\omega) = \{1 - e^{-j\omega T}\} / j\omega T = \sin(\omega T/2) e^{-j\omega T/2}$.

M-19. Az impulzusválasz páros, illetve páratlan összetevőjének kifejezése

$$(a) h^{(e)}(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \Re \{ H(j\omega) \} \} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ 5 + 5 \frac{6}{\omega^2 + 9} \right\} = 5 \delta(t) + 5 e^{-3|t|},$$

$$(b) h^{(o)}(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ j \Im \{ H(j\omega) \} \} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{5}{3} j \omega \frac{6}{\omega^2 + 9} \right\} = \left\{ -\frac{5}{3} e^{-3|t|} \right\}'.$$

Mivel a rendszer kauzális, ezért (a Dirac-impulzus összetevőt nem kell 2-vel szorozni!)

$$(a) h(t) = 5\delta(t) + 10 \varepsilon(t) e^{-3t},$$

$$(b) h(t) = A \delta(t) + 10 \varepsilon(t) e^{-3t},$$

ahol az A tényező tetszőleges (nem határozható meg). A kauzalitás kikötése nélkül a feladat nem oldható meg. A GV stabilitást nem kell kikötnünk, de racionális átviteli karakterisztika esetén a kauzális rendszer GV stabilis.

M-20. A sávkorlátozott gerjesztőjel időfüggvénye, illetve spektruma

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u \left(k \frac{\pi}{\Omega} \right) \frac{\sin \Omega(t - k\pi/\Omega)}{\Omega(t - k\pi/\Omega)},$$

$$U(j\omega) = \frac{\pi}{\Omega} p_{\Omega}(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} u \left(k \frac{\pi}{\Omega} \right) e^{-jk\pi\omega/\Omega}.$$

A sávkorlátozott válasz spektruma $Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$, vagyis

$$Y(j\omega) = \frac{\pi}{\Omega} p_{\Omega}(\omega) \sum_{r=-\infty}^{\infty} y \left(r \frac{\pi}{\Omega} \right) e^{-jr\pi\omega/\Omega} =$$

$$= \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} H_q^C e^{jq\pi\omega/\Omega} \right\} \left\{ \frac{\pi}{\Omega} p_{\Omega}(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} u \left(k \frac{\pi}{\Omega} \right) e^{-jk\pi\omega/\Omega} \right\}.$$

A jobb oldalon csak az $r = k - q$, vagyis a $q = k - r$ sorszámúak veendőek figyelembe, így

$$y\left(r \frac{\pi}{\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{k-r}^C u\left(k \frac{\pi}{\Omega}\right), \quad r \in \mathbf{Z}.$$

E konvolúciós típusú összeg számításához csak a gerjesztés mintáit kell ismernünk.

***M-21.** (a) Tételezzük fel, hogy létezik egy véges energiájú sávkorlátozott és időkorlátozott jel. Az időkorlátozott jelleg miatt erre a jelre és késeltetett megfelelőjére is alkalmazható a Paley–Wiener-kritérium. A két jel amplitúdó-spektruma megegyezik, de fázis-spektruma különböző, ami ellentmond a kritériumnak.

(b) Ha $\omega \rightarrow \infty$, akkor $|\ln K(\omega)| \rightarrow (\omega/\Omega)^n$, $|\ln K(\omega)|/\omega^2 \rightarrow \omega^{n-2}/\Omega^n$. Ennek integrálja $n > 1$ esetén nem konvergens.

M-22. A DI jel spektrális alakja

$$u_D[k] = u_C(kT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} U_C(j\omega) e^{jk\omega T} d\omega = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} U_C\left(j\frac{\vartheta}{T}\right) e^{jk\vartheta} d\vartheta.$$

Ebből látható, hogy $T U_D(e^{j\vartheta}) = U_C(j\vartheta/T)$. Ebből következően

$$y_D[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\vartheta}) \frac{1}{T} U_C\left(j\frac{\vartheta}{T}\right) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} H_D(e^{j\omega T}) U_C(j\omega) e^{j\omega T} d\omega.$$

***M-23.** A 3.2-2.2. pont 2. példájából következően $h(t) = \frac{\Omega}{\pi} \varepsilon(t) \frac{\sin \Omega(t-\tau)}{\Omega(t-\tau)}$. A rendszer kauzális, de nem GV stabilis, noha $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$.

***M-24.** Az impulzusválasz

$$\begin{aligned} h_a(t) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\Omega_2} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega + \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\Omega_2 - \omega}{\Omega_2 - \Omega_1} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right\} = \\ &= \frac{\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t}{\pi(\Omega_2 - \Omega_1)t^2} \equiv \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2\pi} \frac{\sin((\Omega_2 + \Omega_1)t/2)}{(\Omega_2 + \Omega_1)t/2} \frac{\sin((\Omega_2 - \Omega_1)t/2)}{(\Omega_2 - \Omega_1)t/2}. \end{aligned}$$

Ha $\Omega_2 \rightarrow \Omega_1$, akkor $h_a(t)$ az előző feladatbeli $h_a(t)$ impulzusválaszhoz tart, amint lennie is kell. A $h(t) = \varepsilon(t) h_a(t)$ impulzusválaszú rendszer kauzális és GV stabilis, mivel $h(t) \sim 1/t^2$, ha $t \rightarrow \infty$.

***M-25.** Akár inverz Fourier-transzformációval, akár a lineáris fázisú ideális aluláteresztő impulzusválaszának differenciálásával

$$h(t) = \frac{\Omega t \cos \Omega t - \sin \Omega t}{\pi t^2} = \frac{\Omega}{\pi} \left\{ \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} \right\}'.$$

Az impulzusválasz természetesen páratlan függvény. A rendszer nem kauzális és nem GV stabilis.

3.3. Hálózatanalízis a frekvenciatartományban

Egy rendszer reprezentálható hálózattal is (1.3. fejezet). Ebben a fejezetben lineáris, invariáns jelfolyam hálózatokra szorítkozunk, amelyek lineáris, invariáns, kauzális (és folytonos idejű esetben: differenciális) rendszereket reprezentálnak. Célunk a hálózat által reprezentált rendszer átviteli karakterisztikájának meghatározása vagy ennek rögzített frekvencián felvett értékének (vagyis az átviteli együtthatónak) a számítása.

A feladat megoldásának három különböző módszerét fogjuk tárgyalni.

Az első módszer szerint meghatározzuk a hálózat által reprezentált rendszer valamilyen időtartománybeli leírását (impulzusválasz, rendszeregyenlet, állapotváltozós leírás), amint a 2.4. fejezetben láttuk. Ebből az átviteli karakterisztika a 3.1. és 3.2. fejezetben (3.1-1.4., 3.1-1.5. és 3.2-2.2. pont) tárgyalt módon már meghatározható.

A második módszer alkalmazása során a hálózatanalízist a komplex frekvenciatartományban végezzük el, majd (a stabilitás ellenőrzése után) változócserevel kapjuk az átviteli karakterisztikát. Ezt a nagyon hatékony módszert a 4.3 fejezetben fogjuk tárgyalni. Ott foglalkozunk az inverz feladattal, vagyis olyan jelfolyam hálózat előállításával, amelynek adott az átviteli karakterisztikája vagy az átviteli függvénye. Ezt a feladatot már most is tárgyalhatnánk, de az ismétlés elkerülése érdekében későbbre halasztjuk. Aki a 4. részt is át kívánja tanulmányozni, az a 3.3. fejezetet ki is hagyhatja.

A harmadik módszer alkalmazásakor a hálózati egyenleteket közvetlenül a frekvenciatartományban írjuk fel. Megoldásuk szolgáltatja az átviteli karakterisztikát vagy az átviteli együtthatót. Ezt a módszert részletezzük ebben a fejezetben. Ez a módszer elsősorban akkor lehet célszerű, ha az átviteli együtthatót akarjuk meghatározni egy vagy néhány frekvencián. Az így adódó eredmény azonban csak akkor szolgáltatja az átviteli karakterisztikát vagy az átviteli együtthatót, ha a rendszer GV stabilis, ami előzetes stabilitásvizsgálatot igényel. A következő fejezetben látni fogjuk, hogy a stabilitásvizsgálat az átviteli karakterisztika alapján is elvégezhető, de az átviteli együttható (egy komplex érték) ismeretében nem tudjuk eldönteni, hogy az értelmes eredményt jelent-e.

A 3.3-1. szakaszban a jelfolyam hálózatok frekvenciatartománybeli általános törvényeit tárgyaljuk. Itt értelmezzük az elemi komponensek karakterisztikájának és az összekapcsolási kényszereket kifejező egyenletek frekvenciatartománybeli alakját.

A 3.3-2. szakaszban a hálózat egyenletek megoldásával, konkrétan a hálózat által reprezentált rendszer átviteli karakterisztikájának vagy átviteli együtthatójának számításával foglalkozunk.

3.3-1. Általános törvények

3.3-1.1. Elemi komponensek

A lineáris, invariáns, kauzális jelfolyam hálózatok elemi komponenseit a 2.4-1.1. pontban már értelmeztük. Az időtartománybeli karakterisztikákból már következnek a *frekvenciatartománybeli karakterisztikák*. Ezeket két módon is előállíthatjuk: vagy a szinuszos gerjesztéshez tartozó szinuszos válasz meghatározásával, vagy pedig az időtartománybeli karakterisztika Fourier-transzformáltjának képzésével. Az első módszerrel vagy az átviteli együtthatót kapjuk meg (ekkor a frekvenciát adotttnak tekintjük), vagy az átviteli karakterisztikát (ekkor a frekvenciát paraméterként kezeljük).

Négy *elemi komponens*t értelmeztünk. A bemeneti változó jele p , a kimeneti változó jele q . A (2.4-1) értelmében az elemi komponensek időtartománybeli karakterisztikája:

	DI komponens:	FI komponens:
forrás	$q[k] = u[k]$	$q(t) = u(t)$
nyelő	$p[k] = y[k]$	$p(t) = y(t)$
erősítő	$q[k] = K p[k]$	$q(t) = K p(t)$
DI késleltető	$q[k] = p[k-1]$	—
FI integrátor	—	$q(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau$

(3.3-1)

Mint eddig is: u jelöli az adott gerjesztést, y jelöli a keresett választ.

Jelölje az i -edik *forrás* frekvenciatartománybeli változóját U_i . Ennek jelentése a **rögzített** frekvencián vagy a frekvenciát változóként kezelve

$$\begin{aligned} \text{DI: } u_i[k] &= \Re\{ \bar{U}_i e^{i\omega k} \} \quad \text{vagy} \quad u_i[k] = \mathcal{F}^{-1} \{ U_i(e^{j\omega}) \}, \\ \text{FI: } u_i(t) &= \Re\{ \bar{U}_i e^{j\omega t} \} \quad \text{vagy} \quad u_i(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ U_i(j\omega) \}. \end{aligned} \quad (3.3-2)$$

Az i -edik *nyelő* frekvenciatartománybeli változóját jelölje Y_i . Ez a keresett mennyiség. Értelmezése a (2) szerintivel analóg.

Az i -edik *erősítő* erősítését jelölje K_i ; frekvenciatartománybeli bemeneti változóját jelölje P_i , kimeneti változóját jelölje Q_i , ezek ismeretlenek. Kapcsolatuk az időtartománybeli karakterisztika értelmében

$$\text{erősítő: } Q_i = K_i P_i. \quad (3.3-3)$$

Részletesebben: rögzített frekvencián $\bar{Q}_i = K_i \bar{P}_i$, míg a frekvencia függvényében DI illetve FI esetben $Q_i(e^{j\omega}) = K_i P_i(e^{j\omega})$ illetve $Q_i(j\omega) = K_i P_i(j\omega)$. Ugyanígy értelmezhetők a további egyenletek is, de azoknak csak a (3) rövid alakját adjuk meg.

Az i -edik DI *késleltető* frekvenciatartománybeli bemeneti, illetve kimeneti változóját jelölje egyelőre P_i illetve Q_i . Ezek ismeretlenek, kapcsolatuk az időtartománybeli karakterisztika értelmében

$$\text{DI késleltető: } Q_i = e^{-j\omega} P_i \Rightarrow P_i = e^{j\omega} Q_i. \quad (3.3-4)$$

A FI integrátor karakterisztikájának meghatározása mindkét felfogásban körülményes. Ezt megkerülhetjük, ha az időtartománybeli karakterisztika idő szerinti deriváltját képezzük. Ekkor az időfüggvények és transzformáltjuk kapcsolata

$$\text{FI integrátor: } q_i' = p_i, \quad j\omega Q_i = P_i. \quad (3.3-5)$$

Ez az eljárás jogosult, ha az integrátort tartalmazó hálózat stabilis.

Az egyszerűség és az egyöntetűség érdekében járjunk el a következőképpen.

Jelölje az i -edik DI *késleltető* illetve FI *integrátor* frekvenciatartománybeli *kimeneti változóját* X_i , akkor az ismeretlen bemeneti változó frekvenciatartománybeli kifejezése DI késleltető esetén $e^{j\vartheta} X_i$, míg FI integrátor esetén $j\omega X_i$:

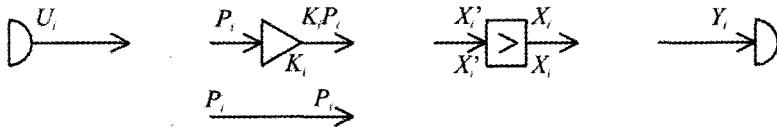
$$\text{DI késleltető: } e^{j\vartheta} X_i \Rightarrow X_i; \quad \text{FI integrátor: } j\omega X_i \Rightarrow X_i. \quad (3.3-6)$$

A DI késleltető frekvenciatartománybeli karakterisztikáját úgy is felírhatjuk, hogy bemeneti változójára például a V_i jelet alkalmazzuk, ekkor kimeneti változója $e^{-j\vartheta} V_i$, vagyis (6) helyére $V_i \Rightarrow e^{-j\vartheta} V_i$ írandó. Az első módszer alkalmazásakor az átviteli karakterisztika $e^{j\vartheta}$ hatványait, a második módszer alkalmazásakor $e^{-j\vartheta}$ hatványait fogja tartalmazni.

Forrással és nyelővel kiegészítve az erősítő és a DI késleltető stabilis rendszernek, a FI integrátor nem stabilis rendszernek tekinthető.

A továbbiakban P_i többnyire az i -edik erősítő frekvenciatartománybeli bemeneti változóját jelöli, esetleg valamilyen nem elemi komponens frekvenciatartománybeli bemeneti változóját.

A hálózategyenletek felírása során az 1. ábrán látható módon csak a következő változókat alkalmazzuk: U_i, P_i, X_i, Y_i . Mivel többnyire csak egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszert reprezentáló hálózatot vizsgálunk, ezért az U és Y jelölés elegendő. A P_i változóknak csak egy részét (esetleg egyet sem) vezetünk be, tehát többnyire elegendő az U, Y és X_i változók alkalmazása, amint a példák során látni fogjuk.



3.3-1. ábra A lineáris jelfolyam hálózat elemi komponensei és frekvenciatartománybeli karakterisztikájuk: forrás, erősítő (erősítő 1 erősítéssel), DI késleltető vagy FI integrátor és nyelő

A rögzített frekvencián értelmezett komplex amplitúdókra vonatkozó karakterisztikák és a frekvencia függvényeként értelmezett spektrumokra vonatkozó karakterisztikák formailag megegyeznek. A tényleges számítás során természetesen más a helyzet attól függően, hogy ϑ illetve ω adott valós értéket (és ennek megfelelően $e^{j\vartheta}$ komplex illetve $j\omega$ képzetes *számot*) jelent, vagy ϑ illetve ω valós változót jelent és ennek megfelelően a frekvenciatartománybeli változók e valós változó komplex értékű függvényei.

3.3-1.2. Összekapcsolási szabályok és kényszerek

Az összekapcsolási szabályokat, valamint az összekapcsolásból a változókra adódó kényszereket az időtartományban már megfogalmaztuk (2.4-1.2. pont). Ezek a frekvenciatartományban formálisan változatlanok maradnak: minden időfüggvényt a megfelelő komplex amplitúdóval vagy spektrummal kell helyettesítenünk. Emlékeztetőül:

összegező csomópont: az egyetlen $Y_i, P_i, e^{j\omega} X_i$ illetve $j\omega X_i$ jelű, a csomópontból kilépő változó megegyezik az U_r, K_r, P_r, X_r jelű, a csomópontba belépő változók összegével;

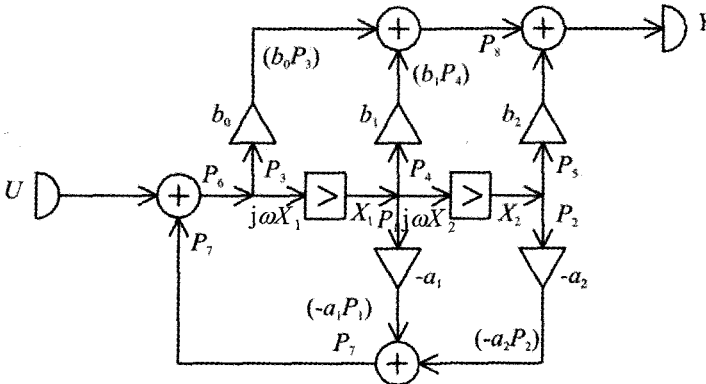
szétágazó csomópont: valamennyi $Y_i, P_i, e^{j\omega} X_i$ illetve $j\omega X_r$ jelű, a csomópontból kilépő (kimeneti típusú) változó megegyezik az egyetlen U_r, K_r, P_r, X_r jelű, a csomópontba belépő (bemeneti típusú) változóval.

Példa A 2. ábrán látható FI hálózatra vonatkozó összekapcsolási kényszerek: szétágazó csomópontok:

$$P_1 = X_1, \quad P_2 = X_2, \quad P_3 = P_6, \quad P_4 = X_1, \quad P_5 = X_2, \quad j\omega X_1 = P_6, \quad j\omega X_2 = X_1;$$

összegező csomópontok:

$$P_6 = P_7 + U, \quad P_7 = -a_1 P_1 - a_2 P_2, \quad P_8 = b_0 P_3 + b_1 P_4, \quad Y = b_2 P_5 + P_8.$$



3.3-2. ábra Egyszerű FI jelfolyam hálózat frekvenciatartománybeli változói

A gyakorlatban nem vezetünk be ennyi ismeretlent és ennek megfelelően nincs szükség ennyi egyenletre sem. Itt csak azt akartuk illusztrálni, hogy a 11 bevezetett ismeretlenre (az $5 + 3 = 8$ erősítő bemeneti változója, a két integrátor kimeneti változója és 1 válasz) éppen 11 lineáris algebrai egyenletet tudunk felírni. Ami a konkrét hálózatot illeti: a két felső összegező csomópontot is és a két alsó összegező csomópontot is összevonhatjuk egyetlen összegező csomópontba (a P_8 és a P_7 változó feleslegessé válik). A következő szakaszban látni fogjuk, hogy a számítás többnyire még egyszerűbbé tehető.

A példa FI hálózatra vonatkozott. Ha DI hálózatról lenne szó, akkor $j\omega$ helyére $e^{j\omega}$ írandó, egyébként az egyenletek azonosak. Kicsit bonyolultabb lenne a helyzet, ha a DI esetben a késleltetőeknek nem a kimeneti, hanem a bemeneti változóját alkalmaztuk volna. #

*3.3-1.3. Általánosabb komponensek

Az előző pontban olyan hálózatokról volt szó, amelyek legfeljebb egy bemeneti és legfeljebb egy kimeneti változóval bíró elemi komponensek összekapcsolásából állnak. Az általánosítás két irányban lehetséges.

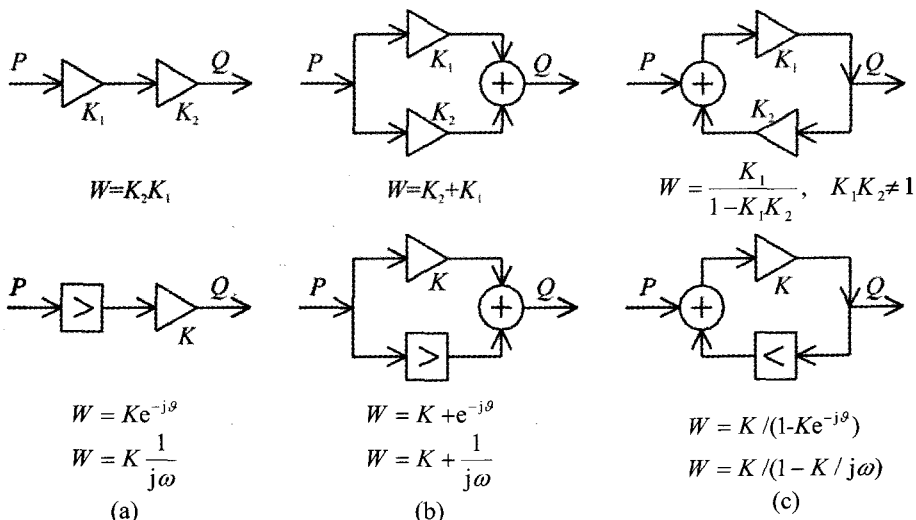
Valamely P_i bemeneti és Q_i kimeneti változóval bíró *összetett* (azaz nem elemi) lineáris, invariáns *komponens* a frekvenciatartományban

$$Q_i = W_i P_i \quad (3.3-7)$$

karakterisztikával jellemezhető. Rögzített frekvencia esetén W_i egy komplex mennyiség, ekkor az elemi komponens megkülönböztetés csak fogalmi és nem számítástechnikai. Általánosan $W_i(e^{j\theta})$ illetve $W_i(j\omega)$ a körfrekvencia egy komplex értékű függvénye. Az elemi komponensek karakterisztikája ennek speciális esete, például az erősítőre $W_i = K_i$.

A W_i értéket (a W_i függvényt) vagy az objektum alapján határozzuk meg akár fizikai megfontolások akár mérési eredmények alapján (ez nem tárgyá vizsgáldásainknak) vagy elemi komponensek összekapcsolásából álló részhálózattal modellezzük. Az utóbbi esetben W_i számítása ugyanúgy történhet, mint a rendszer átviteli karakterisztikájának vagy együtthatójának számítása (l. a következő szakaszt). Néhány egyszerű példa látható a 3. ábrán. Az ott megadott összefüggések ellenőrzését az Olvasóra bizzuk, ezek a hálózategyenletek felírása és megoldása alapján akár fejben is elvégezhető. Előfordulhat, hogy az ábrán megadott szabályok ismételt alkalmazásával sikerül a hálózatot annyira egyszerűsíteni, hogy csak a gerjesztés (a forrás) és a válasz (a nyelő) marad, a komponens pedig a vizsgált rendszer.

Az általánosított komponens fogalma mutatja, hogy a rendszer és a hálózat közötti különbség nem igazán jelentős, mint azt eddig is láttuk



3.3-3. ábra Két elemi komponens helyettesítése egyetlen általánosított vagy elemi komponenssel: (a) kaszkád (más néven: soros) kapcsolás; (b) párhuzamos kapcsolás; (c) visszacsatolt struktúra

Az általánosítás második lehetőségét a 2.4-3.1. pontban már tárgyaltuk. Egy n_p számú bemeneti és n_q számú kimeneti változós lineáris, invariáns komponens

helyettesíthető $n_p \times n_o$ számú, egy bemeneti és egy kimeneti változós komponens összekapcsolásával. A frekvenciatartománybeli karakterisztika

$$Q_i = \sum_{r=1}^{n_p} W_{ir} P_r; i = 1, 2, \dots, n_o. \quad (3.3-8)$$

A W_{ir} , mennyiségek lehetnek állandó komplex értékek vagy a frekvencia függvényei. Utóbbi esetben W_{ir} , rendszerint $e^{j\omega}$ illetve $j\omega$ racionális függvénye.

A továbbiakban ezért csak egy bemeneti és egy kimeneti változós lineáris komponensekkel foglalkozunk.

Érdeemes megemlíteni, hogy míg az időtartományban időben változó erősítések esetére sem jelent nehézséget az hálózategyenletek előállítás (a megoldás természetesen bonyolultabb), ez az általánosítás a frekvenciatartományban bonyodalmakra vezet.

3.3-1.F. Feladatok

F-1. Tekintsen egy K erősítésű DI illetve FI erősítőt.

Igaz-e, hogy a kimeneti változó spektruma kifejezhető a bemeneti változó spektrumának K -szorosaként?

F-2. Tekintsünk egy DI késleltetőt illetve egy FI integrátort. A bemeneti változó spektruma ismert.

Igaz-e, hogy a kimeneti változó spektruma kifejezhető mint a bemeneti változó spektrumának és $e^{-j\omega}$ illetve $1/j\omega$ szorzata?

F-3. Rajzolja fel a 2. ábrán látható hálózatot úgy, hogy csak két összegező csomópontot tartalmazzon! Írja fel a hálózati egyenleteket úgy, hogy azokban csak az erősítők bemeneti és a dinamikus komponensek kimeneti változói szerepeljenek!

***F-4.** Cserélje fel az erősítő és a dinamikus komponens szerepét a 3. ábra alsó sorában és határozza meg az összetett komponens átviteli karakterisztikáját!

***F-5.** Helyettesítse a 3. ábra felső sorában a két erősítőt két DI késleltetővel illetve két FI integrátorral. Határozza meg az összetett komponens átviteli karakterisztikáját!

***F-6.** Egy két bemeneti és két kimeneti változós összetett FI komponens (vagy rendszer) karakterisztikája

$$Q_1(j\omega) = K_{11} P_1(j\omega) + \frac{K_{12} j\omega}{j\omega - K_{12}} P_2(j\omega),$$

$$Q_2(j\omega) = \left(K_{21} + \frac{1}{j\omega} \right) P_1(j\omega) + K_{22} \frac{1}{j\omega} P_2(j\omega).$$

Állítson elő egy olyan kapcsolást, amely csak elemi komponenseket tartalmaz és a megadott karakterisztikával rendelkezik.

(Útmutatás. Használja fel a 3. ábrán megadott összefüggéseket!)

3.3-1.M. Megoldások

M-1. Igen, ha $\mathcal{F}\{p\}$ létezik. Ekkor $\mathcal{F}\{q\}$ is létezik. Hallgatólagosan feltételeztük, hogy K állandó. Ha az erősítés az időtől függ, akkor az állítás nem igaz.

M-2. A DI esetben a kimeneti változó spektruma biztosan kifejezhető így, a FI esetben azonban nem feltétlenül.

Ennek illusztrálására legyen az integrátor bemeneti változója $p(t) = \delta(t)$, $P(j\omega) = 1$. A kimeneti változó ekkor $q(t) = \varepsilon(t)$ és ennek Fourier-transzformáltja – mint a 3.1-1.2. pontban láttuk – nem $P(j\omega)/j\omega = 1/j\omega$, hanem még egy $\delta(\omega)$ összetevőt is tartalmaz. Ennek az a magyarázata, hogy a DI késleltető egy stabilis rendszer, a FI integrátor azonban nem az.

M-3. A szétágazó csomópontokra vonatkozó hét változatlan egyenlet, továbbá a $P_6 = -a_1 P_1 - a_2 P_2 + U$, $Y = b_0 P_3 + b_1 P_4 + b_2 P_5$ egyenletek. Kilenc ismeretlen változó szerepel a kilenc egyenletben.

***M-4.** Cseréljük fel K és $e^{-j\vartheta}$ illetve $j\omega$ szerepét. A W változatlan a kaszkád és a párhuzamos kapcsolásra, míg a visszacsatolt struktúrára

$$W(e^{j\vartheta}) = \frac{e^{-j\vartheta}}{1 - K e^{-j\vartheta}} \equiv \frac{1}{e^{j\vartheta} - K}; \quad W(j\omega) = \frac{1/j\omega}{1 - K/j\omega} \equiv \frac{1}{j\omega - K}.$$

***M-5.** Kaszkád kapcsolás:

$$W(e^{j\vartheta}) = e^{-j2\vartheta}; \quad W(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} \equiv -\frac{1}{\omega^2}.$$

Párhuzamos kapcsolás:

$$W(e^{j\vartheta}) = 2e^{-j\vartheta}; \quad W(j\omega) = \frac{2}{j\omega}.$$

Visszacsatolt struktúra:

$$W(e^{j\vartheta}) = \frac{e^{-j\vartheta}}{1 - e^{-j2\vartheta}} \equiv -j \frac{1}{2 \sin \vartheta}; \quad W(j\omega) = \frac{1/j\omega}{1 - (1/j\omega)^2} \equiv \frac{-j\omega}{\omega^2 + 1}.$$

***M-6.** A W_{11} egy erősítővel realizálható. A W_{12} egy visszacsatolt struktúrával realizálható: előrevezető erősítővel, visszavezető integrátorral. A W_{21} egy erősítő és egy integrátor párhuzamos kapcsolásával realizálható. A W_{22} egy erősítő és egy integrátor kaszkád kapcsolásával realizálható. E négy komponenszt a már látott módon úgy kell összekapcsolni, hogy W_{11} és a W_{21} átviteli karakterisztikájú komponens bemeneti változója a P_1 legyen, a W_{12} és a W_{22} átviteli karakterisztikájú komponens bemeneti változója a P_2 legyen, továbbá a Q_1 változó a W_{11} és a W_{12} átviteli karakterisztikájú komponens kimeneti változójának az összege, a Q_2 változó a W_{21} és a W_{22} átviteli karakterisztikájú komponens kimeneti változójának az összege legyen.

A 4., 5. és 6. feladattal kapcsolatban megjegyezzük, hogy egy hálózati komponens karakterisztikáját számítottuk. Eredményeink akkor alkalmazhatók, ha e komponensek egy stabilis hálózatba vannak ágyazva.

3.3-2. Az átviteli karakterisztika számítása

3.3-2.1. Elemi megfontolások

A hálózat kapcsolási rajzának ismeretében meg tudjuk határozni a hálózat által reprezentált rendszer H átviteli karakterisztikáját vagy átviteli együtthatóját. Egy gerjesztésű, egy válaszü rendszerre szorítkozunk, de az általánosítás kézenfekvő.

Fejezzük ki az összekapcsolási kényszereket a frekvenciatartományban úgy, hogy azokban szerepeljen az U gerjesztés, az Y válasz és szükség szerint egyes DI késleltetők illetve FI integrátorok X_i kimeneti változója (ezek bemeneti változója $e^{j\omega} X_i$ illetve $j\omega X_i$), egyes erősítők P_i bemeneti változója (ezek kimeneti változója $K_i P_i$). Utóbbiakra rendszerint egyáltalában nincs szükség. Ily módon annyi lineáris egyenletet kapunk, amennyi a bevezetett ismeretlen változók száma. A lineáris egyenletrendszer megoldása adja a $H=Y/U$ átviteli karakterisztikát vagy átviteli együtthatót. Egyszerű hálózatokra esetleg egyetlen egyenlet felírása és megoldása is elegendő lehet.

Ha a frekvenciatartománybeli változókat a frekvencia függvényeként kezeljük, akkor az *átviteli karakterisztikát* kapjuk. Ezt a következőkben egyszerű példákön illusztrálni fogjuk.

Ha a frekvenciát rögzítettnek tekintjük, akkor a változók ismeretlen komplex számok. Ekkor egy numerikus egyenletrendszert kell megoldanunk és eredményül az illető frekvenciára vonatkozó *átviteli együtthatót* kapjuk. Gyakran csak erre van szükségünk (például szinuszos gerjesztéshez tartozó gerjesztett válasz számítása során). Más esetekben véges számú frekvenciára vonatkozó átviteli együttható számítására van szükségünk (például Fourier-sorával adott periodikus gerjesztéshez tartozó gerjesztett válasz számítása során). Ez a módszer felhasználható az *átviteli karakterisztika* közelítő számítására is, hiszen ha elég sok pontban ismerjük értékét, akkor gyakorlatilag minden pontban ismertnek tekinthető. A DI esetben egyszerűbb a helyzet, hiszen ekkor csak a $0 \leq \vartheta < \pi$ intervallumot kell vizsgálni. A FI esetben ki kell valahogyan jelölni azt a $0 \leq \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ intervallumot, amelybe eső frekvenciákra a számítást elvégezzük. Rendszerint az intervallumot egyenletesen célszerű beosztani, de lehet más (például logaritmikus) beosztás a célszerű.

Akármilyen módon végezzük el a számítást, ne feledkezzünk el arról, hogy annak eredménye csak akkor jelenti az átviteli karakterisztikát vagy az átviteli együtthatót, ha a hálózat GV stabilis rendszert reprezentál.

1. példa Határozzuk meg annak a rendszernek az átviteli karakterisztikáját, amelynek egy hálózati reprezentációja a 4. ábrán látható (vö. 2.4-6. ábra).

Az U és Y változón kívül bevezettük az X_1 és X_2 változót is. A többi változót kifejeztük a szétágazó csomópontok és az erősítések alapján. Figyeljük meg, hogy Y két erősítőnek bemeneti kimeneti változója. A három ismeretlen változóra vonatkozó egyenletrendszer az összegező csomópontok alapján a FI esetben

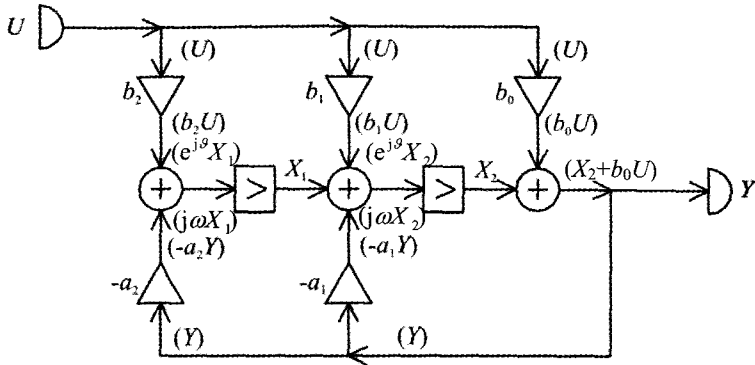
$$j\omega X_1 = -a_2 Y + b_2 U,$$

$$j\omega X_2 = X_1 - a_1 Y + b_1 U,$$

$$Y = X_2 + b_0 U.$$

Az egyenletrendszer megoldásával (például X_1 majd X_2 kiküszöbölésével) kapjuk, hogy

$$H(j\omega) \equiv \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_0 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_2}{(j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_2}.$$



3.3-4. ábra Az átviteli karakterisztika számítása valamennyi X_i változó bevezetésével

A DI esetben $j\omega$ helyére $e^{j\theta}$ írandó.

Korábbi vizsgálataink szerint ez az eredmény helyes, de csak akkor tekinthető átviteli karakterisztikának, ha az a_1 és a_2 együtthatók eleget tesznek a stabilitási követelményeknek (például a FI esetben mindkettő pozitív).

Ha a_1 és a_2 numerikusan adott és az átviteli együtthatót egyetlen frekvencián akarjuk számítani, akkor a numerikus megoldás érdekében legyen $U = 1$ és ekkor $Y = H$, amivel a megoldandó lineáris egyenletrendszer mátrixos alakban

$$\begin{bmatrix} j\omega & 0 & a_2 \\ -1 & j\omega & a_1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

Különböző ω értékeket választva megkapjuk H értékét az illető frekvencián. Értelem szerinti az eljárás a DI esetben. Ne felejtsük el, hogy numerikus eredményünk (például $\omega = 12$ esetén $\bar{H} = 3e^{j20^\circ}$) csak akkor fogadható el az átviteli együttható értékének, ha meggyőződünk a hálózat stabilitásáról, hiszen az eredményből ez nem következtethető ki.

Ebben a speciális esetben egyetlen egyenlet felírásával és megoldásával is megoldható a feladat. Némi figyelemmel belátható, hogy

$$Y = b_0 U + \frac{1}{j\omega} \left\{ b_1 U - a_1 Y + \frac{1}{j\omega} [b_2 U - a_2 Y] \right\}.$$

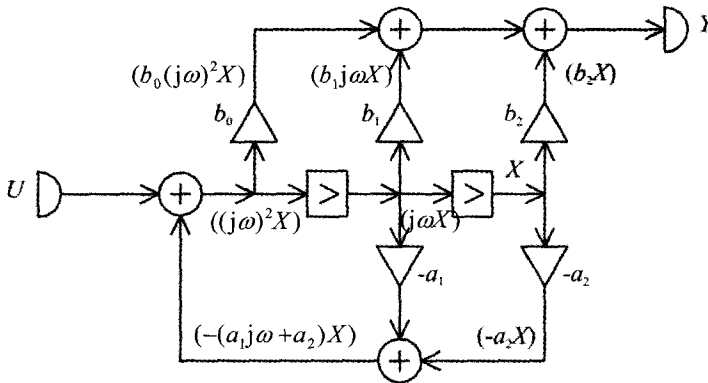
Rendezés után a már megadott kifejezés adódik az átviteli karakterisztikára. #

2. példa Határozzuk meg azon rendszer átviteli karakterisztikáját, amelynek egy hálózati reprezentációja az 5. ábrán látható (vö. 2.4-7. ábra).

Most csak egyetlen X segédváltozót vezetünk be. A bal oldali dinamikus komponens bemeneti változójának valamint a válasz kifejezése a FI esetben

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 X &= U - (a_1 j\omega + a_2) X, \\ Y &= [b_0 (j\omega)^2 + b_1 j\omega + b_2] X. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásával ugyanaz az átviteli karakterisztika adódik, mint az előző példában. Ebből következik, hogy a két hálózat ugyanazt a rendszert reprezentálja (vagy realizálja), mint azt korábban már megállapítottuk.



3.3-5. ábra Hálózat átviteli karakterisztikájának számítása csak egy X változó bevezetésével

Ebben az esetben csak nehezen lehetne a feladatot egyetlen egyenlet felírására redukálni. #

3.3-2.2. Regularitás és stabilitás

Ha a vizsgált hálózat reguláris és stabilis, akkor az általa reprezentált rendszer átviteli karakterisztikája értelmezett.

Az a célszerű, ha hálózat regularitásról és stabilitásáról meggyőződünk még az átviteli karakterisztika számítása előtt. A stabilitás eldöntésében segít, ha a következő részben tárgyalandó átviteli függvényből indulunk ki, de a regularitás csak az időtartománybeli számítás vagy a hálózat vizsgálata (van-e memóriamentes hurok, mekkora annak hurokerősítése) alapján dönthető el.

Ha a frekvenciatartományban felírt hálózat egyenletek nem oldhatók meg az Y/U változóra minden frekvencián, akkor a hálózat vagy nem reguláris vagy nem stabilis. Az Y/U szinguláris lehet azokon a frekvenciákon, amelyek $\lambda_i = e^{j\theta_i}$ alakban megadják a DI rendszer egyik egység sugarú körre eső sajátértékét vagy $\lambda_i = j\omega_i$ alakban a FI rendszer egyik képzetes tengelyre eső sajátértékét. (Emlékezzünk arra, hogy aszimptotikusan stabilis DI rendszer rendszer-mátrixának sajátértékei az egység sugarú körön belül, aszimptotikusan stabilis FI rendszer rendszer-mátrixának sajátértékei a képzetes tengelytől balra helyezkednek el.)

Ha a hálózati egyenletek megoldhatók az Y/U változóra, akkor ez még nem biztosítja annak, hogy Y/U a rendszer átviteli karakterisztikáját adja. Legyen például a 4. vagy az 5. ábrán látható hálózatra $b_2 = 0, b_1 = 0, b_0 = 1, a_2 = 0$, továbbá a DI esetben $a_1 = -2$, a FI esetben $a_1 = -1$, akkor a formális számítás eredménye az előző példák értelmében

$$\text{DI: } \frac{Y(e^{j\theta})}{U(e^{j\theta})} = \frac{1}{e^{j\theta} - 2}, \quad \text{FI: } \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{1}{j\omega - 1}.$$

Ezek a függvények értelmezettek \mathcal{S} illetve ω minden valós értékére, de nem tekinthetők átviteli karakterisztikának. Például inverz Fourier-transzformáltjuk nem belépő jel, vagyis e szerint a kauzális komponensekből álló hálózat nem kauzális rendszert reprezentál, ami nyilvánvaló képtelenség. Valójában a hálózat által reprezentált rendszer impulzusválasza nem korlátos, ennek Fourier-transzformáltja – ha egyáltalában létezik – semmiképpen sem a fent megadott.

A hálózat által reprezentált rendszer átviteli karakterisztikájának vagy átviteli együtthatójának számítása előtt meg kell győződnünk arról, hogy a hálózat stabilis vagy legalább az általa reprezentált rendszer gerjesztés-válasz stabilis.

Ellenkező esetben a formálisan kapott eredmény értelmetlen.

Egyes esetekben fizikai megfontolások alapján előre tudjuk, hogy a rendszer vagy a hálózat biztosan stabilis. Ez a helyzet például, ha a vizsgált problémára értelmezett az energia, és a rendszer a forrásokon kívül nem tartalmaz energia termelésére képes részt. Ilyenkor mellőzhetjük az előzetes stabilitásvizsgálatot (például az állapotváltozós leírás vagy a rendszeregyenlet karakterisztikus egyenletének vizsgálatát). Ezek a megfontolások azonban kívül esnek kereteinken.

A számított Y/U hányados nem reguláris hálózat esetén sem tekinthető átviteli karakterisztikának. A 2.4-2.2. pontban példával illusztráltuk, hogy formális számítással akkor is elő tudunk állítani egy explicit gerjesztés-válasz kapcsolatot, amikor a hálózat nem reguláris.

Noha ezek az elfajuló esetek ritkán fordulnak elő, az átviteli karakterisztika számításának biztonságos módja az, ha a hálózati reprezentáció alapján először előállítjuk a rendszer állapotváltozós leírását, ellenőrizzük az aszimptotikus stabilitást, majd a 4.2-1.3. pontban tárgyalt módon ebből állítjuk elő az átviteli karakterisztikát vagy az átviteli együtthatót.

3.3-2.F. Feladatok

F-1. Adott egy valós változós komplex függvény (az együtthatók valósak):

$$(a) H(e^{j\theta}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\theta} + b_2 e^{-j2\theta}}{1 + a_1 e^{-j\theta}}.$$

$$(b) H(e^{j\theta}) = \frac{B_2 e^{j2\theta} + B_1 e^{j\theta} + B_0}{e^{j\theta} + A_0}.$$

Milyen feltételeket kell kielégíteni az a_1 és a b_i , illetve az A_0 és a B_i együtthatóknak ahhoz, hogy H egy DI rendszer átviteli karakterisztikája lehessen?

F-2. Adott egy valós változós komplex függvény (az együtthatók valósak):

$$(a) H(j\omega) = \frac{b_2 (j\omega)^2 + b_1 j\omega + b_0}{j\omega + a_0}.$$

$$(b) H(j\omega) = \frac{B_2 (j\omega)^{-2} + B_1 (j\omega)^{-1} + B_0}{1 + A_1 (j\omega)^{-1}}.$$

Milyen feltételeket kell kielégíteni az a_0 és a b_i , illetve az A_1 és a B_i együtthatóknak ahhoz, hogy H egy FI rendszer átviteli karakterisztikája lehessen?

F-3. Egészítse ki az 5. ábrán látható hálózatot a struktúra logikus továbbfejlesztésével egy harmadik késleltetővel illetve integrátorral és két további erősítővel.

Lássa be, hogy ebben az esetben (sőt a továbbfejlesztett hálózatokra is) elegendő egyetlen segédváltozó bevezetése és két egyenlet felírása.

F-4. Oldja meg a 3.3-2.1. pont 2. példáját úgy, hogy mindkét dinamikus komponens kimeneti változóját bevezeti.

***F-5.** Adott egy rendszer hálózati reprezentációja.

Állítsa elő a rendszeregyenletet a frekvenciatartománybeli analízis alapján.

Alkalmazható ez az eljárás akkor is, ha a rendszer nem GV stabilis?

3.3-2.M. Megoldások

M-1. A rendszer stabilitásának biztosítására $-1 < a_1 < 1$ illetve $-1 < A_0 < 1$. A b_i együtthatók tetszőlegesen, de $B_2 = 0$.

M-2. A rendszer stabilitásának biztosítására $a_0 > 0$ illetve $A_i > 0$ továbbá $b_2 = 0$ illetve $B_2 = 0$

M-3. Jelölje az „utolsó” kimeneti változót X , akkor a FI esetben

$$\begin{aligned}(j\omega)^3 X &= U - [a_1(j\omega)^2 + a_2 j\omega + a_3] X, \\ Y &= b_3 X + [b_0(j\omega)^3 + b_1(j\omega)^2 + b_2 j\omega] X.\end{aligned}$$

Egy másik lehetőség: a bal oldali összegező kimeneti változóját jelölje P , akkor

$$\begin{aligned}P &= U - [a_1(j\omega)^{-1} + a_2(j\omega)^{-2} + a_3(j\omega)^{-3}] P, \\ Y &= [b_0 + b_1(j\omega)^{-1} + b_2(j\omega)^{-2} + b_3(j\omega)^{-3}] P.\end{aligned}$$

Természetesen mindkét módon a kitalálható harmadfokú átviteli karakterisztika adódik.

Értelem szerinti az általánosított hálózat vizsgálata DI esetben, ezt nem részletezzük.

M-4. Az X_1, X_2 és Y változókra 2+1 lineáris egyenletet kapunk.

***M-5.** Határozzuk meg az átviteli karakterisztikát és használjuk fel a 3.1-1.4. pontbeli kapcsolatot a rendszeregyenlet és az átviteli karakterisztika között. Ez formálisan akkor is felhasználható, ha a rendszer nem stabilis, noha az előállított frekvenciafüggvény nem tekinthető átviteli karakterisztikának. Ennek okát a komplex frekvenciatartománybeli leírásnál látni fogjuk.

4. Analízis a komplex frekvenciatartományban

Mint az előző részben láttuk: a jeleknek és a lineáris, invariáns rendszereknek a frekvenciatartományban történő leírásának és analízisének sok előnye van az időtartománybeli leíráshoz képest. Így például egy lineáris, invariáns rendszer választ az időtartománybeli konvolúció helyett a frekvenciatartományban szorzással állíthatjuk elő.

A frekvenciatartománybeli leírásnak természetesen hátrányai is vannak. Ezek egyike az, hogy – nagyon egyszerű esettektől eltekintve – a válasz időfüggvényének meghatározása numerikus eljárást igényel, ezért általános következtetések levonása gyakran nehéz. Egy további nehézséget jelenthet nem stabilis rendszerek és nem abszolút összegezhető DI gerjesztések illetve nem abszolút integrálható FI gerjesztések kezelése.

A rendszer jellemzése az időtartományban impulzusválaszával különösen akkor szemléletes, ha a rendszer első- vagy másodrendű. A rendszer jellemzése a frekvenciatartományban átviteli karakterisztikájával (lineáris vagy logaritmikus amplitúdó-karakterisztikájával és fázis-karakterisztikájával) szemléletes, de alkalmazása gyakorlatot igényel. Sok esetben a két leírásmód közül csak az egyik használható, de néha az időtartománybeli és a frekvenciatartománybeli leírás egyaránt nehezen kezelhető.

A vázolt nehézségek indokoltá teszik egy harmadik leírásmód bevezetését is, amelyet ebben a részben tárgyalunk. Ez a komplex frekvenciatartománybeli analízis (matematikailag a folytonos idejű illetve a diszkrét idejű Laplace-transzformáció alkalmazása). Amint látni fogjuk ez egy kényelmes és tömör leírásmód, alkalmazása nem igényel mély matematikai ismerteket. A rendszeranalízis a komplex frekvenciatartományban különösen egyszerű a gyakran előforduló bekapcsolási folyamatok esetén. Ez a leírásmód megkönnyíti bizonyos realizációs feladatok megoldását is.

Ezeknek az előnyöknek azonban az az ára, hogy a módszer fizikailag nehezen értelmezhető, a komplex frekvenciatartománybeli leírások közvetlenül nem mérhetők.

A háromféle leírásmód (időtartomány, frekvenciatartomány, komplex frekvenciatartomány) nem helyettesíti, hanem kiegészíti egymást. Az időtartománybeli leírás tekinthető a legáltalánosabbnak. Mint láttuk: az állapotváltozós leírás és a hálózati reprezentáció egyszerűen általánosítható nemlineáris és variáns rendszerekre. Mivel ez az általánosítás a frekvenciatartománybeli és a komplex frekvenciatartománybeli leírással csak nagyon korlátozottan tehető meg, ezért azzal nem is foglalkozunk.

A 4.1. fejezetben a diszkrét idejű illetve a folytonos idejű jelek komplex frekvenciatartománybeli leírását tárgyaljuk, ami a diszkrét idejű illetve a folytonos idejű Laplace-transzformáció alkalmazását jelenti. Ez a leírás önmagában nem különösen hasznos, mivel a jelek komplex frekvenciatartománybeli alakjához nehéz fizikai tartalmat kapcsolni, de ez teszi lehetővé a rendszeranalízist a komplex frekvenciatartományban, továbbá lehetőséget ad a hálózati realizációknak a megismertnél rugalmasabb előállítására.

A 4.2. fejezetben először a lineáris, invariáns, kauzális rendszer komplex frekvenciatartománybeli leírását ismertetjük, majd a rendszernek az adott gerjesztéshez tartozó válaszána számítását.

A 4.3. fejezetben a jelfolyam hálózatok komplex frekvenciatartománybeli analízisét tárgyaljuk, továbbá módszereket mutatunk az adott átviteli függvényhez tartozó jelfolyam hálózatok meghatározására.

A 4.4. fejezetben bemutatjuk a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek és rendszerek két kapcsolatát: először a FI rendszerek DI szimulációjának néhány módszerét, azután a mintavételezett jelek leírásának módjait. Ebben a fejezetben felhasználjuk az időtartománybeli, frekvenciatartománybeli és komplex frekvenciatartománybeli leírást. Az alapvető gondolatok és egyes eljárások nem kapcsolódnak a komplex frekvenciatartományhoz, azokat a korábbi részekben is tárgyalhattuk volna.

4.1. Jelek leírása a komplex frekvenciatartományban

Jelek széles osztálya egyszerűen leírható a komplex frekvenciatartományban. Ennek a leírásmódnak azonban az a hátránya, hogy nincs fizikai tartalma, ezért közvetlenül nem mérhető.

E fejezet 4.1-1. szakaszában bemutatjuk a diszkrét idejű illetve a folytonos idejű jelek Laplace-transzformációjának legfontosabb szabályait.

A 4.1-2. szakaszban az inverz DI és FI Laplace-transzformáció technikáját tárgyaljuk. A transzformációk nagy előnye, hogy viszonylag enyhe feltételeknek eleget tevő jelekre is alkalmazhatók, a transzformáció formális alkalmazásához nincs szükség mély matematikai ismeretekre.

A továbbiakban a Laplace-transzformáció az ún. egyoldalas Laplace-transzformációt jelenti, amely nullának tekinti a $k = 0$ illetve $t = 0$ időpont előtt fellépő jelértékeket. Ez úgy is megfogalmazható, hogy az (egyoldalas) Laplace-transzformáció minden jelet belépőnek tekint. A gyakorlati esetek jelentékeny részében belépő jeleket és kauzális rendszereket vizsgálunk, ezért az egyoldalas Laplace-transzformáció alkalmazása nem jelent lényeges megszorítást.

Az irodalomban a diszkrét idejű Laplace-transzformáció (illetve az inverz DI Laplace-transzformáció) elterjedt neve z -transzformáció (illetve inverz z -transzformáció). Az egysegés tárgyalásmód érdekében ezt az elnevezést nem fogjuk használni.

4.1-1. A DI és a FI Laplace-transzformáció

4.1-1.1. A transzformációk definíciója

A DI és a FI jel Laplace-transzformáltját formálisan fogjuk definiálni, mivel szemléletesen nehezen értelmezhetők.

A Laplace-transzformált kapcsolatát a Fourier-transzformálttal a 4.1-1.5. pontban tárgyaljuk. Ez lehetővé teszi bizonyos feltételek mellett a jel Laplace-transzformáltjának szemléltetését is.

Egy $x[k]$ diszkrét idejű jel $X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\}$ DI Laplace-transzformáltjának (más néven z -transzformáltjának) illetve egy $x(t)$ folytonos idejű jel $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ FI Laplace-transzformáltjának definíciója

$$\begin{aligned} \text{DI: } X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} \equiv x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots; \\ \text{FI: } X(s) &= \int_{-0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \end{aligned} \tag{4.1-1}$$

Az x jel komplex értékű is lehet. A z vagy az s változó neve a mérnöki gyakorlatban *komplex frekvencia*. Matematikailag ezek komplex értékű változók.

A z változó dimenzió nélküli mennyiség, néha radián (rad) mértékegységben adják meg, mint a DI körfrekvenciát. Az s változó dimenziója reciprok idő, rendszerint radián per másodperc (rad/s) mértékegységben adják meg, mint a FI körfrekvenciát.

A FI Laplace-transzformációban szereplő -0 alsó határ arra utal, hogy ha a jel tartalmaz $\delta(t)$ Dirac-impulzus összetevőt, akkor azt figyelembe kell venni az integrál számítása során.

A transzformációk figyelmen kívül hagyják a jeleknek a $k \in \mathbf{Z}_-$ illetve a $t \in \mathbf{R}_-$ intervallumban felvett értékeit. Ebből következik, hogy ha $x_1[k] = x_2[k]$, $k \in \mathbf{N}$ illetve ha $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$, akkor $X_1(z) = X_2(z)$ illetve $X_1(s) = X_2(s)$. Annak érdekében, hogy a $\mathcal{L}^{-1}\{X(z)\}$ illetve az $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ inverz transzformáltat egyértelművé tegyük, azt *belépő jelnek* tekintjük, azaz a

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(z)\} = 0, \quad k \in \mathbf{Z}_-; \quad \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 0, \quad t \in \mathbf{R}_- \quad (4.1-2)$$

választással élünk. Az alkalmazások során $x[k]$ illetve $x(t)$ többnyire valóban belépő jel.

Szorítokozunk olyan jelekre, amelyekre a $k = 0$ helyen $x[0]$ véges illetve a $t = 0$ helyen $x(t)$ vagy véges vagy legfeljebb $\delta(t)$ Dirac-impulzusként válik végtelenné. Ekkor az (1) definícióból következik, hogy $z^{-1} \rightarrow 0$ (vagyis $z \rightarrow \infty$) esetén $X(z) \rightarrow x[0]$ illetve $s \rightarrow \infty$ esetén $\Re\{s\} > 0$ mellett $e^{-st} \rightarrow 0$, tehát $X(s) \rightarrow 1$. Ebből az következik, hogy az említett enyhe feltételek mellett

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) < \infty; \quad \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ \Re\{s\} > 0}} X(s) < \infty. \quad (4.1-3)$$

Speciálisan, ha $X(z)$ vagy $X(s)$ *racionális* függvénye változójának (ez DI esetben szinte mindig, a FI esetben pedig gyakran teljesül), akkor számlálójának fokszáma nem lehet nagyobb nevezőjének fokszámánál. Azok a jelek, amelyek nem tesznek eleget a feltételnek (például k^{-1} , t^{-2} , a Dirac-impulzus deriváltja) a gyakorlatban ritkán fordulnak elő, ezért további vizsgálatainkból kirekesztjük őket.

A DI Laplace-transzformáció (1) definíciójából látható, hogy $X(z)$ a z^{-1} változó hatványsora. A konkrét alakban vagy z vagy z^{-1} szerepel, sőt vegyes alkalmazás is előfordul. Ez a többféleség a FI Laplace-transzformáció során ritkán fordul elő.

A következő szakaszban részletesen foglalkozunk az inverz Laplace-transzformáció technikájával. A teljesség kedvéért megadjuk a Laplace-transzformáció *inverziós integrálját*, amelyet azonban a tényleges számítás során nem fogunk alkalmazni (részletesebben l. a 4.1-1.5. pontot)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{X(z)\} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r_1} X(z) z^{k-1} dz, \quad k \in \mathbf{Z}; \\ \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (4.1-4)$$

Az r_1 sugarat illetve a σ_1 abszcisszát olyan nagynak kell választani, hogy az $X(z)$ minden szingularitása az $|z| = r_1$ sugarú körön belül, az $X(s)$ minden szingularitása a $\Re\{s\} = \sigma_1$ abszcisszától balra helyezkedjék el. Ezek az integrálok egy olyan jelet eredményeznek,

amelynek DI illetve FI Laplace-transzformáltja az adott $X(z)$ illetve $X(s)$ és amely nulla a k illetve t negatív értékeire. Az integrálok a komplex függvénytan reziduum-tételének felhasználásával számíthatók. Akik nem érdekeltek a matematikai részletekben, azoknak elegendő annyit tudni, hogy létezik általános összefüggés a transzformáció megfordítására, amelynek tényleges alkalmazására a továbbiakban nem lesz szükség.

Megjegyezzük, hogy az $x_1(t), x_2(t)$ két jel Laplace-transzformáltja akkor is megegyezik, ha a két jel t pozitív értékeire csak bizonyos pontoktól eltekintve (például csak t nem-egész értékeire) egyezik meg. Ilyen jelek gyakorlati feladatok során nem fordulnak elő, ezért ennek nincs jelentősége az alkalmazások során.

4.1-1.2. Az impulzusok és az egységugrás transzformáltja

Az általános tételek ismertetése előtt határozzuk meg néhány fontos DI illetve FI jel Laplace-transzformáltját a definíció alapján.

A DI *egységimpulzus* ($\delta[0]=1, \delta[k]=0$ egyébként) DI Laplace-transzformáltja az (1) definícióból közvetlenül adódik:

$$\mathcal{L}\{\delta[k]\}=1. \quad (4.1-5)$$

Ugyancsak közvetlenül belátható, hogy a késleltetett, illetve a siettetett egységimpulzusra

$$\mathcal{L}\{\delta[k-r]\}=z^{-r}, r \in \mathbf{N}; \quad \mathcal{L}\{\delta[k-r]\}=0, r \in \mathbf{Z}_-. \quad (4.1-6)$$

Ebből következik, hogy a *véges hosszúságú* belépő diszkrét idejű jel DI Laplace-transzformáltja a z^{-1} változó polinomja:

$$\begin{aligned} x_L[k] &= C_0 \delta[k] + C_1 \delta[k-1] + C_2 \delta[k-2] + \dots + C_L \delta[k-L] \Rightarrow \\ X_L(z) &= C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_L z^{-L}. \end{aligned} \quad (4.1-7)$$

Ez kifejezhető a z változó két polinomjának hányadosaként is:

$$X_L(z) = \frac{C_0 z^L + C_1 z^{L-1} + C_2 z^{L-2} + \dots + C_L}{z^L}. \quad (4.1-8)$$

Egyes alkalmazásoknál ez az alak a hasznosabb.

A Dirac-impulzus FI Laplace-transzformáltja az (1) definíció értelmében

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} = 1.$$

Ezek szerint *Dirac-impulzus* FI Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=1. \quad (4.1-9)$$

Hasonló módon kapjuk, hogy a késleltetett, illetve a siettetett Dirac-impulzusra

$$\mathcal{L}\{\delta(t-T)\}=e^{-sT}, T \in \mathbf{R}_+; \quad \mathcal{L}\{\delta(t-T)\}=0, T \in \mathbf{R}_-. \quad (4.1-10)$$

Ennek alapján már nem jelent nehézséget a késleltetett Dirac-impulzusok sorozatából álló $x(t) = C_0 \delta(t) + C_1 \delta(t-T_1) + \dots + C_n \delta(t-T_n), 0 < T_1 < \dots < T_n$ jel FI

Laplace-transzformáltjának meghatározása sem. A (10)-ből látható, miért szükséges (3)-ban a $\Re\{s\} < 0$ megkövetés. Ha például s valós, negatív és $s \rightarrow \infty$, akkor e^{-st} pozitív T esetén végtelenhez tart és nem nullához mint pozitív valós s esetén.

A DI illetve az FI egységugrás Laplace-transzformáltja az (1) definíció értelmében

$$\mathcal{L}\{\varepsilon[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k; \quad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty}.$$

A mértani sor konvergencia, ha $|z^{-1}| < 1$, azaz ha $|z| > 1$. Az e^{-st} nullához tart $t \rightarrow \infty$ esetén, ha $\Re\{s\} > 0$. Ezek szerint

$$\mathcal{L}\{\varepsilon[k]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \equiv \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1; \quad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} > 0. \quad (4.1-11)$$

A gyakorlatban elhagyjuk a z illetve az s változóra vonatkozó feltételt. Az eredményt a z illetve az s minden értékére (az egész z illetve s számsíkon) érvényesnek tekintjük a $z = 1$ illetve az $s = 0$ szinguláris pont kivételével (az analitikus folytatás elve, l. a 4.1-1.5. pontot is). Foglaljuk össze eredményeinket.

A DI illetve a FI egységugrás Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\{\varepsilon[k]\} = \frac{z}{z-1}; \quad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}. \quad (4.1-12)$$

A Laplace-transzformáció definíciójából következik, hogy a nem belépő $f[k] = 1$ vagy $g[k] = 2 - \varepsilon[k]$ DI jel Laplace-transzformáltja megegyezik $\varepsilon[k]$ fenti Laplace-transzformáltjával. Az Olvasóra bizzuk néhány olyan nem belépő FI jelek megkonstruálását, amelyek Laplace-transzformáltja $1/s$, továbbá $\mathcal{L}\{\text{sgn } k\}$ és $\mathcal{L}\{\text{sgn } t\}$ meghatározását.

4.1-1.3. A transzformációk néhány tétele

A következőkben megadjuk a DI és a FI Laplace-transzformáció számunkra fontos néhány tételét. A bizonyításokat elhagyjuk vagy csak vázoljuk, gyakran mellőzzük.

Linearitás

Mivel (1) és (4) értelmében mind a transzformációk, mind az inverzük lineáris művelet, ezért érvényes rájuk a szuperpozíció elve, amely szerint összegtartók és aránytartók, vagyis

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{C_1 x_1[k] + C_2 x_2[k]\} &= C_1 \mathcal{L}\{x_1[k]\} + C_2 \mathcal{L}\{x_2[k]\}; \\ \mathcal{L}\{C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)\} &= C_1 \mathcal{L}\{x_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{x_2(t)\}. \end{aligned} \quad (4.1-13)$$

Az inverz transzformációkra vonatkozóan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{C_1 X_1(z) + C_2 X_2(z)\} &= C_1 \mathcal{L}^{-1}\{X_1(z)\} + C_2 \mathcal{L}^{-1}\{X_2(z)\}; \\ \mathcal{L}^{-1}\{C_1 X_1(s) + C_2 X_2(s)\} &= C_1 \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} + C_2 \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\}. \end{aligned} \quad (4.1-14)$$

Ezek az összefüggések véges számú tagra könnyen általánosíthatók, sőt (a gyakorlati esetek többségében teljesülő konvergencia-feltételek mellett) végtelen sok tagra is.

Csillapítási tétel

Ha $X(z) = \mathcal{L}\{x[k]\}$ illetve $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, akkor bármely komplex q illetve p esetén

$$\mathcal{L}\{q^k x[k]\} = X\left(\frac{z}{q}\right); \quad \mathcal{L}\{e^{pt} x(t)\} = X(s-p). \quad (4.1-15)$$

Ha q valós és $-1 < q < 1$ illetve ha p valós és $-\infty < p < 0$, akkor az x jel szorzófüggvénye az időtartományban exponenciális csillapítást jelent – ez indokolja a csillapítási tétel elnevezést. Az igazolás egyszerű, nem részletezzük.

A tétel alkalmazásaként a (12) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\{\varepsilon[k]\} = \frac{z}{z-1} \Rightarrow \mathcal{L}\{q^k \varepsilon[k]\} = \frac{z/q}{(z/q)-1}; \quad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{pt} \varepsilon(t)\} = \frac{1}{s-p}.$$

Gyakori előfordulása miatt érdemes megjegyezni, hogy

$$\mathcal{L}\{\varepsilon[k]q^k\} = \frac{z}{z-q}; \quad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{pt}\} = \frac{1}{s-p}. \quad (4.1-16)$$

A $q = 1$ vagy a $p = 0$ speciális eset a (12)-re vezet.

1. példa Legyen (16)-ban $q = e^{j\theta}$ és $q = e^{-j\theta}$. Ekkor

$$\mathcal{L}\{\varepsilon[k]e^{j\theta k}\} = \frac{z}{z-e^{j\theta}}; \quad \mathcal{L}\{\varepsilon[k]e^{-j\theta k}\} = \frac{z}{z-e^{-j\theta}}.$$

Az Euler-reláció felhasználásával összeadás illetve kivonás után kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\{\varepsilon[k]\cos \theta k\} = \frac{z^2 - (\cos \theta)z}{z^2 - 2(\cos \theta)z + 1}, \quad \mathcal{L}\{\varepsilon[k]\sin \theta k\} = \frac{(\sin \theta)z}{z^2 - 2(\cos \theta)z + 1}.$$

Hasonló módon kapjuk FI jelekre, hogy (a számítást az Olvasóra bizzuk)

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{j\Omega t}\} = \frac{1}{s-j\Omega}, \quad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{-j\Omega t}\} = \frac{1}{s+j\Omega};$$

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\cos \Omega t\} = \frac{s}{s^2 + \Omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\sin \Omega t\} = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}.$$

Az Olvasó ellenőrizheti, hogy a θ vagy az Ω valós paraméter szerinti időtartománybeli páros és páratlan tulajdonságot a Laplace-transzformáció megőrzi a komplex frekvenciatartományban. #

Paraméter szerinti differenciálás

Ha $X(z, q) = \mathcal{L}\{x[k, q]\}$ illetve $X(s, p) = \mathcal{L}\{x(t, p)\}$, akkor bármely komplex q illetve p paraméter esetén a paraméter szerinti differenciálás és a Laplace-transzformáció felcserélhető:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial x[k, q]}{\partial q}\right\} = \frac{\partial X(z, q)}{\partial q}; \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial x(t, p)}{\partial p}\right\} = \frac{\partial X(s, p)}{\partial p}. \quad (4.1-17)$$

Alkalmazzuk a tételt az $x[k, q] = \varepsilon[k] q^k$ DI jelre. A (16) értelmében

$$\mathcal{L}\{\varepsilon[k] k q^{k-1}\} = \frac{z}{(z-q)^2}, \quad \mathcal{L}\{\varepsilon[k] k(k-1) q^{k-2}\} = \frac{2z}{(z-q)^3}. \quad (4.1-18)$$

Teljes indukcióval nehézség nélkül belátható, hogy

$$\mathcal{L}\left\{\varepsilon[k] \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-(m-1))}{m!} q^{k-m}\right\} = \frac{z}{(z-q)^{m+1}}, \quad m \in \mathbf{Z}_+. \quad (4.1-19)$$

Az összefüggésben szereplő tört a k változó m -edfokú polinomja, amely a binomiális együtthatóval $\binom{k}{m} = \frac{k!}{m!(k-m)!}$ alakban is kifejezhető.

Hasonló módon (16) alapján FI jelre, hogy (a számítást az Olvasóra bízuk)

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t) t e^{pt}\} = \frac{1}{(s-p)^2}, \quad \mathcal{L}\{\varepsilon(t) t^2 e^{pt}\} = \frac{2}{(s-p)^3}. \quad (4.1-20)$$

Teljes indukcióval általánosítva kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\left\{\varepsilon(t) \frac{1}{m!} t^m e^{pt}\right\} = \frac{1}{(s-p)^{m+1}}, \quad m \in \mathbf{N}. \quad (4.1-21)$$

Ezek az összefüggések majd az inverz transzformáció során hasznosak lesznek (4.1-2.4. pont, többszörös pólusok esete).

2. példa Legyen (18)-ban $q = 1$, akkor

$$\mathcal{L}\{\varepsilon[k] k\} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \mathcal{L}\{\varepsilon[k] k(k-1)\} = \frac{2z}{(z-1)^3} \Rightarrow \mathcal{L}\{\varepsilon[k] k^2\} = \frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

Hasonlóan számítható k^3, k^4, \dots stb. DI jel Laplace-transzformáltja is. Nem ismert azonban egyszerű összefüggés a $\mathcal{L}\{\varepsilon[k] k^m\}$, $m \in \mathbf{N}$ függvényre. #

Késleltetett belépő jel transzformáltja

Ha $X(z) = \mathcal{L}\{x[k]\}$ illetve $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\varepsilon[k-r] x[k-r]\} &= z^{-r} X(z), \quad r \in \mathbf{N}; \\ \mathcal{L}\{\varepsilon(t-T) x(t-T)\} &= e^{-sT} X(s), \quad T \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \quad (4.1-22)$$

A tételt szokás *eltolási tételnek* vagy *késleltetési tételnek* nevezni.

A tétel igazolását a következő, általánosabb tétel után tárgyaljuk.

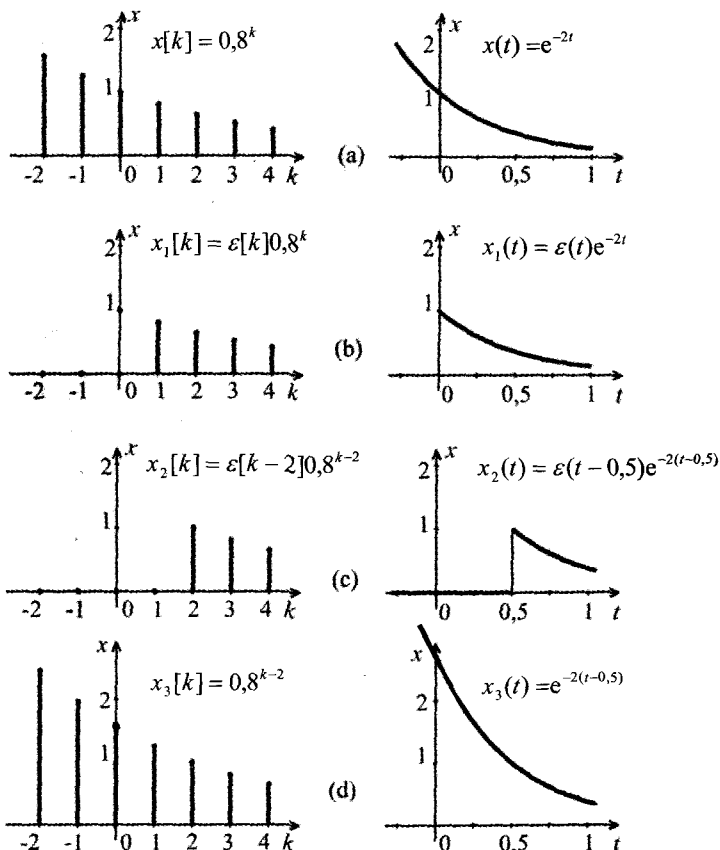
Érdeemes felírni a tétel inverz alakját is:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\{z^{-r}X(z)\} &= \varepsilon[k-r]x[k-r], \quad r \in \mathbf{N}; \\ \mathcal{L}^{-1}\{e^{-sT}X(s)\} &= \varepsilon(t-T)x(t-T), \quad T \in \mathbf{R}_+, \end{aligned}\tag{4.1-23}$$

vagyis az időfüggvény nulla a $k=r \geq 0$ illetve a $t=T \geq 0$ időpont előtt. Azt is mondhatjuk, hogy a jel az r illetve a T időpontban lép be.

A tételek alkalmazásaként határozzuk meg a következő DI illetve FI jelek Laplace-transzformáltját (1. ábra):

$$\begin{aligned}x[k] &= 0,8^k, & x(t) &= e^{-2t}; \\ x_1[k] &= \varepsilon[k]0,8^k, & x_1(t) &= \varepsilon(t)e^{-2t}; \\ x_2[k] &= \varepsilon[k-2]0,8^{k-2}, & x_2(t) &= \varepsilon(t-0,5)e^{-2(t-0,5)}; \\ x_3[k] &= 0,8^{k-2}, & x_3(t) &= e^{-2(t-0,5)}.\end{aligned}$$



4.1-1. ábra Exponenciális jel, belépő exponenciális jel, késleltetett belépő exponenciális jel, késleltetett exponenciális jel

A (16) értelmében azonnal felírhatjuk, hogy

$$X(z) = X_1(z) = \frac{z}{z-0,8}; \quad X(s) = X_1(s) = \frac{1}{s+2}.$$

A (22) alkalmazásával vagy az (1) definíció alapján

$$X_2(z) = z^{-2} \frac{z}{z-0,8} \equiv \frac{1}{z(z-0,8)}, \quad X_2(s) = e^{-0,5s} \frac{1}{s+2}.$$

Végül $x_3[k] = 0,8^{-2} (0,8)^k$ illetve $x_3(t) = e \cdot e^{-2t}$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$X_3(z) = 0,8^{-2} \frac{z}{z-0,8}; \quad X_3(s) = e \frac{1}{s+2}.$$

Tekintsük most adottnak az X_i transzformált jeleket és keressünk az eredetileg adott x_i időfüggvényeket. Közvetlenül felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{X(z)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{X_1(z)\} = 0,8^k, \quad k \in \mathbf{N}; & \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = e^{-2t}, \quad t \in \mathbf{R}_+; \\ \mathcal{L}^{-1}\{X_3(z)\} &= 0,8^{-2} 0,8^k, \quad k \in \mathbf{N}; & \mathcal{L}^{-1}\{X_3(s)\} &= e \cdot e^{-2t}, \quad t \in \mathbf{R}_+. \end{aligned}$$

A (2) szerinti konvenciónknak megfelelően azt is írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{X(z)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{X_1(z)\} = \varepsilon[k] 0,8^k, \quad k \in \mathbf{Z}; & \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = \varepsilon(t) e^{-2t}, \quad t \in \mathbf{R}; \\ \mathcal{L}^{-1}\{X_3(z)\} &= \varepsilon[k] 0,8^{k-2}, \quad k \in \mathbf{Z}; & \mathcal{L}^{-1}\{X_3(s)\} &= \varepsilon(t) e^{-2(t-0,5)}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Az x_1 és x_3 ezen alakja nem egyezik meg az eredetileg megadottal, óvatosságból nem is jelöltük így. Tudnunk kell ugyanis, hogy az inverz Laplace-transzformáció negatív k illetve t értékekhez mindig nulla jelértéket rendel.

Hiba lenne arra következtetni, hogy $X_2(z)$ inverz transzformáltja $0,8^{k-2}$ illetve hogy $X_2(s)$ inverz transzformáltja $e^{-2(t-0,5)}$. Ezek a jelek ugyanis nem nulla értékűek a $k = 0$ és 1 helyen vagy a $0 < t < 0,5$ intervallumban, ténylegesen e jelek Laplace-transzformáltja $X_3(z)$ illetve $X_3(s)$. Ha mindig kiírjuk az $\varepsilon[k-r]$ illetve az $\varepsilon(t-T)$ tényezőt, akkor az ilyen hibákat elkerülhetjük.

3. példa Határozzuk meg a következő DI illetve FI jel Laplace-transzformáltját:

$$\begin{aligned} x[k] &= \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-10]\} \{1+k\} + \varepsilon[k-10]; \\ x(t) &= \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)\} e^{-t} + \varepsilon(t-2). \end{aligned}$$

Alakítsuk a jelek ablakozott kifejezését a következőképpen:

$$\begin{aligned} x[k] &= \varepsilon[k] \{1+k\} + \varepsilon[k-10] \{-(k-10)-10\}; \\ x(t) &= \varepsilon(t) e^{-t} + \varepsilon(t-2) \{-e^{-2} e^{-(t-2)} + 1\}. \end{aligned}$$

Most már közvetlenül alkalmazhatjuk a (22) eltolási tételt:

$$\begin{aligned} X(z) &= \left\{ \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2} \right\} - z^{-10} \left\{ \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{10z}{z-1} \right\} = \frac{z^2}{(z-1)^2} - z^{-10} \frac{z(10z-9)}{(z-1)^2}; \\ X(s) &= \frac{1}{s+1} + e^{-2s} \left\{ \frac{e^{-2}}{s+1} + \frac{1}{s} \right\} = \frac{1}{s+1} + e^{-2s} \frac{(1-e^{-2})s+1}{s(s+1)}. \end{aligned}$$

Az eredmények más alakra is rendezhetők, de talán az itt megadottak a legkényelmesebbek a további számítások során. Az inverz Laplace-transzformáció során nem feltétlenül az eredetileg megadott időfüggvények adódnak, de célszerű az eredményt arra az ablakozott alakra hozni.

A DI illetve az FI jel ábrázolását az Olvasóra bizzuk. #

Nem belépő DI jel késleltetése

Ha $X(z) = \mathcal{X}\{x[k]\}$, akkor a késleltetett jel DI Laplace-transzformáltja (igazolást l. alább)

$$\mathcal{X}\{x[k-r]\} = z^{-r} X(z) + x[-r] + x[-r+1]z^{-1} + \dots + x[-1]z^{-(r-1)}, \quad r \in \mathbf{Z}_+. \quad (4.1-24)$$

A nem belépő és késleltetett jel DI Laplace-transzformáltját $X(z)$ ismeretében nem határozhatjuk meg, hiszen annak számításakor az $x[-1]$, $x[-2]$,... értékeket nullának tekintettük, tehát ezeket külön figyelembe kell vennünk. Ha ezek mindegyike nulla, akkor (24) a (22) szerinti alakra egyszerűsödik. Speciálisan $r = 1$ és 2 esetén

$$\mathcal{X}\{x[k-1]\} = z^{-1} X(z) + x[-1], \quad \mathcal{X}\{x[k-2]\} = z^{-2} X(z) + x[-2] + x[-1]z^{-1}. \quad (4.1-25)$$

E tétel FI megfelelőjére ritkán van szükség, ezért azzal nem is foglalkozunk.

4. példa Határozzuk meg $x_3[k] = 0,8^{k-2}$ DI Laplace-transzformáltját annak felhasználásával, hogy ha $x[k] = 0,8^k$, akkor $x_3[k] = x[k-2]$.

Tudjuk, hogy $\mathcal{X}\{0,8^k\} = z/(z-0,8)$. A (25) értelmében ezért

$$X_3(z) = z^{-2} \frac{z}{z-0,8} + 0,8^{-2} + 0,8^{-1} z^{-1} = 0,8^{-2} \frac{0,8^2 + z(z-0,8) + 0,8(z-0,8)}{z(z-0,8)} = 0,8^{-2} \frac{z}{z-0,8}.$$

Amint azt korábban láttuk, valóban ez a helyes eredmény. #

A (22) és (24) tétel igazolásához az (1) definíció értelmében

$$\mathcal{X}\{x[k-r]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k-r] z^{-r} = \sum_{m=-r}^{\infty} x[m] z^{-(r+m)} = z^{-r} \sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-m} + \sum_{m=-r}^{-1} x[m] z^{-(r+m)}, \quad r \in \mathbf{Z}_+.$$

Az első összeg az $X(z)$ függvényt adja, a második összeg a (24) többi tagját, illetve zérust, ha $x[k]$ belépő jel, ami a (22) szerinti összefüggésre vezet.

Siettetett DI jel

Ha $X(z) = \mathcal{X}\{x[k]\}$, akkor az egy ütemmel siettetett („hátratul”) jel transzformáltja

$$\mathcal{X}\{x[k+1]\} = z X(z) - x[0]z. \quad (4.1-26)$$

Az általánosítás több ütemre nem okoz nehézséget. A tétel FI megfelelőjének kicsi a gyakorlati fontossága, ezért nem tárgyaljuk.

Az (1) definíció értelmében ugyanis

$$\mathcal{X}\{x[k+1]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k+1] z^{-k} = \sum_{m=1}^{\infty} x[m] z^{-(m-1)} = z \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} x[m] z^{-m} - x[0] \right\},$$

és ebből (26) már következik.

5. példa Legyen $x[k] = 0,8^k$. Ekkor $x[k+1] = 0,8^{k+1} = 0,8 x[k]$.

A (26) értelmében a $0,8^{k+1}$ jel DI Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\{0,8^{k+1}\} = z \frac{z}{z-0,8} - 1 \cdot z \equiv \frac{0,8z}{z-0,8},$$

ami valóban $0,8 X(z)$, amint lennie is kell. #

Folytonos idejű jel deriváltja

Ha $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, akkor $x(t)$ általánosított deriváltjának, az $x'(t) \equiv x^{(1)}(t)$ jelnek a FI Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = s X(s) - x(-0). \quad (4.1-27)$$

Ha $x(-0) = 0$, mint minden *belépő jel* esetén, akkor (27) a $\mathcal{L}\{x'(t)\} = s X(s)$ alakra egyszerűsödik. A tétel akkor is érvényes, ha t pozitív értékeire $x(t)$ esetleg nem folytonos, de intervallumonként folytonos és differenciálható, mindenütt van bal és jobb oldali határértéke. A tétel újabb alkalmazásával kapjuk a második derivált transzformáltját:

$$\mathcal{L}\{x^{(2)}(t)\} = s^2 X(s) - x(-0)s - x^{(1)}(-0).$$

Az általánosítás tetszőleges rendű deriváltra már kézenfekvő:

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} x^{(i)}(-0) s^{n-i-1}. \quad (4.1-28)$$

Többnyire $x(t)$ *belépő jel*, amelyekre a tétel a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) \leftarrow x(t) = 0, t \in \mathbf{R}_+. \quad (4.1-29)$$

Megjegyezzük, hogy matematikai irodalomban a tétel következő alakja az elterjedt. Ha az $x(t)$ függvény a t pozitív értékeire mindenütt differenciálható, akkor ennek első deriváltjának Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = s X(s) - x(+0)$.

6. példa Határozzuk meg (27) felhasználásával a Dirac-impulzus Laplace-transzformáltját.

Tudjuk, hogy $\delta(t) = \varepsilon'(t)$, $\varepsilon(-0) = 0$ és $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = 1/s$. Ezek felhasználásával a (27) értelmében $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = s(1/s) - 0 = 1$, ami a helyes eredmény. #

A (27) tétel igazolásához alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát:

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = \int_{-0}^{\infty} x'(t) e^{-st} dt = [x(t) e^{-st}]_0^{\infty} + \int_{-0}^{\infty} x(t) s e^{-st} dt.$$

Az első tag a felső határon nulla, ha $\operatorname{Re}\{s\}$ értékét elég nagyoknak választjuk, az alsó határon pedig $x(-0)$. A második tag adja az $s X(s)$ összetevőt (27)-ben.

Folytonos idejű jel integrálja

Ha $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, akkor $x(t)$ integráljának a FI Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-0}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} X(s). \quad (4.1-30)$$

Ismételt integrálás s -sel végzett ismételt osztásnak felel meg. Ha az integrálás alsó határa nem -0 , akkor a negatív t értékekre vonatkozó integrál egy additív állandót jelent, amely $X(s)$ ismeretében természetesen nem határozható meg.

7. példa Integráljuk az $\varepsilon(t)$ egységugrást ismételten, akkor kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{1}{2}t^2\right\} = \frac{1}{s^3}, \dots, \quad \mathcal{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{1}{m!}t^m\right\} = \frac{1}{s^{m+1}},$$

amint azt már korábban más úton, a (21) szerint megkaptuk. #

A tétel igazolásához alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát:

$$\int_{-0}^{\infty} \left\{ \int_{-0}^t x(\tau) d\tau \right\} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \int_{-0}^t x(\tau) d\tau \right]_{-0}^{\infty} + \int_{-0}^t x(t) \frac{e^{-st}}{s} dt.$$

Az első tag a felső határon nulla, ha $\Re\{s\}$ értékét elég nagynak választjuk, míg az alsó határon azért nulla, mert az integrál határai megegyeznek. A második tag adja az $X(s)/s$ eredményt (30)-ban.

Differenciálás a komplex frekvenciatartományban

Ha $\mathcal{L}\{x[k]\} = X(z)$ illetve ha $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, akkor

$$\mathcal{L}\{kx[k]\} = -z \frac{dX(z)}{dz}; \quad \mathcal{L}\{t x(t)\} = -\frac{dX(s)}{ds}. \quad (4.1-31)$$

A művelet ismétlésével kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\{k^2 x[k]\} = z \frac{d}{dz} \left\{ z \frac{dX(z)}{dz} \right\}; \quad \mathcal{L}\{t^2 x(t)\} = \frac{d^2 X(s)}{ds^2}. \quad (4.1-32)$$

A tétel általános alakja

$$\mathcal{L}\{k^n x[k]\} = \left\{ -z \frac{d}{dz} \right\}^n X(z); \quad \mathcal{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}; \quad n \in \mathbf{N}. \quad (4.1-33)$$

Ezek a tételek egyes jelek transzformáltjának számításánál használhatók. Az igazolás a definícióból adódik, ezért nem részletezzük.

8. példa Az ismert $\mathcal{L}\{\varepsilon[k]\} = z/(z-1)$ összefüggésből kiindulva kapjuk hogy

$$\mathcal{L}\{\varepsilon[k]k\} = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \mathcal{L}\{\varepsilon[k]k^2\} = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3},$$

megegyezésben más úton kapott eredményünkkel. #

A jel kezdeti értéke

Ha $\mathcal{L}\{x[k]\} = X(z)$ illetve $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, akkor $X(z)$ illetve $X(s)$ ismeretében meghatározhatjuk a jel $x[0]$ illetve $x(+0)$ kezdeti értékét:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z); \quad x(+0) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ \Re\{s\} > 0}} \{s X(s)\}. \quad (4.1-34)$$

A tétel akkor érvényes, ha $x[0]$ illetve ha $x(+0)$ létezik, de ez $X(z)$ illetve $X(s)$ ismeretében nehezen dönthető el. Szerencsére a tétel a legtöbb gyakorlati esetben használható. Még akkor is elfogadható eredményt kapunk, ha $x(t) = \delta(t)$, $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, mert ekkor $x(+0) = \infty$ adódik. Az Olvasó ellenőrizheti a tétel érvényességét az eddigi vizsgált jelekre. A határátmentnél a z vagy s változót tekintsük valósnak és pozitívnak.

Hálózatok vagy rendszerek vizsgálata során az $x[0]$ illetve $x(+0)$ kezdeti érték gyakran valamilyen megfontolás alapján meghatározható. Ilyenkor (34) felhasználható $X(z)$ illetve $X(s)$ ellenőrzésére.

A tétel igazolható a definíció alapján is vagy a később tárgyalandó hatványsoros előállítás alapján (4.1-2.2. pont).

A jel végértéke

Ha a jel $x[\infty] = \lim_{k \rightarrow \infty} x[k]$ végértéke illetve $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ végértéke létezik, akkor az $X(z) = \mathcal{L}\{x[k]\}$ illetve $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ ismeretében meghatározható:

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1)X(z)\}; \quad x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \{sX(s)\}. \quad (4.1-35)$$

Ha csak $X(z)$ illetve $X(s)$ ismert, akkor a tétel alkalmazhatóságának alapvető feltétele az, hogy $X(z)$ minden z_i szingularitására $|z_i| < 1$, illetve az $X(s)$ minden s_i szingularitására $\Re\{s_i\} < 0$ teljesüljön. Ha $X(z)$ illetve $X(s)$ racionális függvény, akkor a z_i illetve az s_i szinguláris pontok a függvény pólusait (többnyire nevezőjének nullahelyeit) jelentik. Korábban már láttuk, hogy a nullahelyekre vonatkozó feltételek teljesülése azok kiszámítása nélkül is ellenőrizhető (2.2-3.2. pont).

A tétel igazolását az Olvasóra bizzuk, de célszerű a részlettörtekre bontás tárgyalása utánra (4.1-2.3. pont) halasztani.

9. példa Vizsgáljuk meg a következő Laplace-transzformáltakat és határértékeket:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\varepsilon[k]q^k\} &= \frac{z}{z-q}; & \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ (z-1) \frac{z}{z-q} \right\} &= 0, \text{ ha } q \neq 1; \\ \mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{pt}\} &= \frac{1}{s-p}, & \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \frac{1}{s-p} \right\} &= 0, \text{ ha } p \neq 0. \end{aligned}$$

Ha $|q| < 1$, akkor $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$, illetve ha $\Re\{p\} < 0$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{pt} = 0$, tehát (35)

helyes eredményt ad. Ha $|q| > 1$, akkor $|q^k|$ korlátlanul nő, illetve ha $\Re\{p\} > 0$, akkor $|e^{pt}|$ korlátlanul nő, tehát a (35) szerinti nulla nem helyes eredmény.

Ha $|q|=1$, akkor $q^k=1$ illetve ha $p=0$, akkor $e^{p t}=1$, ekkor (35) ismét helyes eredményt ad. Igazolható, hogy (35) még akkor is helyes eredményt ad, ha az $X(z)$ függvénynek a $z=1$ helyen többszörös pólusa van, a többi pólusa pedig az egységsugarú kör belsejébe illetve ha az $X(s)$ függvénynek az $s=0$ helyen többszörös pólusa van, a többi pólusa pedig a bal félsíkra esik. A tétel viszont nem ad helyes eredményt, ha a pólus az egységsugarú kör illetve a képzetes tengely más pontjára esik. #

Belépő jelek konvolúciója a komplex frekvenciatartományban

Legyen x és y egyaránt belépő jel. Ekkor konvolúciójuk is belépő jel, éspedig

$$x[k]*y[k]=\sum_{p=0}^k x[p]y[k-p]; \quad x(t)*y(t)=\int_{-0}^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau. \quad (4.1-36)$$

Két belépő jel konvolúciójának DI vagy FI Laplace-transzformáltja a **transzformáltjuk szorzata**:

$$\mathcal{L}\{x[k]*y[k]\}=X(z)Y(z); \quad \mathcal{L}\{x(t)*y(t)\}=X(s)Y(s). \quad (4.1-37)$$

A belépő jelek konvolúciójára vonatkozó tétel nagyon fontos elvi szempontból. Számítástechnikai célokra ritkán használjuk.

A tételek igazolásához tekintsük először két nem belépő jel konvolúciójának transzformáltját:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x[k]*y[k]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]y[k-p] \right\} z^{-k} = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]z^{-p} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} y[k-p]z^{-(k-p)} \right\} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]z^{-p} \left\{ \sum_{m=-p}^{\infty} y[m]z^{-m} \right\}; \\ \mathcal{L}\{x(t)*y(t)\} &= \int_{-0}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right\} e^{-s t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} \left\{ \int_{-0}^{\infty} y(t-\tau)e^{-s(t-\tau)} dt \right\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} \left\{ \int_{-\tau-0}^{\infty} y(\vartheta)e^{-s\vartheta} d\vartheta \right\} d\tau. \end{aligned}$$

A műveletek felcserélhetők, ha mindkét jelnek létezik a Laplace-transzformáltja. Ha x és y egyaránt belépő jel, akkor az utolsó összegek alsó határa $p=0$, ezért $m=0$ is, illetve az utolsó integrálok alsó határa $\tau=-0$, ezért $\vartheta=-0$ is. A két összeg illetve integrál ily módon függetlenné válik, eredményük az $X(z)$ és az $Y(z)$ illetve $X(s)$ és az $Y(s)$ függvény, amivel a (37) tételt igazoltuk.

Az $x[k]y[k]$ illetve az $x(t)y(t)$ szorzat Laplace-transzformáltja kifejezhető $X(z)$ és $Y(z)$ illetve $X(s)$ és $Y(s)$ konvolúciójaként, ami a komplex számsíkon végzett integrállal fejezhető ki. Ezeket az összefüggéseket nem részletezzük, mivel nehezen alkalmazhatók, ezért a továbbiakban ezt a tételt nem fogjuk felhasználni.

*4.1-1.4. Periodikus jelek transzformáltja

Legyen $x[k]$ illetve $x(t)$ egy periodikus jel :

$$x[k+L] = x[k], L \in \mathbf{Z}_+; \quad x(t+T) = x(t), T \in \mathbf{R}_+, \quad (4.1-38)$$

ahol L illetve T a jel periódusideje. Célunk a Laplace-transzformált meghatározása.

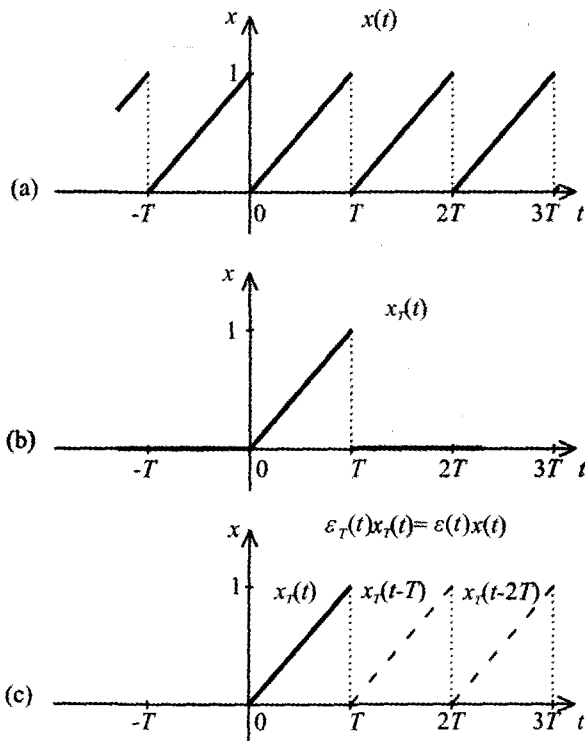
Vezessük be az $x_L[k]$ illetve az $x_T(t)$ jelet, amely leírja a jel „első” periódusát:

$$x_L[k] \equiv \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} x[k]; \quad x_T(t) \equiv \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} x(t). \quad (4.1-39)$$

A k illetve t pozitív értékeire szorítkozva az ott periodikus x jel előállítható ezen jel ismételt késleltetésével és összegezással:

$$\begin{aligned} x[k] &= x_L[k] + x_L[k-L] + x_L[k-2L] + \dots \equiv \varepsilon_L[k] x_L[k]; \\ x(t) &= x_T(t) + x_T(t-T) + x_T(t-2T) + \dots \equiv \varepsilon_T(t) x_T(t). \end{aligned} \quad (4.1-40)$$

ahol az $\varepsilon_L[k]$ illetve az $\varepsilon_T(t)$ ismétlési operátort a (40) azonosság definiálja. A műveletet a 2. ábra szemlélteti egy folytonos idejű jelre.



4.1-2. ábra (a) A folytonos idejű periodikus jel; (b) az első periódust leíró jel; (c) a belépő, majd belépés után periodikus jel előállítása eltolással és összegezással

Jelölje az első periódust leíró jel Laplace-transzformáltját

$$X_L(z) = \mathcal{Z}\{x_L[k]\}; \quad X_T(s) = \mathcal{L}\{x_T(t)\}. \quad (4.1-41)$$

Az $X_L(z)$ a z^{-1} polinomja, az $X_T(s)$ rendszerint ugyancsak meghatározható egyszerű számítással, utóbbi csak kivételesen racionális függvény. A késleltetési tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\varepsilon_L[k]x_L[k]\} &= X_L(z) + z^{-L}X_L(z) + z^{-2L}X_L(z) + \dots; \\ \mathcal{L}\{\varepsilon_T(t)x_T(t)\} &= X_T(s) + e^{-sT}X_T(s) + e^{-2sT}X_T(s) + \dots.\end{aligned}$$

A mértani sor konvergensi, ha $|z^{-1}| < 1$, azaz ha $|z| > 1$ illetve ha $|e^{-sT}| < 1$, azaz ha $\Re\{s\} > 0$. A periodikus jel Laplace-transzformáltjára vonatkozó végeredményünk:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon_L[k]x_L[k]\} = \frac{1}{1-z^{-L}}X_L(z); \quad \mathcal{L}\{\varepsilon_T(t)x_T(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}X_T(s). \quad (4.1-42)$$

Ha tehát egy $X(z)$ illetve $X(s)$ függvény alakja a (42) szerinti és abban $\mathcal{L}^{-1}\{X_L(z)\} = 0, k \geq L$ illetve $\mathcal{L}^{-1}\{X_T(s)\} = 0, t > T$, akkor $X(z)$ illetve $X(s)$ inverz transzformáltja periodikus jel, amelynek első periódusát $x_L[k] = \mathcal{L}^{-1}\{X_L(z)\}$ illetve $x_T(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_T(s)\}$ írja le.

1. példa Határozzuk meg a 2a ábrán vázolt folytonos idejű periodikus jel Laplace-transzformáltját!

Az ábrából látható, hogy

$$\begin{aligned}x_T(t) &= \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} \frac{t}{T} = \varepsilon(t) \frac{t}{T} - \varepsilon(t-T) \left\{ \frac{t-T}{T} + 1 \right\} \Rightarrow \\ X_T(s) &= \frac{1}{Ts^2} - e^{-sT} \left\{ \frac{1}{Ts^2} + \frac{1}{s} \right\} = \frac{1 - e^{-sT}(sT + 1)}{Ts^2}.\end{aligned}$$

A (42) felhasználásával kapjuk, hogy

$$X(s) = \frac{1 - e^{-sT}(sT + 1)}{Ts^2(1 - e^{-sT})}.$$

Az Olvasóra bízunk annak eldöntését, hogy van-e az $X_T(s)$ és az $X(s)$ függvénynek szingularitása az $s = 0$ helyen. #

Hasonlítsuk össze $X_T(s)$ általános kifejezését a FI periodikus jel *komplex Fourier-együtthatójának* kifejezésével:

$$X_T(s) = \int_{-0}^T x(t) e^{-st} dt, \quad X_p^C = \frac{1}{T} \int_{-0}^T x(t) e^{-j p 2\pi t/T} dt. \quad (4.1-43)$$

Azonnal látható, hogy

$$X_p^C = \frac{1}{T} X_T(s) \Big|_{s=j p 2\pi/T}. \quad (4.1-44)$$

Mivel $X_T(s)$ többnyire meghatározható integrálás nélkül, ezért (44) kényelmes lehetőség periodikus FI jelek Fourier-együtthatóinak számítására. A tétel DI alakja nem különösebben hasznos.

2. példa A 2. ábrán vázolt periodikus FI jel komplex Fourier- együtthatóinak meghatározásához használjuk fel az előző példa eredményét és az $e^{jp2\pi} = 1$ összefüggést:

$$X_p^C = \frac{1}{T} \left. \frac{1 - e^{-sT}(Ts+1)}{Ts^2} \right|_{s=jp2\pi/T} = \frac{1 - (jp2\pi+1)}{T^2(jp2\pi/T)^2} = \frac{-1}{jp2\pi}; \quad p = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ha $p = 0$, akkor $e^{-sT} \approx 1 - sT + s^2 T^2 / 2$ felhasználásával $X_0^C = 1/2$ adódik.

Az Olvasó ellenőrizheti az eredményt X_p^C számításával a 3.1-2.4. pontban tárgyalt módon. #

*4.1-1.5. Jelek leírása a frekvencia- és a komplex frekvenciatartományban

Egy DI illetve FI jel spektruma (Fourier-transzformáltja) és Laplace-transzformáltja kölcsönösen meghatározzák egymást, ha bizonyos feltételek ki vannak elégítve. Hasonlítsuk össze egy DI illetve egy FI jel kétféle transzformáltját:

$$\mathcal{F}\{x[k]\} \equiv X(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\vartheta k}, \quad \text{ha } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty; \quad \mathcal{L}\{x[k]\} \equiv X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k};$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} \equiv X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \text{ha } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty; \quad \mathcal{L}\{x(t)\} \equiv X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt.$$

Ennek alapján a következőket állapíthatjuk meg.

Ha $x[k]$ egy *belépő és abszolút összegezhető* DI jel, akkor $X(e^{j\vartheta})$ spektruma kifejezhető $X(z)$ Laplace-transzformáltjával $z = e^{j\vartheta}$ helyettesítéssel. Ha $x(t)$ egy *belépő és abszolút integrálható* FI jel, akkor $X(j\omega)$ spektruma kifejezhető $X(s)$ Laplace-transzformáltjával $s = j\omega$ helyettesítéssel:

$$X(e^{j\vartheta}) = X(z)_{z=e^{j\vartheta}}, \quad \text{ha } x[k] = 0, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \text{és } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty; \quad (4.1-45)$$

$$X(j\omega) = X(s)_{s=j\omega}, \quad \text{ha } x(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{és } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

Ha az abszolút összegezhetőségre vagy az abszolút integrálhatóságra vonatkozó feltételek nincsenek kielégítve, akkor $X(e^{j\vartheta})$ továbbra is úgy tekinthető, mint az $X(z)$ függvénynek az egységsugarú körön a $z = e^{j\vartheta}$ helyen felvett értéke, illetve $X(j\omega)$ továbbra is úgy tekinthető, mint az $X(s)$ függvénynek a képzetes tengelyen az $s = j\omega$ helyen felvett értéke. Ilyenkor azonban ezek nem adják meg a jel spektrumát.

Mindezek alapján érthető, miért nevezik „komplex frekvenciának” a z illetve az s változót, továbbá az $X(e^{j\vartheta})$ illetve az $X(j\omega)$ jelölés hasznát az egyszerűbb, és ugyancsak elterjedt $X(\vartheta)$ illetve $X(\omega)$ helyett. A ϑ DI körfrekvencia a z DI komplex frekvencia szöge, illetve az ω FI körfrekvencia az s FI komplex frekvencia képzetes része. Ezért nem célszerű az önmagában helyes „valós frekvencia” kifejezést használni. Komplex frekvencia helyett komplex körfrekvencia lenne a korrekt elnevezés, de a gyakorlatban a rövidebb alak használatos, hiszen az nem félreérthető.

A (45) biztosan alkalmazható, ha a jel belépő, korlátos és időkorlátozott (véges hosszúságú). Ugyancsak biztosan alkalmazható a tétel, ha a jel belépő, korlátos és a végtelenben exponenciálisan nullához tart, illetve alkalmas a^k ($0 < a < 1$) illetve $e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$) függvénnyel majorálható. Nem alkalmazható (45) például az $\varepsilon[k]$ illetve az $\varepsilon(t)$, vagy az $\varepsilon[k] \cos \Theta k$ illetve az $\varepsilon(t) \cos \Omega t$ nem abszolút összegezhető illetve nem abszolút integrálható jelre. Nem alkalmazható a tétel az $a^{|k|}$ illetve $e^{\alpha|t|}$, vagy a $\delta[k+1]$ illetve az $\varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$ nem belépő jelekre.

Az Olvasó ellenőrizheti (45) helyességét olyan jelekre, amelyeknek mind a spektrumát, mind a Laplace-transzformáltját ismeri. Tanulságos olyan jelek vizsgálata, amelyekre valamelyik feltétel nincs kielégítve.

Ha $X(z)$ racionális függvény és minden q_i pólusa az egységsugarú körön belül van (minden $|q_i| < 1$) illetve ha $X(s)$ racionális függvény és minden p_i pólusa a bal félsíkon van (minden $\operatorname{Re}\{p_i\} < 0$), akkor (45) érvényes. Ilyenkor az $x[k]$ illetve az $x(t_k)$ értékek numerikusan. A pólusokra vonatkozó feltétel ellenőrizhető a nevező nullahelyeinek meghatározása nélkül is (2.2-3.2. pont).

Az $X(s)$ függvény nem csak s hatványait tartalmazhatja, hanem még e^{-sT} típusú tényezőket is. Általánosabban fogalmazva: a tétel akkor is alkalmazható, ha $X(s)$ olyan meromorf függvény, amelynek minden pólusa a bal félsíkon van.

Ha a pólusokra vonatkozó feltétel nincs kielégítve, akkor a spektrum még abban az esetben sem számítható a (45) alapján, ha a belépő jelnek egyébként értelmezett a spektruma. Tipikus példa erre az $\varepsilon[k]$ DI egységugrás, amelyre $\mathcal{L}\{\varepsilon[k]\} = z/(z-1)$ illetve az $\varepsilon(t)$ FI egységugrás, amelyre $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = 1/s$.

*4.1-1.6. Konvergencia és inverzió

Ebben a pontban tárgyaljuk a DI és a FI Laplace-transzformáció néhány olyan tulajdonságát, amelyet a matematikai részletek iránt nem érdeklődő olvasó kihagyhat anélkül, hogy ezzel veszélyeztetné a transzformáció alkalmazását a továbbiakban vizsgált feladatok megoldása során.

Konvergencia

A DI Laplace-transzformációt definiáló (1) hatványsor konvergens valamilyen $|z^{-1}| < r_0^{-1}$ tartományban, azaz valamilyen $|z| > r_0$ körkülsőben, ahol r_0 a DI jel konvergencia-sugara. A FI Laplace-transzformációt definiáló (1) integrál konvergens valamilyen $\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_0$ félsíkon, ahol σ_0 a FI jel konvergencia-abszcisszája. Az $X(z)$ vagy az $X(s)$ függvény analitikus ebben a tartományban, minden szinguláris pontja e tartományon kívül van, vagyis az r_0 sugarú körön és annak belsejében vagy a σ_0 konvergencia-abszcisszán és attól balra. Az analitikus folytatás elve alapján azonban az $X(z)$ illetve az $X(s)$ függvényt a z vagy s komplex változó minden értékére értelmezettnek tekintjük a szinguláris pontok kivételével, ahol a függvény nem értelmezett. A $z = \infty$ illetve az $s = \infty$ pont esetleg külön megfontolást igényel, ennek azonban ritkán van gyakorlati jelentősége.

Ha $X(z)$ illetve $X(s)$ racionális (általánosabban: meromorf) függvény és szinguláris pontjait (azaz pólusait) z_i illetve s_i jelöli, akkor a konvergencia-sugarat $r_0 = |z_i|_{\max}$, illetve

a konvergencia-abszcisszát $\sigma_0 = (\operatorname{Re}\{s_i\})_{\max}$ adja meg. Ha r_0 illetve σ_0 nem értelmezett, akkor a jelnek nincs Laplace-transzformáltja. Meromorf az olyan függvény, amelynek minden véges szingularitása pólus.

Az $x[k]$ DI jel Laplace-transzformáltja létezik, ha x véges a $k \in \mathbf{N}$ véges értékeire és $\lim_{k \rightarrow \infty} (r + \varepsilon)^{-k} x[k] \rightarrow 0$ ($r, \varepsilon \in \mathbf{R}_+$), bármilyen kicsi is ε . Az r legkisebb értéke az r_0 konvergencia-sugár. Így például a DI egységimpulzusra $r_0 = 0$, a DI egységugrásra vagy bármely korlátos DI jelre $r_0 = 1$, az $x[k] = k^n q^k$ ($n \in \mathbf{N}$) jelre $r_0 = |q|$, míg az $x[k] = 2^{(k^2)}$ jelre nem létezik ilyen r_0 , e jelnek nincs Laplace-transzformáltja.

Az $x(t)$ FI jel Laplace-transzformáltja létezik, ha x véges a $t \in \mathbf{R}_+$ véges értékeire (vagy legalább integrálható bármely véges $0 \leq t_1 < t < t_2 < \infty$ intervallumon) és $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma + \varepsilon)t} x(t) \rightarrow 0$ ($\sigma, \varepsilon \in \mathbf{R}_+$), bármilyen kicsi is ε . A σ legkisebb értéke a σ_0 konvergencia-abszcissza. Így például a Dirac-impulzusra $\sigma_0 = -\infty$, a FI egységugrásra vagy bármely korlátos FI jelre $\sigma_0 = 0$, az $x(t) = t^n e^{\alpha t}$ ($n \in \mathbf{N}$) jelre $\sigma_0 = \alpha$, míg az $x(t) = e^{(\alpha t)^2}$ jelre nem létezik ilyen σ_0 , e jelnek nincs Laplace-transzformáltja.

Kapcsolat a Fourier-transzformációval

Most megmutatjuk, miként származtatható a Laplace-transzformáció a Fourier-transzformációból.

Legyen $x[k]$ illetve $x(t)$ egy jel, amely nem feltétlenül tart nullához, ha $|k| \rightarrow \infty$ illetve ha $|t| \rightarrow \infty$. Szorítkozunk olyan jelekre, amelyekre található olyan $r > r_0$ illetve $\sigma > \sigma_0$ érték, amellyel az

$$y[k, r] = \varepsilon[k] r^{-k} x[k]; \quad y(t, \sigma) = \varepsilon(t) e^{-\sigma t} x(t)$$

jel abszolút összegezzethetővé illetve abszolút integrálhatóvá tehető. A legkisebb r_0 érték a konvergencia-sugár, a legkisebb σ_0 érték a konvergencia-abszcissza.

Az $y[k, r]$ illetve az $y(t, \sigma)$ jel spektruma

$$Y(e^{j\theta}, r) \equiv \mathcal{F}\{y[k, r]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon[r] r^{-k} x[k] e^{-j\theta k} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] (r e^{j\theta})^{-k};$$

$$Y(j\omega, \sigma) \equiv \mathcal{F}\{y(t, \sigma)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-\sigma t} x(t) dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt.$$

Az $Y(e^{j\theta}, r)$ illetve az $Y(j\omega, \sigma)$ függvény tekinthető két valós változó függvényének, de tekinthető egyetlen $z = r e^{j\theta}$ illetve $s = \sigma + j\omega$ komplex változó függvényének is. Az utóbbi felfogás szerint

$$Y(e^{j\theta}) = X(z)_{z=r e^{j\theta}}; \quad Y(j\omega, \sigma) = X(s)_{s=\sigma + j\omega}.$$

Itt $X(z)$ az $x[k]$ DI jel illetve $X(s)$ az $x(t)$ FI jel Laplace-transzformáltja.

Ebből következik, hogy ha $X(z)$ vagy $X(s)$ ismert, akkor $y[k, r]$ illetve $y(t, \sigma)$ számítható az inverz Fourier-transzformációra vonatkozó összefüggéssel, ezért

$$\varepsilon[k]x[k] = r^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\vartheta}, r) e^{j\vartheta k} d\vartheta; \quad \varepsilon(t)x(t) = e^{\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega, \sigma) e^{j\omega t} d\omega.$$

Ezekből az összefüggésekből már következik az inverziós integrál (4) kifejezése. Numerikusan ezen összefüggések alapján számítható az inverz Laplace-transzformált egy alkalmas r illetve σ megválasztása után. Többnyire $r = 1$ illetve $\sigma = 0$ is megfelelő. Az eljárást nem részletezzük.

Inverz Laplace-transzformáció

Újra megadjuk a (4) inverziós integrálokat:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r_1} X(z) z^{k-1} dz, \quad r_1 > r_0, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad \sigma_1 > \sigma_0, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Itt r_0 a konvergencia-sugár illetve σ_0 a konvergencia-abszcissza.

Ha $k \in \mathbf{Z}_-$ illetve ha $t \in \mathbf{R}_-$, akkor az integrálok nullát eredményeznek. Ha $k \in \mathbf{N}$ illetve ha $t \in \mathbf{R}_+$, akkor az integrál egy olyan $x[k]$ illetve $x(t)$ jelet szolgáltat, amelynek Laplace-transzformáltja a megadott $X(z)$ illetve $X(s)$.

Az integrál tényleges számítása a reziduum tétel felhasználásával történhet:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(z)\} = \sum_i \operatorname{Res}_{z_i} \{z^{k-1} X(z)\}, \quad k \in \mathbf{Z};$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \sum_i \operatorname{Res}_{s_i} \{e^{st} X(s)\}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Itt $\operatorname{Res}_{z_i} G(z)$ a $G(z)$ függvény reziduuma a $z = z_i$ helyen, vagyis a $(z - z_i)^{-1}$ tag együtthatója a $G(z)$ Laurent-sorában. Ha $G(z)$ racionális függvény, akkor annak reziduumai meghatározhatók részlettörtekre bontással. Ha a $G(z)$ függvénynek a $z = z_i$ helyen egyszeres pólusa van, akkor a reziduum ott például a $\operatorname{Res}_{z_i} G(z) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) G(z)$

összefüggéssel számítható.

Ezek a fogalmak és összefüggések nem szükségesek a következőkben, mert a továbbiakban racionális $X(z)$ vagy legfeljebb meromorf $X(s)$ függvényekre szorítkozunk.

Ez nem jelenti azt, hogy nem léteznek olyan jelek, amelyek transzformáltja nem esik a fenti kategóriába. Ilyenek például

$$\mathcal{L} \left\{ \varepsilon[k] \frac{1}{k!} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} = e^{1/z}; \quad \mathcal{L} \{ \varepsilon(t) t^{1/2} \} = \int_{-0}^{\infty} t^{1/2} e^{-st} dt = \frac{\pi}{2 s^{3/2}}.$$

Az utóbbi függvény bizonyos típusú parciális differenciálegyenletekkel leírt rendszerek vizsgálatára fordul elő. Ilyenekkel azonban nem foglalkozunk.

4.1-1.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a következő DI jelek Laplace-transzformáltját:

$$\begin{aligned} (a) \quad x[k] &= a^k. & (b) \quad x[k] &= a^{|k|}. \\ (c) \quad x[k] &= \varepsilon[k] a^k & (d) \quad x[k] &= (1 - \varepsilon[k]) b^k + \varepsilon[k] a^k. \\ (e) \quad x[k] &= \delta[k] + a \delta[k-1] + a^2 \delta[k-2] + a^3 \delta[k-3] + \dots \end{aligned}$$

Vázolja fel a jeleket $a = 0,5$, $a = 1$ és $a = -2$ esetére!

F-2. Határozza meg a következő FI jelek Laplace-transzformáltját:

$$\begin{aligned} (a) \quad x(t) &= e^{-\alpha t}. & (b) \quad x(t) &= e^{-\alpha|t|}. & (c) \quad x(t) &= \varepsilon(t) e^{-\alpha t}. \\ (d) \quad x(t) &= \{1 - \varepsilon(t)\} e^{-\beta t} + \varepsilon(t) e^{-\alpha t}. & (e) \quad x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (a t)^k. \end{aligned}$$

Vázolja fel a jeleket $\alpha = 0,5$, $\alpha = 0$ és $\alpha = -0,5$ esetére!

F-3. Határozza meg a következő véges hosszúságú DI jelek (DI ablakok) Laplace-transzformáltját ($L \in \mathbf{Z}_+$):

$$\begin{aligned} (a) \quad x[k] &= \varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]. & (b) \quad x[k] &= (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]) a^k. \\ (c) \quad x[k] &= (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]) \sin \frac{\pi k}{L}. \\ (d) \quad x[k] &= (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]) \frac{k}{L} + (\varepsilon[k-L] - \varepsilon[k-2L]) \frac{2L-k}{L} \end{aligned}$$

Vázolja fel a jeleket $L = 10$ esetére!

F-4. Határozza meg a következő véges hosszúságú FI jelek (FI ablakok) Laplace-transzformáltját ($T \in \mathbf{R}_+$):

$$\begin{aligned} (a) \quad x(t) &= \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T). & (b) \quad x(t) &= \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} \frac{t}{T}. \\ (c) \quad x(t) &= \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} e^{-\alpha t}. & (d) \quad x(t) &= \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} \sin \frac{\pi t}{T}. \\ (e) \quad x(t) &= 2 \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} + \{\varepsilon(t-T) - \varepsilon(t-2T)\}. \end{aligned}$$

Vázolja fel a jeleket!

F-5. Határozza meg a következő DI jelek Laplace-transzformáltját:

$$\begin{aligned} (a) \quad x[k] &= \varepsilon[k] \{A \cos \Theta k + B \sin \Theta k\}. \\ (b) \quad x[k] &= \varepsilon[k] A k a^k. & (c) \quad x[k] &= \varepsilon[k] A k \cos \Theta k. \end{aligned}$$

Oldja meg a feladatot arra az esetre is, amikor elhagyjuk az $\varepsilon[k]$ tényezőt!

F-6. Határozza meg a következő FI jelek Laplace-transzformáltját:

$$\begin{aligned} (a) \quad x(t) &= \varepsilon(t) \{A \cos \Omega t + B \sin \Omega t\} e^{-\alpha t}. \\ (b) \quad x(t) &= \varepsilon(t) A t e^{-\alpha t}. & (c) \quad x(t) &= \varepsilon(t) A t \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Oldja meg a feladatot arra az esetre is, amikor elhagyjuk az $\varepsilon(t)$ tényezőt!

F-7. Válassza ki az előző feladatokban szereplő DI illetve FI jelek közül azokat, amelyek Fourier-transzformáltja előállítható a Laplace-transzformáltjából $z = e^{j\theta}$ illetve $s = j\omega$ helyettesítéssel!

***F-8.** Igazolja a Laplace-transzformáció alkalmazásával, hogy

$$\delta[k-L] * x[k] = x[k-L]; \quad \delta(t-T) * x(t) = x(t-T).$$

Általános érvényű ez az igazolás?

F-9. A $\cos \Omega t$ illetve a $\sin \Omega t$ FI jel Laplace-transzformáltjának ismeretében határozza meg a másikat a derivált jelle és az integrált jelle vonatkozó tétel alkalmazásával!

F-10. Határozza meg $x[0]$ illetve $x(+0)$ és $x[\infty]$ illetve $x(\infty)$ értékét az időfüggvény előállításánál, ha $x[k]$ illetve $x(t)$ Laplace-transzformáltja

$$(a) X(z) = \frac{z^{-2}}{z-0,5}; \quad X(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s+3}.$$

$$(b) X(z) = \frac{z^{-2}}{z+3}; \quad X(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s-0,5}.$$

***F-11.** Értelmezzünk egy DI illetve FI spektrumot a következő módon:

$$G(e^{j\theta}) \equiv \mathcal{X}\{\varepsilon[k]\}_{z=e^{j\theta}}; \quad G(j\omega) \equiv \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}_{s=j\omega}.$$

Ez azt jelenti, hogy az egységugrás Laplace-transzformáltjában elvégezzük a Fourier-transzformáltra való áttérés formális helyettesítését.

Határozza meg a

$$g[k] = \mathcal{F}^{-1}\{G(e^{j\theta})\}; \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(j\omega)\}$$

jelet, ha ez lehetséges. (Útmutatás. Használja fel $\text{sgn } k$ illetve $\text{sgn } t$ spektrumát!)

4.1-1.M. Megoldások

M-1. A jelek $k \in \mathbf{N}$ esetén azonosak, ezért mindegyikük Laplace-transzformáltja is azonos:

$$X(z) = \frac{z}{z-a}.$$

M-2. A jelek $t \in \mathbf{R}_+$ esetén azonosak, ezért mindegyikük Laplace-transzformáltja is azonos:

$$X(s) = \frac{1}{s+\alpha}.$$

M-3. Szükség esetén alakítsa át a jelet $\varepsilon[k-r]f[k-r]$ típusú jelek összegére.

$$(a) X(z) = z \frac{1-z^{-L}}{z-1}.$$

$$(b) X(z) = z \frac{1-a^L z^{-L}}{z-a}.$$

$$(c) X(z) = z \frac{\sin \Theta (1+z^{-L})}{z^2 - 2(\cos \Theta)z + 1}; \quad \Theta = \frac{\pi}{L}.$$

$$(d) X(z) = \frac{z}{L} \frac{1-2z^{-L}+z^{-2L}}{(z-1)^2}.$$

Megszabadulhatunk a negatív kitevőktől, de a csak pozitív kitevőket tartalmazó alak nem előnyös.

M-4. Szükség esetén alakítsa át a jelet $\varepsilon(t-T)f(t-T)$ típusú jelek összegére.

$$(a) X(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}. \quad (b) X(s) = \frac{1-(sT+1)e^{-sT}}{Ts^2}. \quad (c) X(s) = \frac{1-e^{-\alpha T}e^{-sT}}{s+\alpha}.$$

$$(d) X(s) = \frac{\pi}{T} \frac{1+e^{-sT}}{s^2 + (\pi/T)^2}. \quad (e) X(s) = \frac{2-e^{-sT}-e^{-s2T}}{s}.$$

A véges hosszúságú FI jelek Laplace-transzformáltja nem racionális, hanem meromorfnál függvény!

M-5. Alkalmazható a csillapítási tétel vagy a (31) összefüggés.

$$(a) X(z) = \frac{A \{z^2 - (\cos \Theta)z\} + B (\sin \Theta)z}{z^2 - 2a(\cos \Theta)z + a^2}.$$

$$(b) X(z) = \frac{Aaz}{(z-a)^2}. \quad (c) X(z) = z \frac{(\cos \Theta)z^2 - 2z + \cos \Theta}{(z^2 - 2(\cos \Theta)z + 1)^2}.$$

Az $x[k]$ és az $\varepsilon[k]x[k]$ Laplace-transzformáltja megegyezik.

M-6. Alkalmazható a csillapítási tétel vagy a (31) összefüggés.

$$(a) X(s) = \frac{A(s+\alpha) + B\Omega}{(s+\alpha)^2 + \Omega^2} \equiv \frac{As + (A\alpha + B\Omega)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \Omega^2)}.$$

$$(b) X(s) = \frac{A}{(s+\alpha)^2}.$$

$$(c) X(s) = A \frac{s^2 - \Omega^2}{(s^2 + \Omega^2)^2}.$$

Az $x(t)$ és az $\varepsilon(t)x(t)$ Laplace-transzformáltja megegyezik.

M-7. Az F-1.-ben: (c) és (e), ha $|a| < 1$.

Az F-2.-ben: (c) és (d), ha $\alpha > 0$.

Az F-3.-ban: valamennyi.

Az F-4.-ben: valamennyi.

Az F-5.-ben: (b), ha $|a| < 1$.

Az F-6.-ban: (a) és (b), ha $\alpha > 0$.

***M-8.** Ha $x[k]$ belépő és $L \in \mathbf{N}$ vagy ha $x(t)$ belépő és $T \in \mathbf{R}_+$, akkor

$$\mathcal{L}\{\delta[k-L]*x[k]\} = z^{-L}X(z); \quad \mathcal{L}\{\delta(t-T)*x(t)\} = e^{-sT}X(s).$$

Ebből a tétel $L \in \mathbf{N}$ illetve $T \in \mathbf{R}_+$ esetén már következik a mondott feltételek mellett. Valójában ezek a kikötések fölöslegesen, mert a megadott alak általános érvényű.

M-9. Nem mindig igaz, hogy csak szorozni vagy osztani kell az s változóval!

$$[\varepsilon(t) \cos \Omega t]' = \delta(t) - \Omega \varepsilon(t) \sin \Omega t \Rightarrow \mathcal{L}\{\varepsilon(t) \sin \Omega t\} = \frac{1}{\Omega} \left[1 - s \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \right] \equiv \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2},$$

ami ismert módon a helyes eredmény. A $\cos \Omega t$ és az $\varepsilon(t) \cos \Omega t$ Laplace-transzformáltja megegyezik, de deriváltjuk Laplace-transzformáltja már nem, mert az utóbbi jel a $t = 0$ helyen nem folytonos.

$$\int_{-0}^t \varepsilon(\tau) \cos \Omega \tau d\tau = \frac{1}{\Omega} \varepsilon(t) \sin \Omega t \Rightarrow \mathcal{L}\{\varepsilon(t) \sin \Omega t\} = \Omega \frac{1}{s} \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \equiv \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2},$$

ami ismét a helyes eredmény. A $\cos \Omega t$ függvény helyett a $\sin \Omega t$ függvényből is kiindulhatunk, ezt nem részletezzük.

M-10. A (34) és a (35) felhasználásával

$$(a) \quad x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2(z-0,5)} = 0; \quad x(+0) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ \Re\{s\} > 0}} s \frac{1 - e^{-2s}}{s+3} = 1;$$

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z^2(z-0,5)} = 0; \quad x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 - e^{-2s}}{s+3} = 0.$$

(b) $x[0] = 0$; $x(+0) = 1$, mint előbb, de $x[\infty]$ illetve $x(\infty)$ nem számítható a (35) felhasználásával, mert a feltételek nincsenek kielégítve.

***M-11.** A (3.2-16) és a (3.2-18) felhasználásával

$$g[k] = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta} - 1} \right\} \equiv \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(1 + e^{-j\theta}) + (1 - e^{-j\theta})}{1 - e^{-j\theta}} \right\} = \frac{1}{2} [\text{sgn } k + \delta[k]],$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{j\omega} \right\} = \frac{1}{2} \text{sgn } t.$$

A $g[k]$ vagy a $g(t)$ függvény értelmezett, nem belépő jel, nem egyezik meg a DI illetve a FI egységugrással, amelynek Laplace-transzformáltjából kiindultunk. Az egységugrás Fourier-transzformáltja nem határozható meg a Laplace-transzformáltjából $z = e^{j\theta}$ illetve $s = j\omega$ helyettesítéssel. Ez megállapítható akár az időtartománybeli, akár a komplex frekvenciatartománybeli alakjából.

A feladat és megoldása azt mutatja, hogy a formális eljárás kellő körültekintés nélkül hibás eredményre vezethet.

4.1-2. A DI és a FI Laplace-transzformáció inverziója

4.1-2.1. A módszerek áttekintése

Különbféle számítási eljárások ismertek az $X(z)$ illetve az $X(s)$ ismeretében az $x[k] = \mathcal{L}^{-1}\{X(z)\}$ illetve az $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ időfüggvény számítására, vagyis az inverz DI illetve FI Laplace-transzformáció elvégzésére, a visszatérésre az időtartományba.

Az általános eljárás a (4) inverziós integrál alkalmazása a reziduuum-tétel felhasználásával (4.1-1.6. pont). Ez azonban nem szükséges az általunk tárgyalandó feladatok megoldásához.

Szerencsés esetben felismerhetjük, hogy $X(z)$ vagy $X(s)$ egy ismert $x[k]$ illetve $x(t)$ Laplace-transzformáltja. Néha valamilyen tétel felhasználásával állíthatjuk elő az időfüggvényt. Például $X(z) = z^{-2}G(z)$ illetve $X(s) = e^{-2s}G(s)$ esetén $x[k]$ vagy $x(t)$ előállítására egyszerű, ha $g[k] = \mathcal{L}^{-1}\{G(z)\}$ illetve $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ ismert.

Ebben a szakaszban két olyan eljárást tárgyalunk, amelyek nem általános érvényűek, de a gyakorlati feladatok nagy többségében használhatók. Mindkét eljárás biztosan alkalmazható, ha $X(z)$ illetve $X(s)$ racionális függvény, továbbá általánosítható arra az esetre, amikor $X(s)$ nem csak s egész hatványait tartalmazza, hanem e^{-sT_i} ($T_i > 0$) típusú tényezőket is. Az első módszer polinomosztást igényel és többnyire az időfüggvény egy közelítését adja. A második módszer részlettörtekre bontást igényel. Utóbbi esetben szükség lehet egy polinomosztáson alapuló előkészítő lépésre.

Numerikus eljárások alkalmazhatják a polinomosztás módszerét (ez főként a DI esetben használatos) vagy a részlettörtekre bontás módszerét is. Mint már említettük, az inverz Laplace-transzformáció numerikusan elvégezhető. A numerikus közelítő eljárásokat nem részletezzük a továbbiakban.

4.1-2.2. Inverz transzformáció polinomosztással

Legyen $X(z)$ a z illetve $X(s)$ az s változó *racionális* függvénye, vagyis két polinom hányadosa. Mint már láttuk, a számláló fokszáma nem lehet nagyobb a nevező fokszámánál. A függvények általános alakja ekkor

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n}, \\ X(s) &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \end{aligned} \quad (4.1-47)$$

A nevező a_0 együtthatóját az általánosság csorbitása nélkül célszerűen 1-nek választottuk. Tetszőleges számú a_i vagy b_i együtthatók értéke nulla lehet.

Osszuk el a változó csökkenő hatványai szerint rendezett számlálót a nevezővel. Az első tag b_0 lesz, ha $b_0 \neq 0$, míg az ellenkező esetben $b_1 z^{-1}$ illetve $b_1 s^{-1}$, ha $b_1 \neq 0$, és így tovább. Ekkor egy z^{-1} illetve $s^{-1} \equiv 1/s$ szerinti hatványsort kapunk:

$$\begin{aligned} X(z) &= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots; \\ X(s) &= c_0 + c_1 \frac{1}{s} + c_2 \frac{1}{s^2} + c_3 \frac{1}{s^3} + \dots \end{aligned} \quad (4.1-48)$$

Az $X(z)$ sorának egyes tagjai akár az (1) definíció, akár a (6) alapján transzformálhatók vissza. Az $X(s)$ sorának egyes tagjai a (21) integrációs tétellel értelmezhetők. Az időfüggvény tehát a következő alakú:

$$\begin{aligned} x[k] &= c_0 \delta[k] + c_1 \delta[k-1] + c_2 \delta[k-2] + c_3 \delta[k-3] + \dots; \\ x(t) &= c_0 \delta(t) + \varepsilon(t) \left\{ c_1 + c_2 t + \frac{1}{2!} c_3 t^2 + \frac{1}{3!} c_4 t^3 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.1-49)$$

Az $x[k]$ kifejezése azt jelenti, hogy a módszer $x[0] = c_0$, $x[1] = c_1, \dots$ értékét pontosan megadja. Ha $X(z)$ eleve a z^{-1} polinomja, akkor nincs szükség polinomosztásra és a véges hosszúságú $x[k]$ jelet pontosan kapjuk meg. Általános esetben semmit sem tudunk azokról az $x[k]$ értékekről, amelyeket nem számítottunk ki. Speciális esetekben lehet valami elképzelésünk a jel további menetéről. Ha például $x[k]$ már sok ütemen át állandó, akkor feltételezhetjük, hogy ez az állandósult értéke. Ez a megfontolás teljesen hamis is lehet, ha csak nincs erre nézve valami elméleti indokunk.

Az $x(t)$ kifejezése azt jelenti, hogy a c_0 megadja az $x(t)$ jel Dirac-impulzus komponensét, míg a többi tag az $y(t) = x(t) - c_0 \delta(t)$ függvénynek a $t=0$ helyre vonatkozó Taylor-sorát adja. Ezek szerint $c_1 = y(+0)$ megadja az $y(t)$ jel kezdeti értékét, $c_2 = y'(+0)$ a kezdeti meredekségét, a további tagoknak már nem adható ilyen egyszerű értelmezés. Ezzel az $x(t)$ egy olyan közelítést kapjuk, amelynek hibája rendszerint annál kisebb, minél kisebb t értéke. Nem egyszerű feladat a közelítés hibáját vagy annak egy korlátját akár csak becsülni is, vagy megtalálni azt a t_{\max} értéket, ameddig egy adott fokszámú közelítés egy hibahatáron belül marad.

Példa Határozzuk meg $x[k]$ értékét a $k = 0, 1, 2, 3$ és 4 ütemekre, ha a jel DI Laplace-transzformáltja

$$X(z) = \frac{2z^3 - 1,2z^2 + 1,1z - 1,1}{z^4 - 0,6z^3 + 0,05z^2}.$$

A polinomosztás szerkezete például:

$$\begin{array}{r} (2z^3 - 1,2z^2 + 1,1z - 1,1) : (z^4 - 0,6z^3 + 0,05z^2) = 2z^{-1} + 1z^{-3} - 0,5z^{-4} \\ \underline{-2z^3 + 1,2z^2 - 0,1z} \\ 1,0z - 1,1 \\ \underline{-1,0z + 0,6 - 0,05z^{-1}} \\ -0,5 - 0,05z^{-1} \end{array}$$

Ebből következik, hogy $x[0] = 0$, $x[1] = 2$, $x[2] = 0$, $x[3] = 1$, $x[4] = -0,5$. A további $x[k]$ értékek ismeretlenek, amíg nem végzünk el további osztásokat. A megoldás egy másik alakja $x[k] = 2\delta[k-1] + \delta[k-3] - 0,5\delta[k-4] + \dots$.

Ellenőrizhetjük, hogy a pólusok az egység sugarú körön belül helyezkednek el (esetleg ki is számíthatjuk az értéküket: $q_1 = 0,1$, $q_2 = 0,5$, $q_3 = q_4 = 0$). A (18) értelmében $x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1)X(z)\} = 0$.

Az utolsó számított $x[4] = -0,5$ érték nem elég kicsi ahhoz, hogy feltételezhessük: $x[k]$ már elhanyagolható, ha $k \geq 5$.

A következő pontban ezt a példát egy más módszerrel is meg fogjuk oldani. #

4.1-2.3. Inverz transzformáció részlettörtekre bontással

A DI és a FI Laplace-transzformáció egy hatékony módszere a részlettörtekre bontáson alapul. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a két esetben a részlettörtek kissé eltérő alakúak.

Ebben a pontban arra az esetre szorítkozunk, amikor a visszatranszformálandó függvény *racionális*, általános alakja a (47) szerinti

$$X(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n};$$

$$X(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}.$$
(4.1-50)

Ha $X(z)$ kifejezésében $b_n = 0$ illetve ha $X(s)$ kifejezésében $b_0 = 0$, akkor elkezdhetjük a részlettörtekre bontást. Egyébként egy előkészítő lépésre van szükségünk (l. alább). Az előkészítő lépés akkor is hasznos, ha $X(z)$ kifejezésében az a_n, a_{n-1}, \dots együtthatók mind nulla értékűek.

Számítógépes programmal többnyire közvetlenül elő tudjuk állítani a visszatranszformálásra alkalmas részlettörtekre bontott alakot.

A részlettörtekre bontás előkészítése

Szükség esetén alakítsuk át akár elemi megfontolással, akár polinomosztással $X(z)$ vagy $X(s)$ kifejezését a következő alakra:

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{r-1} z^{-(r-1)} + z^{-r} F(z),$$

$$F(z) \equiv z \frac{\beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} z + \beta_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n};$$

$$X(s) = c_0 + G(s), \quad G(s) \equiv \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}.$$
(4.1-51)

Ez azt jelenti, hogy $F(z)/z$ illetve $G(s)$ *valódi* törtfüggvény: számlálójának fokszáma kisebb, mint nevezőjének fokszáma. Ez a tulajdonság kifejezhető úgy is, hogy

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{F(z)}{z} = 0; \quad \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0.$$

Az $X(z)$ kifejezésében az r legkisebb értéke a függvény által meghatározott. Nem követünk el hibát, ha a polinomosztást a szükségesnél tovább folytatjuk, csak ekkor $x[k]$ kifejezése nem a legegyszerűbb lesz.

A következőkben $f[k] = \mathcal{L}^{-1}\{F(z)\}$ illetve $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ meghatározását tárgyaljuk. Ezek ismeretében $x[k]$ vagy $x(t)$ a következő alakot ölti:

$$x[k] = c_0 \delta[k] + c_1 \delta[k-1] + \dots + c_{r-1} \delta[k-(r-1)] + \varepsilon[k-r] f[k-r];$$

$$x(t) = c_0 \delta(t) + \varepsilon(t) g(t).$$
(4.1-52)

Ez azt jelenti, hogy $x[k]$ a $k = 0, 1, 2, \dots, r-1$ ütemekre egy adathalmazzal (az r számú c_i együtthatóval) fejezhető ki és csak a $k \geq r$ ütemekre írható le egy $f[k]$ elemi függvénnyel.

1. példa Adott a következő DI Laplace-transzformált:

$$V(z) = \frac{z - 1,1}{z^4 - 0,6z^3 + 0,05z^2}.$$

Közvetlenül látható, hogy ennek az (51) szerinti alakja

$$V(z) = z^{-3} z \frac{z - 1,1}{z^2 - 0,6z + 0,05},$$

amelyben $n = 2$ és $r = 3$. Az átalakítás nem igényelt polinomosztást. #

2. példa Adott a következő DI Laplace-transzformált:

$$X(z) = \frac{2z^3 - 1,2z^2 + 1,1z - 1,1}{z^4 - 0,6z^3 + 0,05z^2} \equiv z^{-2} \frac{2z^3 - 1,2z^2 + 1,1z - 1,1}{z^2 - 0,6z + 0,05}.$$

Az első alakban szereplő racionális függvény valódi tört, negyedfokú nevezőjének viszont kétszeres nullahelye van a $z = 0$ helyen. A második alakban szereplő tört nevezője csak másodfokú, viszont ez a tört nem valódi. Alakítsuk ezt át osztással:

$$\frac{(2z^3 - 1,2z^2 + 1,1z - 1,1) : (z^2 - 0,6z + 0,05) = 2z - 2z^3 + 1,2z^2 - 0,1z}{1,0z - 1,1}$$

Ennek alapján kapjuk a függvény következő, (51) szerinti alakját:

$$X(z) = 2z^{-1} + z^{-3} z \frac{z - 1,1}{z^2 - 0,6z + 0,05}.$$

Az $x[k]$ számítását később végezzük el. #

3. példa Adott a következő FI Laplace-transzformált:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 7s + 2}{s^2 + 3s + 2}.$$

Ez nem valódi tört. Az átalakítást elvégezhetjük akár polinomosztással, akár elemi átalakítással $\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = 2$ felhasználásával:

$$X(s) = 2 + \left(\frac{2s^2 + 7s + 2}{s^2 + 3s + 2} - 2 \right) = 2 + \frac{s - 2}{s^2 + 3s + 2}.$$

Ez az (51) szerinti alak. Az $x(t)$ meghatározásával később foglalkozunk. #

4. példa Az $X(z)$ legcélszerűbb alakja nem feltétlenül az (51) szerinti. Legyen

$$X(z) = \frac{z}{z - 0,9} - z^{-10} \frac{z}{z - 0,9} \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z - 0,9} - \frac{z}{z^{10}(z - 0,9)} \equiv \frac{z^{11} - z}{z^{11} - 0,9z^{10}}.$$

Az eredeti alakból azonnal látható, hogy az időfüggvény

$$x[k] = \varepsilon[k] 0,9^k - \varepsilon[k - 10] 0,9^{k-10} \equiv \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - 10]\} 0,9^k - \varepsilon[k - 10] (1 - 0,9^{10}) 0,9^{k-10}.$$

Az utolsó alakból (itt nem részletezett polinomosztással) kapjuk, hogy

$$X(z) = 1 + 0,9z^{-1} + 0,9^2z^{-2} + 0,9^3z^{-3} + 0,9^4z^{-4} + 0,9^5z^{-5} + 0,9^6z^{-6} + 0,9^7z^{-7} + \\ + 0,9^8z^{-8} + 0,9^9z^{-9} + (-1 + 0,9^{10})z^{-10} \frac{z}{z-0,9}; \quad -1 + 0,9^{10} = -0,651.$$

$$x[k] = \delta[k] + 0,9\delta[k-1] + 0,9^2\delta[k-2] + 0,9^3\delta[k-3] + 0,9^4\delta[k-4] + 0,9^5\delta[k-5] + \\ + 0,9^6\delta[k-6] + 0,9^7\delta[k-7] + 0,9^8\delta[k-8] + 0,9^9\delta[k-9] - (1 - 0,9^{10})\varepsilon[k-10]0,9^{k-10}.$$

Az $x[k]$ két alakja ugyanazt a DI jelet írja le, de az első alak kényelmesebb. #
Gyakran célszerű (mint a 4. példa illusztrálja) az

$$X(z) = X_0(z) + z^{-L_1}X_1(z) + z^{-L_2}X_2(z) + \dots + z^{-L_n}X_n(z); \quad 0 < L_1 < L_2 < \dots < L_n \quad (4.1-53)$$

alakban megadott DI Laplace-transzformálthoz tartozó időfüggvényt

$$x[k] = \varepsilon[k]x_0[k] + \varepsilon[k-L_1]x_1[k-L_1] + \dots + \varepsilon[k-L_n]x_n[k-L_n] \quad (4.1-54)$$

alakban megadni vagy az ebből rendszerint elemi átalakítással származtatható

$$x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L_1]\}g_0[k] + \{\varepsilon[k-L_1] - \varepsilon[k-L_2]\}g_1[k] + \\ + \dots + \{\varepsilon[k-L_{n-1}] - \varepsilon[k-L_n]\}g_{n-1}[k] + \varepsilon[k-L_n]g_n[k-L_n] \quad (4.1-55)$$

alakban, vagyis ablakozott jelek összegeként.

Ha az $X(s)$ FI Laplace-transzformált nem racionális, akkor egy hasonló átalakítás elkerülhetetlen. Ezzel az esettel a következő pontban foglalkozunk.

Racionális függvény pólusai

Tekintsünk egy olyan $F(z)/z$ illetve $G(s)$ racionális függvényt, amely *valódi tört*, vagyis egy polinom osztva egy nála nagyobb fokszámú polinommal:

$$F(z) \equiv z \frac{P(z)}{Q(z)} \equiv z \frac{\beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} z + \beta_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n}, \quad (4.1-56) \\ G(s) \equiv \frac{P(s)}{Q(s)} \equiv \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}.$$

A racionális függvénynek ott van *pólusa*, ahol végtelenné válik, vagyis ott lehet *pólusa*, ahol nevezője nulla. Jelölje a nevező nullahelyeit $z = q_i$ illetve $s = p_i$, tehát

$$Q(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n; \quad z = q_1, q_2, \dots, q_n; \\ Q(s) \equiv s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n; \quad s = p_1, p_2, \dots, p_n. \quad (4.1-57)$$

Ha van olyan $z = q_i$ illetve $s = p_i$ érték, amely nem csak a nevezőnek, hanem a számlálónak is nullahelye, akkor az nem feltétlenül pólusa vagy zérusa a függvénynek. Ha például $z = q_i$ illetve $s = p_i$ a nevezőnek is és a számlálónak is egyszeres nullahelye, akkor az sem nem pólus, sem nem zérus. A közös nullahelyek és azok multiplicitása meghatározható a két egyenlet gyökeinek számításával, de más módon is. A továbbiakban a nevező nullahelyeit ennek ellenére pólusoknak fogjuk nevezni. Ez nem okoz az inverz transzformáció során zavart, legfeljebb bizonyos C_i vagy D_i állandók (l. alább) nulla

értéküknek adódnak. Az egymáshoz nagyon közeli vagy megegyező pólusok és zérusok fellépése numerikus bizonytalanság forrása lehet.

Mivel a pólusok egy valós együttthatos n -edfokú polinom nullahelyei, ezért azok vagy *valóságok*, vagy *konjugált komplex* párokat alkotnak. Utóbbiakat célszerű együtt tekinteni, mert ekkor a fizikailag indokolt valós értékű eredményhez jutunk.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a pólusok egyszerűsek (vagyis egymástól különbözőek), azután rátérünk az általánosabb, ritkán előforduló eset tárgyalására.

A DI esetben az egységnyi abszolút értékű, az FI esetben a képzetes pólusok egyszeres vagy többszörös volta között elvileg lényeges különbség lehet, amint a stabilitás tárgyalása során látni fogjuk.

Racionális függvény egyszerűes pólusokkal

Szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, amikor $q_i \neq q_j$, illetve $p_i \neq p_j$ ($i \neq j$ esetén), vagyis amikor a függvény pólusai mind egyszerűsek. A pólusok ismeretében $F(z)$ illetve $G(s)$ nevezője felírható gyöktényezős alakban:

$$F(z) \equiv z \frac{P(z)}{Q(z)} \equiv z \frac{P(z)}{(z-q_1)(z-q_2)\dots(z-q_n)}; \quad G(s) \equiv \frac{P(s)}{Q(s)} \equiv \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}.$$

A P polinom fokszáma kisebb mint a nevező n fokszáma. Az $F(z)/z$ illetve a $G(s)$ racionális függvény ekkor felírható részlettörtjeinek összegeként:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_1}{z-q_1} + \frac{C_2}{z-q_2} + \dots + \frac{C_n}{z-q_n}; \quad G(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \dots + \frac{C_n}{s-p_n}.$$

A C_1 együttthato a következőképpen számítható például az első alakban:

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow q_1} \left\{ (z-q_1) \frac{P(z)}{Q(z)} \right\} = \frac{P(q_1)}{Q_1(q_1)}, \quad Q_1(z) \equiv \frac{Q(z)}{z-q_1}.$$

A $P(q_1)$ a $P(z)$ polinom helyettesítési értéke a $z=q_1$ helyen. A nevezőben szereplő $Q_1(z) = (z-q_2)(z-q_3)\dots(z-q_n)$ polinom úgy állítható elő, hogy $Q(z)$ gyöktényezős alakjában elhagyjuk a $(z-q_1)$ tényezőt. A többi C_i együttthato hasonló módon számítható.

A $G(s)$ részlettörtekre bontott alakja nem igényel külön magyarázatot, csak bizonyos betűk cseréjéről van szó.

A (16) értelmében a részlettörtekhez tartozó időfüggvény

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-q} \right\} = \varepsilon[k] q^k; \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-p} \right\} = \varepsilon(t) e^{pt}.$$

Ezek után akár a DI, akár a FI teljes időfüggvény már felírható.

Alább képletszerűen is összefoglaljuk eredményeinket. Célszerűbb azonban a képlet helyett az eljárás lényegét megjegyezni, tehát azt, hogy a $F(z)/z$ illetve a $G(s)$ valódi törtfüggvényt részlettörtekre bontjuk és tagonként visszatranszformáljuk.

Legyen az $F(z)$ diszkrét idejű Laplace-transzformált *racionális függvény egyszerűes pólusokkal*, akkor az $f[k] = \mathcal{L}^{-1} \{F(z)\}$ diszkrét idejű jel kifejezése az $F(z)$ részlettörtekre bontott alakja alapján (amelyet nem szükséges felírni)

$$\begin{aligned}
 \text{DI: } F(z) &= z \frac{P(z)}{Q(z)} \equiv z \frac{P(z)}{(z-q_1)(z-q_2)\dots(z-q_n)}; \\
 \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} &= 0, \quad Q_i(q_i) = \left. \frac{Q(z)}{z-q_i} \right|_{z=q_i} \neq 0; \quad C_i = \frac{P(q_i)}{Q_i(q_i)}; \quad (4.1-58) \\
 f[k] &= \varepsilon[k] \sum_{i=1}^n C_i q_i^k; \quad k \in \mathbf{Z}.
 \end{aligned}$$

Az n számú $Q_i(q_i) \neq 0$ feltétel fejezi ki azt, hogy a pólusok egyszeresek.

Legyen a $G(s)$ folytonos idejű Laplace-transzformált *racionális* függvény *egyszeres pólusokkal*, akkor a $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ folytonos idejű jel kifejezése a $G(s)$ részlet törtre bontott alakja alapján (amelyet nem szükséges felírni)

$$\begin{aligned}
 \text{FI: } G(s) &= \frac{P(s)}{Q(s)} \equiv \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}; \\
 \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P(s)}{Q(s)} &= 0, \quad Q_i(p_i) = \left. \frac{Q(s)}{s-p_i} \right|_{s=p_i} \neq 0; \quad C_i = \frac{P(p_i)}{Q_i(p_i)}; \quad (4.1-59) \\
 g(t) &= \varepsilon(t) \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}; \quad t \in \mathbf{R}.
 \end{aligned}$$

Az n számú $Q_i(p_i) \neq 0$ feltétel fejezi ki azt, hogy a pólusok egyszeresek.

Ha két pólus konjugált komplex párt alkot, vagyis ha $q_i = r_i e^{j\theta_i}$, $q_{i+1} = r_i e^{-j\theta_i}$ illetve ha $p_i = \sigma_i + j\Omega_i$, $p_{i+1} = \sigma_i - j\Omega_i$, akkor a megfelelő együtthatók is konjugált párokat alkotnak: $C_i = B_i e^{j\beta_i}$, $C_{i+1} = B_i e^{-j\beta_i}$. A megfelelő DI illetve FI jelek összege csillapított szinuszos jel:

$$\begin{aligned}
 B_i e^{j\beta_i} r_i^k e^{j\theta_i k} + B_i e^{-j\beta_i} r_i^k e^{-j\theta_i k} &= 2 B_i r_i^k \cos(\theta_i k + \beta_i); \\
 B_i e^{j\beta_i} e^{\sigma_i t} e^{j\Omega_i t} + B_i e^{-j\beta_i} e^{\sigma_i t} e^{-j\Omega_i t} &= 2 B_i e^{\sigma_i t} \cos(\Omega_i t + \beta_i).
 \end{aligned} \quad (4.1-60)$$

Ennek felhasználása valamelyest egyszerűsíti a számítást.

Érdeemes megemlíteni, hogy mivel $Q(q_i) = 0$, ezért

$$Q_i(q_i) = \lim_{z \rightarrow q_i} \frac{Q(z)}{z - q_i} = \lim_{z \rightarrow q_i} \frac{Q(z) - Q(q_i)}{z - q_i} = \left. \frac{dQ(z)}{dz} \right|_{z=q_i}.$$

Igazolható, hogy a

$$Q_i(q_i) = \left. \frac{dQ(z)}{dz} \right|_{z=q_i}, \quad Q_i(p_i) = \left. \frac{dQ(s)}{ds} \right|_{s=p_i}$$

összefüggés akkor is alkalmazható, ha Q nem polinom, hanem ún. egész függvény, vagyis olyan komplex függvény, amely változójának bármely véges értékére véges értékű. Ilyen például az exponenciális függvény.

5. példa A 2. példában az ott megadott $X(z)$ függvényt a következő alakra hoztuk:

$$X(z) = 2z^{-1} + z^{-3} \frac{z(z-1,1)}{z^2 - 0,6z + 0,05}.$$

A $Q(z) \equiv z^2 - 0,6z + 0,05 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásával kapjuk a függvény két pólusát: $q_1 = 0,1$, $q_2 = 0,5$. A részlettörtekre bontott alak

$$X(z) = 2z^{-1} + z^{-3} \frac{z(z-1,1)}{(z-0,1)(z-0,5)} = 2z^{-1} + z^{-3} \left\{ \frac{C_1 z}{z-0,1} + \frac{C_2 z}{z-0,5} \right\};$$

$$C_1 = \left. \frac{z-1,1}{z-0,5} \right|_{0,1} = 2,5, \quad C_2 = \left. \frac{z-1,1}{z-0,1} \right|_{0,5} = -1,5.$$

Az $X(z)$ inverz transzformáltja az (58) értelmében

$$x[k] = 2\delta[k-1] + \varepsilon[k-3] \{ 2,5(0,1)^{k-3} - 1,5(0,5)^{k-3} \}.$$

Behelyettesítéssel kapjuk az $x[k]$ DI jel értékét az első néhány ütemre: $x[0] = 0$, $x[1] = 2$, $x[2] = 0$, $x[3] = 1$, $x[4] = -0,5$. Ez megegyezik az előző pont példájában, a polinomosztással kapott eredményünkkel. A most kapott általános alakból viszont közvetlenül látható, hogy $x[k]$ nullához tart k növekedésével. #

6. példa A 3. példában az $X(s)$ függvényt a következő alakra hoztuk:

$$X(s) = 2 + \frac{s-2}{s^2 + 3s + 2}.$$

A $Q(s) \equiv s^2 + 3s + 2 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásával kapjuk a függvény két pólusát: $p_1 = -1$, $p_2 = -2$. A részlettörtekre bontott alak

$$X(s) = 2 + \frac{s-2}{(s+1)(s+2)} = 2 + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+2}; \quad C_1 = \frac{-1-2}{-1+2} = -3, \quad C_2 = \frac{-2-2}{-2+1} = 4.$$

Az $X(s)$ inverz transzformáltja

$$x(t) = 2\delta(t) + \varepsilon(t) \{ -3e^{-t} + 4e^{-2t} \}.$$

Ellenőrzésként: $x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s) = \infty$ és $\lim_{s \rightarrow \infty} s \{ X(s) - 2 \} = 1$. Másrészt az időfüggvényből: ha $t \rightarrow 0$, akkor $x(t) \approx 2\delta(t)$ és $x(t) - 2\delta(t) = 1$. #

*4.1-2.4. Inverz transzformáció többszörös pólusok esetén

Tekintsük most azt az általánosabb esetet, amikor a visszatranszformálható *racionális* $F(z)$ vagy $G(s)$ függvénynek egyszeres pólusa van a $z = q_1, q_2, \dots, q_h$ helyen illetve az $s = p_1, p_2, \dots, p_h$ helyen, míg a $z = q_{h+1}$ illetve az $s = p_{h+1}$ helyen lévő pólus többszörös, multiplicitása $r = n - h$. A függvények ekkor felírhatók a következő alakban:

$$F(z) \equiv z \frac{P(z)}{Q(z)} \equiv \frac{zP(z)}{(z-q_1)(z-q_2)\dots(z-q_h)(z-q_{h+1})^r};$$

$$G(s) \equiv \frac{P(s)}{Q(s)} \equiv \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_h)(s-p_{h+1})^r}.$$
(4.1-61)

Itt a P polinom fokszáma kisebb mint a nevező $n = r + h$ fokszáma. A függvények részlettörtekre bontott alakja

$$F(z) = \sum_{i=1}^h \frac{C_i z}{z - q_i} + \sum_{i=1}^r \frac{D_i z}{(z - q_{h+1})^i}; \quad G(s) = \sum_{i=1}^h \frac{C_i}{s - p_i} + \sum_{i=1}^r \frac{D_i}{(s - p_{h+1})^i}. \quad (4.1-62)$$

Az egyszeres pólusokhoz tartozó C_i ($i = 1, 2, \dots, h$) együtthatók ugyanúgy számíthatók, mint az előző pontban már láttuk:

$$C_i = \frac{P(q_i)}{Q_i(q_i)}, \quad Q_i(q_i) = \left. \frac{Q(z)}{z - q_i} \right|_{z=q_i}; \quad C_i = \frac{P(p_i)}{Q_i(p_i)}, \quad Q_i(p_i) = \left. \frac{Q(s)}{s - p_i} \right|_{s=p_i}. \quad (4.1-63)$$

Hasonló megfontolással kapjuk a legnagyobb kitevőhöz tartozó D_r együtthatót:

$$D_r = \frac{P(q_{h+1})}{Q_{h+1}(q_{h+1})}, \quad Q_{h+1}(q_{h+1}) = \left. \frac{Q(z)}{(z - q_{h+1})^r} \right|_{z=q_{h+1}}; \quad D_r = \frac{P(p_{h+1})}{Q_{h+1}(p_{h+1})}, \quad Q_{h+1}(p_{h+1}) = \left. \frac{Q(s)}{(s - p_{h+1})^r} \right|_{s=p_{h+1}}. \quad (4.1-64)$$

Ténylegesen azt tehetjük, hogy a nevezőben az i -edik, vagy a $(h+1)$ -edik tényezőt 1-gyel helyettesítjük, a többi tényezőben elvégezzük a $z = q_i$ vagy $z = q_{h+1}$ illetve az $s = p_i$ vagy $s = p_{h+1}$ helyettesítést.

Meg kell még határoznunk a D_1, D_2, \dots, D_{r-1} együtthatókat. Ennek egy módszere a következő lehet. Válasszunk tetszőleges valós $z = z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ illetve $s = s_1, s_2, \dots, s_{r-1}$ értékeket (egyik sem lehet pólus!), helyettesítsük ezeket a (62)-be. Ezzel $r-1$ számú lineáris egyenletet kapunk az ugyanennyi még ismeretlen D_i együtthatóra.

Az együtthatók meghatározhatók közös nevezőre hozással és az egyes hatványfüggvények együtthatóinak egyenlőségét kifejező $r + h$ számú egyenletből adódó lineáris egyenletrendszer megoldásával.

A D_i együtthatók számítására általános összefüggés is adható, de annak alkalmazása bonyolultsága miatt nem célszerű.

A (62) szerinti felbontás C_i és D_i együtthatóinak ismeretében előállíthatjuk az időfüggvényt. A (19) vagy a (21) értelmében

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{z}{(z - q)^{m+1}} \right\} = \varepsilon[k] \frac{k(k-1)(k-2) \cdots (k - [m-1])}{m!} q^{k-m};$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - p)^{m+1}} \right\} = \varepsilon(t) \frac{1}{m!} t^m e^{pt}; \quad m = 1, 2, \dots$$

Foglaljuk össze a többszörös pólus esetére vonatkozó eredményeinket.

A *diszkrét idejű inverz Laplace-transzformáció* racionális függvények esetén a részlettörtekre bontott alak ismeretében, egyetlen többszörös pólust is megengedve

$$F(z) = \sum_{i=1}^h \frac{C_i z}{z - q_i} + \frac{D_1 z}{z - q_{h+1}} + \frac{D_2 z}{(z - q_{h+1})^2} + \dots + \frac{D_r z}{(z - q_{h+1})^r}, \quad (4.1-65)$$

$$f[k] = \varepsilon[k] \left\{ \sum_{i=1}^h C_i q_i^k + \left(D_1 + D_2 \frac{k}{q_{h+1}} + D_3 \frac{k(k-1)}{2! q_{h+1}^2} + \dots + D_r \frac{k(k-1)(k-2) \cdots (k - [r-2])}{(r-1)! q_{h+1}^{r-1}} \right) q_{h+1}^k \right\}.$$

Az $f[k]$ kifejezése elemi rendezés után átírható a következő, áttekinthetőbb alakra:

$$f[k] = \varepsilon[k] \left\{ \sum_{i=1}^h C_i q_i^k + (D_1 + B_1 k + B_2 k^2 + \dots + B_{r-1} k^{r-1}) q_{h+1}^k \right\}. \quad (4.1-66)$$

A folytonos idejű inverz Laplace-transzformáció racionális függvények esetén a részlettörtekre bontott alak ismeretében, egyetlen többszörös pólust is megengedve

$$G(s) = \sum_{i=1}^h \frac{C_i}{s-p_i} + \frac{D_1}{s-p_{h+1}} + \frac{D_2}{(s-p_{h+1})^2} + \dots + \frac{D_r}{(s-p_{h+1})^r}, \quad (4.1-67)$$

$$g(t) = \varepsilon(t) \left\{ \sum_{i=1}^h C_i e^{p_i t} + \left(D_1 + D_2 t + D_3 \frac{t^2}{2!} + \dots + D_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \right) e^{p_{h+1} t} \right\}.$$

Az eljárás hasonló, ha a visszatranszformálendő függvénynek tetszőleges számú többszörös pólusa van. Ha a többszörös pólus komplex, akkor konjugált párokat alkot; ekkor elegendő az egyiket tekinteni és a hozzá tartozó időfüggvény valós részének kétszeresét venni.

Az r -szeres pólus számítástechnikailag kikerülhető, ha azt r számú, egymáshoz nagyon közeli pólussal helyettesítjük. Ha például $q_1 = 0,5$ egy háromszoros pólus, akkor helyettesíthetjük például a $q_1 = 0,5$, $q_2 = 0,4999$, $q_3 = 0,5001$ három egyszeres pólussal. Minél közelebbi pólusokat választunk, annál kisebb lesz a helyettesítés által okozott hiba, de annál nagyobb a veszélye annak, hogy a közeli számok különbségeként előálló kis szám numerikus bizonytalanságot okoz. Gyakran éppen az ellenkező eljárás növeli a számítás megbízhatóságát, amikor igen közeli pólusokat egyetlen, többszörös pólussal helyettesítünk.

1. példa Határozzuk meg az $x[k] = \mathcal{L}^{-1}\{X(z)\}$ DI jelet, ha

$$X(z) = \frac{9z^2 + 5z - 1}{z(z+2)(z-0,5)^2} \equiv z^{-2} \frac{z(9z^2 + 5z - 1)}{(z+2)(z-0,5)^2}.$$

A második kifejezés már a célszerű $z^{-r} z P(z)/Q(z)$ alakú. A részlettörtekre bontott alak (a pólusok: $q_1 = -2$ egyszeres, $q_2 = 0,5$ kétszeres pólus):

$$X(z) = z^{-2} \left\{ \frac{C_1 z}{z+2} + \frac{D_1 z}{z-0,5} + \frac{D_2 z}{(z-0,5)^2} \right\}.$$

A C_1 és a D_2 együttható nehézség nélkül számítható:

$$C_1 = \frac{9z^2 + 5z - 1}{(z-0,5)^2} \Bigg|_{z=-2} = 4, \quad D_2 = \frac{9z^2 + 5z - 1}{z+2} \Bigg|_{z=0,5} = 1,5.$$

Ha $z \rightarrow \infty$, akkor a z^{-2} szorzója az eredeti alakban $\rightarrow 9$, a részlettörtekre bontott alakban pedig $\rightarrow C_1 + D_1$. Ebből következik, hogy $D_1 = 9 - C_1 = 5$. Ugyanezt az értéket kapjuk, ha például az $X(z)/z$ függvényt vizsgáljuk $z \rightarrow \infty$ esetén. Az időfüggvény ezek ismeretében

$$x[k] = \varepsilon[k-2] \left\{ 4(-2)^{k-2} + [5 + 1,5(k-2)]0,5^{k-2} \right\}.$$

Ha $k \rightarrow \infty$, akkor $x[k] \approx (-2)^k$, vagyis $|x[k]|$ korlátlanul növekszik. #

2. példa Határozzuk meg az $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ FI jelet, ha $X(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2}$.

E függvény részlettörtekre bontott alakja ($p_1 = -1$, $p_2 = -2$, kétszeresek):

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}.$$

Az A_2 és a B_2 számítása egyszerű: $A_2 = \frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=-1} = 1$, $B_2 = \frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = 1$.

Az A_1 és a B_1 együttható meghatározására helyettesítsük például az $s=0, s=-3$ értékeket:

$$\frac{1}{4} = A_1 + 1 + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{-2}A_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{-1}B_1 + 1.$$

A lineáris egyenletrendszer megoldása $A_1 = -2, B_1 = 2$. Az időfüggvény kifejezése

$$x(t) = \varepsilon(t) \{ (-2+t)e^{-t} + (2+t)e^{-2t} \}.$$

Az A_1 és a B_1 számítható $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = 0$ felhasználásával is. #

4.1-2.5. Nem racionális függvények inverz transzformációja

Gyakorlati fontossága miatt vizsgáljuk meg a következő FI Laplace-transzformált függvényt:

$$X(s) = X_0(s) + e^{-sT_1}X_1(s) + e^{-sT_2}X_2(s) + \dots + e^{-sT_q}X_q(s); \quad 0 < T_1 < T_2 < \dots < T_q, \quad (4.1-68)$$

ahol minden $X_i(s)$ racionális függvény, az ezekhez tartozó $x_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_i(s)\}$ FI jelek az előző pontokban leírt módon elvi nehézség nélkül meghatározhatók. Az eltolási tétel alkalmazásával kapjuk az $X(s)$ -hez tartozó időfüggvényt:

$$x(t) = \varepsilon(t)x_0(t) + \varepsilon(t-T_1)x_1(t-T_1) + \varepsilon(t-T_2)x_2(t-T_2) + \dots + \dots + \varepsilon(t-T_q)x_q(t-T_q). \quad (4.1-69)$$

Az időfüggvény részletesebben felírt alakja

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & 0 < t < T_1, \\ x_0(t) + x_1(t-T_1), & T_1 < t < T_2, \\ \vdots \\ x_0(t) + x_1(t-T_1) + \dots + x_q(t-T_q), & T_q < t < \infty. \end{cases} \quad (4.1-70)$$

Ezt az alakot úgy is előállíthatjuk, hogy az e^{-sT_i} tényezőket nullának tekintjük, amíg $t < T_i$, és a számláló egy szorzótényezőjének tekintjük amikor $t > T_i$.

Áttekinthetőbb alakhoz jutunk, ha a jelet elemi átalakításokkal ablakozott függvények összegeként állítjuk elő:

$$x(t) = \{ \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T_1) \} f_0(t) + \{ \varepsilon(t-T_1) - \varepsilon(t-T_2) \} f_1(t) + \dots + \varepsilon(t-T_q) f_q(t), \quad (4.1-71)$$

$$f_i(t) \equiv x_0(t) + x_1(t-T_1) + \dots + x_i(t-T_i).$$

A gyakorlati esetek többségében ez az eljárás még akkor is alkalmazható, ha (69)-ben végtelen számú tag szerepel. Ez a helyzet akkor, amikor a transzformált függvényt e^{-sT} szerinti hatványsorként tudjuk előállítani.

A még általánosabb $X(s)$ függvény visszatranszformálása nagyon bonyolult feladat lehet. Célszerű részletes Laplace-transzformációs táblázatot tanulmányozni. Az általunk vizsgált feladatok során ilyenekre rendszerint nincs szükség.

1. példa Határozzuk meg az $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ jelet, ha

$$X(s) = [1 - e^{-sT}] \frac{s}{s + \alpha}.$$

Az $X(s) = X_0(s) + e^{-sT} X_1(s)$ alakú felbontásban

$$X_0(s) = \frac{s}{s + \alpha} = 1 - \frac{\alpha}{s + \alpha} \Rightarrow x_0(t) = \delta(t) - \alpha \varepsilon(t) e^{-\alpha t},$$

és $X_1(s) = -X_0(s)$, $x_1(t) = -x_0(t)$. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} x(t) &= \{\delta(t) - \alpha \varepsilon(t) e^{-\alpha t}\} - \{\delta(t-T) - \alpha \varepsilon(t-T) e^{-\alpha(t-T)}\} = \\ &= \delta(t) - \alpha \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} e^{-\alpha t} - \delta(t-T) + \alpha (1 - e^{-\alpha T}) \varepsilon(t-T) e^{-\alpha(t-T)}. \end{aligned}$$

A $\delta(t)$ tagokat külön kezeljük annak érdekében, hogy elkerüljük a kétes jelentésű $\varepsilon(t)\delta(t)$, $\varepsilon(t-T)\delta(t-T)$ tagok fellépését. #

***2. példa** Határozzuk meg az $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ jelet, ha $X(s) = \frac{1}{2s \operatorname{ch} sT}$.

Az $X(s)$ függvénynek pólusa van a $p_0 = 0$ helyen, továbbá mindazokon a p_k helyeken, ahol

$$\operatorname{ch} p_k T \equiv \cos \frac{p_k T}{j} = 0 \Rightarrow p_k = \pm j \frac{2k-1}{2} \frac{\pi}{T}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

A végtelen számú részlettöltre bontás során $C_0 = 1/2$, továbbá (például a L'Hospital-szabály alkalmazásával)

$$C_k = \lim_{s=p_k} \frac{s-p_k}{2s \operatorname{ch} sT} = \frac{1}{2 p_k T \operatorname{sh} p_k T} = \pm \frac{j}{(2k-1)\pi} \frac{1}{j \sin \frac{2k-1}{2} \pi} = \mp \frac{(-1)^k}{(2k-1)\pi}.$$

Ebből már adódik az időfüggvény következő kifejezése:

$$x(t) = \varepsilon(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{(-1)^k}{(2k-1)\pi} e^{j(2k-1)\pi t/2T} \right\} \right\} = \varepsilon(t) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cos(2k-1) \frac{\pi t}{2T} \right\}.$$

Ez egy $4T$ periódusidejű periodikus függvény Fourier-sora.

Az időfüggvény egy más alakjának előállításához alakítsuk át az eredeti alakot a következő módon:

$$X(s) = \frac{1}{2s \operatorname{ch} sT} = \frac{1}{s(e^{sT} + e^{-sT})} = \frac{e^{-sT}}{s(1 + e^{-s2T})} = \frac{1}{s} \{e^{-sT} - e^{-s3T} + e^{-s5T} - \dots\}.$$

Ebből látható, hogy $x(t) = 0$, ha $0 < t < T$ vagy $3T < t < 4T$, és $x(t) = 1$, ha $T < t < 3T$, majd ez periodikusan ismétlődik $4T$ periódusidővel.

Egy további lehetőség $X(s)$ átalakítása olyan módon, hogy a periodikus jelekre a 4.1-1.4. pontban leírtak alkalmazhatók legyenek. Ekkor más úton jutunk a periodikus jel második alakjához. #

4.1-2.F. Feladatok

F-1. Határozza meg az $x[k]$ DI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a) X(z) = \frac{0,5z}{z-0,5}, \quad (b) X(z) = \frac{1}{z^2-0,64}, \quad (c) X(z) = \frac{z^3+2z^2+1}{z^3(z^2-0,64)}.$$

$$(d) X(z) = \frac{z^2-z}{z^2-0,6z+0,05}, \quad (e) X(z) = \frac{z^2-z}{z^2+0,2z+0,05}.$$

$$(f) X(z) = \frac{1,5z^2-z+0,1}{z^2+z+0,24}, \quad (g) X(z) = \frac{2z^4-2,5z^3+1,21z^2-0,22z}{(z-0,5)^2(z-0,4)^2}.$$

Határozza meg polinomsztással $x[0]$, $x[1]$ és $x[2]$ értékét és ennek alapján ellenőrizze $x[k]$ helyettesítési értékeit!

$$(h) X(z) = \frac{z^3-z^2}{z^2-0,6z+0,05}. \quad (\text{Mielőtt belekezd, gondolkozzon el a feladaton!})$$

F-2. Határozza meg az $x(t)$ FI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a) X(s) = 3 \frac{s+2}{s^2+5s+4}, \quad (b) X(s) = 3 \frac{(s+2)^2}{s^2+5s+4}, \quad (c) X(s) = \frac{3s+1}{(s+1)^2(s+2)^2}.$$

$$(d) X(s) = \frac{s}{s^2+6\alpha s+25\alpha^2}, \quad (e) X(s) = \frac{s}{(s+\alpha)^2+\Omega^2}, \quad (f) X(s) = \frac{2\alpha s+\alpha^2+\Omega^2}{s[(s+\alpha)^2+\Omega^2]}.$$

Ellenőrizze az $x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \{s X(s)\}$ kezdeti értéket!

F-3. Határozza meg az $x[k]$ DI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a) X(z) = \frac{z^{20}-0,9}{z^{19}(z-0,9)} \equiv z \frac{1-0,9z^{-20}}{z-0,9}, \quad (b) X(z) = \frac{z^{20}-0,9^{20}}{z^{19}(z-0,9)} \equiv z \frac{1-0,9^{20}z^{-20}}{z-0,9}.$$

$$(c) X(z) = \frac{(z-2)(z^{20}-1)}{z^{19}(z^2+0,2z-0,03)} \equiv z \frac{(1-z^{-20})(z-2)}{z^2+0,2z-0,03}.$$

Mindhárom esetben az első alak matematikai szempontból egységesebb, a második alak azonban szempontunkból célszerűbb.

F-4. Határozza meg az $x(t)$ FI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a) X(s) = \frac{1-e^{-s}}{s+3}, \quad (b) X(s) = \frac{1-e^{-s}-e^{-2s}}{s+3}, \quad (c) X(s) = \frac{1-e^{-3}-e^{-s}}{s+3}.$$

***F-5.** Határozza meg az $x[k]$ DI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a) X(z) = z^3 \frac{z^2 + z}{z^5 - 1} \equiv \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-5}}. \quad (b) X(z) = \frac{z^5 + z^4 + 1}{z(z^5 - 1)} \equiv \frac{z^{-1} + z^{-2} + z^{-6}}{1 - z^{-5}}.$$

$$(c) X(z) = \frac{z^2(z^4 - a^4)}{(z - a)(z^5 - 1)} \equiv \frac{1}{1 - z^{-5}} \frac{1 - a^4 z^{-4}}{1 - a z^{-1}}.$$

$$*(d) X(z) = z \frac{2z^5 + z^4 + 0,2z^3 - 0,8z^2 - 2}{(z^5 - 1)(z - 0,8)} \equiv \frac{2 + z^{-1} + 0,2z^{-2} - 0,8z^{-3} - 2z^{-5}}{(1 - z^{-5})(1 - 0,8z^{-1})}.$$

(Útmutatás. Bontsa fel a függvényt két valódi tört összegére: az egyik nevezője $z - 0,8$, a másiké $z^5 - 1$; ezek nem a szokásos részlettörtek!)

***F-6.** Határozza meg az $x(t)$ FI jelet, ha Laplace-transzformáltja

$$(a) X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})}. \quad (b) X(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}.$$

$$(c) X(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}}. \quad (d) X(s) = \frac{1}{s(1 - e^{-2s})}.$$

F-7. Válassza ki az előző hat feladatból azokat a jeleket, amelyek Fourier-transzformáltja meghatározható az adott Laplace-transzformáltból $z = e^{j\omega}$ illetve $s = j\omega$ helyettesítéssel.

F-8. Oldja meg az előző feladatot, ha az F-3(a) és (b) feladatban mind a számlálóban, mind a nevezőben 0,9 helyére 1,1 számértéket vagy az F-4. feladatokban a nevezőben a 3 helyére -3 számértéket írunk!

***F-9.** Egy valós értékű, belépő DI illetve FI jel energiája definíció szerint

$$E_x = \sum_{k=0}^{\infty} x^2[k]; \quad E_x = \int_0^{\infty} x^2(t) dt.$$

Igazolja, hogy ha E_x véges, akkor számítható a jel Laplace-transzformáltjából:

$$E_x = \sum_{|z_i| < 1} \operatorname{Res} \left\{ z^{-1} X(z) X(z^{-1}) \right\}; \quad E_x = \sum_{|s_i| < 1} \operatorname{Res} \left\{ X(s) X(-s) \right\}.$$

A $\operatorname{Res} G(z)$ jelentését és számításának módját a 4.1-1.6. pontban tárgyaltuk. (Útmutatás. Fejezze ki az $x[k]$ illetve az $x(t)$ jelet az inverziós integrállal, szorozza meg az $x[k]$ illetve az $x(t)$ jellel, cserélje meg a műveletek sorrendjét, majd alkalmazza a reziduum tételt.)

Határozza meg a tétel alkalmazásával a jel energiáját, ha

$$(a) x[k] = \varepsilon[k] a^k, \quad |a| < 1; \quad y(t) = \varepsilon(t) e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

$$(b) x[k] = \varepsilon[k] k a^k, \quad |a| < 1; \quad y(t) = \varepsilon(t) t e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

Ellenőrizze az eredményt az időtartományban végzett számítással, ha utóbbit el tudja végezni! A példa mutatja, hogy a komplex frekvenciatartományban a számítás néha egyszerűbb.

4.1-2.M. Megoldások

M-1. Célszerű a (b) és (c) szerinti függvényeket előbb egy más alakra hozni.

$$(a) x[k] = 0,5 \varepsilon[k] 0,5^k.$$

$$(b) X(z) = z^{-2} \frac{z \cdot z}{(z-0,8)(z+0,8)}; \quad x[k] = 0,5 \varepsilon[k-2] \{0,8^{k-2} + (-0,8)^{k-2}\};$$

$$X(z) = z^{-1} \frac{z}{(z-0,8)(z+0,8)}; \quad x[k] = 0,625 \varepsilon[k-1] \{0,8^{k-1} - (-0,8)^{k-1}\};$$

$$X(z) = \frac{z}{z(z-0,8)(z+0,8)}; \quad x[k] = -1,5625 \delta[k] + 0,78125 \varepsilon[k] \{0,8^{k-2} + (-0,8)^{k-2}\}.$$

Ezek az alakok egyenértékűek, az első a legcélszerűbb.

$$(c) X(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} \frac{z(0,64z + 2,28)}{(z-0,8)(z+0,8)};$$

$$x[k] = \delta[k-2] + 2\delta[k-3] + \varepsilon[k-4] \{1,745(0,8)^{k-4} - 1,105(-0,8)^{k-4}\}.$$

Ha az eredeti alakot megszorozzuk és elosztjuk z -vel, akkor a $z = 0$ helyen négyszeres pólus adódik. Ekkor a visszatranszformálás hosszadalmas számítást igényel és kevésbé áttekinthető eredményre vezet. Nem derül ki például ránézésre, hogy a jel a $k = 2$ diszkrét időpont előtt nulla.

$$(d) x[k] = \varepsilon[k] \{2,25(0,1)^k - 1,25(0,5)^k\}.$$

$$(e) x[k] = 5,590 \varepsilon[k] \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^k \cos(2,034k + 1,391).$$

$$(f) x[k] = 1,5 \delta[k] + \varepsilon[k-1] \{3,7(-0,4)^{k-1} - 6,2(-0,6)^{k-1}\}.$$

$$(g) X(z) = \frac{z}{z-0,5} + \frac{z}{(z-0,5)^2} + \frac{z}{z-0,4} - \frac{0,8z}{(z-0,4)^2};$$

$$x[k] = \varepsilon[k] \{(1+2k)(0,5)^k + (1-2k)(0,4)^k\}.$$

(h) Ez nem lehet egy DI jel Laplace-transzformáltja, mert $z \rightarrow \infty$ esetén nincs véges határértéke.

M-2. A (b) feladatban a racionális függvény nem valódi tört!

$$(a) x(t) = \varepsilon(t) \{e^{-t} + 2e^{-4t}\}.$$

$$(b) x(t) = 3\delta(t) + \varepsilon(t) \{e^{-t} - 4e^{-4t}\}.$$

$$(c) x(t) = \varepsilon(t) \{(7-2t)e^{-t} - (7+5t)e^{-2t}\}.$$

$$(d) x(t) = \varepsilon(t) \left\{ \cos 4\alpha t - \frac{3}{4} \sin 4\alpha t \right\} e^{-3\alpha t}. \quad (e) x(t) = \varepsilon(t) \left\{ \cos \Omega t - \frac{\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \right\} e^{-\alpha t}.$$

$$(f) x(t) = \varepsilon(t) \left\{ 1 - \left[\cos \Omega t + \frac{\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \right] e^{-\alpha t} \right\}.$$

M-3. A megoldások három tipikus alakja

$$x[k] = x[0] + x[1]\delta[k-1] + \dots + x[k-(L-1)]\delta[k-(L-1)] + \varepsilon[k-L]f[k-L],$$

$$x[k] = \varepsilon[k]g[k] + \varepsilon[k-L]h[k-L],$$

$$x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\}g[k] + \varepsilon[k-L]f[k-L].$$

Ha L nem nagyon kicsi, akkor a harmadik alak a legcélszerűbb. Mivel esetünkben $L = 20$, ezért a harmadik alakot adjuk meg:

$$(a) \quad x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-20]\}(0,9)^k - (0,9 - 0,9^{20})\varepsilon[k-20]0,9^{k-20}; \quad 0,9^{20} \approx 0,122.$$

$$(b) \quad x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-20]\}(0,9)^k; \quad \text{véges hosszúságú jel.}$$

$$(c) \quad \text{Elhanyagolva a } (0,3)^{20} \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ és a } (0,1)^{20} \approx 10^{-20} \text{ számokat}$$

$$x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-20]\} \left\{ -4,75(0,1)^k + 5,75(-0,3)^k \right\} + \varepsilon[k-20] \left\{ 4,75(0,1)^{k-20} - 5,75(-0,3)^{k-20} \right\}.$$

M-4. Alkalmazza a késleltetési (eltolási) tételt!

$$(a) \quad x(t) = \varepsilon(t)e^{-3t} - \varepsilon(t-1)e^{-3(t-1)} = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)\}e^{-3t} - [1 - e^{-3}]\varepsilon(t-1)e^{-3(t-1)}.$$

$$(b) \quad x(t) = \varepsilon(t)e^{-3t} - \varepsilon(t-1)e^{-3(t-1)} - \varepsilon(t-2)e^{-3(t-2)} \equiv \\ \equiv \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)\}e^{-3t} - [1 - e^{-3}]\{\varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2)\}e^{-3(t-1)} - [1 + e^{-3} - e^{-6}]\varepsilon(t-2)e^{-3(t-2)}.$$

$$(c) \quad x(t) = \varepsilon(t)e^{-3t} - e^{-3}\varepsilon(t-1)e^{-3(t-1)} \equiv \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)\}e^{-3t}. \quad \text{Véges hosszúságú jel.}$$

***M-5.** Az $X(z)$ vagy egy periodikus DI jel transzformáltja vagy egy periodikus és egy nem-periodikus jel összegének transzformáltja.

$$(a) \quad x[k] = \varepsilon_L[k]x_L[k]; \quad x_L[k] = \delta[k-1] + \delta[k-2], \quad 0 \leq k < L = 5.$$

$$(b) \quad X(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2} + z^{-6}}{1 - z^{-5}} = z^{-1} + \frac{2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-5}}; \quad x[k] = \delta[k-1] + \varepsilon_L[k]f_L[k];$$

$$f_L[k] = 2\delta[k-1] + \delta[k-2], \quad 0 \leq k < L = 5.$$

$$(c) \quad x[k] = \varepsilon_L[k]x_L[k]; \quad x_L[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-4]\}a^k; \quad L = 5.$$

$$*(d) \quad X(z) = \frac{2z}{z-0,8} + \frac{z^4 + z^3}{z^5 - 1} \equiv \frac{2z}{z-0,8} + \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-5}};$$

$$x[k] = 2\varepsilon[k](0,8)^k + \varepsilon_L[k]g_L[k]; \quad g_L[k] = \delta[k-1] + \delta[k-2], \quad 0 \leq k < L = 5.$$

***M-6.** Az $X(s)$ vagy egy periodikus FI jel Laplace-transzformáltja vagy egy periodikus és egy nem-periodikus jel összegének Laplace-transzformáltja.

$$(a) \quad x(t) = \varepsilon_T(t)x_T(t); \quad x_T(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1), \quad 0 < t < T = 2.$$

$$(b) \quad \text{Mint (a), noha ez nem látszik első ránézésre.}$$

$$(c) \quad x(t) = \varepsilon_T(t)\delta(t) \equiv \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2) + \dots$$

$$(d) \quad x(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon(t-2) + \varepsilon(t-4) + \dots$$

A jel ábrázolásával könnyen belátható, hogy az egy $A + (t/2)$ és egy $g(t) = \varepsilon_T(t)g_T(t)$ periodikus jel összege, ahol

$$G(s) = \frac{1}{s(1-e^{-2s})} - \left[\frac{A}{s} + \frac{1}{2s^2} \right] = \frac{2(1-A)s - 1 + (2As + 1)e^{-2s}}{2s^2(1-e^{-2s})};$$

$$g_T(t) = (1-A) - \frac{t}{2}, \quad 0 < t < T = 2.$$

Az A állandó tetszőleges, az $A = 0$, $A = 1$ és $A = 1/2$ választások ésszerűek.

M-7. A helyettesítés megengedett, ha $X(z)$ minden pólusa az egységkörön belül vagy ha $X(s)$ minden pólusa a bal félsíkon helyezkedik el. Az F-1., 2., 3. és 4. feladatokban ez teljesül, de az F-1(h) és az F-2(e, f) feladatokban csak akkor, ha $\alpha > 0$. Az F-5. és 6. feladatokban szereplő jelek egyikére sem megengedett a helyettesítés.

M-8. Az $X(e^{j\theta})$ illetve az $X(j\omega)$ az F-3(b) illetve az F-4(c) feladatban a jel spektrumát szolgáltatja, mivel az $X(z)$ függvénynek a $z = 1, 1$ helyen, illetve az $X(s)$ függvénynek az $s = +3$ helyen nincsen pólusa. A többi említett feladatban az $X(e^{j\theta})$ illetve az $X(j\omega)$ függvény nem belépő jel spektrumát adja.

***M-9.** Felcserélve a műveletek sorrendjét (ez megengedett, ha E_x véges) a DI esetben

$$E_x = \sum_{k=0}^{\infty} x^2[k] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} z^{-1} X(z) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^k \right\} dz.$$

Az utolsó összeg az $x[k]$ Laplace-transzformáltja, de nem z hanem $1/z$ változóval. A FI esetben hasonló módon

$$E_x = \int_0^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^{\infty} x(t) \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \right\} dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \left\{ \int_0^{\infty} x(t) e^{st} dt \right\} ds.$$

Az utolsó összeg az $x(t)$ Laplace-transzformáltja, de nem s hanem $-s$ változóval.

A megadott konkrét jelek esetén:

$$(a) E_x = \sum_i \operatorname{Res}_{|z|<1} \left\{ z^{-1} \frac{z}{z-a} \frac{z^{-1}}{z^{-1}-a} \right\} = \operatorname{Res}_{z=a} \left\{ \frac{1}{(z-a)(1-az)} \right\} = \frac{1}{1-a^2};$$

$$E_y = \sum_i \operatorname{Res}_{\operatorname{Re}s < 0} \left\{ \frac{1}{s+\alpha} \frac{1}{-s+\alpha} \right\} = \operatorname{Res}_{s=-\alpha} \left\{ \frac{1}{(s+\alpha)(\alpha-s)} \right\} = \frac{1}{2\alpha}.$$

$$(b) E_x = \sum_i \operatorname{Res}_{|z|<1} \left\{ z^{-1} \frac{az}{(z-a)^2} \frac{az^{-1}}{(z^{-1}-a)^2} \right\} = \operatorname{Res}_{z=a} \left\{ \frac{a^2 z}{(z-a)^2(1-az)^2} \right\} = a^2 \frac{1+a^2}{(1-a^2)^3};$$

$$E_y = \sum_i \operatorname{Res}_{\operatorname{Re}s < 0} \left\{ \frac{1}{(s+\alpha)^2} \frac{1}{(-s+\alpha)^2} \right\} = \operatorname{Res}_{s=-\alpha} \left\{ \frac{1}{(s+\alpha)^2(\alpha-s)^2} \right\} = \frac{1}{4\alpha^3}.$$

A $D_1/(z-a)$ illetve a $D_1/(s+\alpha)$ tagot, vagy a benne szereplő D_1 reziduumot a részlettörtekre bontás technikájával határozhatjuk meg. Különösen a (b) feladat esetén a komplex frekvenciatartománybeli számítás egyszerűbbnek tűnik.

4.2. Rendszeranalízis a komplex frekvenciatartományban

E fejezet tárgya a lineáris, invariáns, kauzális, DI illetve FI rendszerek komplex frekvencia-tartománybeli analízise, más szóval a diszkrét idejű és a folytonos idejű Laplace- transzformáció alkalmazása rendszeranalízisre.

A 4.2-1. szakaszban értelmezzük az ilyen rendszer átviteli függvényét. Megmutatjuk, miként lehet a rendszer átviteli függvényét előállítani a rendszer impulzusválaszának, rendszeregyenletének, állapotváltozós leírásának vagy átviteli karakterisztikájának ismeretében. Itt foglalkozunk a gerjesztés-válasz stabilitás kritériumaival, valamint az átviteli függvény ábrázolásának módjával is. Az átviteli függvénynek a hálózati reprezentáció alapján történő előállítását a 4.3. fejezetben tárgyaljuk.

A 4.2-2. szakasz tárgya az adott gerjesztéshez tartozó válasz számítása a Laplace-transzformáció felhasználásával. A belépő gerjesztéshez tartozó választ meghatározhatjuk az átviteli függvény ismeretében. Nem belépő gerjesztéshez tartozó válasz meghatározásához célszerű az impulzusválasz számítása, majd konvolúció alkalmazása. Módszert adunk a periodikus gerjesztéshez tartozó válasz olyan előállítására, amely nem a Fourier-felbontáson alapul.

A 4.2-3. szakaszban néhány speciális lineáris, invariáns, kauzális rendszer időtartománybeli, frekvenciatartománybeli és komplex frekvenciatartománybeli leírását tárgyaljuk. Itt lesz szó szűrőkkel kapcsolatos néhány alapfogalomról. A rendszerek realizációjával a 4.3-2. szakaszban még fogunk foglalkozni.

4.2-1. Az átviteli függvény

4.2-1.1. Az átviteli függvény definíciója

Tekintsünk egy lineáris, invariáns, kauzális DI illetve FI rendszert, amelyet $h[k]$ illetve $h(t)$ impulzusválasza jellemez, amely a kauzalitás következtében *belépő* jel. Jelölje az impulzusválasz Laplace-transzformáltját

$$\begin{aligned} \text{DI: } H(z) &= \mathcal{Z} \{h[k]\}; \\ \text{FI: } H(s) &= \mathcal{L} \{h(t)\}. \end{aligned} \tag{4.2-1}$$

A *kauzális* rendszer által meghatározott $H(z)$ illetve $H(s)$ a rendszer *átviteli függvénye* (transzfer függvénye).

Az (1) lehetőséget ad az impulzusválasz mérése és alkalmas függvénnyel történő approximálása alapján az átviteli függvény meghatározását.

A rendszer válasza kifejezhető az impulzusválasz és gerjesztés konvolúciójaként (2.1. szakasz):

$$y[k] = h[k] * u[k]; \quad y(t) = h(t) * u(t).$$

A Laplace-transzformáció (4.1-37) konvolúció-tétele értelmében ez, kauzális rendszer és belépő gerjesztés esetén kifejezhető h és u Laplace-transzformáltjának szorzataként:

$$\begin{aligned} \text{DI: } Y(z) &= H(z)U(z); & h[k] &= 0, u[k] = 0, k \in \mathbf{Z}_-; \\ \text{FI: } Y(s) &= H(s)U(s), & h(t) &= 0, u(t) = 0, t \in \mathbf{R}_-. \end{aligned} \quad (4.2-2)$$

A (2) értelmében a kauzális rendszer átviteli függvénye értelmezhető közvetlenül a komplex frekvenciatartományban az impulzusválasztól függetlenül is:

$$\begin{aligned} \text{DI: } H(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)}; & u[k] &= 0, k \in \mathbf{Z}_-; \\ \text{FI: } H(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)}; & u(t) &= 0, t \in \mathbf{R}_-. \end{aligned} \quad (4.2-3)$$

A rendszer átviteli függvényét rendszerint a (3) összefüggéssel számítjuk rendszeregyenlete, állapotváltozós leírása vagy hálózati reprezentációja ismeretében. Ezt a következőkben részletezni fogjuk.

Az átviteli függvény ismeretében (1) alapján számíthatjuk a rendszer impulzusválasztát:

$$\begin{aligned} \text{DI: } h[k] &= \mathcal{L}^{-1}\{H(z)\}; \\ \text{FI: } h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}. \end{aligned} \quad (4.2-4)$$

Rendszerint ez az impulzusválasz számításának a legegyszerűbb módja.

A rendszer átviteli függvénye a z illetve az s változó *racionális* függvénye, ha az alábbi feltételek bármelyike ki van elégítve:

- a rendszer *impulzusválasza* exponenciális és csillapított szinuszos függvények szuperpozíciója, bármelyik meg lehet szorozva egy polinommal (2.1-1. és 2. szakasz).
- a rendszer jellemezhető a *rendszeregyenletével* (2.2-1. szakasz).
- a rendszer jellemezhető az *állapotváltozós leírásával* (2.3-1. szakasz).
- a rendszer jellemezhető egy olyan *átviteli karakterisztikával*, amely az $e^{j\omega}$ illetve a $j\omega$ változó racionális függvénye.

Sok fontos folytonos idejű rendszer nem tartozik a fenti osztályok egyikébe sem, tehát átviteli függvénye nem racionális. Ilyenek például az időkésséssel (más néven holtidővel) bíró FI rendszerek.

Az átviteli függvény és az impulzusválasz kapcsolatát fentebb tisztáztuk, e szakasz további pontjaiban a többi kapcsolatot vizsgáljuk.

1. példa Határozzuk meg a DI illetve a FI rendszer átviteli függvényét, ha impulzusválasza

$$h[k] = \varepsilon[k] q^k; \quad h(t) = \varepsilon(t) e^{pt}.$$

Mivel a rendszer kauzális, ezért az impulzusválasz Laplace-transzformáltját számítva kapjuk, hogy

$$H(z) = \frac{z}{z-q}; \quad H(s) = \frac{1}{s-p}.$$

Az átviteli függvény $z = q$ vagy $s = p$ pólusa megegyezik az impulzusválaszban a DI esetben a k kitevő alapjával illetve a FI esetben a t szorzójával. #

***2. példa** Határozzuk meg a DI rendszer átviteli függvényét, ha impulzusválasza

$$h[k] = \delta[k] - \frac{1}{2!} \delta[k-2] + \frac{1}{4!} \delta[k-4] - \frac{1}{6!} \delta[k-6] + \dots$$

Tagonként képezve a Laplace-transzformáltakat kapjuk, hogy

$$H(z) = 1 - \frac{1}{2!} z^{-2} + \frac{1}{4!} z^{-4} - \frac{1}{6!} z^{-6} + \dots \equiv \cos(z^{-1}).$$

Ez nem racionális függvénye a z változónak. A gyakorlatban nem szoktunk ilyen impulzusválasszal vagy átviteli függvénnyel találkozni. #

3. példa Határozzuk meg a FI rendszer átviteli függvényét, ha explicit gerjesztés válasz kapcsolata $y(t) = u(t-T)$, $T \in \mathbf{R}_+$.

Az egyenlet Laplace-transzformáltját képezve $Y(s) = e^{-sT} U(s) \equiv H(s)U(s)$.

A FI rendszer (a folytonos idejű késleltető) átviteli függvénye ebből $H(s) = e^{-sT}$, $T \in \mathbf{R}_+$. Ez az átviteli függvény az s változónak nem racionális függvénye. Ha $T \in \mathbf{R}_-$, akkor a rendszer nem kauzális, átviteli függvénye nem értelmezett, a $H(s)$ ekkor nem nevezhető átviteli függvénynek. #

4.2-1.2. Átviteli függvény és rendszeregyenlet

Tekintsük egy lineáris, invariáns, kauzális DI illetve FI rendszer *rendszeregyenletét* szokásos alakjában adottnak (2.2-1.2. és 3. pont):

$$\begin{aligned} \text{DI: } & y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m]; \\ \text{FI: } & y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_n u(t). \end{aligned} \quad (4.2-5)$$

Itt $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ FI válasz i -edik általánosított deriváltja.

Feladatunk a rendszer átviteli függvényének meghatározása.

Képezzük az egyenlet Laplace-transzformáltját abban az esetben, amikor $u[k]$ illetve $u(t)$ belépő jel, ezért a kauzalitás következtében $y[k]$ illetve $y(t)$ is belépő jel. A (4.1-22) eltolási tétel értelmében ekkor $\mathcal{L}\{y^{(i)}[k]\} = z^{-i} Y(z)$, a (4.1-29) derivált tétel értelmében $\mathcal{L}\{y^{(i)}(t)\} = s^i Y(s)$, tehát

$$\begin{aligned} Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) &= b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z); \\ s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_n Y(s) &= b_0 s^n U(s) + b_1 s^{n-1} U(s) + \dots + b_n U(s). \end{aligned}$$

Ebből $H(z) = Y(z)/U(z)$ illetve $H(s) = Y(s)/U(s)$ nehézség nélkül kifejezhető.

Az (5) rendszeregyenletével leírt DI illetve FI rendszer *átviteli függvénye*

$$\begin{aligned} \text{DI: } H(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}; \\ \text{FI: } H(s) &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \end{aligned} \quad (4.2-6)$$

Mind $H(z)$, mind $H(s)$ változójának *racionális* függvénye. Mindkét függvény véges értékhez (gyakran nullához) tart, ha $z \rightarrow \infty$ ($z^{-1} \rightarrow 0$) illetve ha $s \rightarrow \infty$.

Ha a DI rendszerre $n = 0$ (MA típusú vagy nem-rekurzív rendszer), akkor

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_{m-1} z^{-(m-1)} + b_m z^{-m}, \quad n = 0. \quad (4.2-7)$$

A DI átviteli függvényt gyakran célszerűbb olyan alakra hozni, hogy csak z pozitív hatványait tartalmazza:

$$H(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_{N-1} z + b_N}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N}, \quad N = \max(m, n). \quad (4.2-8)$$

A *belépő gerjesztéshez* tartozó ugyancsak belépő válasz $y[k] = \mathcal{L}^{-1}\{H(z)U(z)\}$ illetve $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}$ alakban inverz Laplace-transzformációval számítható.

Az átviteli függvény nevezője megegyezik a rendszeregyenlet karakterisztikus egyenletének bal oldalával (2.2-2.2. pont). Ebből következik, hogy a rendszeregyenlet valamennyi λ_i sajátértéke az átviteli függvény nevezőjének egy nullahelye és ezért többnyire egy pólusa az átviteli függvénynek: $\lambda_i = q_i$ illetve $\lambda_i = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Ha azonban az átviteli függvény redukálható, vagyis ha nevezőjének egyes nullahelyei megegyeznek számlálójának bizonyos nullahelyeivel, akkor a rendszeregyenlet egyes sajátértékei nem pólusai az átviteli függvénynek. Pontosabban fogalmazva: az átviteli függvény pólusainak multiplicitása legfeljebb akkora, mint a rendszeregyenlet megfelelő sajátértékeinek multiplicitása.

A rendszeregyenlet és az átviteli függvény kapcsolatát a gyakorlatban sokszor fordítva használjuk: meghatározzuk az átviteli függvényt (például a hálózati reprezentáció ismeretében vagy mérési eredmény approximációjával) és a (6) alak ismeretében előállítjuk a rendszeregyenlet (5) szerinti formáját.

Példa Határozzuk meg azon rendszer átviteli függvényét, amelynek rendszeregyenlete (2.2-1.2. és 3. pont)

$$\begin{aligned} \text{DI: } y[k] - y[k-1] + 0,24y[k-2] &= u[k] + 0,5u[k-1] - 0,2u[k-3]; \\ \text{FI: } y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) + 3y(t) &= 5u^{(1)}(t) + u(t). \end{aligned}$$

Az átviteli függvény közvetlenül felírható:

$$H(z) = \frac{1 + 0,5z^{-1} - 0,2z^{-3}}{1 - z^{-1} + 0,24z^{-2}} \equiv z^{-1} \frac{z^3 + 0,5z^2 - 0,2}{z^2 - z + 0,24}; \quad H(s) = \frac{5s + 1}{s^2 + 4s + 3}.$$

A $H(z)$ felírható úgy is, hogy csak z pozitív hatványai szerepeljenek benne. #

4.2-1.3. Átviteli függvény és állapotváltozós leírás

A lineáris, invariáns, kauzális, egy-gerjesztésű és egy-válaszú DI illetve FI rendszer állapotváltozós leírására közös alak adható (2.3-1.2. és 3. pont):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + Du. \quad (4.2-9)$$

Itt $\mathbf{x}'[k] \equiv \mathbf{x}[k+1]$ illetve $\mathbf{x}'(t)$ az $\mathbf{x}(t)$ általánosított deriváltja. Az x_i állapotváltozók számát N jelöli, ez az állapotváltozós leírás rendszáma.

Képezzük az egyenletek Laplace-transzformáltját. A (4.1-26) illetve a (4.1-27) értelmében $\mathcal{L}\{\mathbf{x}[k+1]\} = z\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}[0]$ illetve $\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(-0)$, ahol belépő gerjesztés esetén $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$ illetve $\mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}$. Az átviteli függvény számításához az utóbbi esetre szorítkozhatunk:

$$\begin{aligned} z\mathbf{X}(z) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}U(z), & s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s), \\ Y(z) &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}(z) + DU(z); & Y(s) &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}(s) + DU(s). \end{aligned}$$

Az első egyenlet átrendezett alakja DI illetve FI rendszer esetén

$$[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(z) = \mathbf{B}U(z); \quad [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s). \quad (4.2-10)$$

E lineáris egyenletrendszer megoldásával megkapjuk $\mathbf{X}(z)$ illetve $\mathbf{X}(s)$ rendezőit. Formálisan ez mátrixinverzióval fejezhető ki:

$$\mathbf{X}(z) = [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}U(z); \quad \mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}U(s).$$

Helyettesítsük ezt $Y(z)$ illetve $Y(s)$ kifejezésébe:

$$Y(z) = \left\{ \mathbf{C}^T [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + D \right\} U(z); \quad Y(s) = \left\{ \mathbf{C}^T [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + D \right\} U(s).$$

Ennek alapján a $H(z) = Y(z)/U(z)$ illetve a $H(s) = Y(s)/U(s)$ átviteli függvény kifejezése

$$\begin{aligned} \text{DI:} \quad H(z) &= \mathbf{C}^T [z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + D; \\ \text{FI:} \quad H(s) &= \mathbf{C}^T [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + D. \end{aligned} \quad (4.2-11)$$

Az állapotváltozós leírással jellemzett rendszer átviteli függvénye egy racionális függvény, amelynek számlálója nem nagyobb fokszámú mint nevezője:

$$\begin{aligned} \text{DI:} \quad H(z) &= \frac{g_0 z^N + g_1 z^{N-1} + \dots + g_{N-1} z + g_N}{s^N + d_1 z^{N-1} + d_2 z^{N-2} + \dots + d_{N-1} z + d_N}; \\ \text{FI:} \quad H(s) &= \frac{g_0 s^N + g_1 s^{N-1} + \dots + g_{N-1} s + g_N}{s^N + d_1 s^{N-1} + d_2 s^{N-2} + \dots + d_{N-1} s + d_N}. \end{aligned} \quad (4.2-12)$$

Hasonlítsuk össze az átviteli függvénynek a rendszeregyenlet alapján kapott (6) és az állapotváltozós leírás alapján kapott (12) kifejezését. A gyakorlati esetek többségében $N = n$ és $d_i = a_i$, $g_i = b_i$. Ha azonban a (12) szerinti számlálónak és a nevezőnek van c számú közös gyöktényezője, akkor ezekkel egyszerűsíthetünk. Az így előálló redukált átviteli függvényre a számláló és a nevező fokszáma $N - c = n$. Nehéz annak eldöntése, hogy a számláló és a nevező két nullahelye valóban pontosan egyenlő-e. Ennek a stabilitásvizsgálat során lehet jelentőség (4.2-1.5. pont).

Példa Határozzuk meg annak a DI rendszernek az átviteli függvényét, amelynek állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D u.$$

A transzformált állapotvektorra vonatkozó egyenlet és annak megoldása:

$$\begin{bmatrix} z & -1 \\ a_2 & z + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(z) \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U(z).$$

Az $Y(z)$ kifejezésébe helyettesítve kapjuk a transzformált választ és az átviteli függvényt:

$$Y(z) = \left\{ \frac{C_1 + C_2 z}{z^2 + a_1 z + a_2} + D \right\} U(z) \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{C_1 + C_2 z}{z^2 + a_1 z + a_2} + D \equiv \frac{D z^2 + (C_2 + a_1 D) z + (C_1 + a_2 D)}{z^2 + a_1 z + a_2}.$$

Ez a (12) szerinti alak $N=2$ esetére. Az a_i, C_i, D paraméterek speciális értéke mellett előfordulhat, hogy az átviteli függvény csak elsőfokú. #

A DI Laplace-transzformáció alkalmazásával egyszerűen igazolhatjuk az állapotváltozós leírás (2.3-28) szerinti első Frobenius-alakját (ezt itt nem ismételjük meg; l. a 2.3-1.4. pontot). Belépő jelekre szorítkozva az állapotegyenlet egyes sorainak a Laplace-transzformáltja a DI esetben (a FI eset betűcserével adódik)

$$z X_1 = X_2 \Rightarrow X_2 = z X_1; \quad z X_2 = X_3 \Rightarrow X_3 = z^2 X_1,$$

$$X_i = z^{i-1} X_1, \dots, X_N = z^{N-1} X_1; \quad z X_N = -a_N X_1 - a_{N-1} X_2 - \dots - a_1 X_N + U.$$

Ebből következik, hogy

$$X_1 = \frac{U}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}, \quad X_2 = z X_1, \dots, X_N = z^{N-1} X_1.$$

Ezeket a válasz transzformált kifejezésébe helyettesítve

$$Y = \left\{ \frac{1}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} \left[(b_N - b_0 a_N) + (b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) z + \dots + (b_1 - b_0 a_1) z^{N-1} \right] + b_0 \right\} U.$$

Az egyenletet a nevezővel szorozva, rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$[z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N] Y(z) = [b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N] U(z).$$

Ezt megszorozva z^{-N} tényezővel kapjuk a DI rendszeregyenlet szokásos alakjának Laplace-transzformáltját. Ha az egyenletben z helyére s változót írunk, akkor megkapjuk a FI rendszeregyenlet Laplace-transzformáltját. Az előző példában az $N=2$ speciális esettel foglalkoztunk. A második Frobenius-alak is igazolható Laplace-transzformációval. Ezt a viszonylag egyszerű feladatot az Olvasóra bízuk.

4.2-1.4. Átviteli függvény és átviteli karakterisztika

Egy lineáris, invariáns rendszert jellemezhetünk akár a $H(e^{j\vartheta})$ DI illetve $H(j\omega)$ FI átviteli karakterisztikájával (3.1-1.3. pont), akár az előbb tárgyalt $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvényével.

Szorítkozzunk *GV stabilis* és *kauzális* rendszerekre (3.2-2.3. pont). Ekkor az átviteli karakterisztika ismeretében az átviteli függvény előállítható (vagy fordítva), ha $e^{j\vartheta}$ helyére z , a $j\omega$ helyére s változót írunk (vagy fordítva):

$$\begin{aligned} \text{DI: } H(z) = H(e^{j\vartheta}) \Big|_{e^{j\vartheta}=z} &\Leftrightarrow H(e^{j\vartheta}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\vartheta}}; \\ \text{FI: } H(s) = H(j\omega) \Big|_{j\omega=s} &\Leftrightarrow H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}. \end{aligned} \quad (4.2-13)$$

Ha az átviteli karakterisztika $e^{j\vartheta}$ illetve a $j\omega$ racionális függvényeként ismert, akkor az átviteli függvény maga is racionális függvénye a z vagy az s változónak. A mért átviteli karakterisztika közelítése racionális függvénnyel azonban nem egyszerű feladat. A második oszlopban álló összefüggések az átviteli karakterisztika egy kényelmes számítási eljárását jelentik.

Az alkalmazott jelölések következtében az összefüggések trivialisnak tűnhetnek, de a GV stabilitásra és a kauzalitásra vonatkozó kikötések mutatják, hogy ez nincs így. Ha például a rendszer nem kauzális, akkor a (13) hibás eredményre vezet, hiszen nem kauzális rendszerre az átviteli függvény nem értelmezett.

Jelölje a H átviteli karakterisztika valós részét P , képzetes részét Q , abszolút értékét K , szögét φ , vagyis akár DI, akár FI rendszer esetén

$$H = P + jQ, \quad H = Ke^{j\vartheta}. \quad (4.2-14)$$

Az átvitel karakterisztika konjugáltja a $H(z^{-1})$, illetve a $H(-s)$ átviteli függvényből állítható elő $z = e^{j\vartheta}$, illetve $s = j\omega$ helyettesítéssel. Ebből következik, hogy az átviteli karakterisztika valós, illetve képzetes részének kifejezése

$$\begin{aligned} \text{DI: } P(\vartheta) &= \frac{H(z) + H(z^{-1})}{2} \Big|_{z=e^{j\vartheta}}, & jQ(\vartheta) &= \frac{H(z) - H(z^{-1})}{2} \Big|_{z=e^{j\vartheta}}; \\ \text{FI: } P(\omega) &= \frac{H(s) + H(-s)}{2} \Big|_{s=j\omega}, & jQ(\omega) &= \frac{H(s) - H(-s)}{2} \Big|_{s=j\omega}. \end{aligned} \quad (4.2-15)$$

Az átviteli karakterisztika abszolút értékének négyzetére és szögére pedig írható, hogy

$$\begin{aligned} \text{DI: } K^2(\vartheta) &= H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\vartheta}}, & e^{j2\varphi(\vartheta)} &= \frac{H(z)}{H(z^{-1})} \Big|_{z=e^{j\vartheta}}; \\ \text{FI: } K^2(\omega) &= H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega}, & e^{j2\varphi(\omega)} &= \frac{H(s)}{H(-s)} \Big|_{s=j\omega}. \end{aligned} \quad (4.2-16)$$

A (15) és (16) összefüggések alapján az átviteli karakterisztikát jellemző $P(\vartheta)$, $Q(\vartheta)$, $K(\vartheta)$, $\varphi(\vartheta)$ illetve $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $K(\omega)$, $\varphi(\omega)$ négy függvény bármelyikének ismeretében elvileg előállítható egy olyan $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvény, amelyből

származtatott átviteli karakterisztika valós része, képzetes része, abszolút értéke vagy szöge éppen a megadott. Ez az előállítás egyes esetekben egyértelmű, más esetekben több átviteli függvény is adódik.

Az átviteli függvény tényleges előállításának módszerével P , Q , K vagy φ ismeretében azonban nem foglalkozunk, mert célunk csak az átviteli függvény és az átviteli karakterisztika kapcsolatának bemutatása volt.

Előírt tulajdonságú amplitúdó-karakteristikával bíró rendszerek egy típusára (maximális laposságú szűrők) az átviteli függvény meghatározását a 4.2-3.7. pontban be fogjuk mutatni.

4.2-1.5. Gerjesztés-válasz stabilitás

Egy lineáris, invariáns, kauzális DI illetve FI rendszer $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvénye leírja a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatát. Ebből következik, hogy az átviteli függvény ismeretében el tudjuk dönteni, hogy a rendszer gerjesztés-válasz stabilis (GV stabilis) vagy nem az. Emlékeztetőül: a rendszer akkor és csakis akkor GV stabilis, ha bármely korlátos gerjesztéshez korlátos válasz tartozik. Ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy a rendszer impulzusválasza abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható legyen (2.1-1.3. és 2.1-2.3. pont):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

A rendszer feltételezett kauzalitása következtében az alsó határ $k = 0$ vagy $t = -0$ is lehet. A (3) értelmében a feltétel kifejezhető az átviteli függvénnyel is:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{L}^{-1}\{H(z)\}| < \infty; \quad \int_{-0}^{\infty} |\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}| dt < \infty. \quad (4.2-17)$$

Ez az általános alak nem különösen hasznos.

Szorítkozzunk a továbbiakban racionális átviteli függvényre, amelynek általános alakját (6) adja. A $h[k]$ DI impulzusválasz, amely a q_i pólusokkal bíró $H(z)$ átviteli függvényhez tartozik a következő típusú tagok szuperpozíciója: q_i^k (egyszeres pólus), $k q_i^k$ (kétszeres pólus), ..., $k^{p-1} q_i^k$ (p -szeres pólus), továbbá $\delta[k]$, $\delta[k-1]$, ..., $\delta[k-r]$. A $h(t)$ FI impulzusválasz, amely a p_i pólusokkal bíró $H(s)$ átviteli függvényhez tartozik a következő típusú tagok szuperpozíciója: $e^{p_i t}$ (egyszeres pólus), $t e^{p_i t}$ (kétszeres pólus), ..., $t^{q-1} e^{p_i t}$ (q -szoros pólus) esetleg még $\delta(t)$ is. Az ilyen függvény abszolút értékének szummája illetve integrálja csak akkor lehet véges, ha minden exponenciális tag nullához tart, amikor k illetve t végtelenhez tart. Ennek feltétele viszont az, hogy minden $|q_i|$ illetve minden $|e^{p_i t}| = |e^{\Re\{p_i\}t}|$ érték 1-nél kisebb legyen.

A racionális átviteli függvényű DI illetve FI rendszer akkor és csakis akkor gerjesztés-válasz stabilis, ha a $H(z)$ átviteli függvény minden q_i pólusára illetve a $H(s)$ átviteli függvény minden p_i pólusára

GV stabilis rendszer \Leftrightarrow DI: $ q_i < 1$; FI: $\Re\{p_i\} < 0$ (4.2-18)

ki van elégtíve, vagyis ha a DI átviteli függvény minden pólusa az *egységkörön belül*, a FI átviteli függvény minden pólusa a *bal félsíkon* helyezkedik el.

Ha az átviteli függvény pólusai csak a $|q_i| \leq 1$ illetve a $\Re\{p_i\} \leq 0$ feltételt elégítik ki és a $|q_i| = 1$ illetve a $\Re\{p_i\} = 0$ típusú, a tartomány határára eső pólusok egyszeresek, akkor azt mondhatjuk, hogy a nem GV stabilis rendszer a GV stabilitás *határhelyzetében* van. Külön megfontolást igényel, hogy az ilyen rendszer „stabilisnak” tekinthető-e.

Legyen az átviteli függvény a következő alakban adott:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}; \quad H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (4.2-19)$$

ahol B és A polinomok, fokszámuk n . Ha az átviteli függvény *redukált* alakú (az A és B polinomoknak nincs közös nullahelyük), akkor a H átviteli függvény pólusai megegyeznek nevezőjének nullahelyeivel, azaz a következő n -edfokú egyenlet gyökei:

$$A(z) = 0, \quad z = q_1, q_2, \dots, q_n; \quad A(s) = 0, \quad s = p_1, p_2, \dots, p_n. \quad (4.2-20)$$

Mint korábban már láttuk (2.2-3.2. pont), a stabilitási feltételek teljesülése a polinom együtthatói ismeretében ellenőrizhetők a pólusok numerikus meghatározása nélkül is.

Ha az átviteli függvénynek nem a redukált alakja áll rendelkezésünkre (ilyen redukció egyébként ritkán lehetséges), akkor előző állításunkat a következőképpen kell kissé óvatosabban fogalmaznunk.

Legyen az átviteli függvény $H(z) = G(z)/D(z)$ illetve $H(s) = G(s)/D(s)$ alakban adott, ahol G és D legfeljebb N -edfokú polinom, amelyeknek lehetnek közös nullahelyei. A $D(z) = 0$ egyenlet z_i gyökei, illetve a $D(s) = 0$ egyenlet s_i gyökei lehetnek az átviteli függvény pólusai. Ezek akkor nem pólusok, ha egyúttal a G számláló-polinomnak is nullahelyei. Pontosabban fogalmazva: ha z_i illetve s_i a nevező-polinomnak d_i multiplicitású, a számláló-polinomnak g_i multiplicitású nullahelye, akkor $d_i > g_i$ esetén $z_i = q_i$ illetve $s_i = p_i$ az átviteli függvénynek pólusa, egyébként nem pólusa az átviteli függvénynek.

Vizsgáljuk a következő esetet. Tételezzük fel, hogy az átviteli függvény nevezőjének valamennyi nullahelye az egységsugarú körön belül illetve a bal félsíkon van, kivéve egyetlen egyszeres nullahelyet az egységsugarú körön kívül illetve a jobb félsíkon. Ha az átviteli függvény redukált alakú, akkor az általa jellemzett rendszer nem GV stabilis. Ha azonban az átviteli függvénynek van olyan redukált alakja, amelyben a stabilitást „elrontó” pólus nem lép fel, akkor az átviteli függvény GV stabilis rendszert jellemez. Elméletileg ez az állítás tökéletesen helytálló. Gyakorlatilag azonban felmerül az a kérdés, hogy kellő megbízhatósággal ismerjük-e a számláló és a nevező nullahelyeit vagy együtthatóit ahhoz, hogy a redukálhatóságot illetően ne legyenek kételyeink. A tankönyvi példákban az együtthatók pontosan ismert „kerek” számok, így ez a gond nem merül fel, ami ezáltal félrevezető.

Tekintsünk most két olyan esetet, amikor a kérdést viszonylag biztonságosan meg tudjuk válaszolni.

Tételezzük fel, hogy az átviteli függvényt a rendszer állapotváltozós leírásából állítottuk elő. A nevező nullahelyeit ekkor a rendszermátrix sajátértékei adják. Ha ezek nincsenek mind az egységsugarú kör belsejében illetve a bal félsíkon, akkor a rendszer nem aszimptotikusan stabilis. Ekkor a rendszert többnyire akkor sem tekintjük „stabilisnak”, ha a redukált átviteli függvény alapján gerjesztés-válasz stabilisnak bizonyul.

Tekintsünk most egy olyan átviteli függvényt, amely GV stabilis rendszert jellemez. Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt egy $z-2$ illetve egy $s-2$ tényezővel. Az új átviteli függvény egyenértékű az eredetivel, de mivel nevezőjének van egy nullahelye az egység sugarú körön kívül illetve a jobb félsíkon, ezért arra fogunk gyanakodni, hogy nem GV stabilis rendszert jellemez. Ekkor indokolt a redukált alakot előállítani és abból levonni a következtetést. (Azt természetesen nem tudhatjuk, hogy a rendszer aszimptotikusan stabilis-e, hiszen az állapotváltozós leírását nem ismerjük.)

A stabilitással kapcsolatos további megfontolások (például stabilitási tartalék értelmezése) már meghaladja kereteinket.

Példa Határozzuk meg a rendszer átviteli függvényét, ha rendszeregyenlete

$$\text{DI: } y[k] - 2,5 y[k-1] + y[k-2] = u[k] - 3 u[k-1] + 2 u[k-2];$$

$$\text{FI: } y^{(2)}(t) - y^{(1)}(t) - 2 y(t) = u^{(1)}(t) - 2 u(t).$$

Az átviteli függvény a rendszeregyenletből „ránézésre” felírható:

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 2,5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2,5z + 1} = \frac{(z-1)(z-2)}{(z-0,5)(z-2)} = \frac{z-1}{z-0,5};$$

$$H(s) = \frac{s-2}{s^2 - s - 2} = \frac{s-2}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{s+1}.$$

Ha a rendszeregyenlet minden együtthatója pontosnak tekinthető, akkor mindkét rendszer GV stabilis, mert $z = 2$ illetve $s = 2$ nem pólusa az átviteli függvénynek. A rendszeregyenletnek egy, belépő gerjesztésekre egyenértékű alakja ennek megfelelően

$$\text{DI: } y[k] - 0,5 y[k-1] = u[k] - u[k-1];$$

$$\text{FI: } y^{(1)}(t) + y(t) = u(t).$$

Ez az eredmény már ismert időtartománybeli megfontolás alapján (2.2-3.1. pont példája). Az időtartományban azonban nem adtunk módszert a rendszeregyenlet esetleges redukciójának elvégzésére, csak azt igazoltuk, hogy az elsőrendű és a másodrendű rendszer impulzusválasza megegyezik. Újból megjegyezzük, hogy példánk nem tipikus esetet tárgyal, mert az átviteli függvény csak kivételesen redukálható. #

4.2-1.6. A pólus-zérus elrendezés

A $H(z)$ illetve a $H(s)$ átviteli függvény $z = r e^{j\vartheta}$ illetve $s = \sigma + j\omega$ komplex változójának komplex értékű függvénye. A következőkben két módszert tárgyalunk ennek ábrázolására.

Az első módszer abban áll, hogy megadjuk a DI átviteli függvény viselkedését az egység sugarú körön (azaz elvégezzük a $z = e^{j\vartheta}$ helyettesítést) illetve a FI átviteli függvény viselkedését a képzetes tengelyen (azaz elvégezzük az $s = j\omega$ helyettesítést).

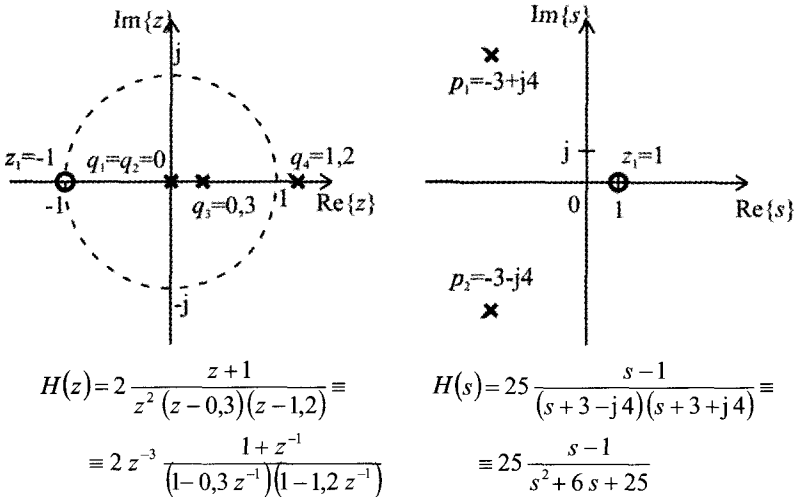
Ennek egy módja a $K(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})|$ és $\varphi(\vartheta) = \arg H(e^{j\vartheta})$ illetve a $K(\omega) = |H(j\omega)|$ függvények ábrázolása. Az ábra csak akkor jellemzi egyértelműen az átviteli függvényt, ha annak pólusai az egység sugarú körön belül illetve a bal félsíkon vannak, vagyis amikor a vizsgált rendszer GV stabilis. Ekkor a helyettesítés - mint láttuk - az átviteli karakterisztikát szolgáltatja. Általánosabb esetben ez az ábrázolási mód nem célszerű.

A másik módszer akkor célszerű, ha $H(z)$ illetve $H(s)$ változójának *racionális* függvénye, vagyis két polinom hányadosa. Jelölje az átviteli függvény *zérusait* $z = s_i$ illetve $s = z_i$, *pólusait* pedig $z = q_i$ illetve $s = p_i$. Az átviteli függvény gyöktényezőkre bontott alakja a pólusok és a zérusok ismeretében ($m \leq n$)

$$H(z) = C \frac{(z - s_1)(z - s_2) \dots (z - s_m)}{(z - q_1)(z - q_2) \dots (z - q_n)}; \quad H(s) = C \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}. \quad (4.2-21)$$

Feltételezzük, hogy a számláló és a nevező esetleg megegyező gyöktényezőivel már egyszerűsítettünk. A pólusok és a zérusok vagy valósak vagy konjugált komplex párokat alkotnak. A $H(z)$ átviteli függvénynek bármelyik (akár mindegyik) pólusa lehet nulla, de egyetlen zérusa sem lehet nulla. Az átviteli függvénynek a végtelenben nincs pólusa.

Az átviteli függvény nehézség nélkül előállítható, ha ismerjük a pólusokat, a zérusokat és a C valós együtthatót. A komplex számsíkon a zérusokat karikával, a pólusokat dőlt kereszttel szokás ábrázolni. Az átviteli függvény *e pólus-zérus elrendezése* a C együtthatóval együtt egyértelműen jellemzi az átviteli függvényt, vagyis annak ábrázolásának tekinthető (1. ábra).



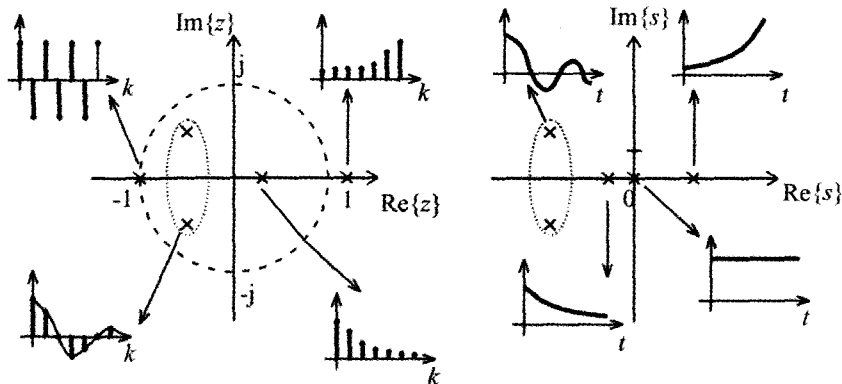
4.2-1. ábra A példaként választott DI illetve FI átviteli függvény és pólus-zérus elrendezése

A pólus-zérus elrendezés értelmezése az időtartományban

Tudjuk, hogy az impulzusválasz az átviteli függvény inverz Laplace-transzformáltja, vagyis a DI esetben q_i^k típusú ($q_i \neq 0$) tagok szuperpozíciója, többszörös pólus esetén még $k q_i^k, k^2 q_i^k, \dots$ típusú összetevők is felléphetnek, illetve FI esetben az impulzusválasz $e^{p_i t}$ típusú tagok szuperpozíciója, többszörös pólus esetén még $t e^{p_i t}, t^2 e^{p_i t}, \dots$ típusú összetevők is felléphetnek. A $q_i = 0$ pólus (azaz a z^{-r} tényező) a DI válasz késleltetéseként fogható fel. A 2. ábra mutatja néhány tipikus pólushoz vagy pólus-párhoz tartozó időfüggvény viselkedését (vö. 2.2-1. ábra).

Az átviteli függvény zérusainak nem adható ilyen közvetlen tartalom. A zérusok befolyásolják az egyes csökkenő vagy növekvő exponenciális jelek (általában: exponenciális függvényvel és polinommal szorzott szinuszos jelek) együtthatóját.

Speciálisan: ha egy zérus nagyon közel van egy pólushoz, akkor ahhoz a pólushoz tartozó exponenciális függvény szorzója nagyon kicsi lesz. Ha egy pólus és egy zérus egybeesik és mindkettő egyszeres, akkor ott sem pólus sem zérus nincs, ami megfelel a gyöktényezővel történő egyszerűsítésnek, vagyis az átviteli függvény redukálásnak.



4.2-2. ábra Az átviteli függvény pólusainak hatása az időfüggvényre

Az ábrából jól látható a GV stabilitás és a pólusok helyzetének kapcsolata (az egységsugarú körön belül, kívül, speciálisan rajta, illetve a képzetes tengelytől balra, jobbra, speciálisan rajta). Stabilis rendszer vezető pólusának azt szokták nevezni, amelyik legközelebb van a stabilitási tartomány határához, vagyis amelyekre $|q_i|$ a legnagyobb illetve $|\Re\{p_i\}|$ a legkisebb. Ez határozza meg ugyanis azt a DI illetve FI időtartamot, amely alatt a szabad összetevő leglassúbb tagja is elhanyagolhatóvá válik. Könnyen beláthatjuk, hogy $k_i \approx -3 \ln |q_i|$ illetve $t_i \approx -3 / \Re\{p_i\}$ idő után a megfelelő összetevő kezdeti értékének 5%-a alá csökken. A legnagyobb ilyen idő a szabad összetevő eltűnéséhez szükséges idő egy becslése. Ennél pontosabb kijelentést csak a válasz ismeretében tehetünk, hiszen a gerjesztéstől is függően a szabad összetevő egyes tagjainak az együttthatója nagyon eltérő lehet.

A pólus-zérus elrendezés értelmezése a frekvenciatartományban

A gerjesztés válasz stabilis rendszer pólus-zérus elrendezése az átviteli függvény és az átviteli karakterisztika $H(e^{j\vartheta}) = H(z)_{z=e^{j\vartheta}}$ illetve $H(j\omega) = H(s)_{s=j\omega}$ kapcsolata alapján értelmezhető. A (21) alakba helyettesítve

$$H(e^{j\vartheta}) = C \frac{(e^{j\vartheta} - s_1)(e^{j\vartheta} - s_2) \cdots (e^{j\vartheta} - s_m)}{(e^{j\vartheta} - q_1)(e^{j\vartheta} - q_2) \cdots (e^{j\vartheta} - q_n)}, \quad (4.2-22)$$

$$H(j\omega) = C \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_n)}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$e^{j\vartheta} - s_i = B_i e^{j\beta_i}, \quad e^{j\vartheta} - q_i = A_i e^{j\alpha_i};$$

$$j\omega - z_i = B_i e^{j\beta_i}, \quad j\omega - p_i = A_i e^{j\alpha_i}. \quad (4.2-23)$$

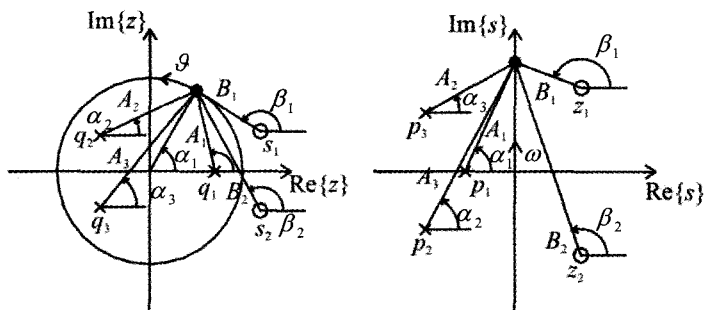
A 3. ábrából látható, hogy $e^{j\vartheta} - s_i$ (vagy $e^{j\vartheta} - q_i$) az s_i zérustól (vagy a q_i pólustól) az egység sugarú kör \mathcal{G} szögű pontja felé mutat, illetve $j\omega - z_i$ (vagy $j\omega - p_i$) a z_i zérustól (vagy a p_i pólustól) a képzetes tengely ω pontja felé mutat.

A (22)-be helyettesítve kapjuk az amplitúdó-karakterisztika és a fázis-karakterisztika következő kifejezését:

$$|H| = |C| \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}, \tag{4.2-24}$$

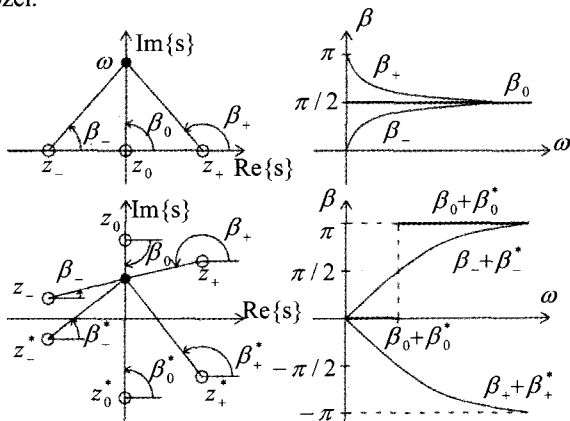
$$\text{arc } H = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + \text{arc } C.$$

Az $\text{arc } C = 0$, ha C pozitív és $\text{arc } C = \pm 180^\circ$, ha C negatív.



4.2-3. ábra Az átviteli karakterisztika szerkesztése az átviteli függvény pólus-zérus elrendezéséből

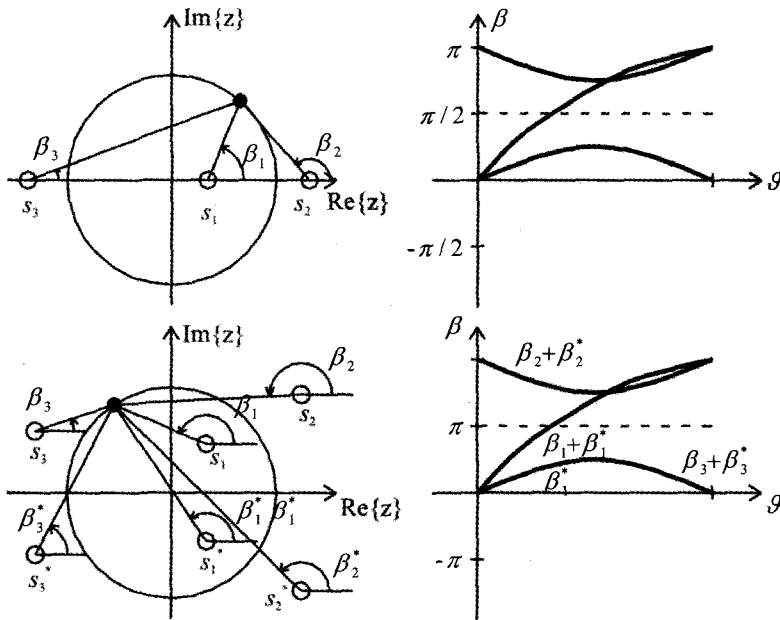
Ennek alapján az amplitúdó-karakterisztika és a fázis-karakterisztika akár meg is szerkeszthető. Többnyire azonban csak kvalitatív következtetéseket vonunk le ezek viselkedéséről. Ha például valamilyen ϑ illetve ω körfrekvencián a körön illetve a képzetes tengelyen mozgó pont nagyon közel kerül egy pólushoz, akkor a megfelelő A_i érték a nevezőben kicsi lesz, ezért az várható, hogy ezen körfrekvencia környezetében $|H|$ -nak lokális maximuma van. Fordított következtetés vonható le, ha a mozgó pont egy zérushoz kerül közel.



4.2-4. ábra A β szög függése az ω körfrekvenciától néhány tipikus zérusra

Egy GV stabilis rendszer pólus-zérus elrendezéséből érdekes következtetéseket vonhatunk le a *fázis-karakterisztika* viselkedését illetően. Alább megvizsgáljuk először a FI rendszer, aztán a DI rendszer fázis-karakterisztikájának viselkedését. Látni fogjuk, hogy bizonyos hasonlóságok mellett eltérések is vannak a két esetben.

A 3. ábrából következik, hogy a FI rendszerre az $\beta_i(\omega) = \arcsin(j\omega - z_i)$ szögek a 4. ábrán megadott módon változnak attól függően, hogy a vizsgált zérus vagy konjugált komplex zérus-pár hol helyezkedik el. Ha a zérus a bal félsíkon van (z_-), akkor $\beta_-(\omega)$ monoton növekszik. Ha a zérus a képzetes tengelyen van (z_0), akkor $\beta_0(\omega)$ szakaszonként állandó és ugrása van. Ha a zérus a jobb félsíkon van (z_+), akkor $\beta_+(\omega)$ monoton csökken. Az átviteli függvény pólusai feltétlenül a bal félsíkon vannak. Az $\alpha_i(\omega) = \arcsin(j\omega - p_i)$ szögek ugyanolyan viselkedésűek, mint a $\beta_-(\omega)$ szög, vagyis monoton növekszenek.



4.2-5. ábra A β szög viselkedése a ϑ körfrekvencia függvényében néhány tipikus zérusra

A DI rendszer fázis-karakterisztikájának menetét hasonló módon követhetjük, de most a helyzet valamivel bonyolultabb. A 3. és az 5. ábrából arra következtethetünk, hogy az egység sugarú kör belsejébe eső zérushoz tartozó $\beta_1(\vartheta) = \arcsin(e^{j\vartheta} - s_1)$ szög monoton növekszik. Az egység sugarú körön kívüli zérusokhoz tartozó $\beta_2(\vartheta)$, vagy $\beta_3(\vartheta)$ szög változása azonban nem monoton, nem úgy, mint FI esetben. A pólushoz tartozó $\alpha_i(\vartheta) = \arcsin(e^{j\vartheta} - q_i)$ szög monoton növekszik.

A fázis-karakterisztika helyett gyakran annak körfrekvencia szerinti negatív deriváltját, a futási idő karakterisztikát vizsgálják.

A 4.2-3.4. pontban még visszatérünk e tulajdonságokra, amikor a minimálfázisú rendszert értelmezzük.

4.2-1.F. Feladatok

F-1. Egy DI illetve FI rendszer impulzusválasza

- (a) $h[k] = 2\delta[k]$; $h(t) = 2\delta(t)$.
 (b) $h[k] = 2\delta[k-3]$; $h(t) = 2\delta(t-3)$.
 (c) $h[k] = \varepsilon[k]$; $h(t) = \varepsilon(t)$.
 (d) $h[k] = \varepsilon[k+1]$; $h(t) = \varepsilon(t+1)$.
 (e) $h[k] = \varepsilon[k] \{0,5^k - 0,6^k\}$; $h(t) = \varepsilon(t) \{e^{-0,5t} - e^{-0,6t}\}$.
 (f) $h[k] = \varepsilon[k-1] \{0,5^{k-1} - 2^{k-1}\}$; $h(t) = \varepsilon(t-1) \{e^{-0,5(t-1)} - e^{2(t-1)}\}$.
 (g) $h[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-10]$; $h(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-10)$.

Határozza meg a rendszer átviteli függvényét, ha az értelmezett!

F-2. Az előző feladatban megadott rendszerek közül melyiknek van olyan alakú rendszeregyenlete vagy állapotváltozós leírása, mint amilyent eddig értelmeztünk?

F-3. Az F-1. feladatban meghatározott átviteli függvények ismeretében döntse el, hogy melyik rendszer GV stabilis!

Ellenőrizze így kapott megállapításokat az impulzusválasz alapján!

F-4. Jelölje a lineáris, invariáns, DI illetve FI rendszer ugrásválaszát, azaz az $\varepsilon[k]$ illetve az $\varepsilon(t)$ egységugrás gerjesztéshez tartozó válaszát $g[k]$ illetve $g(t)$.

Igazolja a Laplace-transzformáció alkalmazásával, hogy kauzális rendszer esetén az ugrásválasz kifejezése az impulzusválasszal

$$g[k] = \varepsilon[k] \sum_{i=0}^k h[k-i] \equiv \varepsilon[k] \sum_{p=0}^k h[p]; \quad g(t) = \varepsilon(t) \int_{-0}^t h(\tau) d\tau.$$

F-5. Egy DI rendszer rendszeregyenlete $y^{(i)}[k] = y[k-i]$ jelöléssel (vö. 2.2-2.F-3.)

- (a) $y - 0,5 y^{(1)} = u - u^{(1)}$
 (b) $y - 2,5 y^{(1)} + y^{(2)} = u - 3 u^{(1)} + 2 u^{(2)}$.
 (c) $y - 2,5 y^{(1)} + y^{(2)} = u - 3 u^{(1)} + 2,0001 u^{(2)}$.

Azonos vagy különböző rendszereket írnak le ezek a rendszeregyenletek?

F-6. Egy DI illetve egy FI rendszer átviteli karakterisztikája

- (a) valós értékű.
 (b) képzetes értékű.

Leírható egy ilyen rendszer az átviteli függvényével?

F-7. Egy DI illetve egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D u.$$

E rendszer nyilván nem aszimptotikusan stabilis. (Indokolja meg, miért nyilvánvaló ez!)

Mi a feltétele annak, hogy a rendszer gerjesztés-válasz stabilis legyen?

Nagyon speciális a vizsgált másodrendű rendszer?

F-8. Egy DI rendszer amplitúdó-karakterisztikájának négyzete (a rendszer energia-átviteli karakterisztikája)

$$K^2(\vartheta) = \frac{1}{1 + a^2 \sin^2(\vartheta/2)}.$$

(a) Lássa be, hogy ez egy aluláteresztő jellegű rendszer! Határozza meg azt a ϑ_0 körfrekvenciát, amelyen $K(\vartheta_0) = 1/\sqrt{2}$ értékű!

*(b) Adjon meg egy olyan $H(z)$ átviteli függvényt, amelyhez a megadott amplitúdó-karakterisztika tartozik!

4.2-1.M. Megoldások

M-1. Határozza meg a DI illetve a FI impulzusválasz Laplace-transzformáltját!

(a) $H(z) = 2$; $H(s) = 2$.

(b) $H(z) = 2z^{-3} \equiv \frac{2}{z^3}$; $H(s) = 2e^{-3s}$.

(c) $H(z) = \frac{z}{z-1}$; $H(s) = \frac{1}{s}$.

(d) A rendszer nem kauzális, átviteli függvénye nem értelmezett, az impulzusválasz Laplace-transzformáltja nem ad értelmes mennyiséget.

(e) $H(z) = \frac{-0,1z}{(z-0,5)(z-0,6)}$; $H(s) = \frac{0,1}{(s+0,5)(s+0,6)}$.

(f) $H(z) = \frac{-1,5}{(z-0,5)(z-2)}$; $H(s) = \frac{-2,5e^{-s}}{(s+0,5)(s-2)}$.

(g) $H(z) = (1-z^{-10})\frac{z}{z-1}$; $H(s) = \frac{1-e^{-10s}}{s}$.

M-2. Azok az átviteli függvények, amelyek racionálisak. A DI esetben a (d) kivételével valamennyi, a FI esetben csak (a), (c) és (e).

M-3. A $H(z)$ alapján: az (a), (b), (e) és (g) jelűek GV stabilisak; a (c) jelű nem GV stabilis, a GV stabilitás határhelyzetében van; az (f) jelű nem GV stabilis, sőt labilisnak nevezhető, a (d) nem dönthető el.

A $H(s)$ alapján: az (a) és az (e) jelű GV stabilis; a (c) jelű nem GV stabilis, a stabilitás határhelyzetében van; a (b), (d), (f) és (g) jelű nem dönthető el. Valójában csak a (d) jelű eset nem dönthető el. A másik három esetben, amikor az átviteli függvény nem racionális, az eltolási tétel alapján tudunk dönteni.

A $h[k]$ alapján: a (d) jelű nem GV stabilis, a GV stabilitás határhelyzetében van; a többi, mint előbb.

A $h(t)$ alapján: a (b) és (g) jelű GV stabilis, a (d) jelű nem GV stabilis, a GV stabilitás határhelyzetében van; az (f) jelű nem GV stabilis, sőt labilisnak nevezhető; a többi, mint előbb.

M-4. A DI vagy a FI esetben az egységugrás Laplace-transzformáltját képezve a válasz kifejezhető inverz Laplace-transzformációval:

$$g[k] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(z) \frac{z}{z-1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [1+z^{-1}+z^{-2}+\dots] H(z) \right\}; \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\}.$$

Ebből a megadott összefüggések már következnek.

Az ugrásválasz kifejezhető az impulzusválasszal nem kauzális rendszerre is, de ehhez nem használható a Laplace-transzformáció és az eredmény is kissé módosul.

M-5. Határozza meg az átviteli függvényt és redukálja azt, ha lehetséges.

$$(a) H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0,5 z^{-1}} \equiv \frac{z - 1}{z - 0,5}.$$

$$(b) H(z) = \frac{1 - 3 z^{-1} + 2 z^{-2}}{1 - 2,5 z^{-1} + z^{-2}} \equiv \frac{(z - 1)(z - 2)}{(z - 0,5)(z - 2)} = \frac{z - 1}{z - 0,5}.$$

$$(c) H(z) = \frac{z^2 - 3 z + 2,0001}{(z - 0,5)(z - 2)} \equiv \frac{(z - 1)(z - 2) + 0,0001}{(z - 0,5)(z - 2)}.$$

Elméleti szempontból az (a) és a (b) ugyanazt a rendszert írja le, a (c) jelű rendszer hozzájuk nagyon hasonló, de míg az előzőek GV stabilisak, az utolsó nem az.

A numerikus bizonytalanságok miatt nehéz határozott választ adni a kérdésre, noha az elméleti válasz egyértelmű.

M-6. Az impulzusválasz az (a) jelű esetben páros, a (b) jelű esetben páratlan jel. Eltekintve a $H = K$ esettől (a frekvenciától független, valós értékű átviteli karakterisztika) az ilyen rendszer nem kauzális, átviteli függvénye nem értelmezett.

M-7. A rendszer akkor és csakis akkor gerjesztés-válasz stabilis, ha $B_2 C_2 = 0$, vagyis ha e két paraméter legalább egyike nulla. Egyszeres valós sajátértékek esetén mindig elérhető, hogy az A mátrix diagonális legyen.

M-8. (a) A $K(\vartheta)$ monoton csökken a $(0, \pi)$ intervallumban a $K(0) = 1$ értékről a $K(\pi) = 1/\sqrt{1+a^2} < 1$ értékre. Ha $a^2 > 1$, akkor $\vartheta_0 = 2 \arcsin(1/a)$.

*(b) Az amplitúdó-karakterisztika négyzetének más alakjai

$$K^2(\vartheta) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 \cos \vartheta} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 e^{j\vartheta} - \frac{1}{4}a^2 e^{-j\vartheta}}.$$

Ebből következően $e^{j\vartheta} = z$ helyettesítéssel

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 z - \frac{1}{4}a^2 z^{-1}} = \frac{C^2}{(z - q)(z^{-1} - q)}.$$

A C és q paraméterek meghatározására szolgáló egyenletek

$$\frac{1+q^2}{C^2} = 1 + \frac{a^2}{2}, \quad \frac{q}{C^2} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{1+q^2}{q} = 2 \frac{2+a^2}{a^2}.$$

A másodfokú egyenlet megoldásával és $|q| < 1$ kielégítésével

$$q = \frac{2 + a^2 - 2\sqrt{1+a^2}}{a}, \quad C = \pm \frac{2\sqrt{q}}{a}.$$

A keresett átviteli függvény $H(z) = C/(z - q)$ vagy $H(z) = Cz/(z - q)$.

4.2-2. A válasz számítása

4.2-2.1. Az átviteli függvény alkalmazása

Meg akarjuk határozni egy lineáris, invariáns, kauzális DI illetve FI rendszernek az adott $u[k]$ illetve $u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y[k]$ illetve $y(t)$ válaszát $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvényének ismeretében. A feladat többféleképpen is megoldható. Az alkalmazható módszerek a gerjesztés és a rendszer tulajdonságaitól függenek.

Belépő gerjesztéshez tartozó válasz

Tekintsük először azt az esetet, amikor a belépő gerjesztéshez tartozó választ keressük. Először határozzuk meg a gerjesztés Laplace-transzformáltját (ez szinte minden gyakorlati esetben értelmezett):

$$U(z) = \mathcal{L}\{u[k]\}; \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}. \quad (4.2-25)$$

Az átviteli függvény (1) definíciója értelmében a válasz kifejezése a komplex frekvenciatartományban:

$$Y(z) = H(z)U(z); \quad Y(s) = H(s)U(s). \quad (4.2-26)$$

Inverz Laplace-transzformációval (4.1-2. szakasz) előállíthatjuk a válasz időfüggvényét:

$$\begin{aligned} \text{DI: } y[k] &= \mathcal{L}^{-1}\{H(z)U(z)\}; \\ \text{FI: } y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}. \end{aligned} \quad (4.2-27)$$

Az inverz transzformáció belépő választ eredményez. Ez helyes is, hiszen kikötéseink szerint a rendszer kauzális és a gerjesztés belépő.

Stabilis rendszer válasza

Ha a rendszer GV stabilis, azaz $H(z)$ minden pólusa egységsugarú körön belül illetve $H(s)$ minden pólusa a bal félsíkon van. Ekkor a $H(e^{j\omega})$ illetve a $H(j\omega)$ átviteli karakterisztika előállítható $z = e^{j\omega}$ illetve $s = j\omega$ helyettesítéssel az átviteli függvényből. Ha meg tudjuk határozni a (nem feltétlenül belépő) gerjesztés spektrumát, akkor a válasz spektruma is előállítható. Pontos vagy közelítő inverz Fourier-transzformációval előállítható a válasz $y[k]$ illetve $y(t)$ időfüggvénye (3.2-2.1. pont).

Példa Egy DI illetve egy FI rendszer átviteli függvénye adott:

$$H(z) = \frac{0,5z}{z-0,5}; \quad H(s) = \frac{s}{s+2}.$$

Határozzuk meg a válasz időfüggvényét, ha a gerjesztés

$$u[k] = \varepsilon[k] \{1 - 0,8^k\}; \quad u(t) = \varepsilon(t) \{1 - e^{-3t}\}.$$

A gerjesztés belépő, ezért alkalmazhatjuk a számítás legegyszerűbb módját:

$$U(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,8} = \frac{0,2z}{(z-1)(z-0,8)}; \quad U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} = \frac{3}{s(s+3)};$$

$$Y(z) = \frac{0,1z^2}{(z-1)(z-0,8)(z-0,5)}; \quad Y(s) = \frac{3}{(s+2)(s+3)};$$

$$y[k] = \varepsilon[k] \left\{ 1 - \frac{4}{3}(0,8)^k + \frac{1}{3}(0,5)^k \right\}; \quad y(t) = \varepsilon(t) \{ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} \}.$$

Az Olvasóra bízunk az eredmény ellenőrzését a második és a harmadik módszer alkalmazásával. A spektrális leírás alkalmazható, de némi óvatosságra van szükség. #

A válasz számítása általános esetben

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a kauzális (de esetleg nem GV stabilis) rendszer gerjesztése nem belépő. Ekkor inverz Laplace-transzformációval meghatározzuk a rendszer $h[k]$ illetve $h(t)$ impulzusválaszát, majd ennek ismeretében számítjuk a nem belépő választ az impulzusválasz és a gerjesztés konvolúciójaként.

4.2-2.2. A rendszeregyenlet megoldása

Legyen adott egy lineáris, invariáns, kauzális rendszer *rendszeregyenlete* a szokásos alakjában (2.2-1. szakasz):

$$\text{DI: } y[k] + \sum_{i=1}^n a_i y[k-i] = \sum_{i=0}^m b_i u[k-i];$$

$$\text{FI: } y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n b_{n-i} u^{(i)}(t),$$
(4.2-28)

ahol $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ jel i -edik (általánosított) deriváltját jelöli. Ismertek az a_i, b_i állandó együtthatók, továbbá $u[k], k \in \mathbf{Z}$ illetve $u(t), t \in \mathbf{R}$. Feltételezzük, hogy a rendszer „múltjának”, azaz a $k=0$ illetve a $t=0$ időpont előtti viselkedésének ismeretében már meghatároztuk az $y[-1], y[-2], \dots, y[-n]$ illetve az $y(-0), y^{(i)}(-0), \dots, y^{(n-1)}(-0)$ kiindulási értékeket. Belépő gerjesztés esetén ezek mindegyike nulla. Célunk $y[k], k \in \mathbf{N}$ illetve $y(t), t \in \mathbf{R}_+$ meghatározása.

Először belépő, majd általános gerjesztésre tárgyaljuk a feladat megoldását a Laplace-transzformáció alkalmazásával.

Belépő gerjesztés hatása

Ha a gerjesztés belépő, akkor a kauzális rendszer válasza is belépő. Ekkor meghatározhatjuk a rendszer $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvényét (4.2-1.2. pont). Ennek ismeretében az adott gerjesztéshez tartozó válasz inverz DI illetve FI Laplace-transzformációval számítható.

Nem belépő gerjesztés hatása

A nem belépő gerjesztés vizsgálata során a jelölések egyszerűsítése érdekében szorítkozunk másodrendű rendszerekre. Az általánosítás nagyobb rendszámra nem okoz elvi nehézséget.

Vizsgáljuk a következő rendszeregyenletet és kiindulási értékeket:

$$y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + b_2 u[k-2]; \quad y[-1], y[-2]; \quad (4.2-29)$$

$$y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_2 y(t) = b_0 u^{(2)}(t) + b_1 u^{(1)}(t) + b_2 u(t); \quad y(-0), y^{(1)}(-0).$$

Képezzük az egyenlet Laplace-transzformáltját. Vegyük figyelembe a késleltetett DI jelre vonatkozó (4.1-25) illetve a FI jel deriváltjára vonatkozó (4.1-27, 28) szabályokat:

$$\mathcal{L}\{x[k-1]\} = z^{-1}X(z) + x[-1], \quad \mathcal{L}\{x[k-2]\} = z^{-2}X(z) + x[-2] + x[-1]z^{-1};$$

$$\mathcal{L}\{x^{(1)}(t)\} = sX(s) - x(-0), \quad \mathcal{L}\{x^{(2)}(t)\} = s^2X(s) - x(-0)s - x^{(1)}(-0).$$

A transzformáció eredménye

$$Y(z) + a_1 \{z^{-1}Y(z) + y[-1]\} + a_2 \{z^{-2}Y(z) + y[-2] + y[-1]z^{-1}\} =$$

$$= b_0 U(z) + b_1 \{z^{-1}U(z) + u[-1]\} + b_2 \{z^{-2}U(z) + u[-2] + u[-1]z^{-1}\};$$

$$\{s^2 Y(s) - y(-0)s - y^{(1)}(-0)\} + a_1 \{s Y(s) - y(-0)\} + a_2 Y(s) =$$

$$= b_0 \{s^2 U(s) - u(-0)s - u^{(1)}(-0)\} + b_1 \{s U(s) - u(-0)\} + b_2 U(s).$$

Ennek megoldásával kapjuk a transzformált válasz kifejezését:

$$\text{DI: } Y(z) = \frac{\{b_0 z^2 + b_1 z + b_2\}U(z) + c_0 z^2 + c_1 z}{z^2 + a_1 z + a_2}, \quad (4.2-30)$$

$$c_0 \equiv b_1 u[-1] + b_2 u[-2] - a_1 y[-1] - a_2 y[-2]; \quad c_1 \equiv b_2 u[-1] - a_2 y[-1];$$

$$\text{FI: } Y(s) = \frac{\{b_0 s^2 + b_1 s + b_2\}U(s) + c_1 s + c_2}{s^2 + a_1 s + a_2},$$

$$c_1 \equiv y(-0) - b_0 u(-0), \quad c_2 \equiv -a_1 y(-0) - y^{(1)}(-0) - b_1 u(-0) - b_0 u^{(1)}(-0).$$

Az $y[k]$ illetve az $y(t)$ válasz két összetevőből áll. Az elsőt a gerjesztés nem-negatív k illetve t esetén felvett értékei határozzák meg, ez $H(z)U(z)$ illetve $H(s)U(s)$ inverz Laplace-transzformáltja. A válasz második összetevője csak a gerjesztés negatív időkben felvett értékeitől függ. A második összetevőt nem befolyásolják a gerjesztés Laplace-transzformáltjának pólusai.

Összehasonlítva a rendszeregyenlet időtartománybeli megoldásával (2.2-2. szakasz), jól látható a Laplace-transzformációs módszer egy előnye: csak a válasz kiindulási értékeire van szükségünk, az $y[0]$, $y[1]$,... illetve az $y(+0)$, $y^{(1)}(+0)$,... kezdeti értékeket nem kell meghatározni.

A kiindulási értékek meghatározása csak akkor kerülhető el, ha számításunkat mindig attól az időponttól kezdjük, amely előtt a gerjesztés azonosan nulla. Ez az álláspont fizikailag indokolt, de nem mindig kényelmes. Ha azonban nem a gerjesztés belépésének pillanatától kezdjük a számítást, akkor meg kell vizsgálni, hogy a formálisan számított kiindulási értékek valóban előállnak-e, vagyis hogy a rendszer stabilis-e.

1. példa Egy diszkrét idejű rendszer rendszeregyenlete

$$y - y^{(1)} + 0,24 y^{(2)} = u + 0,5 u^{(1)}.$$

Határozzuk meg a választ, ha a gerjesztés

$$u[k] = 2 \{1 - \varepsilon[k]\} + \varepsilon[k] 0,5^k.$$

A rendszer GV stabilis (ezt célszerű a számítás kezdése előtt tisztázni, egyébként a feladat értelmetlen). Az $u[k]=2$, $k \in \mathbf{Z}_-$ állandó gerjesztéshez egy $y[k]=y^-$, $k \in \mathbf{Z}_-$ állandó válasz tartozik. A rendszeregyenletbe helyettesítve:

$$y^- - y^- + 0,24 y^- = 2 + (0,5)(2) \Rightarrow y^- = 12,5.$$

Most helyettesíthetünk (30)-ba, vagy követhetjük az előzőleg leírt eljárást:

$$Y(z) - \{z^{-1}Y(z) + 12,5\} + 0,24 \{z^{-2}Y(z) + 12,5 + 12,5z^{-1}\} = \frac{z}{z-0,5} + 0,5 \left\{ z^{-1} \frac{z}{z-0,5} + 2 \right\}.$$

A válasz transzformáltjának kifejezése elemi rendezések után

$$Y(z) = z \frac{11,5 z^2 - 7,75 z + 1,5}{(z^2 - z + 0,24)(z - 0,5)} \equiv z \frac{11,5 z^2 - 7,75 z + 1,5}{(z - 0,6)(z - 0,4)(z - 0,5)}.$$

Részlet törtre bontás után egyszerűen kapjuk a válasz időfüggvényét:

$$y[k] = 49,5 (0,6)^k + 12,0 (0,4)^k - 50,0 (0,5)^k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Tudjuk, hogy $k \in \mathbf{Z}_-$ esetén $y[k]=12,5$. Noha a megoldás csak k nem-negatív értékeire érvényes, de $k = -1$ és -2 esetén mégis a helyes eredményt adja, de k más negatív értékeire nem. #

2. példa Egy folytonos idejű rendszer rendszeregyenlete

$$y^{(2)} + 4 y^{(1)} + 3 y = 5 u^{(1)} + u.$$

Határozzuk meg a választ, ha a gerjesztés

$$u(t) = 6 \{1 - \varepsilon(t)\} + 4 \varepsilon(t).$$

Mivel a rendszer GV stabilis (egyébként a feladat értelmetlen), ezért az $u(t) = 6$, $t \in \mathbf{R}_-$ állandó gerjesztéshez $y(t) = y^-$, $t \in \mathbf{R}_-$ állandó válasz tartozik. Az állandó minden deriváltja nulla. Ennek alapján a rendszeregyenletből $y^- = 6/3 = 2$ adódik. Képezzük a rendszeregyenlet Laplace-transzformáltját ezek felhasználásával:

$$\{s^2 Y(s) - 2s - 0\} + 4 \{s Y(s) - 2\} + 3 Y(s) = 5 \left\{ s \frac{4}{s} - 6 \right\} + \frac{4}{s}.$$

A transzformált válasz kifejezése ebből

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 2s + 4}{s(s^2 + 4s + 3)} \equiv \frac{2s^2 - 2s + 4}{s(s+1)(s+3)}.$$

Részlet törtre bontás után egyszerűen kapjuk a válasz időfüggvényét:

$$y(t) = \frac{4}{3} - 4 e^{-t} + \frac{14}{3} e^{-3t}, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Az Olvasóra bízunk a válasz megadását a gerjesztéshez hasonló alakban.

Akár $Y(s)$ kifejezéséből polinomosztással, akár $y(t)$ kifejezéséből differenciálással megállapíthatjuk, hogy $y(+0) = 2$, $y'(+0) = -10$. Az $y(t)$ folytonos a $t = 0$ helyen, de deriváltja nem az. #

4.2-2.3. Az állapotváltozós leírás megoldása

Legyen adott egy lineáris, invariáns kauzális DI illetve FI rendszer állapotváltozós leírása normál alakban. Egy gerjesztés és egy válasz esetén (2.3-1. szakasz):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u, \quad y = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + D u, \quad (4.2-31)$$

ahol $x'[k] = x[k+1]$ illetve $x'(t)$ az $x(t)$ általánosított deriváltja.

Ha minden gerjesztés belépő, akkor meghatározhatjuk a H átviteli függvényt (4.2-1.3. pont). Ennek ismeretében a transzformált válasz kifejezhető:

$$Y(z) = H(z)U(z); \quad Y(s) = H(s)U(s). \quad (4.2-32)$$

Inverz Laplace-transzformációval előállíthatjuk a válasz $y[k]$ illetve $y(t)$ időfüggvényét, amely maga is belépő jel.

Ha a gerjesztés nem belépő, akkor először meg kell határoznunk az állapotvektor $\mathbf{x}[0]$ kezdeti értékét illetve $\mathbf{x}(-0)$ kiindulási értékét a rendszer múltbeli viselkedése alapján ($k \in \mathbf{Z}_-$ illetve $t \in \mathbf{R}_-$). Képezzük az állapotváltozós leírás Laplace- transzformáltját a (4.1-26, 27) figyelembe vételével, amely szerint

$$\mathcal{L}\{x'[k]\} = z X(z) - x[0]z; \quad \mathcal{L}\{x'(t)\} = s X(s) - x(-0).$$

Az állapotváltozós leírás Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} z \mathbf{X}(z) - \mathbf{x}[0]z &= \mathbf{A} \mathbf{X}(z) + \mathbf{B} U(z), & s \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(-0) &= \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} U(s), \\ Y(z) &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}(z) + D U(z); & Y(s) &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}(s) + D U(s). \end{aligned}$$

A transzformált állapotegyenlet megoldása

$$\mathbf{X}(z) = [z \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{B} U(z) + \mathbf{x}[0]z\}; \quad \mathbf{X}(s) = [s \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{B} U(s) + \mathbf{x}(-0)\}.$$

Ezt a transzformált válasz kifejezésbe helyettesítve, kapjuk annak végső alakját:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \{\mathbf{C}^T [z \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + D\} U(z) + \mathbf{C}^T [z \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{x}[0]z; \\ Y(s) &= \{\mathbf{C}^T [s \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + D\} U(s) + \mathbf{C}^T [s \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{x}(-0). \end{aligned} \quad (4.2-33)$$

Az első tagban az U szorzója az átviteli függvénynek a már megadott (12) szerinti alakját adja. A második tag fejezi ki az állapotvektor kezdeti illetve kiindulási értékének hatását a válaszra. A válasz időfüggvénye inverz Laplace-transzformációval állítható elő.

*4.2-2.4. A periodikus gerjesztéshez tartozó válasz

Legyen a lineáris, invariáns, kauzális rendszer egyetlen gerjesztése *belépő* és k illetve t nem-negatív értékeire *periodikus* jel, amelynek periódusideje $L \in \mathbf{Z}_+$ illetve $T \in \mathbf{R}_+$. A 4.1-1.4. pontban bevezetett jelölést alkalmazva, a gerjesztés első periódusát

$$u_L[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} u[k]; \quad u_T(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} u(t) \quad (4.2-34)$$

írja le. A $k=0$ illetve a $t=0$ időpont után periodikus gerjesztés kifejezése ($\varepsilon_L[k]$ illetve $\varepsilon_T(t)$) az ismétlési operátor):

$$\begin{aligned} u[k] &= \varepsilon_L[k] u_L[k] \equiv u_L[k] + u_L[k-L] + u_L[k-2L] + \dots; \\ u(t) &= \varepsilon_T(t) u_T(t) \equiv u_T(t) + u_T(t-T) + u_T(t-2T) \dots \end{aligned} \quad (4.2-35)$$

Képezzük $u_L[k]$ illetve $u_T(t)$ Laplace-transzformáltját, ami rendszerint egyszerű feladat:

$$U_L(z) = \mathcal{Z}\{u_L[k]\}; \quad U_T(s) = \mathcal{L}\{u_T(t)\}.$$

A gerjesztés Laplace-transzformáltja a (4.1-42) értelmében

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-L}} U_L(z) \equiv \frac{z^L}{z^L-1} U_L(z); \quad U(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} U_T(s). \quad (4.2-36)$$

A rendszer $H(z)$ vagy $H(s)$ átviteli függvényének ismeretében kifejezhetjük a válasz Laplace-transzformáltját:

$$Y(z) = H(z) \frac{z^L}{z^L-1} U_L(z); \quad Y(s) = H(s) \frac{1}{1-e^{-sT}} U_T(s). \quad (4.2-37)$$

Célunk az $y[k]$ illetve $y(t)$ válasz időfüggvényének meghatározása. Erre két eljárást fogunk adni. Konkrét feladatok megoldásánál az alább leírtak gondolatmenetét célszerű követni és nem a végeredményeket formulaként használni.

A továbbiakban racionális átviteli függvényre szorítkozunk:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}; \quad H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (4.2-38)$$

ahol a B polinom fokszáma nem nagyobb az A polinom fokszámánál.

A diszkrét idejű válasz Fourier-soros alakja

Állítsuk elő az $y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ DI függvényt részlettörtekre bontással. Az $Y(z)$ pólusai egyfelől a $H(z)$ átviteli függvény q_i pólusai, másrészt a $z^L - 1 = 0$ egyenlet L számú z_p gyöke, amelyek az egységsugarú körön helyezkednek el. Az ennek megfelelő $z_p^L = e^{j p 2\pi}$ alakból következik, hogy

$$z_p = e^{j p \Theta}, \quad \Theta \equiv \frac{2\pi}{L}; \quad p = 0, 1, 2, \dots, L-1. \quad (4.2-39)$$

A $z^L U_L(z)$ függvénynek nincs pólusa, mert $U_L(z)$ a z^{-1} változónak legfeljebb $L-1$ fokszámú polinomja.

Szorítkozzunk arra az esetre, amikor az átviteli függvény minden q_i pólusa egyszeres (az általánosítás nem jelent elvi nehézséget). A válasz kifejezése ekkor

$$y[k] = \varepsilon[k] \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{B(q_i)}{A_i(q_i)} \frac{q_i^{L-1}}{q_i^L - 1} U_L(q_i) q_i^k + \sum_{p=0}^{L-1} \frac{1}{L} H(e^{j p \Theta}) U_L(e^{j p \Theta}) e^{j p \Theta k} \right\}, \quad (4.2-40)$$

ahol $A_i(z) = A(z)/(z - q_i)$. Például a L'Hospital-szabály alapján kapjuk, hogy

$$\left. \frac{z^L - 1}{z - z_p} \right|_{z=z_p} = L z_p^{L-1},$$

amint azt a második tagban felhasználtuk.

A válasz kifejezésében az első tag a válasz szabad összetevője, amely nullához tart, ha a rendszer GV stabilis (minden $|q_i| < 1$). A második tag a gerjesztett összetevő Fourier-soros alakja. Ez átírható arra a célszerűbb alakra, amely csak a $p = 0, 1, \dots, L/2$ vagy $(L-1)/2$ sorszámú tagokat tartalmazza (3.1-2.2. pont).

A folytonos idejű válasz Fourier-soros alakja

A folytonos idejű esetben az előzőhöz hasonlóan járhatunk el. Az $Y(s)$ transzformált válasz pólusai egyfelől a $H(s)$ átviteli függvény p_i pólusai, továbbá az $1 - e^{-sT} = 0$ egyenlet gyökei, amelyek mind képzetesek. Az $e^{s_k T} = e^{jk2\pi}$ alakból kapjuk, hogy

$$s_k = jk\Omega, \quad \Omega \equiv \frac{2\pi}{T}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.2-41)$$

Az $U_T(s)$ függvénynek nincs pólusa, hiszen ellenkező esetben nem lehetne nulla $t > T$ esetén. Az $1 - e^{-sT}$ függvény nem polinom, mégis alkalmazható rá a részlettrökre bontás módszere, amely most végtelen sort jelent. A nevezőben megjelenő tényező

$$D_i(s_k) = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{1 - e^{-sT}}{s - s_k} = \left. \frac{d(1 - e^{-sT})}{ds} \right|_{s_k} = T e^{s_k T} = T.$$

Szorítkozzunk arra az esetre, amikor az átviteli függvény minden p_i pólusa egyszeres (az általánosítás nem jelent elvi nehézséget). A válasz kifejezése ekkor

$$y(t) = \varepsilon(t) \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{A_i(p_i)} \frac{1}{1 - e^{-p_i T}} U_T(p_i) e^{p_i t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} H(jk\Omega) U_T(jk\Omega) \right\}, \quad (4.2-42)$$

ahol $A_i(s) = A(s)/(s - p_i)$. A válasz kifejezésében az első és a második összeg ugyanúgy értelmezhető, amint azt a DI esetben előzőleg láttuk.

A folytonos idejű válasz ismétlődős alakja

A periodikus gerjesztéshez tartozó válasz két tag összege: az $y_f(t)$ szabad összetevőt az átviteli függvény p_i pólusai határozzák meg, míg az $y_g(t)$ gerjesztett összetevő periodikus, amely a (35) szerinti $\varepsilon_T(t) y_T(t)$ ismétlődő alakban írható fel. A komplex frekvencia-tartományban e felbontás

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \frac{1}{1 - e^{-sT}} U_T(s) = \frac{C(s)}{A(s)} + \frac{1}{1 - e^{-sT}} Y_T(s). \quad (4.2-43)$$

A $C(s)$ polinom és az $Y_T(s)$ függvény ismeretlen. A $C(s)$ polinom fokszáma kisebb az $A(s)$ polinom n fokszámánál.

Bontsuk az első összetevőt részlettörtjeire. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor az átviteli függvény p_i pólusai egyszeresek (az általánosítás nem jelent elvi nehézséget). Ekkor

$$\frac{C(s)}{A(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - p_i}. \quad (4.2-44)$$

Szorozzuk meg (43) mindkét oldalát az $(s - p_i)$ tényezővel és végezzük el az $s \rightarrow p_i$ határátmenetet. A C_i együttható kifejezése ebből

$$C_i = \frac{B(p_i)}{A_i(p_i)} \frac{1}{1 - e^{-p_i T}} U_T(p_i); \quad A_i(p_i) = \left. \frac{A(s)}{s - p_i} \right|_{s=p_i}. \quad (4.2-45)$$

Most már számíthatjuk a válasz szabad összetevőjét:

$$y_f(t) = \varepsilon(t) \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}. \quad (4.2-46)$$

Fejtsük ki az ismeretlen $Y_T(s)$ függvényt az (43)-ból:

$$Y_T(s) = \frac{B(s)}{A(s)} U_T(s) - [1 - e^{-sT}] \frac{C(s)}{A(s)}. \quad (4.2-47)$$

Egyszeres pólusok esetére egyszerűen igazolható (ennek mintájára többszörös pólusok esetére is), hogy $y_T(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_T(s)\} = 0$, ha $t > T$, amiből következik, hogy (43) második tagja valóban periodikus jelet ír le. Határozzuk most meg $Y_T(s)$ inverz Laplace-transzformáltját $0 \leq t < T$ esetére:

$$y_T(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{A(s)} U_T(s) - \frac{C(s)}{A(s)} \right\}, \quad 0 \leq t < T. \quad (4.2-48)$$

A második tag inverz Laplace-transzformáltja $y_i(t)$, amelyet egyszeres pólusokra (46) ad meg. Az első tag inverz transzformáltját körültekintően kell számítani, mert $U_T(s)$ többnyire tartalmaz e^{-sT_i} ($0 < T_i < T$) alakú tényezőket.

A válasz kifejezésének végső alakja

$$y(t) = y_f(t) + \varepsilon_T y_T(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (4.2-49)$$

ahol $y_f(t)$ kifejezését a (46) adja egyszeres pólusok esetére, míg $y_T(t)$ kifejezését a (48) adja meg.

Mint említettük: az eljárás alkalmazása során az (43)-(49) összefüggéseket számítási utasításként célszerű felfogni és nem képletekként.

A módszerek összehasonlítása

A belépő, majd ezután periodikus gerjesztéshez tartozó választ előállíthatjuk egy periodikus gerjesztett összetevő és egy nem-periodikus (szabad) összetevő összegeként. A periodikus összetevőt vagy Fourier-sorával adjuk meg vagy első periódusával. Ha csak a gerjesztett összetevőre van szükségünk, akkor a szabad összetevő számítása az első esetben elhagyható, a második eljárás alkalmazásakor azonban nem.

A DI esetben a Fourier-sor véges (legfeljebb $L/2$ vagy $[L+1]/2$) számú tagból áll. A második alak ezért ekkor nem különösen hasznos, ezért annak előállítását nem is részleteztük.

A FI esetben a Fourier-sor általában végtelen számú tagból áll, a csonkításával elkövetett hiba becslése nem egyszerű feladat. A második alak azonban véges számú tag összege, ezért elvileg pontos eredményt szolgáltat.

A Laplace-transzformáció alkalmazása még akkor is előnyös lehet, ha a gerjesztett összetevő Fourier-soros alakját akarjuk előállítani. Most ugyanis el tudjuk dönteni a rendszer GV stabilitását, tehát azt, hogy a gerjesztett válasz tekinthető-e állandósult válasznak. Nincs szükségünk továbbá a gerjesztés Fourier-soros alakjának előállítására.

Folytonos idejű esetben mindkét módszernek van előnye is, hátránya is, diszkrét idejű esetben a Fourier-soros előállítás hatékonyabb.

1. példa Egy GV stabilis DI rendszer átviteli függvénye

$$H(z) = \frac{1 + 0,5z^{-1} - 0,2z^{-3}}{1 - z^{-1} + 0,24z^{-2}} \equiv \frac{z^3 + 0,5z^2 - 0,2}{z(z-0,4)(z-0,6)}.$$

A gerjesztés belépő és k pozitív értékeire periodikus:

$$u[k] = \varepsilon_L[k]u_L[k]; \quad u_L[k] = \delta[k] + \delta[k-1], \quad L=6.$$

Határozzuk meg a válasz időfüggvényét!

A gerjesztés és a válasz DI Laplace-transzformáltja

$$U(z) = \frac{z^6}{z^6-1} U_L(z), \quad U_L(z) = 1 + z^{-1} \equiv \frac{z+1}{z};$$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^3 + 0,5z^2 - 0,2}{z(z-0,4)(z-0,6)} \frac{z^6}{z^6-1} \frac{z+1}{z} = \frac{z^4(z+1)(z^3 + 0,5z^2 - 0,2)}{(z^6-1)(z-0,4)(z-0,6)}.$$

Határozzuk meg először a gerjesztett válasz Fourier-soros alakját. Ehhez szükségünk van a $z^6=1$ egyenlet gyökeire, amelyek

$$z_p = e^{jp2\pi/6} \equiv e^{jp\pi/3}; \quad p=0, \pm 1, \pm 2, 3.$$

A gerjesztés által meghatározott alap-körfrekvencia $\Theta = 2\pi/L = \pi/3$.

Az $y_g[k]$ gerjesztett összetevő komplex Fourier-együtthatói a (40) szerint

$$Y_p^c = \frac{1}{6} \frac{z^3 + 0,5z^2 - 0,2}{z(z-0,4)(z-0,6)} \frac{z+1}{z} \Big|_{z=z_p}.$$

A gerjesztett válasz kifejezése elemi számítás után

$$y_g[k] = 1,806 + 1,150 \cos(\Theta k - 1,861) + 0,133 \cos(2\Theta k - 2,375), \quad \Theta = \pi/3.$$

Ez megegyezik a 3.1-2.3. pont példájában más módon kapott eredménnyel.

A válasz szabad összetevője az átviteli függvény 0,4 és 0,6 pólusaihoz tartozik. A visszatranszformálás előtt célszerű lehet $Y(z)$ kifejezését a következő alakra hozni:

$$Y(z) = z \frac{z^3(z+1)(z^3 + 0,5z^2 - 0,2)}{(z^6-1)(z-0,4)(z-0,6)}.$$

Inverz DI Laplace-transzformációval kapjuk a válasz szabad összetevőjének kifejezését:

$$y_f[k] = 0,0288 \cdot 0,4^k - 0,500 \cdot 0,6^k.$$

Ha $k > 10$, akkor a szabad összetevő elhanyagolható, beáll az állandósult állapot. #

2. példa Egy folytonos idejű, stabilis rendszer átviteli függvénye

$$H(s) = \frac{s}{s + 0,2}.$$

A belépő és t pozitív értékeire periodikus gerjesztés

$$u(t) = \varepsilon_T(t) u_T(t); \quad u_T(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1), \quad 0 < t < T = 2.$$

Határozzuk meg a választ mindkét előzőleg tárgyalt alakjában.

A gerjesztés és a válasz FI Laplace-transzformáltja

$$U(s) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \frac{1 - e^{-s}}{s}; \quad Y(s) = \frac{s}{s + 0,2} \frac{1 - e^{-s}}{(1 - e^{-2s})s} \equiv \frac{1}{(s + 0,2)(1 + e^{-s})}.$$

Határozzuk meg először a gerjesztett összetevő Fourier-soros alakját. Ezeket az $e^s = -1$ egyenlet gyökei határozzák meg, amelyek

$$s_k = j\pi k, \quad k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

A gerjesztés által meghatározott alapharmonikusú körfrekvencia $\Omega = 2\pi/T = \pi$. A nevezőben szereplő tényező

$$\left. \frac{1 + e^{-s}}{s - s_k} \right|_{s=s_k} = \frac{d}{ds} \{1 + e^{-s}\} \Big|_{s=s_k} = -e^{-s} \Big|_{s=s_k} = +1.$$

A válasz gerjesztett összetevőjének Fourier-soros alakja ennek alapján

$$y_g(t) = 2 \sum_{k=1,3,\dots} \Re \left\{ \frac{e^{jk\Omega t}}{j\pi k + 0,2} \right\} = \sum_{k=1,3,\dots} Y_k \cos(k\pi t + \rho_k); \quad Y_k = \frac{2}{\sqrt{0,2^2 + \pi^2 k^2}}, \quad \text{tg } \rho_k = -5\pi k.$$

Láthatjuk, hogy az $Y_1 = 0,318$ alapharmonikusú amplitúdó a legnagyobb, az amplitúdók monoton csökkennek ($Y_3 = 0,106, Y_5 = 0,0637, \dots$). A konvergencia lassú. Ez nem meglepő, mert a gerjesztés nem folytonos és a rendszer felüláteresztő jellegű. Az eredményt úgy is megkaphattuk volna, hogy kiszámítjuk a gerjesztés Fourier-sorát és a $H(jk\Omega)$ átviteli együtthatókat.

A válasz szabad összetevője az átviteli függvény $p_1 = -0,2$ pólusa által meghatározott:

$$y_f(t) = \varepsilon(t) \frac{1}{1 + e^{0,2t}} e^{-0,2t} = 0,450 \varepsilon(t) e^{-0,2t}.$$

Ha $t > 25$ (mintegy 12 periódus), akkor ez az összetevő elhanyagolható, beáll az állandósult állapot.

A válasz ismétlődő alakjának előállításához fejezzük ki Laplace-transzformáltját a következő alakban:

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-s}}{(1 - e^{-2s})(s + 0,2)} = \frac{C(s)}{s + 0,2} + \frac{Y_T(s)}{1 - e^{-2s}}.$$

Az átviteli függvény $p_1 = -0,2$ pólusánál

$$C(-0,2) = \left. \frac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-2s}} \right|_{s=-0,2} = \frac{1 - e^{0,2}}{1 - e^{0,4}} = 0,4502.$$

A vizsgált esetben $C(s)$ állandó és megegyezik a $C(p_1)$ értékkel. A $C(s)$ függvényre egyébként sincs szükségünk, csak a $C(p_1)$ helyettesítési értékekre. A válasz szabad összetevője ennek felhasználásával

$$y_f(t) = 0,4502 \varepsilon(t) e^{-0,2t},$$

mint azt korábban már megállapítottuk. A transzformált válasz kifejezéséből

$$Y_T(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s + 0,2} - [1 - e^{-2s}] \frac{C(s)}{s + 0,2}.$$

Ennek inverz transzformáltja $y_f(t)$ kifejezését is felhasználva

$$y_T(t) = \varepsilon(t) e^{-0,2t} - \varepsilon(t-1) e^{-0,2(t-1)} - 0,4502 \varepsilon(t) e^{-0,2t}; \quad 0 < t < T = 2.$$

Rendezés után áttekinthetőbb alakhoz jutunk:

$$y_T(t) = 0,550 \{ \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1) \} e^{-0,2t} - 0,550 \{ \varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2) \} e^{-0,2(t-1)}.$$

Az Olvasóra bizzuk annak ellenőrzését, hogy $\mathcal{L}^{-1}\{Y_T(s)\} = 0$, ha $t > T$ teljesül.

A második alakból látható, hogy $y(+0) = 1$ vagy hogy $y_g(t)_{\max} = 0,550$. Ezek az eredmények a Fourier-soros alakból csak hosszadalmas számítással állíthatók elő. #

4.2-2.F. Feladatok

F-1. Egy diszkrét idejű rendszer rendszeregyenlete

$$y - 0,25 y^{(2)} = u.$$

Határozza meg a $H(z)$ átviteli függvényt! Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a rendszer gerjesztése

(a) $u[k] = \delta[k]$; (impulzusválasz).

(b) $u[k] = \varepsilon[k] 0,5^k$.

(c) $u[k] = 0,5^k$, $k \in \mathbf{N}$ és $y[-1] = 0$, $y[-2] = 1$.

**(d)* Határozza meg azt az $u[k]$ gerjesztést, amely létrehozhatja az előző feladatban megadott kiindulási értékeket. (Útmutatás. Nem egyetlen ilyen gerjesztés létezik.)

Ellenőrizze az eredményeket $k = 0$ és 1 esetére a lépésről lépésre módszerrel!

F-2. Egy folytonos idejű rendszer rendszeregyenlete (vö. 2.2-2.F-4.)

$$y^{(2)} + 6y^{(1)} + 5y = u^{(1)} + 9u.$$

Határozza meg a $H(s)$ átviteli függvényt! Határozza meg az $y(t)$ választ, ha a rendszer gerjesztése

$$\begin{aligned} (a) \quad u(t) &= \varepsilon(t). & (b) \quad u(t) &= \varepsilon(t)e^{-2t}. \\ (c) \quad u(t) &= \varepsilon(t)e^{-t}. & (d) \quad u(t) &= \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1). \\ (e) \quad u(t) &= \{1 - \varepsilon(t)\} + \varepsilon(t)e^{-2t}. & (f) \quad u(t) &= \{1 - \varepsilon(t)\} + 2\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Az (a) feladat megoldása a rendszer ugrásválasza.

F-3. Egy diszkrét idejű rendszer rendszeregyenlete

$$y - y^{(1)} + 0,5y^{(2)} = 0,5u.$$

Határozza meg a $H(z)$ átviteli függvényt! Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a rendszer gerjesztése

$$(a) \quad u[k] = \delta[k]. \quad (b) \quad u[k] = \varepsilon[k]. \quad (c) \quad u[k] = \varepsilon[k+1].$$

Az (a) feladat megoldása a rendszer impulzusválasza, a (b) feladat megoldása a rendszer ugrásválasza.

***F-4.** Adott a DI illetve FI rendszer $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvénye és belépő gerjesztésének $U(z)$ illetve $U(s)$ Laplace-transzformáltja.

Hogyan bonthatjuk fel a válasz időfüggvényét szabad és gerjesztett összetevőre? Egyértelmű ez a felbontás? (Útmutatás. Gondolja meg, hogy $Y(z)$ vagy $Y(s)$ pólusai honnan származnak!)

***F-5.** Egy x jel x_s állandósult összetevője (stacionárius összetevője) az a periodikus (speciálisan állandó) jel, amelyhez x tart, amint $k \rightarrow \infty$ illetve $t \rightarrow \infty$.

(a) Hogyan határozható meg az $X(z)$, illetve az $X(s)$ Laplace-transzformált ismeretében az $x_s[k]$, illetve az $x_s(t)$ állandósult összetevő?

(b) Igaz-e, hogy ha a lineáris, invariáns rendszer u gerjesztésének van u_s állandósult összetevője, akkor az y válasznak is van y_s állandósult összetevője, amelynek periódusideje megegyezik az u_s periódusidejével?

(c) Igaz-e, hogy minden jelnek van állandósult összetevője (legfeljebb az 0 értékű)?

***F-6.** Adott egy másodrendű FI rendszer átviteli függvénye:

$$H(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{(s+1)(s+2)}.$$

Adjon meg egy olyan állapotváltozós leírást, amelyhez ez az átviteli függvény tartozik!

4.2-2.M. Megoldások

M-1. Az átviteli függvény

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,25z^{-2}} \equiv \frac{z^2}{(z - 0,5)(z + 0,5)}.$$

Ennek felhasználásával

$$(a) h[k] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ z \frac{z}{(z - 0,5)(z + 0,5)} \right\} = \varepsilon[k] \{0,5(0,5)^k + 0,5(-0,5)^k\}.$$

$$(b) y[k] = \varepsilon[k] \{ (0,25k + 0,75)(0,5)^k + 0,25(-0,5)^k \}.$$

$$(c) Y(z) - 0,25 \{ z^{-2} Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2] \} = U(z),$$

$$y[k] = (0,5k + 0,875)(0,5)^k + 0,375(-0,5)^k.$$

$$*(d) \text{ Feltételezve, hogy } y[k] = 0, k \leq 3, \text{ kapjuk, hogy } u[k] = \delta[k+1] + \varepsilon[k](0,5)^k.$$

M-2. Az átviteli függvény

$$H(s) = \frac{s+9}{s^2+6s+5} \equiv \frac{s+9}{(s+1)(s+5)}.$$

Ennek felhasználásával

$$(a) y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+9}{s(s+1)(s+5)} \right\} = \varepsilon(t) \{1,8 - 2e^{-t} + 0,2e^{-5t}\}.$$

$$(b) y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+9}{(s+1)(s+2)(s+5)} \right\} = \varepsilon(t) \left\{ -\frac{7}{3}e^{-2t} + 2e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-5t} \right\}.$$

$$(c) y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+9}{(s+1)^2(s+5)} \right\} = \varepsilon(t) \left\{ \left(2t - \frac{1}{4}\right)e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-5t} \right\}.$$

$$(d) y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+9}{(s+1)(s+5)} \frac{1-e^{-s}}{s} \right\} = \\ = \varepsilon(t) \{1,8 - 2e^{-t} + 0,2e^{-5t}\} - \varepsilon(t-1) \{1,8 - 2e^{-(t-1)} + 0,2e^{-5(t-1)}\}.$$

$$(e) \{s^2 Y(s) - 1,8s + 6\} + sY(s) = \left\{ s \frac{1}{s+2} - 1 \right\} + 9 \frac{1}{s+2},$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1,8s^2 + 14,4s + 28,6}{(s+1)(s+5)(s+2)} \right\} = 4e^{-t} - \frac{7}{3}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{-5t}, t \in \mathbf{R}_+.$$

Mind $y(t)$, mind deriváltja ebben az esetben folytonos.

$$(f) y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1,8s^2 + 11,8s + 18}{(s+1)(s+5)s} \right\} = 3,6 - 2e^{-t} + 0,2e^{-5t}, t \in \mathbf{R}_+.$$

Az $y(t)$ folytonos, deriváltja a $t = 0$ helyen nem folytonos.

M-3. Az átviteli függvény

$$H(z) = \frac{0,5}{1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}} \equiv \frac{0,5z^2}{(z - Re^{j\theta})(z - Re^{-j\theta})}; R = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Ennek felhasználásával

$$(a) h[k] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ z \frac{0,5z}{(z - R e^{j\theta})(z - R e^{-j\theta})} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon[k] R^k \cos(\theta k - \theta).$$

$$(b) y[k] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ z \frac{0,5z^2}{(z - R e^{j\theta})(z - R e^{-j\theta})(z - 1)} \right\} = \varepsilon[k] \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} R^k \cos(\theta k - 3\theta) \right\}.$$

(c) Az előző eredmény felhasználásával vagy a rendszeregyenlet DI Laplace-transzformáltját képezve és az inverz transzformáltat számítva

$$y[k] = \varepsilon[k+1] \left\{ 1 + \frac{1}{2} R^k \cos(\theta k - 2\theta) \right\}.$$

***M-4.** Ha a H átviteli függvénynek és az U transzformált gerjesztésnek nincs közös pólusa, akkor a H pólusaihoz tartozó tagok összege tekinthető az y_f szabad válasznak, míg az U pólusaihoz tartozó tagok összege tekinthető az y_g gerjesztett válasznak. A felbontás azonban nem egyértelmű, mivel a H pólusaihoz tartozó összetevő egy részét hozzáadhatjuk a gerjesztett válaszhoz (hiszen az továbbra is ki fogja elégíteni az inhomogén rendszeregyenletet vagy állapotváltozós leírást). Még inkább homályossá válik a felbontás, ha az átviteli függvénynek és a gerjesztés transzformáltjának vannak közös pólusai. Ez a felbontás tehát inkább számítási eljárásnak tekinthető, nem rendelhető hozzá egyértelmű jelentés. Az állapotváltozós leírásban szereplő zérus gerjesztésű összetevő és zérus (kezdeti) állapotú összetevő egyértelműen meghatározott. Ez azonban nem kapcsolható egyértelműen a válasznak az átviteli függvény pólusaihoz illetve a gerjesztés transzformáltjának pólusaihoz.

***M-5.** (a) Ha $X(z)$ minden q_i pólusára $|q_i| \leq 1$ érvényes, vannak $|q_r| = 1$ típusú pólusok és ezek egyszeresek, illetve ha $X(s)$ minden p_i pólusára $\Re\{p_i\} \leq 0$ érvényes, vannak $\Re\{p_r\} = 0$ típusú pólusok és ezek egyszeresek, akkor x_s a q_r pólusokhoz tartozó q_r^k , illetve a p_r pólusokhoz tartozó $e^{p_r t}$ típusú összetevők szuperpozíciója. Az előbbieket száma rendszerint véges, az utóbbiaké végtelen is lehet. Szigorúan véve még azt is meg kellene követelnünk, hogy a $\mathcal{G}_r = \text{arc } q_r$, illetve az $\omega_r = \Im\{p_r\}$ körfrekvenciáknak legyen közös osztójuk, de ez tetszőleges pontossággal biztosítható.

(b) Szigorúan véve ez nem feltétlenül igaz, mert az átviteli függvénynek lehetnek olyan, az egység sugarú körre, illetve a képzetes tengelyre eső pólusai, amelyeknek megfelelő \mathcal{G}_r , illetve ω_r körfrekvenciájú összetevő nem szerepel a gerjesztés Fourier-sorában. A válasznak ekkor lesz olyan állandósult összetevője, amelynek nincs kapcsolata a gerjesztés állandósult összetevőjével.

(c) Nem igaz, hiszen a jel nem feltétlenül tart egy periodikus jelhez. Ilyen jel például egy polinom vagy egy növekvő exponenciális függvény.

***M-6.** Például az első Frobenius-alak (2.3-1.4. pont) alapján

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} b_2 - 2b_0 & b_1 - 3b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + b_0 u.$$

Természetesen más megoldások is lehetnek.

4.2–3. Néhány speciális rendszer

4.2-3.1. Bevezetés

Egy lineáris, invariáns DI illetve FI rendszer $y = \mathcal{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatának leírására eddig a következő rendszerjellemező függvényeket vezettük be:

– az időtartományban a $h[k]$ illetve a $h(t)$ impulzusválaszt; ez a lineáris, invariáns rendszerek általános rendszerjellemező függvénye.

– a frekvenciatartományban a $H(e^{j\omega})$ illetve a $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikát; ez az impulzusválasz Fourier-transzformáltja, amennyiben ez létezik (tipikusan GV stabilis rendszer esetén).

– a komplex frekvenciatartományban a $H(z)$ illetve a $H(s)$ átviteli függvényt; ez az impulzusválasz Laplace-transzformáltja, ha az impulzusválasz belépő, vagyis ha a rendszer kauzális.

Bevezethetők további rendszerjellemező függvények is (az ugrásválaszt tárgyaltuk is), de a továbbiakban a fenti háromra szorítunk.

A rendszer jellemezhető a rendszeregyenletével, az állapotváltozós leírásával és hálózati reprezentációjával is. Ezek ismeretében bármelyik rendszerjellemező függvény meghatározható. Ebben a szakaszban a rendszerjellemező függvényekkel foglalkozunk.

Bármelyik rendszerjellemező függvény egy kiszemelt tulajdonsága alapján kiválaszthatjuk rendszerek speciális osztályát (például a GV stabilis vagy a kauzális rendszerek). Valamely speciális tulajdonság néha csak az egyik rendszerjellemező függvényben jelentkezik. Egy speciális tulajdonság azzal a következménnyel járhat, hogy az átviteli függvény vagy az átviteli karakterisztika nem értelmezett (például nem kauzális rendszernek nem értelmezett az átviteli függvénye).

Ebben a szakaszban értelmezzünk néhány olyan rendszert, amelynek valamelyik rendszerjellemező függvénye speciális tulajdonságú. Nem törekszünk sem teljességre, sem az egyes speciális rendszerek tulajdonságainak teljes feltárására.

4.2-3.2. Véges impulzusválaszú rendszer

Egy véges impulzusválaszú rendszer vagy szokásos rövidítésével egy FIR rendszer („Finite Impulse Response”) impulzusválasza véges hosszúságú, azaz egy véges hosszúságú időintervallumon kívül azonosan nulla. Kauzális rendszerekre szorítkozva az L illetve T hosszúságú FIR rendszer impulzusválaszának tulajdonsága

$$\begin{aligned} \text{DI: } h[k] &= 0, \quad k \leq -1, \quad k \geq L; \\ \text{FI: } h(t) &= 0, \quad t < 0, \quad t > T. \end{aligned} \quad (4.2-70)$$

A véges impulzusválaszú rendszer biztosan GV stabilis.

A diszkrét idejű FIR rendszer impulzusválasza megadható

$$h[k] = c_0 \delta[k] + c_1 \delta[k-1] + c_2 \delta[k-2] + \dots + c_{L-1} \delta[k-(L-1)] \quad (4.2-71)$$

alakban. Ilyen rendszert (például szűrőt) gyakran alkalmaznak GV stabilitása miatt. Ugyanazt a feladatot megoldó végtelen impulzusválaszú vagy IIR rendszert („Infinite Impulse Response”) azonban többnyire egyszerűbb és ezért olcsóbb módon lehet megvalósítani, viszont akkor annak stabilitását biztosítani kell.

A folytonos idejű FIR rendszerek ritkán fordulnak elő, mivel megvalósításuk bonyolult. Ezek nem differenciális rendszerek, rendszeregyenletük vagy állapotváltozós leírásuk nem olyan alakú, amint azt az eddigiekben láttuk.

Egy diszkrét idejű kauzális FIR rendszer *átviteli karakterisztikája* az $e^{-j\theta}$, míg *átviteli függvénye* a z^{-1} változó *polinomja*:

$$\begin{aligned} H(e^{j\theta}) &= c_0 + c_1 e^{-j\theta} + c_2 e^{-j2\theta} + \dots + c_{L-1} e^{-j(L-1)\theta}; \\ H(z) &= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{L-1} z^{-(L-1)}. \end{aligned} \quad (4.2-72)$$

Ennek a $H(z)$ átviteli függvénynek csak a $z=0$ helyen van pólusa, amely $(L-1)$ -szeres, és $L-1$ számú zérusa van.

4.2-3.3. Mindentáteresztő rendszer

A *mindentáteresztő* egy olyan rendszer, amely bármilyen frekvenciájú szinuszos gerjesztés amplitúdóját azonos mértékben viszi át. A fázis átvitelére nincs megszorítás, az általában a frekvencia függvénye.

A diszkrét idejű illetve a folytonos idejű *mindentáteresztő* (mindentáteresztő rendszer) amplitúdó-karakterisztikája állandó (a frekvenciától független):

$$\begin{aligned} \text{DI: } K_{\text{MÁ}}(\vartheta) &\equiv |H_{\text{MÁ}}(e^{j\vartheta})| = K_0 > 0; \\ \text{FI: } K_{\text{MÁ}}(\omega) &\equiv |H_{\text{MÁ}}(j\omega)| = K_0 > 0. \end{aligned} \quad (4.2-73)$$

Ha a mindentáteresztő fázis-karakterisztikája állandó ($\varphi=0$ vagy $\varphi=\pm\pi$), akkor a rendszer egy erősítő. Ha a mindentáteresztő fázis-karakterisztikája lineáris, vagyis ha $\varphi_{\text{MÁ}}(\vartheta) = -r\vartheta$ ($r \in \mathbf{Z}$), illetve ha $\varphi_{\text{MÁ}}(\omega) = -T\omega$ ($T \in \mathbf{R}$), akkor a mindentáteresztő változatlan alakban eltolja a gerjesztést: ha r illetve T pozitív, akkor késlelteti (kauzális rendszer), ha r illetve T negatív, akkor sietteti (nem kauzális, „jósló” rendszer). A továbbiakban arra az esetre szorítkozunk, amikor a mindentáteresztő kauzális.

A mindentáteresztő $\varphi_{\text{MÁ}}$ *fázis-karakterisztikájának* a következő érdekes tulajdonsága van (igazolását később adjuk):

$$\frac{d\varphi_{\text{MÁ}}(\vartheta)}{d\vartheta} \leq 0, \quad 0 \leq \vartheta < \pi; \quad \frac{d\varphi_{\text{MÁ}}(\omega)}{d\omega} \leq 0, \quad 0 \leq \omega < \infty, \quad (4.2-74)$$

azaz monoton csökken (kivéve esetleges szakadási helyeit, ahol a derivált nem értelmezett). Mint már említettük, a

$$\tau(\vartheta) = -\frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta}; \quad \tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (4.2-75)$$

menyiséget futási idő karakterisztikának is nevezik. A (74) szerint a mindentáteresztő futási idő karakterisztikája nem-negatív ott, ahol értelmezett.

A mindentáteresztő egy gyakorlati jelentősége a következő. Legyen a feladatunk egy olyan átviteli karakterisztika meghatározása, amelynek mind a K amplitúdó-karakterisztikája, mind a φ fázis-karakterisztikája előírt. Első lépésként ekkor meghatározunk egy olyan $H_1 = K_1 e^{j\varphi_1}$ átviteli karakterisztikát, amelynek amplitúdó-karakterisztikája az előírtnak egy elfogadható közelítése, de fázis-karakterisztikája nem

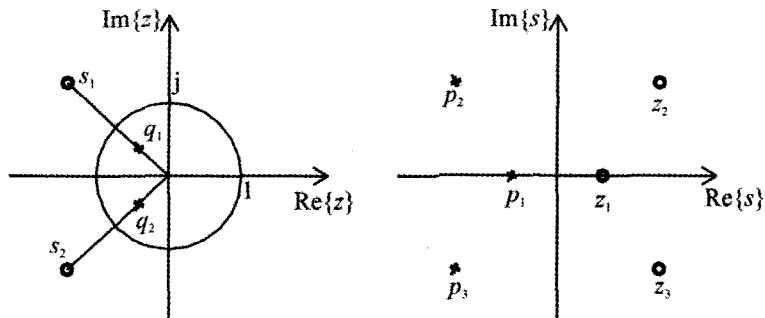
tesz eleget az előírásnak. A feladat ezután egy olyan mindentátesztő meghatározása, amelynek φ_{MA} fázis-karakterisztikája a $\varphi - \varphi_1$ elfogadható közelítése. Ekkor $H_1 \cdot H_{MA}$ az előírt H egy elfogadható közelítése. A (74) mutatja, hogy ez az eljárás nem mindig alkalmazható.

Egy DI illetve FI mindentátesztő racionális átviteli függvénye:

$$H_{MA}(z) = K_A z^{-r} \frac{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_n)}{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_n)}, \quad r \in \mathbf{N}, |q_i| < 1, s_i = \frac{1}{q_i^*}, |s_i| > 1; \quad (4.2-76)$$

$$H_{MA}(s) = K_A \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}, \quad \Re\{p_i\} < 0, z_i = -p_i^*, \Re\{z_i\} > 0.$$

A DI átviteli függvény q_i pólusai az egységsugarú körön belül, $s_i = 1/q_i^*$ zérusai az egységsugarú körön kívül helyezkednek el, ezek az egyes pólusok inverzei az egységsugarú körre. A FI átviteli függvény p_i pólusai a bal félsíkon, $z_i = -p_i^*$ zérusai a jobb félsíkon helyezkednek el, ezek az egyes pólusok tükörképei a képzetes tengelyre. Egy tipikus pólus-zérus elrendezést mutat a 6. ábra. A $H_{MA}(s)$ FI átviteli függvény tartalmazhat egy e^{-sT} ($T > 0$) nem racionális szorzótényezőt is.



4.2-6. ábra Egy DI és egy FI mindentátesztő pólus-zérus elrendezése

Annak igazolásához, hogy (76) mindentátesztőt ír le, vizsgáljuk számlálójának és nevezőjének egy tényezőjét:

$$\frac{e^{j\vartheta} - 1/q_i^*}{e^{j\vartheta} - q_i} = -\frac{1}{q_i^*} e^{j\vartheta} \frac{e^{-j\vartheta} - q_i^*}{e^{j\vartheta} - q_i} = \frac{1}{q_i^*} e^{j(\vartheta+\pi)} \frac{(e^{j\vartheta} - q_i)^*}{e^{j\vartheta} - q_i},$$

$$\frac{j\omega + p_i^*}{j\omega - p_i} = -\frac{-j\omega - p_i^*}{j\omega - p_i} = e^{j\pi} \frac{(j\omega - p_i)^*}{j\omega - p_i}.$$

Az utolsó alakban a számláló a nevező konjugáltja. Ebből következik, hogy a tényező abszolút értéke $|1/q_i|$ illetve 1, vagyis állandó, ezért a $|H|$ amplitúdó-karakterisztika sem függ a frekvenciától. Egy további következményként megadhatjuk a fázis-karakterisztika kifejezését:

$$\varphi_{MA}(\vartheta) = \text{arc } K_A + \pi + (2n-r)\vartheta - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha_i = \text{arc}(e^{j\vartheta} - q_i);$$

$$\varphi_{MA}(\omega) = \text{arc } K_A - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha_i = \text{arc}(j\omega - p_i).$$
(4.2-77)

A pólus-zérus elrendezéséből látható, hogy α_i monoton növekszik, amint ϑ növekszik 0 és π között, illetve amint ω növekszik 0 és ∞ között. Ennek következtében $\varphi(\omega)$ csökken (vö. 4.2-1.7. pont). Csökken $\varphi(\vartheta)$ is, mivel a $d\vartheta$ központi szöghöz tartozó $2 d\alpha$ kerületi szög nála mindig nagyobb. A $2 d\alpha$ és a $d\vartheta$ akkor lenne egyenlő, ha $|q_i|=1$ lenne, de valójában $|q_i| < 1$. Ezzel (74) és a (75) is igazolást nyert.

A DI illetve az FI mindentátesztő racionális átviteli függvényének számlálója a nevezője által meghatározott:

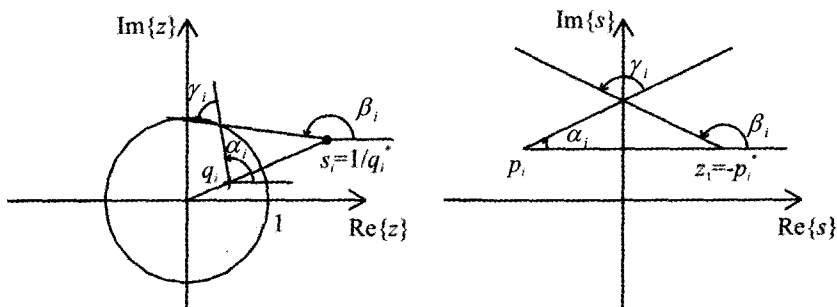
$$H_{MA}(z) = K_A z^{-r} \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + 1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n};$$

$$H_{MA}(s) = K_A \frac{s^n - a_1 s^{n-1} + \dots \pm a_{n-1} s \mp a_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}.$$
(4.2-78)

Az a_i együtthatók úgy választandók, hogy a stabilitás biztosítva legyen (a pólusok az egységkörön belül illetve a bal félsíkon helyezkedjenek el), egyébként tetszőlegesek.

Vizsgáljuk most meg a pólus-zérus elrendezés alapján a mindentátesztő fázis-karakteristikájának viselkedését. Vezessük be a következő jelöléseket (7. ábra):

$$e^{j\vartheta} - \frac{1}{q_i^*} = B_i e^{j\beta_i}, \quad e^{j\vartheta} - q_i = A_i e^{j\alpha_i}; \quad j\omega + p_i^* = B_i e^{j\beta_i}, \quad j\omega - p_i = A_i e^{j\alpha_i}.$$



4.2-7. ábra Egy komplex pólus-zérus pár hatása a DI és a FI mindentátesztő fáziskarakteristikájának viselkedésére

A (76) alából következnek a fázis-karakteristika következő kifejezése:

$$\varphi(\vartheta) = \text{arc } K_A - r\vartheta + \sum_{i=1}^n \gamma_i(\vartheta), \quad \gamma_i(\vartheta) = \beta_i(\vartheta) - \alpha_i(\vartheta);$$

$$\varphi(\omega) = \text{arc } K_A + \sum_{i=1}^n \gamma_i(\omega), \quad \gamma_i(\omega) = \beta_i(\omega) - \alpha_i(\omega).$$

A 7. ábrából látható, hogy DI mindentátesztőre valós q_i esetén $\gamma_i(0) = \pi$ vagy 0 , konjugált komplex q_i, q_{i+1} pár esetén $\gamma_i(0) + \gamma_{i+1}(0) = 2\pi$. A $\gamma_i(\vartheta)$ monoton csökken és $\gamma_i(\pi) = 0$ vagy $-\pi$. A 7. ábrából látható, hogy FI mindentátesztőre valós p_i esetén $\gamma_i(0) = \pi$, konjugált komplex p_i, p_{i+1} pár esetén $\gamma_i(0) + \gamma_{i+1}(0) = 2\pi$. Az $\alpha_i(\omega)$ monoton növekszik, a $\gamma_i(\omega)$ monoton csökken és $\gamma_i(\infty) = 0$. Összefoglalva:

$$\text{DI: } \varphi_{\text{MÁ}}(\pi) - \varphi(0) = -(n+r)\pi; \quad \text{FI: } \varphi_{\text{MÁ}}(\infty) - \varphi(0) = -n\pi. \quad (4.2-79)$$

A fázis-karakterisztika monoton csökken azaz deriváltja nem-pozitív (a futási idő karakterisztika nem-negatív), amint már korábban megállapítottuk.

A DI mindentátesztő $h[k]$ impulzusválasza nem rendelkezik különleges tulajdonsággal. A FI mindentátesztő $h(t)$ impulzusválasza mindig tartalmaz egy $\delta(t)$ összetevőt.

4.2-3.4. Minimálfázisú rendszer

A minimálfázisú rendszer átviteli függvényének formális tulajdonsága alapján definiált.

A diszkrét idejű *minimálfázisú rendszer* egy olyan lineáris, invariáns, kauzális, rendszer, amelyre a racionális $H(z)$ átviteli függvény minden pólusa az egységsugarú körön belül van (de a $z = 0$ helyen nincs pólus) és nincs zérusa az egységsugarú körön kívül. Ha a zérusok is csak az egységsugarú körön belül vannak, akkor a rendszer *szigorúan minimálfázisú*.

A folytonos idejű *minimálfázisú rendszer* egy olyan lineáris, invariáns, kauzális, rendszer, amelyre a racionális $H(s)$ átviteli függvény minden pólusa a bal félsíkon van és nincs zérusa a jobb félsíkon. Ha a zérusok is csak a bal félsíkon vannak, akkor a rendszer *szigorúan minimálfázisú*.

A minimálfázisú rendszer definíciójából következően gerjesztés-válasz stabilis.

A minimálfázisú rendszer átviteli függvényének gyöktényezőző alakja ezek szerint

$$\begin{aligned} \text{DI: } H_{\text{MF}}(z) &= K \frac{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_n)}, \quad m \leq n, \quad 0 < |q_i| < 1, \quad 0 < |s_i| \leq 1; \\ \text{FI: } H_{\text{MF}}(s) &= K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}, \quad m \leq n, \quad \Re\{p_i\} < 0, \quad \Re\{z_i\} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.2-80)$$

Látható, hogy ha H_{MF} egy szigorúan minimálfázisú rendszer átviteli függvénye és $m = n$, akkor $1/H_{\text{MF}}$ is egy szigorúan minimálfázisú rendszer átviteli függvénye.

A minimálfázisú rendszer φ_{MF} fáziskarakterisztikájának φ'_{MF} meredeksége sosem kisebb mint bármely olyan rendszer φ fáziskarakterisztikájának φ' meredeksége, amelynek ugyanakkora az amplitúdó-karakterisztikája:

$$\begin{aligned} \text{DI: } \frac{d\varphi_{\text{MF}}(\vartheta)}{d\vartheta} &\geq \frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \text{ha } K_{\text{MF}}(\vartheta) = K(\vartheta); \\ \text{FI: } \frac{d\varphi_{\text{MF}}(\omega)}{d\omega} &\geq \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}, \quad \text{ha } K_{\text{MF}}(\omega) = K(\omega). \end{aligned} \quad (4.2-81)$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a megegyező amplitúdó-karakterisztikájú rendszerek közül a minimálfázisúnak a legkisebb a futási idő karakterisztikája.

Az állítást a következő pontban fogjuk igazolni.

Racionális átviteli függvényű rendszerek átviteli karakterisztikája csak egy állandó szorzóban tér el, ha minden valós s_i illetve z_i zérusra elvégezzük az $s_i \rightarrow \hat{s}_i = 1/s_i$ illetve a $z_i \rightarrow \hat{z}_i = -z_i$ helyettesítést, az egyes konjugált komplex zérus-párookra pedig az $s_i^* \rightarrow \hat{s}_i = 1/s_i^*$, $\hat{s}_i^* = 1/s_i$ (inverzió az egység sugarú körre) illetve a $z_i^* \rightarrow \hat{z}_i = -z_i^*$, $\hat{z}_i^* = -z_i$ helyettesítést (tükrözés a valós tengelyre).

Korábban (4.2-1.7. pont) már láttuk a 4. ábrán, hogy a FI esetben $H(j\omega)$ számlálójának $\beta(\omega)$ szögére $\beta'(\omega) > 0$ és $\beta_+'(\omega) < 0$. Ebből már következik, hogy (81) helyes. Az is látható a 4. ábrából, hogy a FI esetben $\beta_-(\omega) < \beta_+(\omega)$. Ez megmagyarázza az FI esetben a „minimálfázisú rendszer” elnevezést. Mivel azonban a fázishoz 2π vagyis 360° hozzáadható vagy levonható (és ezt gyakran meg is tesszük, hogy φ értéke $-\pi$ és $+\pi$ közé essék), ezért a minimálfázisú tulajdonság szemléletes értelmezése nem egyértelmű.

A DI esetben nem ennyire egyszerű a helyzet. Az 5. ábrából következik, hogy $\beta_-'(\vartheta) > 0$ most is érvényes, de $\beta_+'(\vartheta)$ változtathatja előjelét, ezért (81) DI megfelelője nem látható a szemlélet alapján. Az is következik az 5. ábrából, hogy $\beta_-(\vartheta) > \beta_+(\vartheta)$, ezért a minimálfázisú DI rendszer fázisa nem minimális. A „minimálfázisú” elnevezés ezért a DI esetben csak a FI esettel kapcsolatos formális analógiára utal és tartalmilag félrevezető.

A $H(z) = z^{-r} H_{MF}(z)$, $r \in \mathbf{N}$ alakú átviteli függvény pólusai ugyancsak az egység sugarú körön belüliek, $\varphi(\vartheta) = -r\vartheta + \varphi_{MF}(\vartheta)$ fázis-karakterisztikája azonban nyilván kisebb mint $\varphi_{MF}(\vartheta)$. Ez az egyik oka annak, amiért nem engedjük meg, hogy a $H_{MF}(z)$ átviteli függvénynek a $z = 0$ helyen pólusa legyen. Egy másik okot a következő pontban fogunk látni.

Szorítkozzunk most arra az esetre, amikor a $H_{MF}(z) = P(z)/Q(z)$ illetve a $H_{MF}(s) = P(s)/Q(s)$ átviteli függvény szigorúan minimálfázisú rendszert ír le (P és Q polinom). Ekkor a az átviteli függvény logaritmusai, a $V(z) \equiv \ln H_{MF}(z) = \ln P(z) - \ln Q(z)$ illetve a $V(s) \equiv \ln H_{MF}(s) = \ln P(s) - \ln Q(s)$ függvény minden szingularitása az egység sugarú körön belül illetve a bal félsíkon van. (Ezek a szingularitások nem pólusok, hanem logaritmikussá szingularitások.) Fejezzük ki az átviteli karakterisztika, vagyis $H_{MF}(e^{j\vartheta}) = K(\vartheta) e^{j\varphi(\vartheta)}$ illetve $H_{MF}(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ logaritmusát:

$$\ln H_{MF}(e^{j\vartheta}) = \ln K(\vartheta) + j\varphi(\vartheta); \quad \ln H_{MF}(j\omega) = \ln K(\omega) + j\varphi(\omega).$$

A valós rész és a képzetes rész Hilbert-párt alkot, vagyis alkalmazható a (3.2-52) szerinti Bode-tétel, amelyben most $\ln K$ a valós rész és φ a képzetes rész. Láthatjuk, hogy miért volt szükséges annak kikötése, hogy a rendszer szigorúan minimálfázisú: a logaritmusképzés következtében az átviteli függvény zérusai lényegében ugyanolyan szerepet játszanak, mint a pólusai.

A K amplitúdó-karakterisztikához, illetve a φ fázis-karakterisztikához a *Hilbert-transzformáció* vagy a *Bode-képletek* alapján olyan fázis-karakterisztika, illetve amplitúdó-karakterisztika rendelkezhető, hogy $H = K e^{j\varphi}$ egy kauzális, stabilis és minimálfázisú rendszert írjon le. A korábban megadott összefüggésekből következik, hogy

$$\begin{aligned} \varphi(\vartheta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln K(\lambda)}{\operatorname{tg}((\lambda - \vartheta)/2)} d\lambda, \quad \ln \frac{K(\vartheta)}{K(0)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(\lambda)}{\operatorname{tg}((\lambda - \vartheta)/2)} d\lambda; \\ \varphi(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln K(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda, \quad \ln \frac{K(\omega)}{K(\infty)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda, \quad \ln \frac{K(\omega)}{K(0)} = -\frac{\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda[\lambda - \omega]} d\lambda. \end{aligned} \quad (4.2-82)$$

Az integrálokon azok Cauchy-főértéke értendő, tényleges kiszámításuk ritkán egyszerű. Az utolsó összefüggés az előzőből csak némi megfontolás árán adódik.

A tétel általánosítható nem minimálfázisú rendszerekre is, de ezzel nem foglalkozunk.

Példa Egy FI rendszer amplitúdó-karakterisztikája

$$K(\omega) = \begin{cases} K_0, & |\omega| < \Omega, \\ K_1, & |\omega| > \Omega. \end{cases}$$

Határozzuk meg a fázis-karakterisztikát úgy, hogy az átviteli karakterisztika kauzális rendszert jellemezzen!

A (82) értelmében például $0 < \omega < \Omega$ esetén az integrál Cauchy-főértéke

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{-\Omega} \frac{\ln K_1}{\lambda - \omega} d\lambda + \int_{-\Omega}^{\omega - \varepsilon} \frac{\ln K_0}{\lambda - \omega} d\lambda + \int_{\omega + \varepsilon}^{\Omega} \frac{\ln K_0}{\lambda - \omega} d\lambda + \int_{\Omega}^{\Lambda} \frac{\ln K_1}{\lambda - \omega} d\lambda \right\}.$$

Hasonló az eljárás $\Omega < \omega$ esetén. Az integrálok számítása, majd a határértékek képzése nem okoz nehézséget. Végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{K_1}{K_0} \right) \ln \left| \frac{\Omega + \omega}{\Omega - \omega} \right|.$$

Az ω pozitív értékeire $\varphi(\omega)$ előjele megegyezik $\ln(K_1/K_0)$ előjelével, vagyis például $K_1/K_0 < 1$ esetén (aluláteresztő) a fázis negatív. A K_1 és K_0 egyike sem lehet nulla, ezért az ideális aluláteresztő és felüláteresztő nem kauzális rendszer. #

4.2-3.5. Az átviteli függvény tényezőkre bontása

Bármely gerjesztés-válasz stabilis rendszer $H(z)$ vagy $H(s)$ átviteli függvénye felbontható olyan tényezők szorzatára, amelyek egyike mindentátesztő, másika minimálfázisú rendszert ír le:

$$H(z) = H_{\text{MÁ}}(z) \cdot H_{\text{MF}}(z); \quad H(s) = H_{\text{MÁ}}(s) \cdot H_{\text{MF}}(s). \quad (4.2-83)$$

A felbontás egy állandó szorzó erejéig egyértelmű.

Legyen a *diszkrét idejű* rendszer átviteli függvénye a következő alakban adott:

$$\begin{aligned} H(z) &= K z^{-r} \frac{(z-s_1)(z-s_2) \cdots (z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2) \cdots (z-q_n)}, \\ |s_i| &> 1, i=1, 2, \dots, h, \quad |s_i| \leq 1, i=h+1, h+2, \dots, m; \\ 0 &< |q_i| < 1, i=1, 2, \dots, n, \quad m \leq n+r. \end{aligned} \quad (4.2-84)$$

A (83) szerinti felbontás két tényezője ekkor

$$H_{MA}(z) = K_A z^{-r} \frac{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_h)}{(z-1/s_1^*)(z-1/s_2^*)\cdots(z-1/s_h^*)},$$

$$H_{MF}(z) = \frac{K}{K_A} \frac{(z-1/s_1^*)(z-1/s_{21}^*)\cdots(z-1/s_h^*)(z-s_{h+1})(z-s_{h+2})\cdots(z-s_m)}{(z-q_1)(z-q_2)\cdots(z-q_n)}. \quad (4.2-85)$$

Legyen a *folytonos idejű* rendszer átviteli függvénye a következő alakban adott:

$$H(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)},$$

$$\Re\{z_i\} > 0, i=1, 2, \dots, h; \quad \Re\{z_i\} \leq 0, i=h+1, h+2, \dots, m; \quad (4.2-86)$$

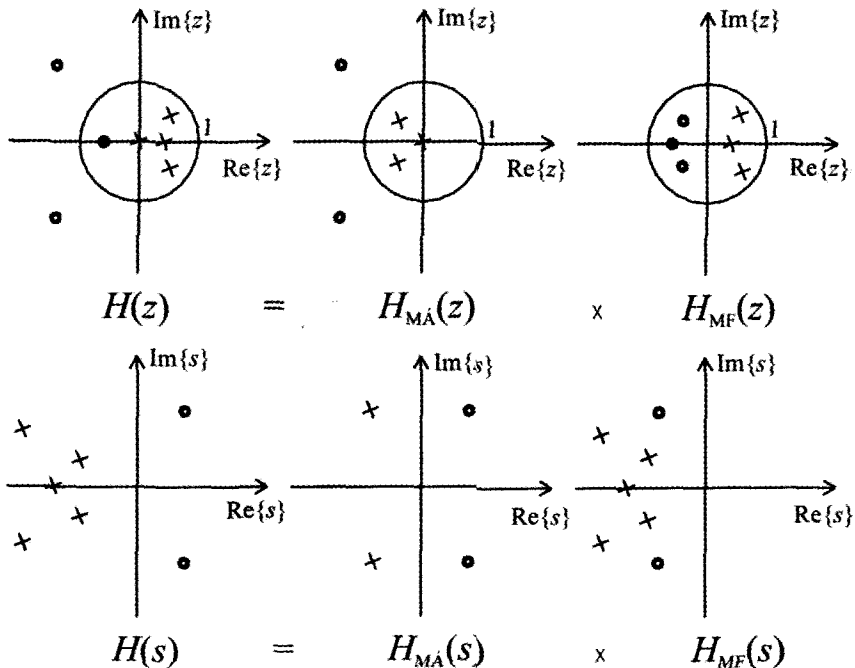
$$\Re\{p_i\} < 0, i=1, 2, \dots, n; \quad m \leq n.$$

A (83) szerinti felbontás két tényezője ekkor

$$H_{MA}(s) = K_A \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_h)}{(s+z_1^*)(s+z_2^*)\cdots(s+z_h^*)},$$

$$H_{MF}(s) = \frac{K}{K_A} \frac{(s+z_1^*)(s+z_2^*)\cdots(s+z_h^*)(s-z_{h+1})(s-z_{h+2})\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}. \quad (4.2-87)$$

A K_A állandó tetszőleges, $K_A = 1$ egy szokásos választás.



4.2-8. ábra Az átviteli függvény felbontása egy mindentáteresztő és egy minimálfázisú rendszer átviteli függvényére a pólus-zérus elrendezéssel szemléltetve

Láthatjuk, hogy $H_{M\dot{A}}$ és H_{MF} szorzata valóban az adott H függvényt adja. A H_{MF} minimálfázisú, de nem szigorúan minimálfázisú rendszert jellemez.

A $H_{M\dot{A}}$ zérusai megegyeznek a H egységsugarú körön kívül illetve a jobb félsíkon elhelyezkedő zérusaival. A $H_{M\dot{A}}$ pólusait úgy választottuk, hogy a mindentátereszítő jelleg biztosított legyen, tehát a pólusok a zérusok tükörképei az egységsugarú körre illetve a képzetes tengelyre, továbbá a $q_i = 0$ pólus, ha ilyen van. A H_{MF} pólusai megegyeznek H pólusaival (a $q_i = 0$ pólus kivételével). A H_{MF} átviteli függvény h számú zérusa megegyezik egyrészt $H_{M\dot{A}}$ pólusaival (ezek a szorzás után egyszerűsödnek), a további zérusok pedig H azon zérusaival, amelyek az egységsugarú körön belül és e körön illetve a bal félsíkon és a képzetes tengelyen helyezkednek el.

A felbontást egy egyszerű esetre a 8. ábra szemlélteti az átviteli függvény és tényezőinek pólus-zérus elrendezésével.

Ha H egy pólusa eleve valamelyik zérusának megfelelő tükörképe, akkor azt természetesen nem kell külön bevezetni a felbontás során.

*4.2-3.6. Szűrők

Tág értelemben a *szűrő* egy olyan rendszer, amelynek gerjesztés-válasz kapcsolata kielégít bizonyos előírásokat, más szóval specifikációkat. Többnyire megköveteljük a kauzalitást és a stabilitást, gyakran a linearitást és az invarianciát is. Az előírások egy része merev (például kauzalitás, stabilitás), más részük optimum típusú (egy választott hibamérték legyen minimális) vagy tolerancia típusú (egy vagy több jellemzőnek egy előírt értéktartományba kell esnie).

A *szűrő* szűkebb értelemben a *frekvenciatartományban* specifikált rendszert jelent. A továbbiakban ezt a szűkebb értelmezést fogjuk alkalmazni. Célunk csak néhány alapgondolat bemutatása, nem törekszünk teljességre sem a feladatok megfogalmazását, sem azok megoldását illetően. Tárgyalásunk során FI szűrőkre szorítkozunk.

Tipikus szűrőspecifikáció a $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztika előírása. Ide sorolható a rendszer *sávzélességének* előírása (3.2-2.5. pont) vagy a *mindentátereszítő* értelmezése (4.2-3.3. pont.). További specifikációkhoz vezetünk be két fogalmat.

Egy szűrő *áteresztősávja*, illetve *zárósávja* az a frekvencia-intervallum, amelyben a rendszer $K(\omega)$ amplitúdó-karakteristikája eleget tesz a következő követelménynek:

$$\begin{aligned} \text{áteresztősáv } (\omega_a < \omega < \omega_b): \quad & \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} K_{\max} \leq K(\omega) \leq K_{\max}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1; \\ \text{zárósáv } (\omega_c < \omega < \omega_d): \quad & 0 \leq K(\omega) \leq \eta K_{\max}, \quad 0 < \eta < \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}. \end{aligned} \quad (4.2-88)$$

Ezek szerint az áteresztősávban a szűrő $K^2(\omega)$ energia-átviteli karakterisztikája nem kisebb maximális értékének felénél. Az áteresztősávbeli megengedett ingadozást jellemző ε paraméter ilyen alakú értelmezésének történeti oka van.

Ha az ε paraméter nincs explicite megadva, akkor $\varepsilon = 1$ a szokásos értelmezés:

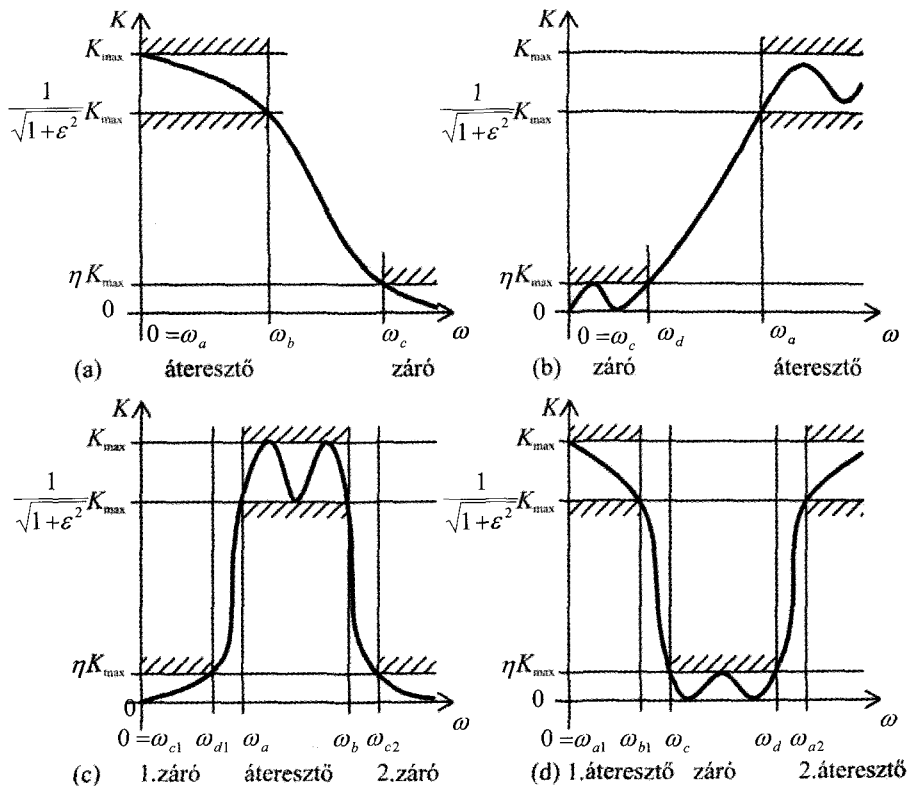
$$\text{áteresztősáv: } \frac{1}{\sqrt{2}} K_{\max} \leq K(\omega) \leq K_{\max}; \quad k_{\max} - 3 \text{ dB} \leq k(\omega) \leq k_{\max}. \quad (4.2-89)$$

Rendszerint ennél kisebb ε értéket engednek meg a jó szűrés érdekében. Az η paraméterre nincs ilyen megállapodás szerinti értelmezés.

Az átteresztősávot és a zárósávot az *átmeneti sáv* választja el egymástól, ahol egyik feltétel sincs kielégítve. Egy szűrőnek lehet több átteresztősávja és több zárósávja.

A 9. ábra négy tipikus *toleranciasémát* szemléltet:

- az *aluláteresztő* átengedi a kis frekvenciákat és nem engedi át a nagy frekvenciákat;
- a *felüláteresztő* átengedi a nagy frekvenciákat és nem engedi át a kis frekvenciákat;
- a *sáváteresztő* csak a közepes frekvenciákat engedi át;
- a *sávzáró* a közepes frekvenciákat nem engedi át.



4.2-9. ábra A négy alapvető szűrőtípus toleranciasémája és egy azt kielégítő amplitúdó-karakterisztika

Az ábrákon feltüntetünk egy-egy olyan $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztikát, amely kielégíti a követelményeket. Ennek menete lehet egy sávon belül vagy monoton (esetleg egyetlen lokális szélsőértékű) vagy ingadozó. A következő pontban a monoton típusú amplitúdó-karakterisztika tervezésére mutatunk egy módszert.

Az ábrán az átteresztősáv alsó határát ω_a , felső határát pedig ω_b jelöli, a zárósáv alsó határát ω_c , felső határát pedig ω_d jelöli. A sáváteresztőnek két zárósávja, a sávzárónak két átteresztősávja van. Az ábrából látható, hogy a nulla és a végtelen frekvencia mindegyik típusnál sávhatár.

A szűrő annál bonyolultabb, minél kisebb ingadozást engedünk meg az átteresztő- és a zárósávban és minél keskenyebb az átmeneti sávot vagy sávokat írunk elő.

Gyakran csak az áteresztősáv (vagy csak a zárósáv) előírt. Például a torzításmentes átvitelhez az áteresztősáv előírt, a zárósávnak nincs jelentősége (3.2-2.4. pont).

Hasonló előírások vonatkozhatnak a $\varphi(\omega)$ fázis-karakterisztikára, vagy a $\tau(\omega)$ futási idő karakterisztikára. Láttuk, hogy a torzításmentes átvitelhez az áteresztősávban lineáris fázis-karakterisztikára, vagyis állandó futási idő karakterisztikára van szükségünk.

Egyes esetekben ugyanabban a frekvenciasávban mind az amplitúdó-karakterisztikára, mind a fázis-karakterisztikára vonatkozik előírás. Ez a helyzet a torzításmentes átvitelnél is. Más esetekben az egyik sávban az amplitúdó-karakterisztikára, egy másik sávban a fázis-karakterisztikára vonatkozik előírás. Ezeket a bonyolult feladatokat a továbbiakban nem is érintjük.

A következő két pontban ízelítőt adunk a szűrőtervezés módszereiből. A diszkrét idejű szűrő tervezését rendszerint a folytonos idejűre vezetik vissza. A szűrőtervezési feladatok megoldására számítógépes programok állnak rendelkezésre.

*4.2-3.7. Maximálisan lapos szűrők

A folytonos idejű szűrők tervezésének feladatára és annak egy megoldására ebben és a következő pontban mutatunk egy-egy példát.

Határozzuk meg egy lineáris, invariáns, kauzális, gerjesztés-válasz stabilis, folytonos idejű rendszer racionális $H(s)$ átviteli függvényét úgy, hogy a rendszer amplitúdó-karakterisztikája kielégítse a (88) szerinti specifikációt. A fázis-karakterisztikára nincs előírás.

A feladat megoldására sok módszer ismeretes, amelyek mindegyike valamilyen szempontból optimális. A következőkben a legegyszerűbb (de nem a leggazdaságosabb) megoldást tárgyaljuk, amelyet *maximálisan lapos* vagy *Butterworth* típusú közelítésnek neveznek.

Először az aluláteresztő szűrő átviteli függvényének meghatározását tárgyaljuk, azután megmutatjuk, miként származtatható ebből a felüláteresztő, a sáváteresztő és a sávzáró szűrő átviteli függvénye.

Maximálisan lapos aluláteresztő szűrő

Tekintsük a következő folytonos idejű amplitúdó-karakterisztikát:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}}}, \quad n \in \mathbf{Z}_+. \quad (4.2-90)$$

Az Olvasóra bízunk annak igazolását, hogy ez a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$K(0) = 1; \quad \left. \frac{d^i K(\omega)}{d\omega^i} \right|_{\omega=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n-1; \quad K(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow k(\omega_0) = -3 \text{ dB}. \quad (4.2-91)$$

Az amplitúdó-karakterisztika jellegét a 9. ábra bal felső diagramja mutatja. A $K(\omega)$ maximálisan lapos abban az értelemben, hogy az $\omega = 0$ körfrekvencián nem csak érintője „vízszintes” és görbülete nulla, de még $2n-1$ számú deriváltja is nulla értékű. Az n növelésével az amplitúdó-karakterisztika egyre „laposabbá” alakítható. Az amplitúdó-karakterisztika ω pozitív értékeire szigorúan monoton csökkenő.

Az n és az ω_0 paraméter a (88) szerinti két feltételből határozható meg. Jelölje az átteresztősáv felső határát ω_b , a zárósáv alsó határát ω_c , akkor a specifikáció értelmében

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_b/\omega_0)^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_c/\omega_0)^{2n}}} = \eta.$$

Elemi számítással kapjuk, hogy

$$n \approx \nu \equiv \frac{\ln(\sqrt{\eta^{-2}-1}/\varepsilon)}{\ln(\omega_c/\omega_b)} \approx \frac{-\ln(\varepsilon\eta)}{\ln(\omega_c/\omega_b)}, \quad \omega_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/n} \omega_b. \quad (4.2-92)$$

Először meghatározzuk ν értékét. Az n az a legkisebb egész szám, amelyre $n \geq \nu$. Ezzel az n értékkel számítjuk az ω_0 paramétert. Látható, hogy annál nagyobb n fokszám szükséges, minél kisebb ε , η és ω_c/ω_b érték van előírva, ami megfelel várakozásainknak.

Igazolható (1. alább), hogy azon átviteli függvény, amely GV stabilis rendszert ír le és $|H(j\omega)|=K(\omega)$ a (90) szerinti, a következő racionális függvény:

$$H(s) = \frac{\omega_0^n}{(s-p_0)(s-p_1)(s-p_1^*) \cdots (s-p_r)(s-p_r^*)}, \quad n=2r+1;$$

$$p_k = \omega_0 e^{j\alpha_k}, \quad \alpha_k = \pi - \frac{k}{n} \pi, \quad k=0, 1, 2, \dots, r;$$

$$H(s) = \frac{\omega_0^n}{(s-p_1)(s-p_1^*) \cdots (s-p_r)(s-p_r^*)}, \quad n=2r;$$

$$p_k = \omega_0 e^{j\alpha_k}, \quad \alpha_k = \pi - \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k=1, 2, \dots, r. \quad (4.2-93)$$

Az átviteli függvény pólusai a bal félsíkon helyezkednek el az origó körüli ω_0 sugarú félkörön, két egymást követő pólus szögének különbsége π/n radián.

Az igazolásnak csak a vázlatát adjuk meg. Könnyen belátható, hogy $s=j\omega$ helyettesítéssel $D(s) \equiv 1 + (\pm s/\omega_0)^{2n}$ a (90) szerinti $K(\omega)$ nevezője. A p_k értékek a $D(s)=0$ egyenletnek a bal félsíkon elhelyezkedő gyökei. Az $|j\omega - p_k|$ tényezők szorzata a $K(\omega)$ nevezőjét adja.

Példa Egy aluláteresztő szűrő specifikációs adatai: $\omega_b = 100$ krad/s, $\varepsilon = 0,5$ és $\omega_c = 1000$ krad/s, $\eta = 0,003$. Határozzuk meg a maximálisan lapos átviteli függvényt!

Az n fokszám és az ω_0 körfrekvencia számítása (92) alapján:

$$\nu = \frac{-\ln(0,003 \cdot 0,5)}{\ln(1000/100)} = 2,82 \Rightarrow n=3; \quad \omega_0 = 0,5^{1/3} \omega_b = 126,0 \text{ krad/s}.$$

Az átviteli függvény pólusai $p_0 = -\omega_0$, $p_1 = -\omega_0 e^{-j60^\circ} = \omega_0(-0,5 - j0,866)$ és p_1^* . Az átviteli függvény nevezője és számlálója ezek felhasználásával

$$A(s) = (s + \omega_0)(s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2) = s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3, \quad B(s) = \omega_0^3.$$

Ellenőrzésül megállapíthatjuk, hogy

$$|A(j\omega)|^2 = (-2\omega_0\omega^2 + \omega_0^3)^2 + (-\omega^3 + 2\omega_0^2\omega)^2 = \omega^6 + \omega_0^6.$$

Az amplitúdó-karakterisztika valóban a (90) szerinti. Ellenőrizhetjük, hogy $A(0)=1$, $K(\omega_b)=1/\sqrt{1,25}=0,894$, a specifikációnak megfelelően, de $K(\omega_c)=0,002$, ami kisebb az előírt 0,003 értéknél, ami annak következménye, hogy n az egész számra kerekítés miatt nagyobb az elméletileg szükséges értéknél. #

Maximálisan lapos más típusú szűrők

Az előzőek alapján meg tudjuk határozni egy olyan aluláteresztő szűrő átviteli függvényét, amely kielégíti az áteresztősávban az $\{\hat{\omega}_a=0, \hat{\omega}_b; \varepsilon\}$, míg a zárósávban az $\{\hat{\omega}_c, \hat{\omega}_d=\infty; \eta\}$ adathármasokkal jellemzett specifikációt.

Jelölje ezt az átviteli függvényt illetve az amplitúdó-karakterisztikát $\hat{H}(\hat{s})$ illetve $\hat{K}(\hat{\omega})$. A felső „sapka” az aluláteresztő *referenciaszűrő* jellemzőire (körfrekvencia, komplex frekvencia, átviteli függvény, átviteli karakterisztika) utal.

Módszert fogunk adni a felüláteresztő, a sáváteresztő és a sávzáró olyan $H(s)$ átviteli függvényének és $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztikájának meghatározására, amelynek paraméterei megegyeznek a referenciaszűrő ε áteresztősávi és η zárósávi paraméterével, három (nem több!) határfrekvenciája tetszőlegesen előírható. A módszer a frekvencia-transzformáció: ennek során az \hat{s} változóról az $\hat{s}=\hat{s}(s)$, az $\hat{\omega}$ változóról az $\hat{\omega}=\hat{\omega}(\omega)$ függvénykapcsolattal térünk át az s illetve az ω változóra. A transzformációnak olyannak kell lennie, hogy ne befolyásolja a stabilitási tulajdonságot, vagyis az \hat{s} bal félsíkját az s sík bal félsíkjaiba kell átvinnie. Ezáltal a referencia átviteli függvény bal félsíkra eső pólusaiból a keresett átviteli függvény bal félsíkra eső pólusai lesznek.

Maximálisan lapos felüláteresztő szűrő

A felüláteresztő szűrő áteresztősávjának paraméterei $\{\omega_a, \omega_b = \infty; \varepsilon\}$, zárósávjának paraméterei $\{\omega_c = 0, \omega_d; \eta\}$, amint ezt a 9. ábra is mutatja. Az ezt biztosító és a stabilitást megőrző frekvencia-transzformáció

$$\hat{\omega} = \frac{\Omega^2}{\omega}, \quad \hat{s} = \frac{\Omega^2}{s}. \quad (4.2-94)$$

Az Ω körfrekvencia tetszőleges ($\Omega^2 = \omega_a \omega_d$ egy szokásos választás). A felüláteresztő (FÁ) és az aluláteresztő referenciaszűrő (AÁ) összetartozó frekvenciái a következők:

$$\begin{aligned} \text{FÁ: } \omega &= 0 & \omega_d & & \omega_a & & \infty & \omega_0 & \equiv \varepsilon^{1/n} \omega_a \\ \text{AÁ: } \hat{\omega} &= \infty & \frac{\Omega^2}{\omega_d} & = \hat{\omega}_c & \frac{\Omega^2}{\omega_a} & = \hat{\omega}_b & 0 & \hat{\omega}_0 & \equiv \varepsilon^{-1/n} \hat{\omega}_b \end{aligned}$$

A $\{0, \omega_d; \eta\}$ zárósáv az $\{\hat{\omega}_c, \infty; \eta\}$ referencia-zárósávba, míg az $\{\omega_a, \infty; \varepsilon\}$ áteresztősáv a $\{0, \hat{\omega}_b; \varepsilon\}$ referencia-áteresztősávba transzformálódik. Ismerve a referencia-aluláteresztő $\hat{H}(\hat{s})$ átviteli függvényét – előzőleg a maximális laposságú közelítést meg is adtuk – a felüláteresztő átviteli függvényének kifejezése

$$\text{FÁ: } H(s) = \hat{H}(\hat{s}) \Big|_{\hat{s} = \Omega^2/s} \quad (4.2-95)$$

Hasonlóan kapjuk a $K(\omega) = \hat{K}(\hat{\omega}) \Big|_{\hat{\omega} = \Omega^2/\omega}$ amplitúdó-karakterisztikát.

Példa Határozzuk meg annak a felüláteresztő szűrőnek az átviteli függvényét és átviteli karakterisztikáját, amelynek zárósávját a $\{0, 100 \text{ krad/s}; 0,003\}$, áteresztősávját az $\{1000 \text{ krad/s}, \infty; 0,5\}$ paraméterek jellemzik.

Legyen $\Omega^2 = \omega_a \omega_d = 10^5 \text{ (krad/s)}^2$. Ekkor $\hat{\omega}_b = \Omega^2 / \omega_a = \omega_d = 100 \text{ krad/s}$ és $\hat{\omega}_c = \Omega^2 / \omega_d = \omega_a = 1000 \text{ krad/s}$ adódik. Ezek szerint éppen az előző példában vizsgált aluláteresztő specifikációit kaptuk. Az átviteli függvény ennek megfelelően

$$H(s) = \frac{\hat{\omega}_0^3}{\hat{s}^3 + 2\hat{\omega}_0\hat{s}^2 + 2\hat{\omega}_0^2\hat{s} + \hat{\omega}_0^3} \Big|_{\hat{s} = \Omega^2/s} = \frac{s^3}{s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3}; \quad \omega_0 \equiv \varepsilon^{1/3} \omega_a = 793,70 \frac{\text{krad}}{s}.$$

Némi számolással belátható, hogy az energia-átviteli karakterisztika kifejezése

$$K^2(\omega) = \frac{(\omega/\omega_0)^6}{1 + (\omega/\omega_0)^6},$$

továbbá $K(\omega_a) = 0,894$; $K(\omega_d) = 0,002$ mint az előző példában az aluláteresztőre, amint annak lennie is kell. #

Maximálisan lapos sáváteresztő szűrő

A sáváteresztő szűrő áteresztősávjának paraméterei $\{\omega_a, \omega_b; \varepsilon\}$, zárósávjainak paraméterei $\{0, \omega_d; \eta\}$ és $\{\omega_c, \infty; \eta\}$, amint ezt a 9. ábra is mutatja. Az ezt biztosító és a stabilitást megőrző frekvencia-transzformáció

$$\hat{\omega} = \omega - \frac{\Omega^2}{\omega}, \quad \hat{s} = s + \frac{\Omega^2}{s}; \quad \Omega^2 = \begin{cases} \omega_a \omega_b \\ \omega_c \omega_d \end{cases} \quad (4.2-96)$$

Az $\omega_a \omega_b = \omega_c \omega_d$ feltétel azt jelenti, hogy csak három határfrekvenciát választhatunk meg szabadon. A (96) megkötés egy következménye

$$\hat{\omega}_b = \omega_b - \omega_a, \quad \hat{\omega}_c = \omega_c - \omega_d. \quad (4.2-97)$$

A sáváteresztő (SÁ) és az aluláteresztő referencia-szűrő (AÁ) összetartozó körfrekvenciái

$$\text{SÁ: } \omega = 0 \quad \omega_d \quad \omega_a \quad \Omega \quad \omega_b \quad \omega_c \quad \infty$$

$$\text{AÁ: } \hat{\omega} = -\infty \quad -\hat{\omega}_c \quad -\hat{\omega}_b \quad 0 \quad \hat{\omega}_b \quad \hat{\omega}_c \quad +\infty$$

Az $\{\omega_a, \omega_b; \varepsilon\}$ áteresztősáv a $\{-\hat{\omega}_b, \hat{\omega}_b; \varepsilon\}$ áteresztősávba, míg a $\{0, \omega_d; \eta\}$, illetve az $\{\omega_c, \infty; \eta\}$ zárósáv a $\{-\infty, -\hat{\omega}_c; \eta\}$, illetve az $\{\hat{\omega}_c, \infty; \eta\}$ zárósávba transzformálódik.

Az átviteli függvényt vagy az amplitúdó-karakterisztikát az előzőhöz hasonlóan behelyettesítéssel kapjuk. A $K(\omega)$ maximális értéke 1, ez az Ω körfrekvencián (az áteresztősáv mértani közepénél) lép fel. A $H(s)$ fokszáma kétszerese a referenciaszűrő fokszámanak. Ez azt jelenti, hogy a jelfolyam hálózattal történő realizálás során kétszer

annyi integrátorra van szükség a sáváteresztő mint az ugyanolyan specifikációjú aluláteresztő realizálásához.

Példa Határozzuk meg egy olyan sáváteresztő átviteli függvényét és amplitúdó-karakterisztikáját, amelyre az áteresztősávi specifikáció $\{100 \text{ krad/s}, 200 \text{ krad/s}; 0,5\}$, első zárósávjának specifikációja $\{0 \text{ krad/s}, 19,6 \text{ krad/s}; 0,003\}$, második zárósávjának specifikációja $\{1020 \text{ krad/s}, \infty; 0,003\}$. A második zárósáv alsó határát $(100)(200)/19,6$ adja, a többi adat szabadon választható.

Az aluláteresztő referenciaszűrőre $\hat{\omega}_b = 100 \text{ krad/s}$ és $\hat{\omega}_c = 1000 \text{ krad/s}$. Ez éppen a korábban vizsgált aluláteresztő, ezért felhasználhatjuk annak átviteli függvényét (amelyben $\hat{\omega}_0 = 126,0 \text{ krad/s}$):

$$H(s) = \frac{\hat{\omega}_0^3}{s^3 + 2\hat{\omega}_0 s^2 + 2\hat{\omega}_0^2 s + \hat{\omega}_0^3} \Big|_{s=s+\Omega^2/s} = \frac{\hat{\omega}_0^3 s^3}{A(s)};$$

$$A(s) = s^6 + 2\hat{\omega}_0 s^5 + (3\Omega^2 + 2\hat{\omega}_0^2) s^4 + (4\Omega^2 + \hat{\omega}_0^2)\hat{\omega}_0 s^3 +$$

$$+ (3\Omega^2 + 2\hat{\omega}_0^2)\Omega^2 s^2 + 2\Omega^4 \hat{\omega}_0 s + \Omega^6; \quad \Omega^2 = \omega_a \omega_b = 20000 \text{ (krad/s)}^2.$$

Az átviteli karakterisztika kifejezése elemi, de hosszadalmas számítás után:

$$K(\omega) = \frac{\hat{\omega}_0^3 \Omega^3}{|A(j\omega)|};$$

$$|A(j\omega)|^2 = \omega^{12} - 6\Omega^2 \omega^{10} + 15\Omega^4 \omega^8 - (20\Omega^6 - \hat{\omega}_0^6) \omega^6 + 15\Omega^8 \omega^4 - 6\Omega^{10} \omega^2 + \Omega^{12}.$$

Ezt az eredményt előállíthatjuk $\hat{K}(\hat{\omega})$ kifejezésének felhasználásával is. #

Maximálisan lapos sávzáró szűrő

A sávzáró szűrő zárósávjának paraméterei $\{\omega_c, \omega_d; \eta\}$, két áteresztősávjának paraméterei $\{0, \omega_b; \varepsilon\}$ és $\{\omega_a, \infty; \varepsilon\}$, amint ezt a 9. ábra is mutatja. Az ezt biztosító és a stabilitást megőrző frekvencia-transzformáció

$$\hat{\omega} = \frac{\Omega^2 \omega}{\Omega^2 - \omega^2}, \quad \hat{s} = \frac{\Omega^2 s}{\Omega^2 + s^2}; \quad \Omega^2 = \begin{cases} \omega_a \omega_b \\ \omega_c \omega_d \end{cases}, \quad \Omega_0^2 = (\omega_a - \omega_b)(\omega_d - \omega_c). \quad (4.2-98)$$

Az Ω^2 helyett más állandó is használható. Az $\omega_a \omega_b = \omega_c \omega_d$ feltétel azt jelenti, hogy csak három határfrekvenciát választhatunk meg szabadon. A (98) megkötés egy következménye

$$\hat{\omega}_b = \omega_d - \omega_c, \quad \hat{\omega}_c = \omega_a - \omega_b. \quad (4.2-99)$$

A sávzáró (SZ) és az aluláteresztő referencia-szűrő (AÁ) összetartozó körfrekvenciái:

$$\text{SZ: } \omega = 0 \quad \omega_b \quad \omega_c \quad \Omega \quad \omega_d \quad \omega_a \quad \infty$$

$$\text{AÁ: } \hat{\omega} = 0 \quad \hat{\omega}_b \quad \hat{\omega}_c \quad \pm \infty \quad -\hat{\omega}_c \quad -\hat{\omega}_b \quad 0$$

Az értelmezés hasonló, mint a sáváteresztőnél, ezért nem ismételjük meg és nem adunk példát sem.

Mint már említettük, a megadott frekvencia-transzformációk nemcsak a maximális laposságú közelítés esetén használhatók, hanem más, általunk nem tárgyalt közelítések esetén is. Ezek vagy az áteresztősávban vagy a zárósávban, vagy mindkettőben ingadozó amplitúdó-karakterisztikát eredményeznek. Ilyenek alkalmazásával gyakran kisebb fokszámú szűrővel is kielégíthető a specifikáció.

Látható, hogy a frekvencia-transzformáció nem biztosítja a sáváteresztő és a sávzáró szűrő tervezésének általános megoldását, mert a specifikáció paramétereire megkötések vonatkoznak,

*4.2-3.8. Maximálisan lapos futási idejű mindentáteresztő

Mint már láttuk (3.2-2.4. pont), a torzításmentes jelátvitel egy olyan FI rendszerrel valósítható meg, amelynek átviteli karakterisztikája $H_0(j\omega) = K_0 e^{-j\omega T}$, ahol $T > 0$ a késleltetési idő. Az ennek megfelelő átviteli függvény $H_0(s) = K_0 e^{-sT}$.

Célunk egy olyan közelítő *racionális* $H(s)$ átviteli függvény előállítása, amelynek pólusai a bal félsíkra esnek. E feladatnak sok megoldása van, ezek egyikét tárgyaljuk.

A $\tau(\omega)$ futási idő karakterisztika kifejezhető a következő alakban

$$\tau(\omega) = -\Re_e \left\{ \left. \frac{H'(s)}{H(s)} \right|_{s=j\omega} \right\}, \quad \frac{H'(s)}{H(s)} = \frac{d}{ds} \{ \ln H(s) \}, \quad (4.2-100)$$

ahol a vessző az s szerinti differenciálást jelöli. Ugyanis $H(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ jelöléssel

$$\begin{aligned} \ln H(j\omega) &= \ln K(\omega) + j\varphi(\omega), \\ \Re_e \left\{ \frac{d}{dj\omega} \ln H(j\omega) \right\} &= \Re_e \left\{ -j \frac{1}{K(\omega)} \frac{dK(\omega)}{d\omega} + \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \right\}, \end{aligned}$$

amiből (100) már következik.

Meg akarjuk határozni az $H_0(s) = e^{-sT}$ mindentáteresztő átviteli függvény egy olyan racionális közelítését, amelyre az amplitúdó-karakterisztika pontosan állandó, tehát feladatunk a $\varphi_0(\omega) = -\omega T$ lineáris fázis-karakterisztika, vagyis a $\tau_0(\omega) = T$ állandó futási idő karakterisztika közelítése.

Tekintsük a mindentáteresztő futási ideje legjobb közelítésének a *maximális laposságút*, vagyis azt, amelyik a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\tau(0) = T; \quad \left. \frac{d^i \tau(\omega)}{d\omega^i} \right|_{\omega=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2-101)$$

A mindentáteresztő racionális átviteli függvénye (4.2-3.3. pont; alább bevezettük a $c_i = a_{n-i} / a_n$ új együtthatókat):

$$H(s) \equiv \frac{A(-s)}{A(s)} = \frac{1 - c_1 s + c_2 s^2 - \dots + (-1)^n c_n s^n}{1 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_n s^n}. \quad (4.2-102)$$

Az együtthatóknak még ki kell elégíteniük a stabilitási feltételeket is (többek között mindegyiknek pozitívnak kell lennie).

A futási idő karakterisztika kifejezéséhez képezzük a (100) szerinti alakot:

$$\frac{H'(s)}{H(s)} = \frac{\{A(-s)\}' A(s) - A(-s)A'(s)}{[A(s)]^2} = -\frac{A'(s)}{A(s)} + \frac{\{A(-s)\}'}{A(-s)}.$$

Az $s = j\omega$ helyettesítés után a második tag az első tag konjugált komplex párja, ezért összegük valós. A (100) értelmében ezért

$$\tau(\omega) = -\left. \frac{H'(s)}{H(s)} \right|_{s=j\omega}; \quad H(s) \equiv \frac{A(-s)}{A(s)}. \quad (4.2-103)$$

Célunk a c_i együtthatók meghatározása úgy, hogy egy n megválasztása után a (101) feltételek és a stabilitás feltételei is ki legyenek elégítve.

Tekintsük először az $n=2$ esetet. Ekkor $A(s) = 1 + c_1 s + c_2 s^2$ és ebből $A'(s) = c_1 + 2c_2 s$. Az osztást elkezdve

$$\begin{aligned} (c_1 + 2c_2 s) \cdot (1 + c_1 s + c_2 s^2) &= c_1 + (2c_2 - c_1^2)s + c_1(c_1 - 3c_2)s^2 \\ &\quad (2c_2 - c_1^2)s - c_1 c_2 s^2 \\ &\quad (-3c_1 c_2 + c_1^3)s^2 - (2c_2^2 - c_2 c_1^2)s^3 \end{aligned}$$

Az s változót a $-s$ változóval helyettesítve, a (100) szerint kapjuk, hogy

$$\frac{H'(s)}{H(s)} = -2c_1 \{1 + (c_1^2 - 3c_2)s^2 + \dots\}, \quad \tau(\omega) = 2c_1 \{1 - (c_1^2 - 3c_2)\omega^2 + \dots\}.$$

Látható, hogy az optimális választás $2c_1 = T$. Ezek szerint $n=1$ esetén

$$H(s) = \frac{1 - sT/2}{1 + sT/2}, \quad \tau(\omega) = \frac{T}{1 + (\omega T/2)^2}$$

a maximálisan lapos futási idejű mindentáteresztőre. Ha $n=2$, akkor a másodfokú tag együtthatója nullává tehető $3c_2 = c_1^2 = (T/2)^2$ választással és ekkor

$$H(s) = \frac{1 - (sT/2) + (sT/2)^2/3}{1 + (sT/2) + (sT/2)^2/3}, \quad \tau(\omega) = T \frac{1 + (\omega T/2)^2/3}{1 + (\omega T/2)^2/3 + (\omega T/2)^4/9}.$$

Látható, hogy mindkét esetben az átviteli függvény stabilis rendszert ír le. Ez szerencsés körülmény, hiszen ennek biztosításáról nem gondoskodtunk. Nagyobb fokszámú közelítések hasonló módon számíthatók.

Igazolható, hogy a maximálisan lapos futási idejű mindentáteresztő átviteli függvényének általános kifejezése

$$H(s) = \frac{A(-s)}{A(s)}, \quad A(s) = \sum_{i=0}^n \frac{n! (2n-i)!}{(2n)! (n-i)! i!} (sT)^i, \quad i=1, 2, \dots \quad (4.2-104)$$

Az $A(s)$ polinom zérusai mind a bal félsíkon helyezkednek el, vagyis az átviteli függvény stabilis rendszert ír le. E pólusok szükség esetén numerikusan számíthatók.

Az n fokszám alkalmas megválasztásával elérhető, hogy ha $T - T_f$ a futási idő karakterisztika megengedett eltérése az előírt $[0, \omega_f]$ frekvenciasávban, akkor $\tau(\omega_f) \geq T_f$ teljesüljön, aminek következtében $T_f \leq \tau(\omega) \leq T, 0 \leq \omega \leq \omega_f$ ki van elégítve.

4.2-3.F. Feladatok

F-1. Egy diszkrét idejű, FIR típusú rendszer impulzusválasza (háromszögletű vagy Bartlett-ablak)

$$h[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - M]\} \frac{k}{M} + \{\varepsilon[k - M] - \varepsilon[k - 2M]\} \frac{2M - k}{M}.$$

Határozza meg a rendszer átviteli függvényét, átviteli karakterisztikáját, amplitúdó- és fázis-karakterisztikáját! Lineáris a fázis-karakterisztika?

F-2. Egy diszkrét idejű, lineáris fázisú, ideális aluláteresztő átviteli karakterisztikája

$$H(e^{j\vartheta}) = e^{-j p \vartheta}, \quad 0 \leq |\vartheta| < \frac{\pi}{2}; \quad H(e^{j\vartheta}) = 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq |\vartheta| < \pi.$$

Határozza meg annak a DI, kauzális, FIR típusú rendszernek a $H_L(e^{j\vartheta})$ átviteli karakterisztikáját, amelynek impulzusválasza az ideális impulzusválasz csonkítottja:

$$h_L[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - L]\} h[k],$$

ahol $h[k]$ az ideális rendszer impulzusválasza. Legyen $p = 4$ és

$$(a) L = 2. \quad (b) L = 4. \quad (c) L = 8.$$

Melyik csonkított impulzusválaszú rendszer aluláteresztő jellegű?

***F-3.** Tekintse a következő E_{mn} függvényeket, az első néhány Padé-törtet (az első index a számláló, a második a nevező fokszámát jelöli):

$$E_{01}(x) = \frac{1}{1+x}, \quad E_{11}(x) = \frac{1-x/2}{1+x/2}, \quad E_{02}(x) = \frac{1}{1+x+x^2/2},$$

$$E_{12}(x) = \frac{1-x/3}{1+2x/3+x^2/6}, \quad E_{22}(x) = \frac{1-x/2+x^2/12}{1+x/2+x^2/12}.$$

Igazolja, hogy ezek Taylor-sorának első $m+n$ számú tagja megegyezik az

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

Taylor-sor első $m+n$ számú tagjával.

A fenti eredményeket felhasználva adjon racionális közelítést az alábbi, nem racionális FI átviteli függvényekre ($T > 0$):

$$(a) H(s) = e^{-sT} \text{ (késleltető vagy lineáris fázisú mindentáteresztő).}$$

$$(b) H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{sT} \text{ (állandó értékű, véges hosszúságú impulzusválasz).}$$

Igaz-e, hogy az így kapott $H_{mn}(s)$ átviteli függvények kauzális és gerjesztés-válasz stabilis rendszert jellemeznek?

***F-4.** Egy FI rendszer fázis-karakterisztikája

$$\varphi(\omega) = 0, \quad 0 < \omega < \omega_1; \quad \varphi(\omega) = C\pi, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2; \quad \varphi(\omega) = 0, \quad \omega_2 < \omega < \infty.$$

Határozza meg azt az amplitúdó-karakterisztikát, amely kauzális rendszert ír le! Lehet-e $\omega_1 = 0$, illetve $\omega_2 = \infty$ értékű?

***F-5.** Egy DI rendszer amplitúdó-karakterisztikája

$$K(\vartheta) = K_0, \quad 0 < \vartheta < \vartheta_1; \quad K(\vartheta) = K_1, \quad \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2; \quad K(\vartheta) = K_2, \quad \vartheta_2 < \vartheta < \pi.$$

Határozza meg azt a fázis-karakterisztikát, amely kauzális rendszert ír le! Van-e valamilyen megkötés a K_i vagy a ϑ_i előírásokra?

***F-6.** Egy DI rendszer fázis-karakterisztikája

$$\varphi(\vartheta) = 0, \quad 0 < \vartheta < \vartheta_1; \quad \varphi(\vartheta) = C\pi, \quad \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2; \quad \varphi(\vartheta) = 0, \quad \vartheta_2 < \vartheta < \pi.$$

Határozza meg azt az amplitúdó-karakterisztikát, amely kauzális rendszert ír le! Lehet-e $\vartheta_1 = 0$, illetve $\vartheta_2 = \pi$ értékű?

4.2-3.M. Megoldások

M-1. A 4.1-1.F-3(d) feladat eredményét is felhasználva

$$H(z) = z^2 \frac{1 - 2z^{-M} + z^{-2M}}{M(z-1)^2}, \quad H(e^{j\vartheta}) = \left[\frac{1 - e^{-jM\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta}} \right]^2 = \left[\frac{\sin(M\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)} \right]^2 \frac{e^{-j(M-1)\vartheta/2}}{M}.$$

A rendszer lineáris fázisú, mint az a legutolsó összefüggésből következik.

M-2. A lineáris fázisú, ideális aluláteresztő impulzusválasza a megadott sávhatár esetén

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-j(k-p)\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(k-p)\pi/2}{k-p}.$$

A csonkítással előállított, kauzális FIR típusú rendszer átviteli karakterisztikája $p = 4$ figyelembe vételével

$$H_L(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=0}^{L-1} h[k] e^{-j\vartheta k} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{-1}{3} e^{-j\vartheta} + e^{-j3\vartheta} + \frac{\pi}{2} e^{-j4\vartheta} + e^{-j5\vartheta} + \frac{-1}{3} e^{-j7\vartheta} + \dots \right\}.$$

A megadott impulzushosszak esetén

$$(a) H_2(e^{j\vartheta}) = -\frac{1}{3\pi} e^{-j\vartheta}, \quad K_2(\vartheta) = \frac{1}{3\pi}.$$

$$(b) H_4(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{-1}{3} e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta} \right\} e^{-j2\vartheta}, \quad K_4(\vartheta) = \frac{1}{3\pi} \sqrt{10 - 6 \cos 2\vartheta}.$$

$$(c) H_8(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2 \cos \vartheta - \frac{2}{3} \cos 3\vartheta \right\} e^{-j4\vartheta}.$$

Az amplitúdó-karakterisztika ábrázolásával belátható, hogy csak a (c) szerinti ír le aluláteresztőt. Ebből következik, hogy az impulzusválasz csonkítása megváltoztathatja a frekvenciafüggés jellegét (esetünkben az aluláteresztő tulajdonságot)!

***M-3.** Az állítást például polinomosztással ellenőrizhetjük.

$$(a) H_{mn}(s) = E_{mn}(sT).$$

Csak $H_{11}(s)$ és $H_{22}(s)$ ír le lineáris fázisú mindentáteresztőt.

$$(b) H_{01}(s) = \frac{1}{1+sT}; \quad H_{11}(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}sT}; \quad H_{02}(s) = \frac{1+\frac{1}{2}sT}{1+sT+\frac{1}{2}(sT)^2};$$

$$H_{12}(s) = \frac{1+\frac{1}{6}sT}{1+\frac{2}{3}sT+\frac{1}{6}(sT)^2}; \quad H_{22}(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}sT+\frac{1}{12}(sT)^2}.$$

Mindegyik rendszer kauzális és gerjesztés-válasz stabilis.

***M-4.** A (82) Bode-képlet alapján az $\omega_1 < \omega < \omega_2$ intervallumban

$$\ln \frac{K(\omega)}{K(\infty)} = -\frac{1}{\pi} \left\{ -C \pi \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[C \pi \int_{\omega_1}^{\omega - \varepsilon} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} + C \pi \int_{\omega + \varepsilon}^{\omega_2} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} \right] \right\}.$$

Ha $0 < \omega < \omega_1$ vagy ha $\omega_2 < \omega < \infty$, akkor az (ω_1, ω_2) intervallumra vonatkozó integrál közvetlenül számítható. Hasonló az eljárás a (82) másik összefüggése alapján. Végeredményben

$$K(\omega) = K(\infty) \left| \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \right|^C, \quad K(\omega) = K(0) \left| \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega^2} \right|^C.$$

Ha $C > 0$, akkor $K(\omega_1) = 0, K(\omega_2) = \infty$; ha $C < 0$, akkor $K(\omega_1) = \infty, K(\omega_2) = 0$.

Ha $\omega_1 = 0$, illetve ha $\omega_2 = \infty$, akkor

$$K(\omega) = K(\infty) \left| \frac{\omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \right|^C, \quad K(\omega) = K(0) \left| \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_1^2} \right|^C,$$

míg a másik alak nem értelmezett.

***M-5.** A (82) Bode-képlet alapján például $0 < \vartheta < \vartheta_1$ esetén

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln K_2 \int_{-\pi}^{-\vartheta} f(\lambda - \vartheta) d\lambda + \ln K_1 \int_{-\vartheta_1}^{-\vartheta} f(\lambda - \vartheta) d\lambda + \ln K_0 \int_{-\vartheta_1}^0 f(\lambda - \vartheta) d\lambda + \right. \\ \left. + \ln K_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\vartheta - \varepsilon} f(\lambda - \vartheta) d\lambda + \int_{\vartheta + \varepsilon}^{\vartheta_1} f(\lambda - \vartheta) d\lambda \right] + \ln K_1 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} f(\lambda - \vartheta) d\lambda + \ln K_2 \int_{\vartheta_1}^{\pi} f(\lambda - \vartheta) d\lambda \right],$$

ahol $f(\alpha) = \cos \alpha / \sin \alpha$. Az integrál és a határérték könnyen számítható. Végeredményben

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \ln K_0 \ln \frac{\sin \frac{|\vartheta_1 - \vartheta|}{2}}{\sin \frac{|\vartheta_1 + \vartheta|}{2}} + \ln K_1 \ln \left[\frac{\sin \frac{|\vartheta_1 + \vartheta|}{2} \sin \frac{|\vartheta_2 - \vartheta|}{2}}{\sin \frac{|\vartheta_1 - \vartheta|}{2} \sin \frac{|\vartheta_2 + \vartheta|}{2}} \right] + \ln K_2 \ln \frac{\sin \frac{|\vartheta_2 + \vartheta|}{2}}{\sin \frac{|\vartheta_2 - \vartheta|}{2}} \right\}.$$

Egyik K_i sem lehet nulla, de például $\vartheta_1 = \vartheta_2$ azt jelenti, hogy K_1 nincs előírva.

***M-6.** A (82) Bode-képlet alapján például $0 < \vartheta < \vartheta_1$ esetén

$$\ln \frac{K(\vartheta)}{K(0)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ -C \pi \int_{-\vartheta_2}^{-\vartheta_1} f(\lambda - \vartheta) d\lambda + \ln K_1 \int_{-\vartheta_2}^{-\vartheta_1} f(\lambda - \vartheta) d\lambda + \right. \\ \left. + C \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\vartheta_1}^{\vartheta - \varepsilon} f(\lambda - \vartheta) d\lambda + \int_{\vartheta + \varepsilon}^{\vartheta_2} f(\lambda - \vartheta) d\lambda \right] \right\},$$

ahol $f(\beta) = 1/\operatorname{tg}(\beta/2)$. Végeredményben

$$K(\vartheta) = K(0) \left[\frac{\sin \frac{|\vartheta_1 + \vartheta|}{2} \sin \frac{|\vartheta_1 - \vartheta|}{2}}{\sin \frac{|\vartheta_2 + \vartheta|}{2} \sin \frac{|\vartheta_2 - \vartheta|}{2}} \right]^C.$$

A $\vartheta_1 = 0$, illetve a $\vartheta_2 = \pi$ értékek megengedettek. Ekkor az amplitúdó-karakterisztika kifejezése kissé egyszerűsödik.

4.3. Hálózatanalízis a komplex frekvenciatartományban

Mint a 2.4. és a 3.3. fejezetben már láttuk: egy rendszer reprezentálható hálózattal is. Ebben a fejezetben a lineáris, invariáns, kauzális jelfolyam hálózatokat vizsgáljuk és ezeket röviden hálózatnak nevezzük. Elsődleges célunk a hálózat által reprezentált rendszer átviteli függvényének előállítása. Alapvetően két utat követhetünk. Előállíthatjuk a rendszer valamelyik időtartománybeli leírását, majd képezzük annak DI vagy FI Laplace-transzformáltját, ezekből kifejezzük a gerjesztés és a válasz kapcsolatát. Ezt az eljárást a 4.2-1. szakaszban már tárgyaltuk. Előállíthatjuk azonban az egyenleteket közvetlenül a komplex frekvenciatartományban is. Ezzel a gondolattal a 3.3. fejezetben ugyancsak találkoztunk már. Mindkét módszer alkalmazható abban az általánosabb esetben is, amikor nem bekapcsolási folyamatot vizsgálunk, ezért az átviteli függvény nem elegendő a válasz számításához.

Az igen tömör és hatékony komplex frekvenciatartománybeli rendszerleírást és hálózatleírást a 4.4. szakaszban még fel fogjuk használni.

A 4.3-1. szakaszban tárgyaljuk a hálózati egyenletek közvetlen felírását a komplex frekvenciatartományban, azután röviden megismételjük az időtartománybeli egyenletek felírásának és transzformálásának módszerét.

A 4.3-2. szakaszban néhány módszert mutatunk arra, hogy miként lehet előállítani azt a hálózatot, amelynek adott a racionális átviteli függvénye (a hálózatszintézis realizációs lépése). Ezzel a feladattal már foglalkoztunk a 2.4-3. szakaszban az időtartománybeli leírásra támaszkodva. Most valamivel többet tudunk erről mondani, kihasználva a komplex frekvenciatartománybeli leírás jól kezelhető formalizmusát, ezért a direkt realizációk mellett a kaszkád realizációt is bemutatjuk.

4.3-1. Az átviteli függvény számítása

4.3-1.1. Elemi komponensek

A lineáris, invariáns, kauzális jelfolyam hálózatok elemi komponenseit a 2.4-1.1. pontban már értelmeztük. Itt összefoglaljuk az elemi komponensek nevét és diszkrét idejű, illetve folytonos idejű karakterisztikáját. Az elemi komponensek rajzjelét alább az 1. ábrán megadjuk, annak felirataival egyelőre ne törődjünk.

Jelölje p a komponens bemeneti, q a komponens kimeneti változóját, akkor az elemi komponensek időtartománybeli karakterisztikái (2.4-1) értelmében

komponens neve:	DI karakterisztika	FI karakterisztika	(4.3-1)
forrás	$q[k] = u[k]$	$q(t) = u(t)$	
nyelő	$p[k] = y[k]$	$p(t) = y(t)$	
erősítő	$q[k] = K p[k]$	$q(t) = K p(t)$	

DI késeltető	$\begin{cases} q[k] = p[k-1] \\ q[k+1] = p[k] \end{cases}$	—
FI integrátor	—	$\begin{cases} q(t) = q(-0) + \int_{-0}^t p(\tau) d\tau \\ q'(t) = p(t) \end{cases}$

Képezzük az egyenletek DI illetve FI Laplace-transzformáltját, vagyis térjünk át a komplex frekvenciatartományba:

komponens neve:	DI karakterisztika	FI karakterisztika
forrás	$Q(z) = U(z)$	$Q(s) = U(s)$
nyelő	$P(z) = Y(z)$	$P(s) = Y(s)$
erősítő	$Q(z) = K P(z)$	$Q(s) = K P(s)$
DI késeltető	$\begin{cases} Q(z) = z^{-1} P(z) + p[-1] \\ z Q(z) - z q[0] = P(z) \end{cases}$	—
FI integrátor	—	$\begin{cases} Q(s) = \frac{1}{s} P(s) + \frac{q(-0)}{s} \\ s Q(s) - q(-0) = P(s) \end{cases}$

(4.3-2)

Az i -edik forrás $U_i(z) = \mathcal{X}\{u_i[k]\}$ illetve $U_i(s) = \mathcal{L}\{u_i(t)\}$ kimeneti változója a rendszer adott vagy adatként kezelt *gerjesztése* (bemeneti változója).

Az i -edik nyelő $Y_i(z) = \mathcal{X}\{y_i[k]\}$ illetve $Y_i(s) = \mathcal{L}\{y_i(t)\}$ bemeneti változója a rendszer keresett *válasza* (kimeneti változója).

Az i -edik *erősítő* komplex frekvenciatartománybeli karakterisztikája

DI: $Q_i(z) = K_i P_i(z)$	FI: $Q_i(s) = K_i P_i(s)$,	(4.3-3)
---------------------------	-----------------------------	---------

ahol K_i az időtől független erősítés. A Q_i és a P_i a z illetve az s változó ismeretlen függvénye.

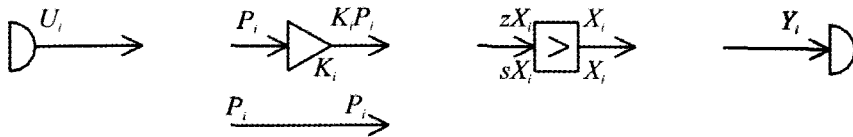
A dinamikus komponensre a karakterisztikát mind az időtartományban, mind a komplex frekvenciatartományban két alakban is megadtuk. Ha azt akarjuk, hogy az egyenletekben csak z illetve s pozitív hatványai forduljanak elő, akkor a második alakot célszerű használni.

A dinamikus komponensek komplex frekvenciatartománybeli karakterisztikájának meghatározása során tekintsük először a *belépő gerjesztések* esetét. Ezek a kauzális komponensekből álló hálózatban belépő változókat hoznak létre, ezért a késeltetőre $q[0] = p[-1] = 0$, illetve az integrátorra $q(-0) = 0$. A karakterisztika ekkor egyszerűsödik.

A dinamikus komponensek komplex frekvenciatartománybeli karakterisztikája *belépő gerjesztések* esetén

az i -edik DI késeltető kimeneti változója $X_i(z)$, bemeneti változója $z X_i(z)$; az i -edik FI integrátor kimeneti változója $X_i(s)$, bemeneti változója $s X_i(s)$.	(4.3-4)
---	---------

Ezeket az összefüggéseket szemlélteti az 1. ábra (vö. 3.1-1. ábra)



4.3-1. ábra Az elemi komponensek és változók a komplex frekvenciatartományban belépő jelek esetén

Abban az általánosabb esetben, amikor a jelek nem belépők, először meg kell határoznunk minden késleltető kimeneti változójának $x_i[0]$ kezdeti értékét illetve minden integrátor kimeneti változójának $x_i(-0)$ kiindulási értékét a hálózat múltjának ismeretében. Lehet, hogy $k=0$ illetve $t=0$ előtt a hálózatban egy vagy több erősítés vagy akár a hálózat struktúrája más volt, mint $k=0$ illetve $t=0$ után.

A dinamikus komponensek komplex frekvenciatartománybeli karakterisztikája *nem belépő* gerjesztések esetén:

– az i -edik DI késleltető kimeneti változója $X_i(z)$, bemeneti változója ekkor

$$V_i(z) = z X_i(z) - x_i[0]z; \tag{4.3-5}$$

– az i -edik FI integrátor kimeneti változója $X_i(s)$, bemeneti változója ekkor

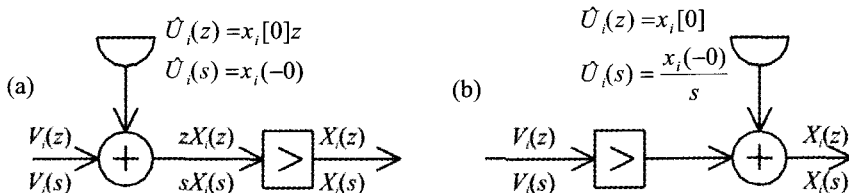
$$V_i(s) = s X_i(s) - x_i(-0);$$

A DI késleltető illetve a FI integrátor karakterisztikájának egy másik alakja ugyanezekkel a jelölésekkel (ekkor az egyenletek a z^{-1} illetve az s^{-1} változókat tartalmazzák)

$$\begin{aligned} X_i(z) &= z^{-1} V_i(z) + x_i[0], \\ X_i(s) &= s^{-1} V_i(s) + s^{-1} x_i(-0). \end{aligned} \tag{4.3-6}$$

A (4) nyilván ezek speciális esete $x_i[0]=0$ illetve $x_i(-0)=0$ esetén.

A késleltető illetve az integrátor az (5) értelmében helyettesíthető egy nulla kiindulási állapotú késleltető vagy integrátor és egy olyan fiktív forrás összekapcsolásával, amelynek forrásváltozója a komplex frekvenciatartományban $\hat{U}_i(z) = x_i[0]z$ illetve $\hat{U}_i(s) = x_i(-0)$, amint azt a 2a ábra mutatja. A (6) hálózati megfelelője a 2b ábrán látható. A helyettesítő források felhasználásával a nem bekapcsolási folyamat is bekapcsolási folyamatként tárgyalható a kapcsolás utáni időkre szorítkozva.



4.3-2. ábra A DI késleltető illetve a FI integrátor kiindulási állapota kétféle módon is figyelembe vehető egy járulékos fiktív forrással

Mint már említettük (3.3-1.3. pont) az elemi komponensek mellett használhatunk általánosabb komponenseket is. Az egy-bemenetű, egy-kimenetű lineáris komponens komplex frekvenciatartománybeli karakterisztikája *belépő gerjesztés* esetén

$$Q_i(z) = G_i(z)P_i(z); \quad Q_i(s) = G_i(s)P_i(s), \quad (4.3-7)$$

ahol G_i az i -edik lineáris komponens átviteli függvénye. A gyakorlati esetekben a $G_i(z)$ DI átviteli függvény racionális. A $G_i(s)$ FI átviteli függvény többnyire ugyancsak racionális, de ugyancsak gyakran előfordul a $G_i(s) = e^{-sT_i} R_i(s)$ alak, ahol $R_i(s)$ racionális függvény; speciálisan a $G_i(s) = e^{-sT_i}$ átviteli függvény folytonos idejű késleltetőt ír le.

Egy másik általánosítási lehetőség sok bemenetű és sok kimenetű lineáris komponens értelmezése. Erre az általánosításra nincsen feltétlenül szükség, mert a sokváltozós lineáris komponens helyettesíthető egy-bemenetű és egy-kimenetű lineáris komponensek alkalmas összekapcsolásával (2.4-1.3. pont).

Mindkét általánosítási lehetőség jóval bonyolultabbá válik, ha nem belépő gerjesztés esetét vizsgáljuk. Ilyenkor vissza kell nyúlnunk valamilyen kevésbé formális leírásmóddhoz, például az általános komponensnek elemi komponensek összekapcsolásából álló hálózati reprezentációjára vagy állapotváltozós leírására.

4.3-1.2. Összekapcsolási szabályok és kényszerek

A jelfolyam hálózatokra vonatkozó összekapcsolási szabályokat (az összegező és a szétágazó csomópont fogalmát) és a változókra vonatkozó kényszereket a 2.4-1.2. pontban tárgyaltuk. Ezek komplex frekvenciatartománybeli alakja lényegében változatlan, éspedig

– *összegező csomópont*: az egyetlen Y_i, P_i, zX_i illetve sX_i bemeneti változó, amely kilép az összegező csomópontból egyenlő azon U_r, K_r, P_r, X_r kimeneti változók összegével, amelyek belépnek a csomópontba;

– *szétágazó csomópont*: valamennyi Y_i, P_i, zX_i illetve sX_i bemeneti változó, amely kilép a szétágazó csomópontból egyenlő azon egyetlen U_r, K_r, P_r, X_r kimeneti változóval, amelyik belép a csomópontba.

A DI illetve a FI esetben $Y_i(z) = \mathcal{L}\{y_i[k]\}$ illetve $Y_i(s) = \mathcal{L}\{y_i(t)\}$ a válasz Laplace-transzformáltját jelöli. Értelem szerinti a többi jelölés is.

Belépő gerjesztés esetén U_i a gerjesztés Laplace-transzformáltját jelenti. Értelem szerinti a többi jelölés is.

Ha nem minden gerjesztés belépő, akkor U_i jelentheti a kiindulási állapotot figyelembe vevő fiktív gerjesztést is, amelyet az előző pontban és a 2. ábrán \hat{U}_i jelölt. Ezek a fiktív források csak akkor játszanak szerepet, ha az egyenleteket közvetlenül a komplex frekvenciatartományban írjuk fel (l. a következő pontot), míg ha az időtartománybeli egyenletekből indulunk ki (ezt a 4.3-1.4. pontban tárgyaljuk), akkor csak a valódi forrásokat kell figyelembe venni, az esetleg nem nulla kiindulási értékek figyelembe vétele más módon történik.

4.3-1.3. Az egyenletek közvetlen felírása

Egyszerű hálózatokra a frekvenciatartománybeli egyenletek a kapcsolási rajz alapján többnyire nehézség nélkül felírhatók. Gyakran elegendő az U transzformált gerjesztés és az Y transzformált válasz kapcsolatára egyetlen egyenletet felírni. Szükség esetén bevezetünk további transzformált változókat (például egy vagy több dinamikus komponens X_i kimeneti vagy V_i bemeneti változóját), majd megoldjuk az így előálló lineáris algebrai egyenletrendszer, amelyben z vagy s paraméterként kezelendő.

Az egyenlet vagy az egyenletrendszer megoldása szolgáltatja egy gerjesztésű, egy válaszú rendszer és belépő gerjesztés esetén a $H(z)=Y(z)/U(z)$ illetve a $H(s)=Y(s)/U(s)$ átviteli függvényt.

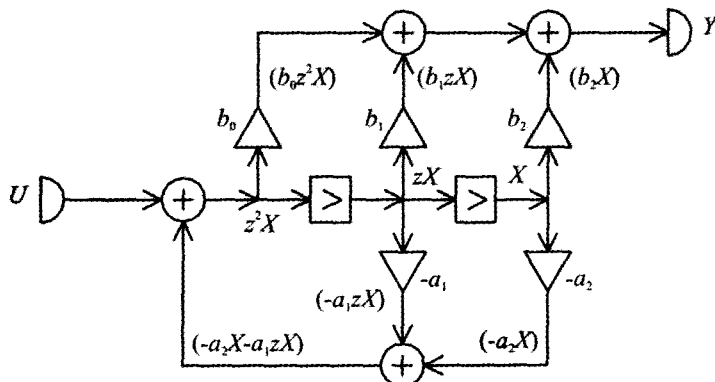
Nem belépő gerjesztés esetén a kiindulási értékeket fiktív forrásokkal vesszük figyelembe. Ekkor a válasz Laplace-transzformáltjának kifejezését tudjuk előállítani. Ez úgy is felfogható, mint ha a rendszer sok gerjesztésű lenne és a kiindulási értékekhez is tartozik egy-egy $H_i = Y/U_i$ átviteli függvény. Ezeknek az átviteli függvényeknek közös a nevezője, ezért a pólusok meghatározására csak egyszer van szükség.

Érdekes eset áll elő, amikor egyes átviteli függvények redukálhatók, vagyis a kapcsolat vonatkozásában nem minden pólus játszik szerepet. Ha a valódi gerjesztésre vonatkozó átviteli függvény redukálható, akkor a redukált alakban nem szereplő pólus mégis megjelenhet a válasz időfüggvényében, ha valamilyen módon létrejött egy nullától különböző kiindulási állapot és az erre vonatkozó átviteli függvény nem redukálható.

Az átviteli függvény ismeretében előállíthatjuk a rendszert leíró rendszeregyenletet vagy állapotváltozós leírást (4.2-1.2. és 3. pont), gerjesztés-válasz stabilis rendszer esetén változócserevel előállíthatjuk az átviteli karakterisztikát (4.2-1.4. pont).

Mivel a DI késleltetőre és a FI integrátorra ugyanazt a rajzjelet alkalmaztuk, ezért az átviteli függvény azonos kapcsolási rajz esetén is azonos, de a változó a DI esetben z , a FI esetben s . Nem belépő gerjesztés esetén a fiktív forrásváltozó értelmezése a 2a ábra szerinti helyettesítéssel a DI esetben $\hat{U}_i(z) = x_i[0]z$, a FI esetben $\hat{U}_i(s) = x_i(-0)$.

1. példa Határozzuk meg annak a DI illetve FI rendszernek az átviteli függvényét, amelynek egy hálózati reprezentációja a 3. ábrán látható.



4.3-3. ábra Az átviteli függvény meghatározása a komplex frekvenciatartományban

Az U és Y változók mellett bevezettünk egyetlen X segédváltozót. A többi változó ezekkel „fejben” kifejezhető. Az ábrán zárójelk között ezeknek a fejben elvégzett műveleteknek az eredménye látható a DI esetre.

A diszkrét idejű esetet vizsgálva felírható a következő két egyenlet:

$$z^2 X = U - [a_1 z + a_2] X,$$

$$Y = b_2 X + b_1 z X + b_0 z^2 X.$$

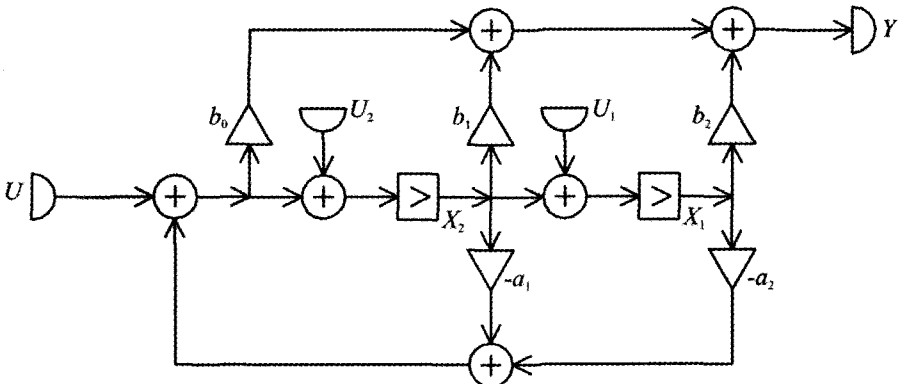
Az X változó kiküszöbölése után kapjuk a $H = Y/U$ átviteli függvényt:

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}.$$

Ennek alapján a rendszeregyenletre, az állapotváltozós leírásra vagy az átviteli karakterisztikára (ha értelmezett, vagyis ha a rendszer GV stabilis, ami az átviteli függvény pólusainak vizsgálatával ellenőrizhető) ugyanazokat az összefüggéseket kapjuk, mint korábban más módszerekkel.

A FI esetben az átviteli függvény kifejezését az előzőből ismeretesen úgy kapjuk, hogy a z változó helyére az s változót írjuk. #

2. példa Határozzuk meg annak a DI rendszernek az átviteli függvényét, amelynek hálózati reprezentációja a 4. ábrán látható. Az U_1 és U_2 jelű gerjesztések lehetnek „valódiak”, de reprezentálhatják a kiindulási állapotokat is, vagyis a DI esetben $U_1(z) = x_1[0]z$, $U_2(z) = x_2[0]z$, a FI esetben $U_1(s) = x_1(-0)$, $U_2(s) = x_2(-0)$. A kiindulási értékek meghatározásával itt nem foglalkozunk.



4.3-4. ábra Három gerjesztésű rendszert reprezentáló hálózat vizsgálata

Most két segédváltozót vezetünk be. A három hálózati egyenlet:

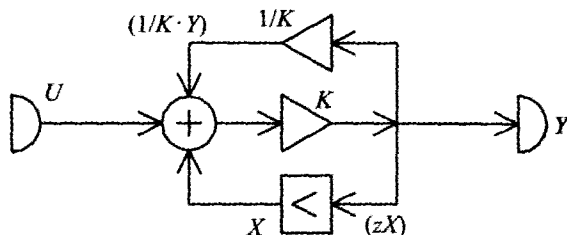
$$\begin{aligned} z X_1 &= X_2 + U_1, & Y &= b_2 X_1 + b_1 X_2 + b_0 [U - a_2 X_1 - a_1 X_2], \\ z X_2 &= -a_2 X_1 - a_1 X_2 + U + U_2. \end{aligned}$$

A transzformált válasz kifejezése elemi számítás után

$$Y(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} U(z) + \frac{(b_2 - a_2 b_0) z + (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{z^2 + a_1 z + a_2} U_1(z) + \frac{(b_1 - a_1 b_0) z + (b_2 - a_2 b_0)}{z^2 + a_1 z + a_2} U_2(z).$$

Amint látjuk, mindegyik átviteli függvény nevezője valóban ugyanaz. A számlálók azonban különböznek, ezért lehet, hogy valamelyik átviteli függvény redukálható. #

3. példa Határozzuk meg annak a rendszernek az átviteli függvényét, amelynek egy hálózati reprezentációja az 5. ábrán látható.



4.3-5. ábra Egy nem reguláris hálózat vizsgálata a komplex frekvenciatartományban

A komplex frekvenciatartománybeli hálózati egyenletek a DI esetben

$$zX = K \left\{ U + \frac{1}{K} Y + X \right\}, \quad Y = zX.$$

Elemi számítás után kapjuk, hogy a DI esetben $H(z) = -z$, a FI esetben $H(s) = -s$. Ezek azonban abszurd eredmények, mert a racionális átviteli függvény számlálója nem lehet nagyobb fokszámú nevezőjénél. A vizsgált hálózat ezért nem reguláris, nem reprezentál rendszert. Hasonló következtetésre jutottunk más megfontolással a 2.4-2.2. pontban (2.4-8. ábra).

Megjegyzendő azonban, hogy mostani megfontolásunk kevésbé általános, mint az állapotváltozós leírásra támaszkodó. Ha ugyanis a rendszer válasza $Y = X$ lenne, akkor $H(z) = -1$, illetve $H(s) = -1$ adódott volna az átviteli függvényre, ami nem abszurd eredmény. Gondolhatjuk ugyanis azt, hogy az elsőfokú átviteli függvény zérusa és pólusa megegyezik, ezért redukálódott. A hálózat állapotváltozós leírása ezzel szemben nem állítható elő, amiből egyértelműen következik, hogy a hálózat nem reguláris.

A példa ezért többek között azt is illusztrálja, hogy a rendszerek és a hálózatok állapotváltozós leírása adja a legmélyebb betekintést tulajdonságaikba és viselkedésükbe. Más kérdés, hogy az állapotváltozós leírás előállítására nincs mindig elegendő információnk. #

4.3-1.4. Az időtartománybeli egyenletek transzformációja

A hálózati egyenletek komplex frekvenciatartománybeli alakja úgy is előállítható, hogy először előállítjuk az időtartománybeli egyenleteket, majd képezzük ezek DI illetve FI Laplace-transzformáltját. A transzformáció során figyelembe vesszük a kiindulási értékeket is, rendszerint a DI Laplace-transzformáció eltolási tételének vagy a FI Laplace-transzformáció differenciálási tételének alkalmazásakor. A komplex frekvenciatartománybeli egyenletek megoldásával előállítható Y kifejezése vagy belépő gerjesztés esetén a H átviteli függvény.

Ezt a módszert korábban már tárgyaltuk arra az esetre, amikor a rendszert leíró egyenletek a rendszeregyenletnek vagy az állapotváltozós leírásnak megfelelő alakúak (4.2-1.2. és 4.2-2.2. pont illetve 4.2-1.3. és 4.2-2.3. pont). A hálózati egyenleteket azonban nem szükséges valamilyen előírt alakra hozni. Ez azt jelenti, hogy az időtartománybeli hálózati egyenletek nem csak az u_i, y_i, x_i és x'_i típusú változókat tartalmazhatják, hanem más változókat is, például egyes erősítők p_i bemeneti változóját.

Belépő gerjesztés esetén ez a módszer nem jelent gyakorlati előnyt az előzőleg tárgyalt „közvetlen” módszerhez képest. Az előző pont utolsó példája azonban rámutat arra, hogy elfajuló esetekben az állítás esetleg nem helytálló. Szigorúan véve ezért először elő kell állítani a hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását, és ha ez nem lehetséges, akkor természetesen nem határozzuk meg az átviteli függvényt.

Olyan áthidaló megoldás is elképzelhető, hogy először csak azt ellenőrizzük, hogy reguláris-e a hálózat és csak igenlő válasz esetén végezzük el a transzformációt. Ehhez megkeressük valamennyi memóriamentes hurkot, majd ellenőrizzük, hogy a hurokban lévő erősítések szorzata különbözik-e az 1 értéktől.

Nem belépő gerjesztés esetén az időtartománybeli egyenletek felírásával és transzformálásával megtakaríthatjuk a kiindulási értékeket figyelembe vevő fiktív források bevezetését. Magukat a kiindulási értékeket mindenképpen ki kell előzőleg számítani.

Példa Vizsgáljuk a 3. ábrán (l. előbb) vázolt DI hálózatot. Tekintsük már meghatározottnak az $x_1[0]$, $x_2[0]$ értékeket.

Az időtartománybeli egyenletek (vö. 2.4-2.1. pont 2. példa és 2.4-2. ábra)

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\x_2' &= -a_2 x_1 - a_1 x_2 + u, \\y &= (b_2 - b_0 a_2) x_1 + (b_1 - b_0 a_1) x_2 + b_0 u.\end{aligned}$$

Ez egyúttal az állapotváltozós leírás is. Képezzük az időtartománybeli egyenletek DI Laplace-transzformáltját:

$$\begin{aligned}z X_1(z) - x_1[0]z &= X_2(z), \\z X_2(z) - x_2[0]z &= -a_2 X_1(z) - a_1 X_2(z) + U(z), \\Y(z) &= \{b_2 - b_0 a_2\} X_1(z) + \{b_1 - b_0 a_1\} X_2(z) + b_0 U(z).\end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy az előző pont 2. példájában a kiindulási értékeket a fiktív források $U_1(z) = x_1[0]z$ és $U_2(z) = x_2[0]z$ transzformált forrásmennyiségeivel vettük figyelembe, látható, hogy a kétféle módon előállított egyenletrendszer megegyezik, így természetesen a megoldásuk is megegyezik. Az $Y(z)$ kifejezését ezért nem is adjuk meg újra.

Ugyanez vonatkozik a folytonos idejű esetre is, amint arról az Olvasó könnyen meggyőződhet. #

4.3-1.F. Feladatok

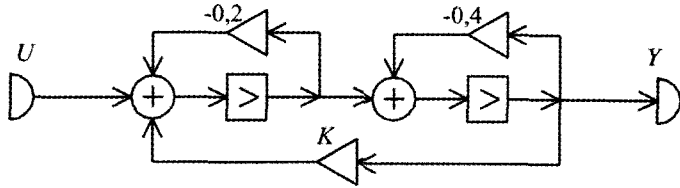
F-1. Határozza meg a 2.4-2.F-1., 2. és 4. feladatban tárgyalt hálózat által reprezentált rendszer átviteli függvényét

(a) a komplex frekvenciartománybeli egyenletek közvetlen felírásával és megoldásával!

(b) a DI illetve FI állapotváltozós leírás előállításával majd Laplace-transzformáltjának képzésével!

F-2. Állítsa elő az előző feladatban szereplő hálózatok által reprezentált rendszer rendszeregyenletét!

F-3. A 6. ábrán látható hálózatban a K erősítés értéke $K = -0,32$, ha k illetve t negatív és $K = -0,02$, ha k illetve t nem-negatív (vö. 2.4-2.F-6. feladat). A gerjesztés k illetve t negatív értékeire ismert állandó u^- érték.



4.3-6. ábra Időfüggetlen erősítőt tartalmazó hálózat, amely variáns (de intervallumonként invariáns) rendszert reprezentál

Határozza meg a rendszert k illetve t nem-negatív értékeire reprezentáló invariáns hálózatot! Fejezze ki az Y transzformált választ az U transzformált gerjesztés és a kiindulási állapot függvényeként!

***F-4.** A 4. ábrán látható, korábban már vizsgált hálózat erősítései olyanok, hogy a $H = Y/U$ átviteli függvény egyik zérusa megegyezik az egyik pólussal.

Igazolja, hogy ekkor a $H_1 = Y/U_1$ és a $H_2 = Y/U_2$ átviteli függvények egyikének sincs e helyen pólusa és zérusa!

4.3-1.M. Megoldások

M-1. Mindkét módszerrel a következő átviteli függvények adódnak a DI esetben

$$2.4-13. \text{ ábra: } H(z) = \frac{4z^2 + 3z + 0,25}{z^2 + 0,25z + 0,125}.$$

$$2.4-14. \text{ ábra: } H(z) = \frac{1}{z^2 + 0,6z + 0,08 - K}.$$

$$2.4-15. \text{ ábra: } H(z) = K_0 \frac{0,5z^2 - 0,4z}{z^2 + (0,1 + 0,4K)K_0z - 0,08K_0}, \quad K_0 \equiv \frac{1}{1 - 0,5K}; \quad K \neq 2.$$

A FI esetben z helyére s írandó.

M-2. Például a 2.4-13. ábra szerinti hálózatra, az előző feladat megoldását felhasználva közvetlenül felírható, hogy

$$\text{DI: } y + 0,25y^{(1)} + 0,125y^{(2)} = 4u + 3u^{(1)} + 0,25u^{(2)}.$$

$$\text{FI: } y^{(2)} + 0,25y^{(1)} + 0,125y = 4u^{(2)} + 3u^{(1)} + 0,25u.$$

Értelem szerinti a rendszeregyenlet alakja a másik két esetben is.

Ez egy kényelmes módszer a hálózattal reprezentált rendszer rendszeregyenletének előállítására azokban az esetekben, amikor az időtartományban ez egyszerűen nem sikerül.

M-3. A $k \in \mathbf{Z}_-$ illetve a $t \in \mathbf{R}_-$ intervallumban a hálózat stabilis (az általa reprezentált rendszer aszimptotikusan stabilis). Ebből következően az x_1^- , x_2^- kiindulási értékek értelmezettek. Ezek egyszerűen számíthatók állandó gerjesztés esetén $x_i^-[k] = x_i^-$ illetve

$x_i^-(t)=0$ felhasználásával. A $k \in \mathbf{Z}$ illetve a $t \in \mathbf{R}$ intervallumra vonatkozó állapotváltozós leírás megoldásával (esetleg ennél is egyszerűbb megfontolás alapján) kapjuk, hogy $x_1^-[k]=0,7u^-$, $x_2^-[k]=0,5u^-$, illetve $x_1^-(-0)=-10u^-$, $x_2^-(-0)=-25u^-$. A válasz kifejezése a komplex frekvenciatartományban

$$Y(z) = \frac{U(z) + \{-0,5z^2 + 0,6z\}u^-}{z^2 + 0,6z + 0,1}; \quad U(z) = \mathcal{Z}\{u[k]\}.$$

$$Y(s) = \frac{U(s) + \{25s - 5\}u^-}{s^2 + 0,6s + 0,1}; \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

Ebből $u^- = 0$ helyettesítéssel kiadódik az átviteli függvény is.

Ha a hálózat negatív időkre nem stabilis, akkor a feladat értelmetlen, a nem azonosan zérus gerjesztéshez nem tartoznak értelmes kiindulási értékek.

***M-4.** Fejezzük ki a nevezőt és a számlálót gyöktényezős alakban. A diszkrét idejű esetet tekintve

$$z^2 + a_1 z + a_2 = (z - c)(z - q_1), \quad b_0 z^2 + b_1 z + b_2 = b_0 (z - c)(z - s_1).$$

Itt c jelöli a nevező és a számláló közös nullahelyét. Ebből következik, hogy $a_1 = -q_1 - c$, $a_2 = q_1 c$ és $b_1 = -b_0(s_1 + c)$, $b_2 = b_0 s_1 c$. Ezek után könnyű már belátni, hogy az $U_1(z)$ és az $U_2(z)$ együtthatójának nem csak a nevezője, hanem a

$$G_1(z) = (b_2 - a_2 b_0)z + (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

$$G_2(z) = (b_1 - a_1 b_0)z + (b_2 - a_2 b_0)$$

számlálója is tartalmaz $(z - c)$ gyöktényezőt, tehát ezzel egyszerűsíthetünk. Ebből következik, hogy a $q_2 = c$ pólus nem fogja befolyásolni a válasz kifejezését - éspedig sem a gerjesztés vonatkozásában, sem a kiindulási értékek vonatkozásában.

Folytonos idejű esetben a z változó helyére s változó írandó, egyébként az állítások nem változnak.

A 4. feladattal kapcsolatban érdemes néhány kiegészítő megjegyzést tenni.

A vizsgált hálózatra vonatkozó állítás érvényes tetszőleges struktúrájú hálózatra is: ha az eredeti átviteli függvény redukálható, akkor a korábbi gerjesztés hatását figyelembe vevő forrásokra vonatkozó átviteli függvények is redukálhatók. Utóbbiak esetleg akkor is redukálhatók, ha az eredeti átviteli függvény nem redukálható. Ebből következik, hogy ha a rendszer gerjesztés-válasz stabilis, akkor ez nem csak belépő gerjesztések esetén igaz, noha a megállapítást a redukált átviteli függvény pólusainak vizsgálata alapján tettük.

Mindez szemléletesen úgy értelmezhető, hogy minden folyamat egyszer elkezdődött, vagyis a gerjesztés valamilyen időpontban belépő volt. Mivel az átviteli függvénynek a c helyen nincs pólusa, annak hatása nem jelentkezhet a későbbi (általunk önkényesen pozitív idejűnek választott) folyamatban. Mindez azonban csak akkor igaz, ha a rendszer és a rendszert reprezentáló hálózat invariáns, tehát például negatív és pozitív időkre is megegyező tulajdonságú.

A feladat által megfogalmazott állítás nem általános érvényű, határozottan a kiindulási értékeket figyelembe vevő források hatásáról van szó.

Ha sok gerjesztésű, sok válaszú rendszer átviteli függvény mátrixának egyes elemei redukálhatók, az nem jelenti azt, hogy más elemei ugyanúgy (vagy egyáltalában) redukálhatók. A sok gerjesztésű, sok válaszú rendszer viszont csak akkor GV stabilis, ha

átviteli függvény mátrixának (vagyis a mátrix minden rendezőjének) valamennyi pólusára $|q_i| < 1$ illetve $\operatorname{Re}\{p_i\} < 0$ teljesül.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a rendszer és a rendszert reprezentáló hálózat nem invariáns. Szorítkozunk a következő speciális eset vizsgálatára.

A hálózat mind negatív, mind pozitív időkre invariáns, de a $k=0$ illetve a $t=0$ időpontban struktúrája vagy az erősítései ugrásszerűen megváltoznak (1. a 3. feladatot). Ilyenkor az állapotváltozók kiindulási értéke között általában nincs olyan kapcsolat, amely az átviteli függvényben egyes gyöktényezők egyszerűsítését lehetővé tenné. Ekkor az átviteli függvény pólusai alapján gerjesztés-válasz stabilis rendszer nem feltétlenül aszimptotikusan stabilis. Ez abban nyilvánulhat meg, hogy korlátos gerjesztés hatására nem feltétlenül korlátos válasz adódik, mert a negatív időkből fellépő gerjesztés által létrehozott gerjesztés hatására a kiindulási értékek nem nulla értékűek, és az ezekre vonatkozó „átviteli függvény” pólusai nem feltétlenül elégítik ki a stabilitási követelményt.

Nincs szó ellentmondásról, hiszen tulajdonképpen egy variáns rendszert reprezentáló hálózatot vizsgáltunk, amire a Laplace-transzformáció módszere általában nem is alkalmas. Inkább az a meglepő, hogy a rendszerre mégis tudunk ennek a módszernek az alkalmazásával hasznos megállapításokat tenni.

Mint már korábban is hangsúlyoztuk, a gerjesztés-válasz stabilitás és az aszimptotikus stabilitás csak kivételesen tér el egymástól, az átviteli függvény vagy a kiindulási értékekre vonatkozó átviteli függvény csak kivételesen redukálható. Ha ilyen eset mégis előfordul, akkor alapos további vizsgálatra van szükség annak eldöntésére, hogy mindez mit jelent a modellezett objektumra nézve.

4.3-2. Az átviteli függvény realizálása

4.3-2.1. A realizációs feladat

Az előző szakaszban az ismert hálózati reprezentációval bíró rendszer átviteli függvényének számítását tárgyaltuk. Ebben a szakaszban az inverz feladat megoldásának néhány módszerét ismertetjük.

Az átviteli függvény egy hálózati *realizációja* egy olyan hálózat, amely olyan rendszer reprezentál, amelynek átviteli függvénye a megadott.

A realizációs feladat megoldása kivételesen egyszerű esetektől eltekintve nem egyértelmű. Az előállított realizációk halmazából kiválaszthatjuk azt, amelyet valamilyen szempontból optimálisnak ítélünk. A továbbiakban olyan realizációk előállítására szorítkozunk, amelyek minimális számú késleltetőt illetve integrátort tartalmaznak. Ezeket *kanonikus* realizációknak nevezzük. Noha ez a tulajdonság nyilván előnyös, nem állítható, hogy minden szempontból optimális hálózatot jelent. Mint később látni fogjuk, sok olyan hálózat van, amelyik ebben az értelemben kanonikus realizáció. Az optimalizálás további szempontjaival (például az átviteli függvény bizonyos paraméterek szerinti érzékenysége) nem foglalkozunk.

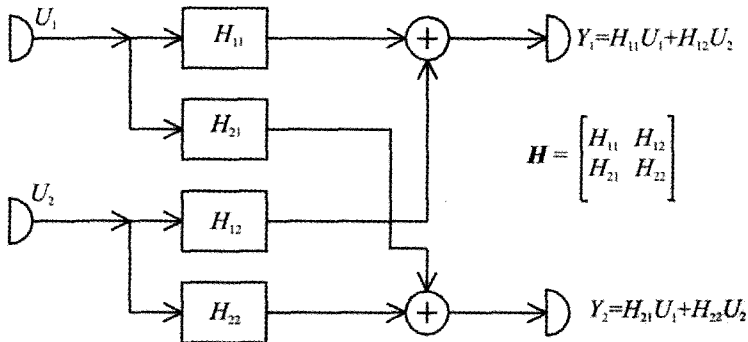
További megszorításként csak *raciónalis* átviteli függvények realizációjával foglalkozunk. Ezek általános alakja (a számláló fokszáma nem lehet nagyobb a nevező fokszámánál, ezért az általánosság megszorítása nélkül a két fokszám egyezőnek választható)

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n};$$

$$H(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}.$$
(4.3-8)

A következő pontokban két realizációs módszert tárgyalunk a direkt realizációt és a kaszkád realizációt.

Az *átviteli függvény mátrix* realizációja visszavezethető $N_y \times N_u$ számú átviteli függvény realizációjára. Ennek elvét a 7. ábra szemlélteti $N_y = N_u = 2$ esetre. Az általánosítás több gerjesztésre és több válaszra kézenfekvő. Ez a fajta realizációt azonban általában nem minimális számú dinamikus komponens tartalmaz (l. az 1. feladatot!).



4.3-7. ábra Az átviteli függvény mátrix realizálásának egy módja két gerjesztés és két válasz esetén

4.3-2.2. A direkt realizációk

Az átviteli függvény realizálása egyenértékű a rendszeregyenlet realizálásával, amivel a 2.4-3.3. pontban már foglalkoztunk. Az ott vizsgált két kapcsolást $n = 2$ esetre kényelmi okokból a 8. ábrán újra megadtuk. Az általánosítás n nagyobb értékeire nem okoz nehézséget: a felső ábrát logikusan balra, az alsót pedig jobbra egy-egy további dinamikus komponenssel és két-két erősítővel bővítjük.

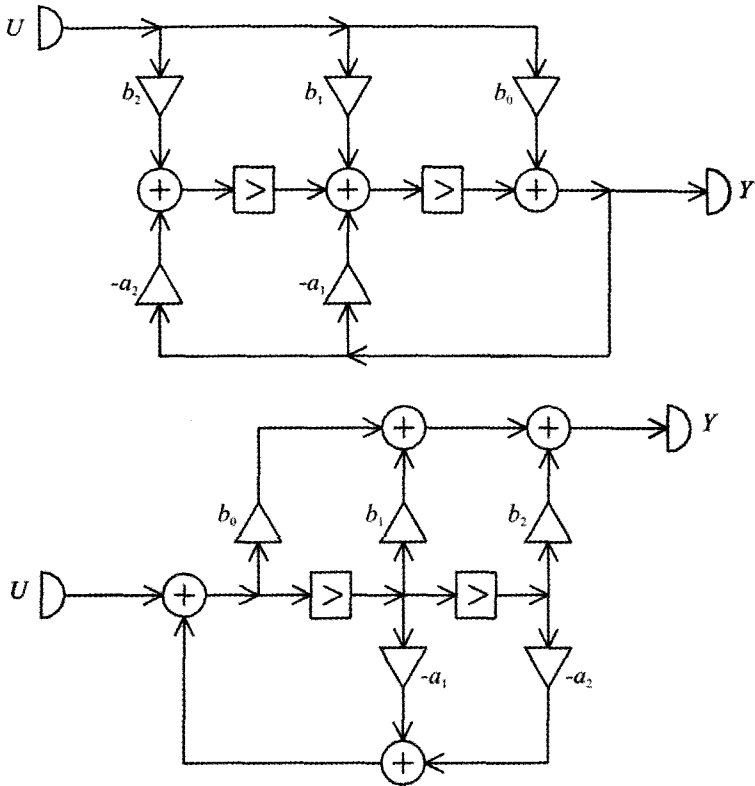
Az ábrán látható ún. *direkt realizációk* két alapvető tulajdonsága:

- (1) a késleltetők illetve az integrátorok száma n (a nevező fokszáma);
- (2) mindegyik erősítés az átviteli függvény egy együtthatójával egyezik meg.

Ebből következik, hogy az erősítők száma megegyezik a nem nulla együtthatók számával, a +1 és többnyire a -1 értékű erősítések megvalósításához a gyakorlatban többnyire nincs szükség erősítőre.

Úgy tűnhet, hogy a kitzűzött feladatot ezzel meg is oldottuk, legfeljebb a két direkt realizáció között kell választani.

Itt nem részletezett gyakorlati szempontokat is figyelembe véve azonban a direkt realizációk nem optimálisak, ha az n fokszám nagy. Ilyenkor például kaszkád realizációt célszerű használni (l. a következő pontot). Léteznek más realizációs eljárások is, de ezeket nem tárgyaljuk.



4.3-8. ábra Az átviteli függvény két direkt realizációja $n = 2$ esetén

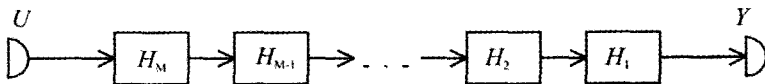
4.3-2.3. Kaszkád realizáció

Nagy fokszámú átviteli függvény realizációját különféle, itt nem részletezett okokból gyakran kisebb fokszámú átviteli függvényeket realizáció egyszerűbb hálózatok összekapcsolásával célszerű megoldani. A legfontosabb ilyen módszert, a kaszkád realizációs eljárást mutatjuk be ebben a pontban.

Bontsuk fel az adott $H(z)$ illetve $H(s)$ átviteli függvényt M számú tényező szorzatára:

$$H = H_1 H_2 \dots H_M . \tag{4.3-8}$$

Ha minden H_i átviteli függvényt realizáltunk egy hálózattal, akkor H realizálható az egyes hálózatok *kaszkád kapcsolásával*, amint azt a 9. ábra mutatja.



$$H = H_1 H_2 H_3 \dots H_M$$

4.3-9. ábra Az átviteli függvény kaszkád kapcsolású hálózati realizálása

A racionális átviteli függvény tényezőkre bontott alakja egyszerűen előállítható, ha ismerjük az átviteli függvény $z = q_i$ illetve $s = p_i$ pólusait és $z = s_i$ illetve $s = z_i$ zérusait. Ha q_λ vagy p_λ egy komplex pólus, akkor jelölje konjugáltját $q_{\lambda+1}$ illetve $p_{\lambda+1}$. Ha q_λ vagy p_λ egy valós pólus, akkor $q_{\lambda+1}$ vagy $p_{\lambda+1}$ bármelyik további valós pólust jelentheti. Értelmezés szerinti a jelölés az s_μ illetve z_μ zérusokra is. Értelmezzük a következő másodfokú átviteli függvényeket:

$$H_i(z) = \frac{b_{0,\mu} z^2 + b_{1,\mu} z + b_{2,\mu}}{z^2 + a_{1,\lambda} z + a_{2,\lambda}}; \quad (4.3-9)$$

$$H_i(s) = \frac{b_{0,\mu} s^2 + b_{1,\mu} s + b_{2,\mu}}{s^2 + a_{1,\lambda} s + a_{2,\lambda}}.$$

A nevező a $(z - q_\lambda)(z - q_{\lambda+1})$ illetve $(s - p_\lambda)(s - p_{\lambda+1})$ gyöktényező szorzata. A számláló lehet két gyöktényező szorzata, egyetlen gyöktényező vagy 1, mindegyik szorozva egy állandóval. Az átviteli függvény felbontása ilyen tényezőkre akkor lehetséges, ha $z = 0$ illetve $s = 0$ nem pólus és ha n páros. Egyébként még a következő tényezőkre is szükségünk van:

$$H_0(z) = z^{-r}; \quad H_1(z) = \frac{b_{0,1} z + b_1}{z + a_1}; \quad (4.3-10)$$

$$H_0(s) = s^{-r}; \quad H_1(s) = \frac{b_{0,1} s + b_1}{s + a_1}.$$

Minél nagyobb n , annál többféle szorzatra bontott alak állítható elő. A valós pólusok és zérusok tetszőlegesen csoportosíthatók (vagy kezelhetők külön páratlan n esetén). A másodfokú számlálók és nevezők ugyancsak tetszőlegesen párosíthatók. Elméleti szempontból ezek a felbontások egyenértékűek, gyakorlati szempontokat is figyelembe véve ez nincs feltétlenül így.

A (9) vagy a (10) által megadott minden tényező realizálható a 8. ábrán megadott két kapcsolás egyikével. Itt tehát ismét két lehetőségünk van. A H_0 átviteli függvény r számú késleltető illetve integrátor kaskád kapcsolásával realizálható. Nem kell másodfokú tényezőkhöz ragaszkodni, de elméleti megfontolások és gyakorlati tapasztalatok egyaránt azt mutatják, hogy ez a legkedvezőbb választás.

Példa Határozzuk meg annak a DI mindenátersztő rendszernek egy hálózati realizációját, amelynek átviteli függvénye

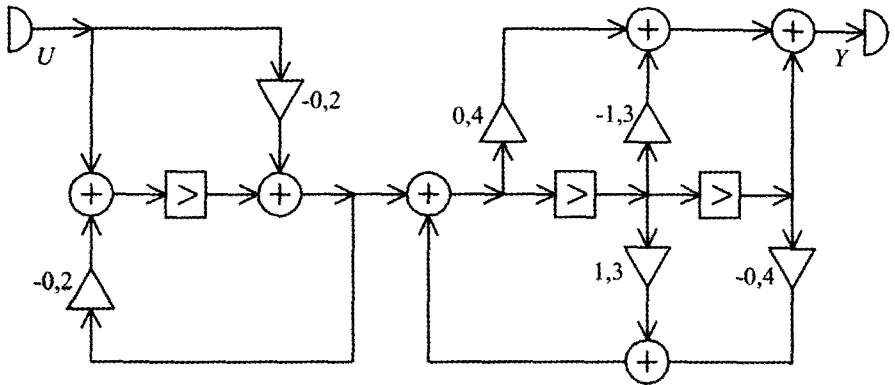
$$H(z) = -0,08 \frac{(z-5)(z-2)(z-1,25)}{(z-0,2)(z-0,5)(z-0,8)}.$$

Válasszuk az elsőfokú és a másodfokú tényezőt a következőképpen:

$$H_1(z) = -0,2 \frac{z-5}{z-0,2} = \frac{-0,2z+1}{z-0,2},$$

$$H_2(z) = 0,4 \frac{(z-2)(z-1,25)}{(z-0,5)(z-0,8)} = \frac{0,4z^2 - 1,3z + 1}{z^2 - 1,3z + 0,4}.$$

Mindkettő mindenátesztőt ír le, de a tényezőkre bontás másként is elvégezhető. A kiemelt együtthatókat úgy választottuk, hogy a végső alakban két együttható is 1 értékű legyen, mert ez egyszerűsíti a realizációt. Egy lehetséges realizáló hálózat látható a 10. ábrán. Ez a hálózat 3 késleltetőt és 6 erősítőt tartalmaz.



4.3-10. ábra Mindenátesztő DI rendszer egy kaszkád kapcsolású hálózati realizációja

Az Olvasóra bízunk egyrészt egy másféle szorzatra bontáshoz tartozó, másrészt egy direkt realizáció számítását és a kapcsolás megrajzolását. #

4.3-2.F. Feladatok

A terjedelem csökkentése érdekében nem adunk olyan triviális feladatokat, amikor az adott átviteli függvénynek meg kell határozni különféle felbontását és ennek alapján megrajzolni a hálózati realizációt vagy realizációkat. Ilyeneket az Olvasó magának is kitalálhat.

Az viszont kívül esik a kereteinken, hogy a realizációk közül kiválasszunk optimálist vagy optimálisakat, pedig ez jelentené az igazi feladatot. Még azt sem könnyű általánosan megfogalmazni, hogy milyen kritériumok alapján nevezhetünk egy realizációt előnyösebbnek egy másikkal.

F-1. A kaszkád realizációban minden tényező több komplex pólust és zérust realizálhat, de ezeknek konjugált párt kell alkotnia. Ugyanez vonatkozik a párhuzamos realizáció pólusaira. Adja meg ennek a megkötésnek az okát!

***F-2.** Adjon direkt realizációt olyan sok gerjesztésű, sok válaszó rendszerre, amelyre az átviteli függvény mátrix minden elemének ugyanaz a nevezője, amelynek fokszáma n , de eltérő a számlálója! Vizsgálja azt az esetet, amikor a rendszernek

- csak egyetlen válasza, de sok gerjesztése van.
- csak egyetlen gerjesztése, de sok válasza van.
- egynél több gerjesztése és egynél több válasza van.

(Útmutatás. Az első két esetben n számú, az utolsó esetben ennél több késleltetőre vagy integrátorra van szükség.)

4.3-2.M. Megoldások

M-1. Egy konjugált pár nélküli komplex pólus vagy zérus realizálása komplex erősítést igényelne, párokba rendezve viszont a realizáció valós erősítéssel megoldható.

***M-2.** (a) Tekintsük a 8. ábra felső hálózatát. Mindegyik U_i gerjesztést kapcsoljuk olyan erősítők bemenetére, amelyek erősítése $b_{i,n}, b_{i,n-1}, \dots, b_{i,0}$. Az azonos második indexű erősítők kimenetét összegezzük abban a csomópontban, amelyhez a 8. ábra szerinti megfelelő indexű erősítő kimenete kapcsolva van, vagyis ott a $b_r U$ helyett a $b_{i,r} U_i$ változók összege jelenik meg.

(b) Tekintsük a 8. ábra alsó hálózatát. Minden késleltető vagy integrátor bemeneti változóját kapcsoljuk olyan erősítők bemenetére, amelyek erősítése $b_{i,0}, b_{i,1}, \dots, b_{i,m}$. Az azonos r második indexű erősítők kimenetét összegezzük egy csomópontban, ennek a kimeneti változója lesz az indexnek megfelelő Y_r .

(c) Kiindulhatunk az (a) feladat megoldásából. Minden választ egy másik, egyetlen kimeneti változós hálózat realizál. Annyi ilyen hálózatra van szükség, amennyi a válaszok száma. Kiindulhatunk a (b) feladat megoldásából is. Ekkor minden gerjesztés létrehozza valamennyi válasz hozzá tartozó összetevőjét, és ezeket a részválaszokat kell összegezni. Annyi ilyen hálózatra van szükség, amennyi a gerjesztések száma. Az első esetben minden forrást egy elágazó csomóponthoz kell kapcsolni, a második esetben minden válasz egy összegező csomópontból származik. Ha a gerjesztések száma a nagyobb, akkor az első megoldás, ha a válaszok száma a nagyobb, akkor a második megoldás igényel kevesebb késleltetőt vagy integrátort. Ez a realizáció nem kanonikus, mert több dinamikus komponenszt tartalmaz, mint az átviteli függvények legnagyobb fokszáma.

4.4. Kapcsolatok folytonos idejű és diszkrét idejű jelek és rendszerek között

A diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek vagy rendszerek között fennálló sokféle kapcsolat közül tárgyalunk kettőt ebben a fejezetben. Ennek során fel fogjuk használni a jelek és rendszerek idő-, frekvencia-és a komplex frekvenciatartománybeli leírását. (Logikusan nem is a 4. rész egy fejezetének, hanem külön résznek kellene tekinteni.)

Ez a fejezet nem csak az utolsó résznek, hanem az általunk feldolgozni kívánt teljes témakörnek is a lezárása.

Az 4.4-1. szakaszban néhány módszert mutatunk arra, hogy miként közelíthető egy folytonos idejű jel, rendszer vagy hálózat diszkrét idejű megfelelőjével. Ennek gyakorlati haszna az, hogy a digitális technika alkalmazásával a diszkrét idejű jelek feldolgozása és a diszkrét idejű hálózatok megvalósítása többnyire hatékonyabb, olcsóbb és megbízhatóbb, mint folytonos idejű megfelelőjük.

Az 4.4-2. szakaszban a mintavételezett jelek leírásmódjait tárgyaljuk az időtartományban, a frekvenciatartományban és a komplex frekvenciatartományban. A mintavételezett jelek olyan folytonos idejű jelek, amelyek a diszkrét idejű jelekre vonatkozó módszerekkel leírhatók. A mintavételezett jelek a gyakorlatban rendszerint digitálisak, de a kvantálás hatását tárgyalásunk során nem vesszük figyelembe.

4.4-1. Szimuláció

4.4-1.1. A feladat megfogalmazása

Ebben a szakaszban a sokjelentésű „szimuláció” szót a következő értelemben használjuk.

Adott egy folytonos idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer.

Célunk egy olyan diszkrét idejű rendszer meghatározása, amelynek viselkedése „hasonló” folytonos idejű megfelelőjéhez, vagyis *szimulálja* annak viselkedését.

A szimuláció egyik célja annak felhasználása, hogy egy DI rendszer számítása többnyire egyszerűbb, mint az azonos bonyolultságú FI rendszer számítása. Ebben az értelemben a szimuláció egy speciális közelítési módszer. A FI rendszerek más közelítő megoldási módszerei általában nem vagy csak nagyon körülményesen értelmezhetők szimulációként.

A szimuláció másik célja egy adott rendszert realizáló objektum megvalósítása, ami gyakran egyszerűbb vagy olcsóbb DI kivitelben mint FI kivitelben. A DI rendszer sokszor számok feldolgozását jelenti. A kvantálás természetesen további hibát okoz, ezért a szimuláció hibáját sem érdemes túlságosan csökkenteni. Ennek részletei azonban meghaladják keretünket.

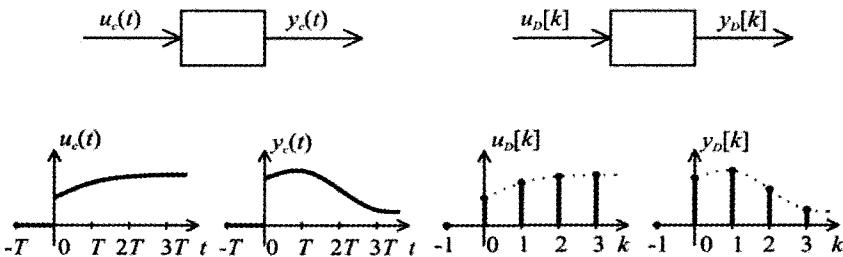
Jelölje az adott FI („continuous”) rendszer gerjesztését $u_c(t)$, válaszát $y_c(t)$. Válasszunk egy T mintavételi periódusidőt. Ennek szempontjairól még lesz szó. A keresett DI rendszer gerjesztése legyen $u_D[k] = u_c(kT + 0)$, vagyis az $u_c(t)$ FI jel mintái a $t = kT$ időpontokban (szakadásos jel esetén a jobb oldali határérték). Megjegyezzük, hogy szakadásos jel esetén más értelmezés is használatos (például a számtani középérték). Az egyelőre ismeretlen szimuláló DI rendszer választ jelölje $y_D[k]$.

A szimuláció *ideális*, ha a szimuláló DI rendszer válasza megegyezik a szimulálandó FI rendszer válaszával mintáival, vagyis ha *bármilyen* $u_c(t)$ gerjesztés esetén teljesül, hogy

$$y_D[k] = y_c(kT + 0). \quad (4.4-1)$$

Ideális szimuláció csak szélsőségesen egyszerű FI rendszerek (például $y_c(t) = K u_c(t)$) esetén valósítható meg. Célunk ezért olyan szimulátor meghatározása, amely bizonyos értelemben optimális és ugyanakkor minél egyszerűbb. A szimuláció alap gondolatát az 1. ábra érzékelteti.

Nyilvánvaló, hogy a szimuláció - egyébként azonos feltételek mellett - annál pontosabb, minél kisebb T mintavételi periódusidőt választunk, vagyis minél nagyobb az $f_s = 1/T$ mintavételi frekvencia, így az $\omega_s = 2\pi/T$ mintavételi körfrekvencia. A legnagyobb még elfogadható T értéket (a legkisebb még elfogadható f_s vagy ω_s értéket) egyrészt a FI jelek valamilyen jellegzetes tulajdonsága (például sáv szélessége), másrészt a szimulálandó FI rendszer valamilyen jellegzetes tulajdonsága (például sajátértékei, sáv szélessége, pólusai) alapján becsülhetjük.



4.4-1. ábra A FI rendszer és a szimuláló DI rendszer gerjesztése és válasza

Megköveteljük, hogy a szimuláció őrizze meg a rendszer *kauzalitását* és *stabilitását*: a szimuláló DI rendszer akkor és csakis akkor legyen kauzális és stabilis, amikor a szimulálandó FI rendszer is ilyen tulajdonságú.

A szimuláció alapvető problémája - mint minden közelítésé - az, hogy mit válasszunk a szimuláció jóságának mértékéül.

A következőkben különféle módszereket ismertetünk, amelyek a lineáris, invariáns, kauzális, folytonos idejű rendszer impulzusválaszán, átviteli karakterisztikáján és átviteli függvényén, állapotváltozós leírásán vagy hálózati reprezentációján alapulnak. Mindegyik szimulációs eljárás optimális a választott leírást és annak választott közelítési elvét tekintve, de többnyire eltérő szimuláló rendszereket eredményezhetnek. Az összehasonlítás érdekében mindegyik eljárást ugyanarra a három egyszerű rendszerre fogjuk alkalmazni.

4.4-1.2. Az impulzusválasz szimulációja

A $h_c(t)$ impulzusválaszú lineáris, invariáns, kauzális, folytonos idejű rendszernek az $u_c(t)$ belépő gerjesztéshez tartozó $y_c(t)$ válaszána kifejezése

$$y_c(t) = \int_{-0}^t h_c(\tau) u_c(t - \tau) d\tau.$$

Az impulzusválaszt tekintjük a következő alakban adottnak:

$$h_c(t) = D \delta(t) + \varepsilon(t) f(t),$$

ahol $f(t)$ egy folytonos függvény. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a folytonos idejű $u_c(t)$ gerjesztés függvénnyel leírható, tehát nem tartalmaz Dirac-impulzusos összetevőt.

A válasz kifejezése a $t = kT$ ($k \in \mathbf{N}$) időpontban

$$y_c(kT + 0) = \int_{-0}^{kT+0} D \delta(\tau) u_c(kT + 0 - \tau) d\tau + \int_0^{kT} f(\tau) u_c(kT + 0 - \tau) d\tau.$$

Az első integrál értéke $D u_c(kT + 0)$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$y_c(kT + 0) = D u_c(kT + 0) + \sum_{i=1}^k \int_{iT-T}^{iT} f(\tau) u_c(kT + 0 - \tau) d\tau.$$

Közelítsük az integrálokat oly módon, hogy az eredmény összevethető legyen a diszkrét idejű válasz konvolúciós kifejezésével:

$$y_D[k] = \sum_{i=0}^k h_D[i] u_D[k - i].$$

A téglalap-szabály alkalmazásával, a $\tau = iT - 0$ pontokra támaszkodva kapjuk, hogy

$$y_c(kT + 0) \approx \begin{cases} D u_c(+0), & k = 0; \\ D u_c(kT + 0) + T \sum_{i=1}^k f(iT) u_c(kT - iT + 0), & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases}$$

Az összehasonlítás alapján a következő szimulációs szabályt kapjuk:

$$h_c(t) = D \delta(t) + \varepsilon(t) f(t) \Rightarrow h_{D1}[k] = D \delta[k] + T \varepsilon[k - 1] f(kT). \quad (4.4-2)$$

Az 1 index az első közelítési eljárásra utal.

A szimuláló DI impulzusválasz a szimulálandó FI impulzusválasz $kT + 0$ időpontbeli mintáit jelenti, kivéve ($D \neq 0$ esetén) a $k = 0$ diszkrét időpontot.

A szimuláló DI rendszer kauzális. Ha a FI rendszer GV stabilis, akkor a szimuláló DI rendszer is GV stabilis. Az utóbbi állítás megfordítása elvileg nem feltétlenül igaz.

Illusztrációként tekintjük a következő FI impulzusválaszt és a (2) szerint hozzá rendelt DI impulzusválaszt:

$$h_c(t) = M \varepsilon(t) e^{-\alpha t} \sin \omega t \Rightarrow h_D[k] = M \varepsilon[k-1] (e^{-\alpha T})^k \sin(\omega T) k. \quad (4.4-3)$$

Kielégítő szimuláció biztosításához T úgy választandó, hogy $|\alpha|T \ll 1$ és $\omega T \ll 1$ egyaránt ki legyen elégítve, vagyis $T \ll \alpha^{-1}$ és $T \ll 1/\omega \equiv 1/(2\pi f)$ teljesüljön. Ha azonban $T = \pi/\omega$ értéket választunk (ekkor $T \ll 1/\omega$ T nem teljesül!), akkor $h_D[k] = 0$ adódik. Ekkor a szimuláló rendszer akkor is GV stabilis, ha a szimulálandó rendszer $\alpha \leq 0$ esetén nem az. A konkrét esetben természetesen hibás T választása és abszurd az eredmény. A hiba azonban nem annyira nyilvánvaló, ha a megadott függvény csak egy összetevője az impulzusválasznak, amelynek többi összetevője abszolút integrálható. A T mintavételi periódusidőt ezért is gondosan kell megválasztani.

1. példa Legyen a szimulálandó rendszer egy FI *erősítő*, amelynek gerjesztés-válasz relációja $y_c(t) = K u_c(t)$.

A FI rendszer impulzusválasza és átviteli függvénye közvetlenül felírható:

$$h_c(t) = K \delta(t), \quad H_c(s) = K.$$

Az impulzusválasz alapján előállított DI szimulátor impulzusválasza és átviteli függvénye a (2) értelmében

$$h_{D1}[k] = K \delta[k], \quad H_{D1}(z) = K.$$

A szimulátor független T választott értékétől. A szimuláció hibamentes. Ezek az eredmények várhatóak voltak. #

2. példa Legyen a szimulálandó rendszer egy FI *integrátor*, amelynek gerjesztés-válasz relációja $y_c(t) = \int_{-\infty}^t u_c(\tau) d\tau$.

A FI rendszer impulzusválasza és átviteli függvénye közvetlenül felírható:

$$h_c(t) = \varepsilon(t), \quad H_c(s) = \frac{1}{s}.$$

A DI szimulátor impulzusválasza (2) értelmében és az ebből számított átviteli függvénye

$$h_{D1}[k] = T \varepsilon[k-1], \quad H_{D1}(z) = T z^{-1} \frac{z}{z-1} \equiv T \frac{1}{z-1}.$$

A szemlélet alapján a $h_{D1}[0] = 0$ érték nem egyértelműen optimális közelítés.

Mind a FI integrátor, mind annak DI szimulátora kauzális rendszer.

A FI integrátor nem GV stabilis, a GV stabilitás határhelyzetében van (átviteli függvényének egyetlen pólusa a képzetes tengelyre esik). Ugyanez igaz DI szimulátorára is (átviteli függvényének egyetlen pólusa az egységugarú körön van). #

3. példa Legyen a vizsgált FI rendszer impulzusválasza és átviteli függvénye

$$h_c(t) = \alpha \varepsilon(t) e^{-\alpha t}, \quad H_c(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}.$$

A DI szimulátor (2) szerinti impulzusválasza és ebből számított átviteli függvénye

$$h_{DI}[k] = \alpha T \varepsilon[k-1] (e^{-\alpha T})^k, \quad H_{DI}(z) = \frac{\alpha T e^{-\alpha T}}{z - e^{-\alpha T}}.$$

Mind a FI rendszer, mind a DI szimulátora kauzális.

A FI rendszer GV stabilis, ha $\alpha > 0$. Ekkor és csakis ekkor a szimuláló DI rendszer is stabilis (átviteli függvényének egyetlen $z_1 = \exp(-\alpha T)$ pólusa éppen ekkor az egységsugarú körön belüli). Ha a rendszerek GV stabilisak, akkor értelmezett átviteli karakterisztikájuk és amplitúdó-karakterisztikájuk:

$$H_C(j\omega) = \frac{\alpha}{a + j\omega}, \quad K_C(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{a^2 + \omega^2}};$$

$$H_D(e^{j\vartheta}) = \frac{\alpha T e^{-\alpha T}}{e^{j\vartheta} - e^{-\alpha T}}, \quad K_D(\vartheta) = \frac{\alpha T e^{-\alpha T}}{\sqrt{1 + e^{-2\alpha T} - 2e^{-\alpha T} \cos \vartheta}}.$$

Az amplitúdó-karakterisztika grafikonját később adjuk meg (3. ábra) a más úton kapott szimuláló amplitúdó-karakterisztikákkal együtt.

E példa eredménye alapján részlettörtekre bontással elő tudjuk állítani bármely olyan FI rendszer DI szimulátorát, amelyre a $H_C(s)$ átviteli függvény racionális és pólusai egyszerűek. #

4.4-1.3. Az átviteli függvény szimulációja

Tekintsük adottnak egy kauzális FI rendszer $H_C(s)$ átviteli függvényét. Célunk a DI szimuláló rendszer olyan $H_D(z)$ átviteli függvényének előállítását, hogy *bármilyen frekvenciájú* szinuszos gerjesztésre a szimuláció hibamentes legyen, vagyis a szimulátor gerjesztett válasza egyezzen meg a FI rendszer gerjesztett válaszával mintáival.

A FI gerjesztés és a mintái által meghatározott DI gerjesztés komplex alakja

$$u_C(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow u_D[k] = e^{j\omega k T}, \quad \text{vagyis } u_D[k] = e^{j\vartheta k} \Big|_{\vartheta = \omega T}.$$

A válasz gerjesztett összetevőjének kifejezése komplex alakban

$$y_C(t) = H_C(j\omega) e^{j\omega t}, \quad y_D[k] = H_D(e^{j\omega T}) e^{j\omega T k}.$$

Ezek (pontosabban ezek valós része) csak akkor jelentik az állandósult választ, ha a rendszer GV stabilis. Ez azonban nem befolyásolja további megfontolásainkat.

A szimuláció ideális, ha $y_D[k] = y_C(kT)$ teljesül. Ennek feltétele

$$H_D(e^{j\vartheta}) = H_C(j\omega) \Big|_{\omega = \vartheta/T} \Rightarrow H_D(z) = H_C(s) \Big|_{s = T^{-1} \ln z}. \quad (4.4-4)$$

A második alak a $j\omega = s$, $e^{j\vartheta} = z$ helyettesítéssel adódott.

Ez az eredmény ellentétes azon korábbi kijelentésünkkel, hogy ideális szimuláció csak kivételesen lehetséges. Az ellentmondás oka az, hogy nem tettünk megszorítást az átviteli függvények matematikai alakját illetően. Az integrátor szimulátorának átviteli függvényére például $H_C(s) = 1/s$ felhasználásával $H_D(z) = T/\ln z$ adódik, vagyis a DI átviteli függvény nem racionális, a $z = 0$ helyen lévő szingularitása nem pólus.

Szorítkozzunk a továbbiakban *racionális* $H_c(s)$ átviteli függvényre és követeljük meg, hogy ekkor a szimulátor $H_D(z)$ átviteli függvénye is *racionális* legyen. Ez azt jelenti, hogy az előzőleg kapott $s = T^{-1} \ln z$, $z = e^{sT}$ változó-transzformációnak egy olyan racionális közelítését keressük, amely a $\mathcal{R}_e\{s\} < 0$ bal felsíkot a stabilitási tulajdonság megőrzése érdekében átviszi a $|z| < 1$ egységsugarú kör belsejébe. Meg fogjuk mutatni, hogy az ún. *bilineáris transzformáció*

$$s = \frac{p}{T} \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z = \frac{1+(sT/p)}{1-(sT/p)}; \quad 0 < p \leq 2 \quad (4.4-5)$$

rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Ha ugyanis $s = j\omega$, akkor $z = e^{j\vartheta}$, tehát

$$j\omega = \frac{p}{T} \frac{e^{j\vartheta} - 1}{e^{j\vartheta} + 1} = \frac{p}{T} \frac{e^{j\vartheta/2} - e^{-j\vartheta/2}}{e^{j\vartheta/2} + e^{-j\vartheta/2}} = \frac{p}{T} j \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}.$$

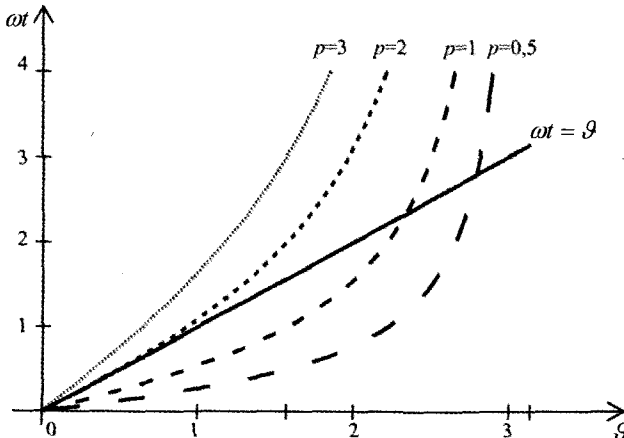
Az s -sík képzetes tengelyét a transzformáció átviszi a z -sík egységsugarú körébe és

$$\omega = \frac{p}{T} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \Leftrightarrow \vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega T}{p}; \quad 0 < p \leq 2. \quad (4.4-6)$$

A körfrekvenciák kapcsolatát szemlélteti a 2. ábra a p néhány értékére. Az ideális szimulációt jelentő $\omega = \vartheta/T$ kapcsolat bármilyen előírt ω_p , ϑ_p párra biztosítható

$$p = \frac{\omega_p T}{\operatorname{tg}(\vartheta_p/2)}, \quad 0 \leq \vartheta_p < \pi \quad (4.4-7)$$

választással. Ha például egy sávszűrő vagy egy sávzáró szimulációja a feladat, akkor ω_p a sáv közepe és ϑ_p egy szabadon választható érték. Ha nincs speciális ω_p körfrekvencia, akkor $\omega_p = 0$, $\vartheta_p = 0$ a szokásos választás, amihez a $p = 2$ érték tartozik. Ekkor az $\omega = 0$ helyen nem csak a függvény értéke, hanem még meredeksége is a kívánt. A 2. ábrából az is látható, hogy miért indokolt a $p \leq 2$ megszorítás.



4.4-2. ábra A FI és a DI körfrekvencia kapcsolata a komplex frekvenciák bilineáris transzformációja esetén

Az igazoláshoz legyen s valós és $z = 1 + \zeta$ (ζ kis valós érték). Az (5) értelmében

$$s = \frac{p(1+\zeta)-1}{T(1+\zeta)+1} \approx \frac{p}{2T} \zeta.$$

Mivel a stabilitási határegyenestől balra fekvő pontnak ($s < 0$) a stabilitási határkör $z = 1$ pontjától balra fekvő pont ($\zeta < 0$) felel meg, ezért a bal félsík az egység sugarú kör belsejébe megy át, amint állítottuk.

Foglaljuk össze eredményünket.

A racionális $H_C(s)$ folytonos idejű átviteli függvényhez bilineáris transzformációval egy szimuláló $H_{D2}(z)$ diszkrét idejű átviteli függvényt rendelünk:

$$H_{D2}(z) = H_C(s) \Big|_{s=s(z)}, \quad s(z) = \frac{p}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad 0 < p \leq 2. \quad (4.4-8)$$

A $H_{D2}(z)$ átviteli függvény racionális, a szimuláció megőrzi a stabilitási tulajdonságot és a kauzalitást. Az átviteli karakterisztikák kapcsolata

$$H_{D2}(e^{j\vartheta}) = H_C(j\omega) \Big|_{\omega=\omega(\vartheta)}, \quad \omega(\vartheta) = \frac{p}{T} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \quad 0 < p \leq 2. \quad (4.4-9)$$

A szimuláció az ω_p illetve a \mathcal{G}_p körfrekvenciájú szinuszos jelre ideális ha $p = \omega_p T / \operatorname{tg}(\mathcal{G}_p / 2)$ választással élünk. A szokásos $p = 2$ választás a kisméretű tartományban ($\omega = 0$, $\mathcal{G} = 0$ környezetében) biztosít jó szimulációt.

A bilineáris transzformáció a FI és a DI átviteli függvények pólusainak és zérusainak kapcsolatát is megadja. Ebből következik, hogy ez a szimuláció egy FI minimálfázisú rendszert DI minimálfázisú rendszerbe visz át, továbbá (mivel $s_2 = -s_1^*$ esetén $z_2 = 1/z_1^*$) egy FI mindenátersztőt DI mindenátersztőbe visz át. Más szimulációs módszerek nem rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

Az átviteli függvény fenti szimulációja kiterjeszhető s -ben nem racionális átviteli függvényre is. A FI késleltetést („halditöt”) kifejező, e^{-sT_i} tényező egyszerűen vehető figyelembe egy z^{-k_i} , $k_i = T_i / T$ tényezővel. Ekkor a T mintavételi periódusidőt úgy kell választani, hogy minden T_i késleltetési idő a T egész számú többszöröse legyen.

1. példa A $H_C(s) = K$ átviteli függvényű FI erősítő (8) szerinti szimulátorának átviteli függvénye $H_{D2}(z) = K$. Ez természetesen megegyezik az impulzusválasz szimulációja alapján előzőleg kapott átviteli függvényvel. #

2. példa A $H_C(s) = 1/s$ átviteli függvényű FI integrátor (8) szerinti szimulátorának átviteli függvénye és ebből számított impulzusválasza

$$H_{D2}(z) = \frac{T}{p} \frac{z+1}{z-1}, \quad h_{D2}[k] = \frac{2T}{p} \left\{ \frac{1}{2} \delta[k] + \varepsilon[k-1] \right\}.$$

Ez kissé eltér az előző pont 2. példájában számított szimulátor átviteli függvényétől, illetve impulzusválaszától.

Ha a szokásos $p=2$ választással élünk, akkor $h_{D2}[k]=h_{D1}[k]$, $k \neq 0$; míg $h_{D1}[0]=0$ és $h_{D2}[0]=T/2$. A $h_c(t)=\varepsilon(t)$ FI impulzusválasz a $t=0$ helyen 0-ról az 1 értékre ugrik. Az integrátor második szimulátorának impulzusválasza a szakadási helyen a számtani közeplet veszi figyelembe. Ha nem $p=2$ értéket választunk, akkor az első és a második szimulátor impulzusválasza k minden értékére eltérő lesz. #

3. példa Egy FI rendszer átviteli függvénye $H(s)=\alpha/(s+\alpha)$.

E rendszer DI szimulátorának (8) szerinti átviteli függvénye és az ebből számított impulzusválasza $p=2$ választással

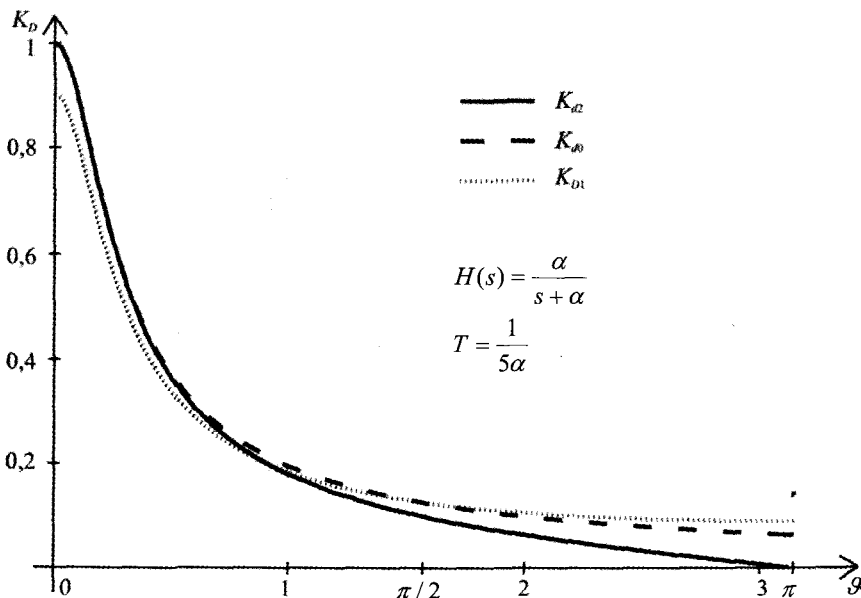
$$H_{D2}(z) = \frac{\alpha}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + \alpha} = \frac{1-q}{2} \frac{z+1}{z-q}, \quad q \equiv \frac{1-(\alpha T)/2}{1+(\alpha T)/2};$$

$$h_{D2}[k] = \frac{(\alpha T)/2}{1+(\alpha T)/2} \delta[k] + \frac{1-q^2}{2} \varepsilon[k-1] q^{k-1}.$$

Ha $|a|T$ elég kicsi, akkor a most és az előzőleg kapott $h_{D1}[k]$ DI impulzusválasz csak kevéssé különbözik, mivel ekkor $e^{-\alpha T} \approx q$. A szimulátor átviteli karakterisztikája és amplitúdó-karakterisztikája $\alpha > 0$ esetén

$$H_{D2}(e^{j\vartheta}) = \frac{1-q}{2} \frac{e^{j\vartheta} + 1}{e^{j\vartheta} - q},$$

$$K_{D2}(\vartheta) = \frac{1-q}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos \vartheta}{1 + q^2 - 2q \cos \vartheta}}.$$



4.4-3. ábra Egy FI rendszer három DI szimulátorának és ideális szimulátorának amplitúdó-karakterisztikája

Az összehasonlítás érdekében a 3. ábrán láthatjuk a $K_{D1}(\vartheta)$ és a $K_{D2}(\vartheta)$ amplitúdó-karakterisztika diagramját $T = 1/5\alpha$ választással (a gyakorlatban ennél kisebb T választása indokolt). Az ábrán látható a $K_{D0}(\vartheta) = \alpha T / \sqrt{(\alpha T)^2 + \vartheta^2}$ ideális amplitúdó-karakterisztika is, amely a nem racionális $H_{D0}(z) = \alpha T / (\alpha T + \ln z)$ átviteli függvényhez tartozik.

Az ábrából látható, hogy kis frekvenciákon K_{D2} , míg nagy frekvenciákon K_{D1} jelenti a jobb közelítést. Mielőtt ebből végleges következtetéseket vonnánk le, ne felejtsük el, hogy a fázis-karakterisztikákat is össze kellene az ideállal hasonlítani a „legjobb” szimulátor kiválasztása során. #

4. példa A $H_D(z) = z^{-1}$ átviteli függvényű DI rendszer a $H_C(s) = e^{-sT}$ átviteli függvényű FI rendszer, vagyis a FI késleltető ideális szimulátorának tekinthető. Itt T a késleltetési idő és egyben a mintavételi periódusidő is.

Közelítsük a FI átviteli függvényt racionális függvénnyel és adjunk meg ennek alapján kapcsolatokat a z és s változó között.

Az exponenciális függvény három elsőfokú, az $s = 0$ helyen pontos közelítése

$$\begin{aligned} (a) \quad z^{-1} = e^{-sT} &\approx 1 - sT &\Rightarrow sT = \frac{z-1}{z}; \\ (b) \quad z = e^{sT} &\approx 1 + sT &\Rightarrow sT = z - 1; \\ (c) \quad z = \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}} &\approx \frac{1 + (sT)/2}{1 - (sT)/2} &\Rightarrow sT = 2 \frac{z-1}{z+1}. \end{aligned}$$

Az (a) és (b) szerinti transzformációk nem mindig őrzik meg a stabilitási tulajdonságot, a (c) azonban feltétlenül. Ennek ellenére az integrátor (b) szerinti szimulátora megegyezik a impulzusválasz alapján számítottal. A (c) szerinti szimulátor megegyezik a (8) szerintivel $p = 2$ választással. #

*4.4-1.4. Az átviteli karakterisztika szimulációja

Tekintsük adottnak egy GV stabilis FI rendszer $H_C(j\omega)$ átviteli karakterisztikáját. Tételezzük fel továbbá, hogy a FI rendszer gerjesztése sávkorlátozott, Ω sávkorlátja ismert. A mintavételi tétel értelmében (3.2-1.5. pont) ekkor $T = \pi / \Omega$ (vagy ennél kisebb) mintavételi periódusidő választásával

$$\hat{H}_D(e^{j\vartheta}) = H_C(j\omega) \Big|_{\omega=\vartheta/\pi}; \quad |\omega| < \Omega \equiv \frac{\pi}{T}, \quad |\vartheta| < \pi \quad (4.4-10)$$

átviteli karakterisztikájú tökéletes szimulátor adódna. A probléma most is az, hogy ha $H_C(j\omega)$ racionális függvény, akkor $\hat{H}_D(e^{j\vartheta})$ nem racionális függvénye az $e^{j\vartheta}$ változónak.

Szorítkozzunk arra az esetre, amikor a szimulátor FIR típusú, tehát biztosan GV stabilis szimulátort keresünk. Ennek átviteli karakterisztikája

$$H_D(e^{j\vartheta}) = c_0 + c_1 e^{-j\vartheta} + c_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + c_{L-1} e^{-j(L-1)\vartheta}. \quad (4.4-11)$$

Az L számú valós c_p paraméter sokféleképpen megválasztható úgy, hogy $H_D(e^{j\vartheta})$ a $\hat{H}_D(e^{j\vartheta})$ egy (valamilyen értelemben optimális) közelítése legyen. Egy kézenfekvő feltétel a $|H_D(e^{j\vartheta}) - \hat{H}_D(e^{j\vartheta})|^2$ hibafüggvény integráljának minimalizálása. A hibamérték ekkor

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{p=0}^L c_p e^{-jp\vartheta} - \hat{H}_D(e^{j\vartheta}) \right] \left[\sum_{p=0}^L c_p e^{+jp\vartheta} - \hat{H}_D^*(e^{j\vartheta}) \right] d\vartheta = \\ &= 2\pi \sum_{p=0}^L c_p^2 - \sum_{p=0}^L c_p \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \hat{H}_D(e^{j\vartheta}) e^{jp\vartheta} d\vartheta + \int_{-\pi}^{\pi} \hat{H}_D^*(e^{j\vartheta}) e^{-jp\vartheta} d\vartheta \right\} + \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{H}_D(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta. \end{aligned}$$

Figyelembe véve $\hat{H}_D(e^{j\vartheta})$ értelmezését, az első integrálra kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \hat{H}_D(e^{j\vartheta}) e^{jp\vartheta} d\vartheta = T \int_{-\Omega}^{\Omega} H_C(j\omega) e^{jpT\omega} d\omega = 2\pi T h_c(pT),$$

ahol $h_c(t)$ a FI rendszer impulzusválaszának egy Ω sávkorlátú sávkorlátozott közelítése. A másik integrál ennek konjugáltja, vagyis az előzővel megegyező. A hibamérték kifejezése egyszerű rendezéssel

$$E = 2\pi \sum_{p=0}^L [c_p - T h_c(pT)]^2 - 2\pi T \sum_{p=0}^L h_c^2(pT) + T \int_{-\Omega}^{\Omega} |H_C(j\omega)|^2 d\omega.$$

Végeredményben a választott hibát minimalizáló együtthatók kifejezését

$$c_p = T h_c(pT), \quad p = 0, 1, 2, \dots, L \quad (4.4-12)$$

adja. A minimális hiba kifejezése

$$E_{\min} = T \int_{-\Omega}^{\Omega} |H_C(j\omega)|^2 d\omega - 2\pi \sum_{p=0}^L h_c^2(pT). \quad (4.4-13)$$

A sávkorlátozott átviteli karakterisztikából, illetve az átviteli karakterisztika vagy az impulzusválasz sávkorlátozott közelítéséből a c_p együtthatók és a minimális hiba rendszerint csak numerikusan számítható. Elfogadhatóan kis hiba esetleg csak nagy L választásával biztosítható.

Mivel $H_D(e^{j\pi})$ valós értékű, de $\hat{H}_D(e^{j\pi}) = H_C(j\Omega)$ többnyire nem az (hacsak nem nulla), ezért célszerű lehet az $e^{-j\omega\tau} H_C(j\omega)$ átviteli karakterisztikát szimulálni, ahol a $\tau > 0$ időkéssést úgy választjuk, hogy $\mathcal{S}_m \{ e^{-j\Omega\tau} H_C(j\Omega) \} = 0$ legyen.

Az átviteli karakterisztika szimulációja IIR rendszerrel bonyolultabb feladat, mert biztosítani kell a szimulátor stabilitását. Ezt a feladatot nem tárgyaljuk.

*4.4-1.5. Az állapotváltozós leírás szimulációja

Tekintsük adottnak egy folytonos idejű, lineáris, invariáns, kauzális, egy-gerjesztésű egy-válaszú differenciális rendszer állapotváltozós leírását:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_C &= \mathbf{A}_C \mathbf{x}_C + \mathbf{B}_C u_C, \\ y_C &= \mathbf{C}_C^T \mathbf{x}_C + D_C u_C.\end{aligned}\quad (4.4-14)$$

Szorítkozunk arra az esetre, amikor a gerjesztés korlátos véges időkre, tehát nem tartalmaz Dirac-impulzusos összetevőt. Ennek következtében az $\mathbf{x}_C(t)$ állapotvektor folytonos.

Célunk egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális, egy-gerjesztésű egy-válaszú rendszer

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_D &= \mathbf{A}_D \mathbf{x}_D + \mathbf{B}_D u_D, \\ y_D &= \mathbf{C}_D^T \mathbf{x}_D + D_D u_D.\end{aligned}\quad (4.4-15)$$

állapotváltozós előállításában szereplő mátrixok előállítása úgy, hogy ha $u_D[k] = u_C(kT + 0)$, akkor $\mathbf{x}_D[k]$, illetve $y_D[k]$ legyenek jó közelítései az $\mathbf{x}_C(kT)$, illetve az $y_C(kT + 0)$ mintáknak. Megköveteljük, hogy a szimuláció őrizze meg a rendszer aszimptotikus stabilitási tulajdonságát.

A FI állapotegyenlet megoldásából következik (2.3-2.9. pont), hogy az állapotvektor egymást követő mintáinak kapcsolata

$$\mathbf{x}_C(kT + T) = e^{\mathbf{A}_C T} \mathbf{x}_C(kT) + e^{\mathbf{A}_C (kT+T)} \int_{kT}^{kT+T} e^{-\mathbf{A}_C \tau} \mathbf{B}_C u_C(\tau) d\tau.$$

Közelítsük az integrált a téglalap szabály alapján a $\tau = kT$ pontra támaszkodva:

$$\mathbf{x}_C(kT + T) = e^{\mathbf{A}_C T} \mathbf{x}_C(kT) + T e^{\mathbf{A}_C T} \mathbf{B}_C u_C(kT).$$

A (14) szerinti DI állapotegyenlettel összevetve ebből a DI szimulátor mátrixaira kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}_D = e^{T \mathbf{A}_C}, \quad \mathbf{B}_D = T e^{T \mathbf{A}_C} \mathbf{B}_C, \quad \mathbf{C}_D = \mathbf{C}_C, \quad D_D = D_C. \quad (4.4-16)$$

Az \mathbf{A}_D mátrix $\lambda_{D,i}$ sajátértékeinek és az \mathbf{A}_C mátrix $\lambda_{C,i}$ sajátértékeinek kapcsolata

$$\lambda_{D,i} = e^{T \lambda_{C,i}}; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.4-17)$$

Ebből következik, hogy ez a DI szimulátor megőrzi az FI rendszer aszimptotikus stabilitási tulajdonságát.

Mivel a jó szimuláció biztosításához a mintavételi periódusidőt úgy kell megválasztanunk, hogy $T \ll |\lambda_{C,i}|_{\max}$ teljesüljön, ezért megelégedhetünk az exponenciális mátrixfüggvény sorának első néhány tagjával: $\exp(AT) = \mathbf{I} + AT + \frac{A^2 T^2}{2} + \dots$

Igazolni fogjuk, hogy ez a szimulációs eljárás ugyanarra a gerjesztés-válasz kapcsolatra vezet, mint az impulzusválasz szimulálásán alapuló (4.4-1.2. pont). A FI illetve a DI rendszer impulzusválaszának kifejezése az állapotváltozós leírás ismeretében (2.3-2.3. pont)

$$h_c(t) = D_C \delta(t) + \varepsilon(t) \mathbf{C}_C^T e^{\mathbf{A}_C t} \mathbf{B}_C,$$

$$h_D[k] = D_D \delta[k] + \varepsilon[k-1] \mathbf{C}_D^T \mathbf{A}_D^{k-1} \mathbf{B}_D.$$

A (2) illetve a (16) értelmében a következő $h_{D1}[k]$, illetve $h_{D3}[k]$ impulzusválasz adódik:

$$h_{D1}[k] = D_C \delta[k] + T \varepsilon[k-1] \mathbf{C}_C^T e^{\mathbf{A}_C k T} \mathbf{B}_C,$$

$$h_{D3}[k] = D_C \delta[k] + \varepsilon[k-1] \mathbf{C}_C^T e^{\mathbf{A}_C (k-1) T} T e^{\mathbf{A}_C T} \mathbf{B}_C.$$

Látható, hogy a kétféle impulzusválasz valóban megegyezik. Ez nem meglepő, hiszen ugyanazt az integrál-közelítési eljárást alkalmaztuk.

Példa Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírása ($\gamma \neq 0$)

$$x'_C = -\alpha x_C + \gamma u_C, \quad y_C = \frac{\alpha}{\gamma} x_C.$$

Könnyen belátható, hogy a rendszer átviteli függvénye és impulzusválasza

$$H_C(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \quad h_C(t) = \alpha \varepsilon(t) e^{-\alpha t}.$$

Az állapotváltozó leírás által meghatározott rendszer (16) szerinti DI szimulátorának állapotváltozós leírása

$$x'_D = e^{-\alpha T} x_D + \gamma T e^{-\alpha T} u_D, \quad y_D = \frac{\alpha}{\gamma} x_D.$$

Rövid számolással belátható, hogy ennek a szimuláló DI rendszernek az átviteli függvénye és az impulzusválasza

$$H_D(z) = \frac{\alpha T e^{-\alpha T}}{z - e^{-\alpha T}}, \quad h_D[k] = \alpha T \varepsilon[k-1] (e^{-\alpha T})^k.$$

Általános megállapításunkkal összhangban láthatjuk, hogy ez valóban megegyezik a korábban meghatározott $H_{D1}(z)$ átviteli függvénnyel és $h_{D1}[k]$ impulzusválasszal. #

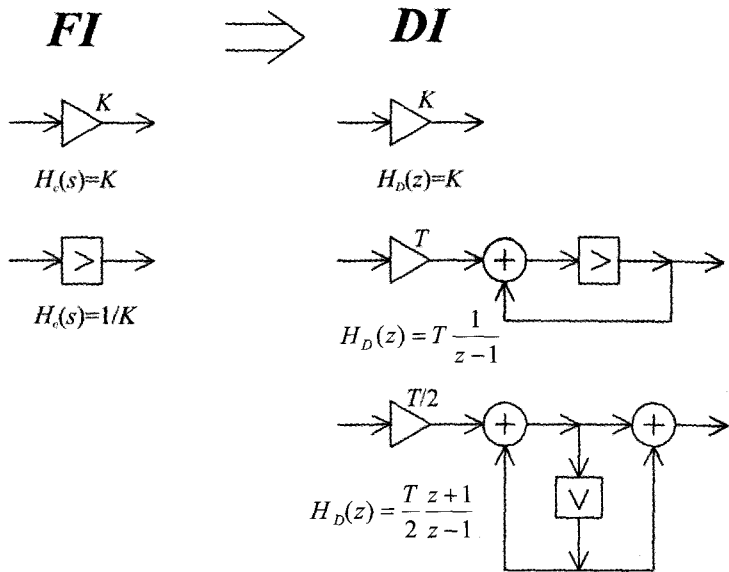
*4.4-1.6. A jelfolyam hálózat szimulációja

Tekintsük adottnak a folytonos idejű rendszert reprezentáló jelfolyam hálózatot. Helyettesítsük ennek minden komponensét DI szimulátorával (ennek módját alább tárgyaljuk). Az így előálló DI hálózat egy olyan DI rendszer reprezentál, amely az eredeti FI rendszer egy szimulátora. A szimuláló hálózat ismeretében meghatározhatjuk a szimulátor impulzusválaszát, átviteli függvényét, állapotváltozós leírását. Ezek általában nem egyeznek meg a más módon előállított szimulátorok megfelelő leírásával.

Tekintsünk először olyan FI hálózatot, amely elemi komponensek összekapcsolásából áll. A FI *erősítő* szimulátora nyilván egy DI *erősítő*, az erősítések megegyeznek. A FI *integrátorra* az előző két pont példáján már meghatároztunk két szimulátort is. Ezek átviteli függvénye és egy-egy hálózati realizációja látható a 4. ábrán. A mintavételi periódusidőtől függő erősítésű erősítő a szimulátor kimeneti oldalára is

kapcsolható. Ez az erősítő összevonható azzal az erősítővel, amely a FI integrátor elé vagy után volt kapcsolva az eredeti hálózatban.

A szimuláló hálózat ugyanannyi dinamikus komponenset és rendszerint ugyanannyi erősítőt tartalmaz, mint az eredeti hálózat.



4.4-4. ábra Az erősítő szimulátora és az integrátor két szimulátora

Az eljárás általánosítható olyan FI jelfolyam hálózatok szimulációjára is, amelyek nem elemi komponensek összekapcsolásából állnak. A FI komponenseket rendszerint $G_c(s)$ átviteli függvényük jellemzi. A szimuláló $G_D(z)$ átviteli függvény az eddig megismert szimulációs módszerek bármelyikével meghatározható. A legkézenfekvőbb a bilineáris transzformáció alkalmazása.

A hálózati reprezentáció szimulációja nem biztosítja a stabilitás megőrzését.

Nem feltétlenül igaz, hogy ha az eredeti hálózat nem tartalmaz memóriamentes hurkot, akkor a szimulátor sem tartalmaz ilyeneket, ezért előfordulhat, hogy a szimulátor nem reguláris hálózat. Noha ezek a problémák ritkán jelentkeznek, az említett sajátosságok hátrányosak.

Példa Egy FI idejű rendszert az 5. ábra felső részén látható hálózat reprezentál.

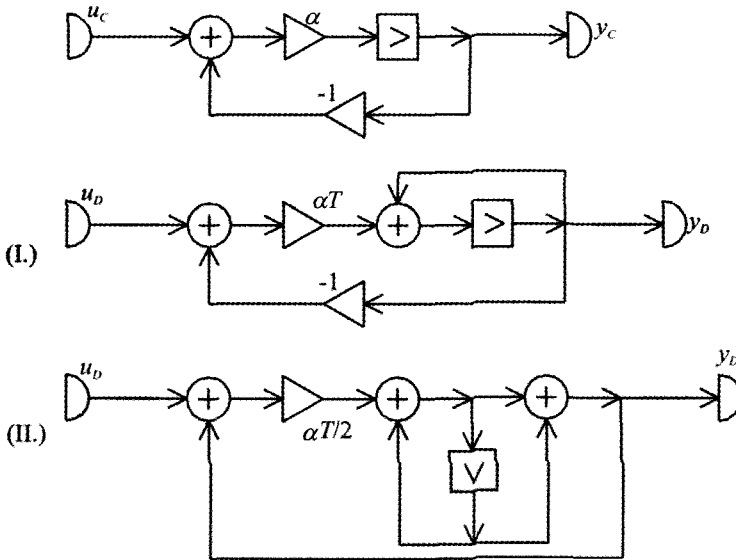
Határozzuk meg a hálózat diszkrét idejű szimulátorát, hasonlítsuk össze az eredeti és a szimuláló hálózat által reprezentált rendszer átviteli függvényét és impulzusválaszát!

A folytonos idejű hálózat azt a $H_c(s) = \alpha / (s + \alpha)$ átviteli függvényű rendszert reprezentálja, amelynek szimulátorait az 4.4-1.2. és 3. pont 3. példájában már meghatároztuk.

Helyettesítsük az integrátort a 4. ábra szerinti egyik vagy másik szimulátorával. Így kapjuk az 5. ábrán látható (I) és a (II) jelű DI hálózatot. Az általuk reprezentált rendszer átviteli függvényére és impulzusválaszára egyszerű számítás után kapjuk, hogy

$$(I) H_D(z) = \frac{\alpha T}{z - (1 - \alpha T)}, \quad h_D[k] = \alpha T \varepsilon[k-1] (1 - \alpha T)^{k-1}.$$

$$(II) H_D(z) = \frac{a}{1+a} \frac{z+1}{z-q}, \quad h_D[k] = \frac{2a}{1+a} \delta[k] + \frac{a}{(1+a)^2} \varepsilon[k-1] q^{k-1}; \quad a = \frac{\alpha T}{2}, \quad q = \frac{1-a}{1+a}.$$



4.4-5. ábra Egy folytonos idejű hálózat és két diszkrét idejű szimuláló hálózata

Az (I) jelű szimulátor hasonló rendszer, mint amelyet az impulzusválasz szimulációjával számítottunk, ha $|\alpha T|$ olyan kicsi, hogy a DI átviteli függvény számlálójában jogos az $e^{-\alpha T} \approx 1$, nevezőjében az $e^{-\alpha T} \approx 1 - \alpha T$ közelítés. Az utóbbi állítás vonatkozik az impulzusválaszra is. Ez a szimulátor csak addig őrzi meg a GV stabilitási tulajdonságot, amíg $\alpha T < 2$. Valójában $1 < \alpha T < 2$ esetén sem kapunk elfogadható eredményt, mert ekkor a DI impulzusválasz oszcillál, ami nem tükrözi a FI impulzusválasz viselkedését.

A (II) jelű szimulátor pontosan azt a rendszert jelenti, amelyet az átviteli függvényből bilineáris transzformációval állítottunk elő. Ez a szimulátor ezért megőrzi a GV stabilitási tulajdonságot. Ha $\alpha T < -1$ vagy ha $\alpha T > 2$, akkor az impulzusválasz oszcillál. A DI hálózat egy memóriamentes hurkot tartalmaz, ami hátrányos.

Mivel elfogadható közelítés biztosításához $T \ll 1/|\alpha|$ mintavételi periódusidőt kell választanunk, ezért ebben az egyszerű esetben az említett problémák ténylegesen egyik szimulátornál sem jelentkeznek. #

4.4-1.F. Feladatok

F-1. Az elsőrendű, FI mindenátesztő rendszer átviteli függvénye és impulzusválasza

$$H_C(s) = \frac{s - \alpha}{s + \alpha}, \quad h_C(t) = \delta(t) - 2\alpha \varepsilon(t) e^{-\alpha t}; \quad \alpha > 0.$$

Határozza meg e rendszer DI szimulátorának átviteli függvényét és impulzusválaszát

- (1) az impulzusválasz szimulációjával!
 (2) az átviteli függvény szimulációjával a bilineáris transzformáció felhasználásával!

Megőrzik a DI rendszerek mindenátereszto tulajdonságot?

F-2. Egy folytonos idejű rendszer átviteli függvénye

$$H_c(s) = \frac{s + \gamma}{(s + \alpha)(s + \beta)}; \quad \alpha > \beta > 0.$$

Határozza meg e minimálfázisú rendszer DI szimulátorának átviteli függvényét és impulzusválasztát

- (1) az impulzusválasz szimulációjával!
 (2) az átviteli függvény szimulációjával a bilineáris transzformáció felhasználásával!

Ha $\gamma > 0$, akkor minimálfázisú-e a FI rendszer? Megőrzik a szimuláló DI rendszerek a FI rendszer minimálfázisú tulajdonságát?

F-3. Jelölje egy folytonos idejű rendszer ugrásválasztát, azaz az $u_c(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztéshez tartozó választát $g_c = g_c(t)$, egy diszkrét idejű rendszer ugrásválasztát, azaz az $u_D[k] = \varepsilon[k]$ gerjesztéshez tartozó választát $g_D = g_D[k]$.

Valamely FI rendszer egységugrás-ekvivalens szimulátora egy olyan DI rendszer, amelyre $g_D[k] = g_c(kT+0)$, vagyis ugrásválasza a szimulált rendszer ugrásválaszának mintái. Határozza meg az

$$(a) H_c(s) = \frac{1}{s} \text{ (integrátor)} \quad (b) H_c(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$$

átviteli függvényű FI rendszer egységugrás-ekvivalens DI szimulátorának $H_D(z)$ átviteli függvényét. Hasonlítsa ezt össze az 5.1-1.2. és 3. pontban meghatározott $H_{D1}(z)$ és $H_{D2}(z)$ átviteli függvényekkel!

F-4. Oldja meg az előző feladatot a sebességugrás-ekvivalens szimulátorra, amelynek értelmezése: a szimulátor $u_D[k] = \varepsilon[k]$ $T k$ belépő, majd lineárisan növekvő gerjesztéshez tartozó válasza megegyezik az $u_c(t) = \varepsilon(t)t$ gerjesztéshez tartozó válasz mintáival.

***F-5.** A szimuláció egy módszere egy célszerű $s = f(z)$ változó-transzformáció alkalmazása az átviteli függvényre. Néhány lineáris törtfüggvény alakú transzformációt tárgyaltuk az 4.4-1.3. pontban, ahol azt állapítottuk meg, hogy az ún. bilineáris transzformáció a legelőnyösebb.

Vizsgálja meg a másodfokú törtfüggvény által létrehozott szimuláció lehetőségét. Biztosítható-e ezzel a lineáris törtfüggvénynél jobb szimuláció?

(Útmutatás. Fogalmazza meg először a transzformáló függvénnyel szemben támasztott követelményeket!)

F-6. Egy folytonos idejű rendszer gerjesztése Ω sávkorlátú. Az átviteli karakterisztikát a sávkorláton belül a következő függvénnyel közelítjük:

$$H_c(j\omega) = \left[1 + \cos 2\pi \frac{\omega}{\Omega} \right] e^{-j\omega\tau}, \quad |\omega| < \Omega, \quad \tau > 0.$$

- (a) Milyen jellegű rendszert ír le az átviteli karakterisztika?
 (b) Adja meg a fenti FI rendszer egy (pontos vagy közelítő) szimulátorát!

4.4-1.M. Megoldások

M-1. Egyszerű számítással a következőket kapjuk.

$$(1) \quad h_{D1}[k] = \delta[k] - 2\alpha T \varepsilon[k-1] (e^{-\alpha T})^k; \quad 0 < \alpha e^{-\alpha T} < 1;$$

$$H_{D1}(z) = 1 - 2\alpha T z^{-1} \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} \equiv \frac{z - (e^{-\alpha T} + 2\alpha T)}{z - e^{-\alpha T}}.$$

A DI rendszer GV stabilis, de nem mindenáteresztő, mert egyetlen zérusa ugyan az egyéssugarú körön kívül helyezkedik el, de nem a pólus reciproka.

$$(2) \quad H_{D2}(z) = q \frac{z - q^{-1}}{z - q}; \quad q = \frac{1-a}{1+a}, \quad a = \frac{\alpha T}{p}, \quad 0 < p \leq 2;$$

$$h_{D2}[k] = q \delta[k] + (1 - q^2) \varepsilon[k-1] q^{k-1}.$$

Ez természetesen egy DI mindenáteresztő átviteli függvénye.

M-2. Vezessük be a következő jelöléseket: $a = e^{-\alpha T}$, $b = e^{-\beta T}$. Ezekkel

$$(1) \quad h_{D1}[k] = T \varepsilon[k-1] \left\{ \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} a^{k-1} + \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} b^{k-1} \right\},$$

$$H_{D1}(z) = T \frac{z - c}{(z - a)(z - b)}, \quad c = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} b + \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} a.$$

Ha αT , βT és γT elég kicsi, akkor $c \approx 1 - \gamma T$, ezért ekkor a DI rendszer is minimálfázisú.

$$(2) \quad H_{D2}(z) = \frac{T(p + \gamma T)}{(p + \alpha T)(p + \beta T)} \frac{(z+1)(z-s)}{(z-q_1)(z-q_2)},$$

$$q_1 = \frac{1 - (\alpha T)/p}{1 + (\alpha T)/p}, \quad q_2 = \frac{1 - (\beta T)/p}{1 + (\beta T)/p}, \quad c = \frac{1 - (\gamma T)/2}{1 + (\gamma T)/2}; \quad 0 < p \leq 2.$$

Ez minimálfázisú (de nem szigorúan minimálfázisú) DI rendszert ír le.

M-3. Az ugrásválasz kifejezése az átviteli függvénnyel $g_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s^{-1}H_c(s)\}$.

$$(a) \quad g_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \varepsilon(t)t; \quad g_D[k] = \varepsilon[k]T k.$$

$$(b) \quad g_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}\right\} = \varepsilon(t)[1 - e^{-\alpha t}]; \quad g_D[k] = \varepsilon[k] \left\{1 - (e^{-\alpha T})^k\right\}.$$

A $H_D(z)$ DI átviteli függvény a

$$\mathcal{L}\{g_D[k]\} = H_D(z) \frac{z}{z-1}$$

összefüggésből számítható.

$$(a) H_D(z) = \frac{z-1}{z} T \frac{z}{(z-1)^2} = T \frac{1}{z-1} \equiv H_{D1}(z).$$

$$(b) H_D(z) = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-\alpha T}} \right\} = \frac{1-e^{-\alpha T}}{z-e^{-\alpha T}} = \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha T e^{-\alpha T}} H_{D1}(z).$$

Ha αT elég kicsi, akkor a (b) esetben is közel 1 az arányossági tényező. A $H_{D2}(z)$ átviteli függvénnyel a kapcsolat nem arányosság.

M-4. Az $f_c(t)$ FI sebességugrás-válasz kifejezése az átviteli függvénnyel $f_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s^{-2} H_c(s)\}$. Ennek alapján

$$(a) f_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{1}{2} \varepsilon(t) t^2.$$

$$(b) f_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s^2(s+\alpha)}\right\} = \varepsilon(t) \left[t - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right].$$

Ebből $f_D[k] = f_c(kT)$ már egyszerűen adódik. Ennek ismeretében a DI átviteli függvény a

$$\mathcal{Z}\{f_D[k]\} = H_D(z) \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

összefüggésből számítható.

$$(a) H_D(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} \frac{1}{2} T^2 \frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{Tz+1}{2z-1};$$

$$H_D(z) = H_{D2}(z), \text{ ha } p=2.$$

$$(b) H_D(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} \left\{ T \frac{z}{(z-1)^3} - \frac{1}{\alpha} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{\alpha} \frac{z}{z-e^{-\alpha T}} \right\} = K \frac{z-c}{z-e^{-\alpha T}},$$

$$K = \frac{-1+e^{-\alpha T} + \alpha T}{\alpha T} \approx \frac{\alpha T}{2}, \quad c = -1 + \frac{2}{3} \alpha T.$$

Ez az átviteli függvény közelítőleg egyezik a $H_{D2}(z)$ átviteli függvénnyel.

A 3. és 4. feladat azt a nyilvánvaló tényt illusztrálja, hogy a szimuláció ideálissá tehető egy konkrét gerjesztés-típusra, de valamely rendszer így adódó szimulátorai csak kivételesen egyeznek meg. Nem lehet általános értelemben optimális szimulátort definiálni.

***M-5.** Az $s = f(z)$ függvénnyel szemben támasztott alapvető követelmények:

$$f(e^{j\theta}) = j\omega;$$

$$f(e^{j0}) = 0; \quad f(e^{j\pi}) = \infty;$$

$$\Re\{f(z), |z| < 1\} < 0.$$

Szavakban: a z -sík egységsugarú körét képezze le az s -sík képzetes tengelyére úgy, hogy a $z=1$ pont az $s=0$ pontba, a $z=-1$ pont az $s=\infty$ pontba menjen át, a z -sík egységsugarú körének belsejét képezze le az s -sík bal felébe. Meg kell még követelni ω és \mathcal{G} szigorúan monoton kapcsolatát is.

Meglepő módon az derül ki, hogy a fenti feltételeknek eleget tevő másodfokú transzformáció a bilineáris elsőfokú transzformáció. A részletes számításokat az Olvasóra bízjuk.

Ennél bonyolultabb (például harmadfokú) transzformációt már valószínűleg nem is érdemes alkalmazni, mert a szimuláció jóságát valószínűleg nem javítja, de a szimulátor foksámát nagyon megnöveli.

M-6. (a) A rendszer lineáris fázisú aluláteresztő. Tekintheső egy τ idejű késleltető egy közelítésének is. A FI rendszer átviteli karakterisztikájának

$$H_c(j\omega) = e^{-j\omega\tau} + \frac{1}{2} e^{-j\omega(\tau-2\pi/\Omega)} + \frac{1}{2} e^{-j\omega(\tau+2\pi/\Omega)}$$

alakjából következik, hogy a rendszer $\tau \geq 2\pi/\Omega$ esetén kauzális.

(b) Mintavételi periódusidőnek $T = \pi/\Omega$ (vagy ennél kisebb érték) választandó. Ekkor $\omega = \vartheta/T = \vartheta\Omega/\pi$ helyettesítéssel

$$H_D(e^{j\vartheta}) = e^{-j\vartheta(\Omega\tau/\pi)} + \frac{1}{2} e^{-j\vartheta(\Omega\tau/\pi-2)} + \frac{1}{2} e^{-j\vartheta(\Omega\tau/\pi+2)}.$$

Ez csak akkor vezet racionális átviteli függvényre, ha $\Omega\tau/\pi = m \in \mathbf{Z}_+$ és $m \geq 2$. Erről $H_c(j\omega)$ értelmezése során kell gondoskodni. Ekkor

$$H_D(z) = \frac{1}{2} z^{-(m-2)} + z^{-m} + \frac{1}{2} z^{-(m+2)}$$

átviteli függvényű szimulátor adódik, amely sávkorlátozott gerjesztés esetén hibamentes szimulációt biztosít.

4.4-2. Mintavételezett jelek

4.4-2.1. A mintavételezett jel fogalma

A folytonos idejű jelek feldolgozásának és továbbításának fontos módszerei alapulnak a jel mintavételezésén. Az információt ekkor a folytonos idejű jelnek a t_k időpontokban felvett értékei, a jel *mintái* hordozzák. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a mintavétel azonos T időközönként történik, tehát $t_k = kT$, ahol T a *mintavételi periódusidő* és k egész szám. A mintavételi időpontok azonban követhetik egymást más szabályosság szerint, sőt véletlenszerűen is, de ezekkel az esetekkel nem foglalkozunk.

A gyakorlatban a mintákat rendszerint digitalizálják (kvantálják, diszkrét értékű jellé alakítják át), ezeket dolgozzák fel, továbbítják, majd újabb feldolgozás után rendszerint visszaalakítják folytonos idejű és folytonos értékű jellé. A továbbiakban azonban csak folytonos értékű *mintavételezett jelek* vizsgálatával foglalkozunk.

Legyen $x = x(t)$ olyan folytonos idejű jel, amely korlátos véges időkre (ezzel kizárjuk a Dirac-impulzus jelenlétét). Az ehhez rendelt $x_T = x_T(t)$ folytonos idejű jel definíciója (6. ábra)

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & kT \leq t < kT + T_0; \quad T_0 < T; \quad k \in \mathbf{Z}; \\ 0, & kT + T_0 \leq t < kT + T. \end{cases} \quad (4.4-18)$$

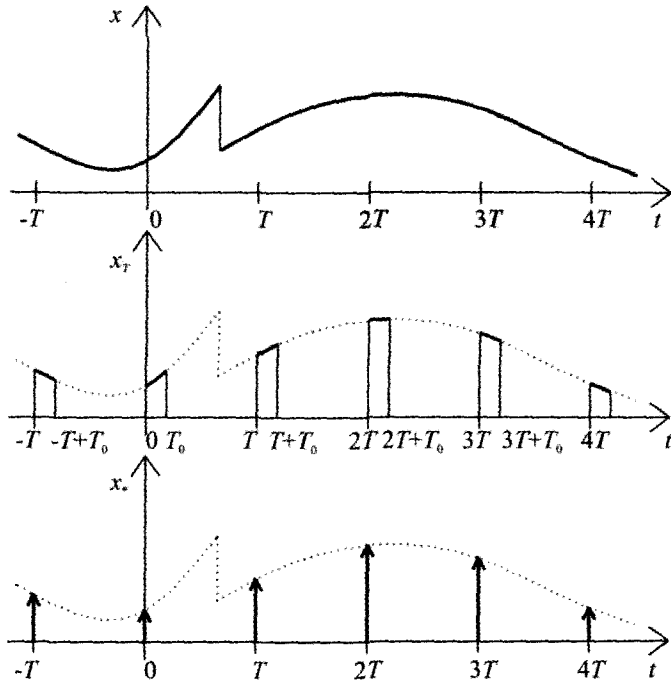
Szorítkozzunk arra az esetre, amikor a mintavétel T_0 ideje olyan rövid, hogy ezen időtartam alatt $x_T(t)$ állandónak tekinthető. Ennek megfelelően

$$x_T(t) \approx \begin{cases} x(kT+0) \equiv x_D[k], & kT \leq t < kT+T_0; \quad T_0 < T; \quad k \in \mathbf{Z}; \\ 0, & kT+T_0 \leq t < kT+T. \end{cases}$$

A feltételezésünk nem jogos, ha a jel nem folytonos. Ez a megjegyzés azonban mindjárt tárgyalanná fog válni.

További egyszerűsítésként közelítsük a $t_k = kT$ helyeken kezdődő rövid és $T_0 x(kT)$ intenzitású impulzus mindegyikét elhanyagolható hosszúságú és azonos intenzitású impulzusokkal, azaz a $T_0 x_D[k] \delta(t - kT)$ Dirac-impulzussal.

Az így előálló $x_*(t)$ folytonos idejű jel Dirac-impulzusok sorozata (6. ábra), ezt nevezzük az $x(t)$ jel mintavételezett jelének. A mintavétel T_0 idejének nem csak a T mintavételi periódusidőnél kell lényegesen kisebbnek lennie, hanem az olyan időjellegű mennyiségeknél is, amelyek az x jel változási sebességét jellemzik. Ilyen jellemző lehet például a jel sávszélességének reciproka.



4.4-6. ábra Az $x(t)$ folytonos idejű jel, az ehhez rendelt rövid impulzusokból álló $x_T(t)$ jel és az ezt közelítő $x_*(t)$ mintavételezett jel

Az $x(t)$ jel T mintavételi periódusidővel *mintavételezett jele*, az $x_*(t)$ jel értelmezése

$$x_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \delta(t - kT); \quad x_D[k] = x(kT+0), \quad T_0 \ll T, \quad (4.4-19)$$

ahol T_0 a mintavétel hossza és $x_D[k]$ az $x(t)$ folytonos idejű jel kT időpontbeli mintái által meghatározott diszkrét idejű jel. Ha az $x(t)$ jel folytonos, akkor $x_D[k] = x(kT)$.

Az $x_*(t)$ mintavételezett jel, az $x_D[k]$ diszkrét idejű jel és az $x^*(t) = x_*(t)/T_0$ úgynevezett „csillagozott jel” ugyanazt a jelet írják le különböző alakban. A két utóbbi jel független a T_0 mintavételi időtől. Mivel $\delta(t)$ reciprok idő dimenziójú, ezért az $x_*(t)$ mintavételezett jel és az $x_D[k]$ diszkrét idejű jel ugyanolyan dimenziójú, mint az eredeti jel és ugyanabban a mértékegységben fejezhető ki, az $x^*(t)$ csillagozott jelre ez nem érvényes.

A mintavételezett jel egy fontos gyakorlati tulajdonsága az, hogy egyetlen csatornán több jel is átvihető. A jel hordozója gyakran elektromos feszültség, ekkor a csatorna távvezeték vagy kábelt jelent. Legyen például az $x_i(t)$ jelhez rendelt DÍ jel

$$x_{D,i}[k] = x_i\left(kT + i\frac{T}{N} + 0\right); \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.4-20)$$

Ha $T_0 < T/N$ teljesül, akkor a T intervallumbeli mintákból egyértelműen ki tudjuk választani az $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ jelhez tartozót. A továbbiakban csak egyetlen ilyen mintavételezett jellel foglalkozunk és nem tárgyaljuk az időosztásos jelátvitel további problémáit. Nem foglalkozunk azzal a kérdéssel sem, hogy miként lehet figyelembe venni a mintavételi idő hosszát.

Példa Tekintsük a következő folytonos idejű jelet:

$$x(t) = \varepsilon(t) e^{-\alpha t}.$$

Ennek mintavételezett jele a T mintavételi periódusidő és a T_0 mintavételi idő megválasztása után

$$\begin{aligned} x_*(t) &= T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon(kT + 0) e^{-\alpha T k} \delta(t - kT) = \\ &= T_0 \left\{ \delta(t) + e^{-\alpha T} \delta(t - T) + e^{-2\alpha T} \delta(t - 2T) + e^{-3\alpha T} \delta(t - 3T) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Ha $T = 0,1/\alpha$ választással élünk, akkor $e^{-\alpha T} \approx 0,9048$. Legyen $T_0 = 0,1T = 0,01/\alpha$, akkor a jel relatív megváltozása a mintavétel tartama alatt $1 - e^{-\alpha T_0} = 0,0095 \approx 0,01$, tehát a választott T_0 idő elég rövidnek tekinthető. #

4.4-2.2. A mintavételezett jel spektruma

Szorítkozzunk olyan $x(t)$ jelre, amelyik abszolút integrálható. Ennek következtében a hozzá rendelt $x_D[k] = x(kT + 0)$ diszkrét idejű jel abszolút összegezhető. A jelhez rendelt mintavételezett jel spektruma integrálással számítható:

$$\begin{aligned} X_*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_*(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} T_0 x_D \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \\ &= T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] e^{-j\omega kT}. \end{aligned}$$

A feltételezett konvergencia-tulajdonság miatt a műveletek felcserélése jogos.

Az $x_s(t)$ mintavételezett jel $X_s(j\omega) = \mathcal{F}\{x_s(t)\}$ spektruma kifejezhető a jelhez rendelt $x_D[k] = x(kT + 0)$ diszkrét idejű jel ismeretében:

$$X_s(j\omega) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] e^{-jk\omega T}; \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_D[k]| < \infty. \quad (4.4-21)$$

Az $x_D[k]$ jel $X_D(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{x_D[k]\}$ spektrumának kifejezése (3.2-1.1. pont)

$$X_D(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] e^{-j\vartheta k}; \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_D[k]| < \infty.$$

Ebből következik a folytonos idejű jelhez rendelt mintavételezett jel és diszkrét idejű jel spektrumának kapcsolata:

$$X_s(j\omega) = T_0 X_D(e^{j\vartheta}) \Big|_{\vartheta = \omega T}. \quad (4.4-22)$$

Ebből következik, hogy az $X_s(j\omega)$ spektrum periodikus:

$$X_s(j(\omega + \omega_s)) = X_s(j\omega); \quad \omega_s \equiv \frac{2\pi}{T}. \quad (4.4-23)$$

Az ω_s a mintavételi körfrekvencia. (Ezekre az ω_c jel illetve az órajel körfrekvencia elnevezés is használatos.) Valós értékű $x(t)$ esetén elegendő $X_s(j\omega)$ ismerete a $0 \leq \omega < \omega_s/2 \equiv \pi/T$ körfrekvenciákra.

Ha $X_s(j\omega)$ ismert, akkor $x_s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_s(j\omega)\}$ inverz Fourier-transzformációval számítható. Ez azonban olyan integrálra vezet, amely nem konvergens a szokásos értelemben. Ez nem is meglepő, hiszen a mintavételezett jel Dirac-impulzusok sorozata. Sokkal kényelmesebb ezért, ha a diszkrét idejű jelet állítjuk elő a DI inverz Fourier-transzformáció segítségével:

$$x_D[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_D(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_D(e^{j\omega T}) e^{j\omega T k} d\omega.$$

A (22) értelmében a diszkrét idejű jel kifejezhető a mintavételezett jel spektrumával is:

$$x_D[k] = \frac{T}{2\pi T_0} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_s(j\omega) e^{jk\omega T} d\omega; \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (4.4-24)$$

Az $x_D[k]$ ismeretében az $x_s(t)$ mintavételezett jel a (19) szerint már meghatározott.

A fentiek újra megmutatják, miként használható a diszkrét idejű leírás folytonos idejű jel jellemzésére.

1. példa Legyen a folytonos idejű jel és spektruma a következő:

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0; \quad X(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Mivel a jel páros, ezért spektruma valós értékű.

Határozzuk meg az x jel mintavételezett jelét és annak spektrumát!

A jelhez rendelt diszkrét idejű jel és annak spektruma $a = e^{-aT}$ jelöléssel

$$x_D[k] = a^{|k|}, \quad X_D(e^{j\vartheta}) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\vartheta}; \quad 0 < a < 1.$$

A (19) illetve a (22) értelmében a T periódusidővel mintavételezett jel illetve annak spektruma

$$x_s(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|} \delta(t - kT), \quad X_s(j\omega) = T_0 \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega T}.$$

Az $x_s(t)$ mintavételezett jel is páros, az $X_s(j\omega)$ spektruma is valós értékű. #

Az $x_s(t)$ mintavételezett jel $X_s(j\omega)$ spektruma kifejezhető az $x(t)$ eredeti jel $X(j\omega)$ spektrumának ismeretében. Alább igazolni fogjuk, hogy ha $x(t)$ mindenütt (esetleg a $t = 0$ pont kivételével) folytonos, akkor $\omega_s = 2\pi/T$ jelöléssel

$$X_s(j\omega) = \frac{T_0}{T} \left\{ X(j\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} [X(j(\omega - n\omega_s)) + X(j(\omega + n\omega_s))] \right\} + \frac{T_0}{2} \lim_{\omega \rightarrow \infty} [j\omega X(j\omega)]. \quad (4.4-25)$$

Igazolható továbbá, hogy a $t = 0$ hely kivételével folytonos $x(t)$ esetén

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [j\omega X(j\omega)] = x(+0) - x(-0), \quad (4.4-26)$$

vagyis $x(t)$ ugrása a $t = 0$ helyen. Ha tehát az $x(t)$ jel mindenütt folytonos, akkor a (25) utolsó tagja nem lép fel. Ha $x(t)$ belépő jel, akkor az utolsó tag értéke $x(+0)T_0/2$.

A (25) jelentése a következő. A mintavételezett jel $X_s(j\omega)$ spektruma előállítható az eredeti jel $X(j\omega)$ spektrumából annak ismételt eltolásával az ω_s mintavételi körfrekvenciával, és ezen összetevők összegezésével.

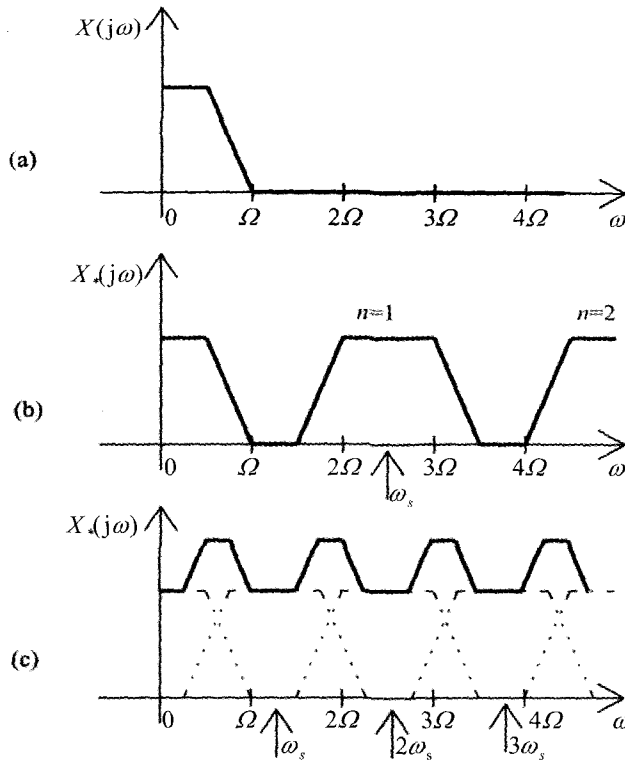
Mivel véges energiájú jel spektrumára $X(j\omega) \rightarrow 0$, ha $|\omega| \rightarrow \infty$, ezért az $|\omega| < \omega_s/2$ intervallumban az $X_s(j\omega)$ közelíthető a (25) sor első néhány tagjával.

Ha az $x(t)$ *sávkorlátozott* Ω sávkorláttal, akkor $X_s(j\omega)$ minden frekvencián *véges számú* $X(j(\omega - n\omega_s))$ típusú tag összege. Ezt szemlélteti a 7. ábra, amelyen a jel spektrumát az áttekinthetőség érdekében valós értékűnek tekintettük.

Ha a mintavétel kellően sűrű – konkrétan $\omega_s \geq 2\Omega$, vagyis $T \leq \pi/\Omega$ esetén – akkor bármely ω körfrekvencián legfeljebb egy tag nem nulla $X_s(j\omega)$ kifejezésében. Ennek következtében az $|\omega| < \omega_s$ intervallumban $X_s(j\omega)$ arányos az $X(j\omega)$ spektrummal. Ezt szemlélteti a 7. ábra középső sora.

A *mintavételi tétel* értelmében a Ω sávkorlátú $x(t)$ jel rekonstruálható az $x_s(t)$ mintavételezett jeléből, ha a mintavételi periódusidő kielégíti a $T \leq \pi/\Omega$, vagyis a mintavételi körfrekvencia kielégíti az $\omega_s \geq 2\Omega$ feltételt.

A mintavételi tétel képlet alakú megfogalmazása:



4.4-7. ábra A sávkorlátozott jel spektruma és mintavételezéssel előállított jel spektrumának előállítás a eredeti jel spektrumából (b) kellően sűrű, illetve (c) nem kellően sűrű mintavétel esetén

$$X(j\omega) = \begin{cases} \frac{T}{T_0} X_*(j\omega), & |\omega| < \Omega \leq \frac{\omega_s}{2}, \\ 0, & |\omega| > \Omega. \end{cases} \quad (4.4-27)$$

Ez összhangban áll a mintavételi tételnek a 3.2-1.5. pontban megfogalmazott más alakjával.

A 7. ábra alsó sora azt illusztrálja, hogy ha a mintavétel nem eléggé sűrű, akkor az összeadandó spektrumok átlapolódnak és ennek következtében idegen („alias”) frekvenciák jelennek meg az *alulmintavételezés* következtében. Ekkor az $X_*(j\omega_i)$ értékek nem csak a megfelelő $X(j\omega_i)$ értékektől függenek, hanem az idegen $X(j\omega_i \pm n\omega_s)$ értékektől is ($n = 1, 2, \dots$). Nyilvánvaló, hogy ekkor a mintavételezett jelből nem rekonstruálható az eredeti jel, még ha az sávkorlátozott is.

Ha az $x(t)$ jel nem sávkorlátozott, akkor nem rekonstruálható mintavételezett jeléből, a jel spektruma legfeljebb közelítőleg lehet arányos mintavételezett jelének spektrumával az $|\omega| < \omega_s$ intervallumban és erősen különbözik tőle ezen intervallumon kívül.

2. példa Az 1. példában vizsgált jel nem sávkorlátozott, de spektruma nullához tart $\omega \rightarrow \infty$ esetén. Válasszunk $T=1/2\alpha$ vagyis $\omega_s=4\pi\alpha$ értéket. Ez akkor lenne a mintavételi tételnek megfelelő érték, ha a jel sávkorlátlója $\Omega=2\pi\alpha$ lenne. Tudjuk, hogy

$$\frac{|X(j\omega)|}{|X(j\omega)|_{\max}} < \frac{1}{1+(2\pi)^2} \approx 0,025, \quad |\omega| > 2\pi\alpha,$$

ezért nem követünk el nagy hibát ilyen mintavételi periódusidő választásával.

A fenti választással a mintavételezett és az eredeti jel spektruma

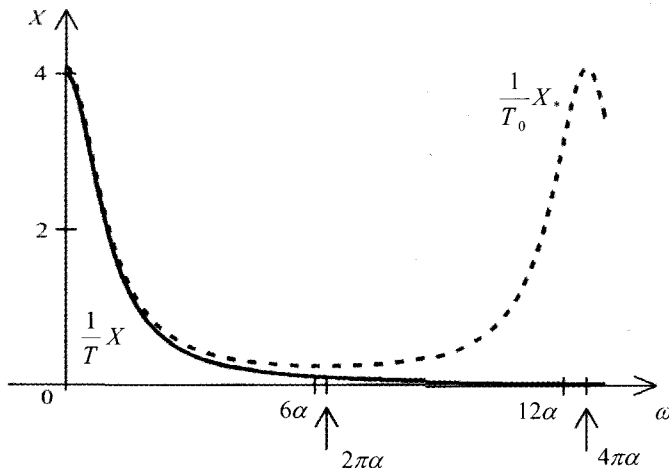
$$X_*(j\omega) = T_0 \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\frac{\omega}{2\alpha}}; \quad a = e^{-0,5} \approx 0,607;$$

$$\frac{T_0}{T} X(j\omega) = T_0 \frac{4}{1+(\omega/\alpha)^2}.$$

E két függvény grafikonja látható a 8. ábrán. Az utóbbi az $X_*(j\omega)$ első tagja a (25) szerinti alakban. Láthatjuk, hogy az $|\omega| < \omega_s/2$ intervallumban ez elég jó közelítést jelent.

Ha ehhez még hozzáadjuk a következő két tagot (jobbra és balra tolva $\omega_s=4\pi\alpha$ körfrekvenciával), akkor ezek görbéje és $X_*(j\omega)$ görbéje gyakorlatilag egybeesik az $|\omega| < \omega_s/2$ intervallumban.

A példa és a 8. ábra azt illusztrálja, hogy a mintavételezett jel még egy nem sávkorlátozott jelnek is jó közelítése, ha a mintavételi periódusidőt megfelelően választjuk. #



4.4-8. ábra A mintavételezett és az eredeti jel spektruma. Az utóbbi az előbbi egytagú közelítése

Az $x(t)$ jel mintavételezése tekinthető *amplitúdó-modulációs* folyamatnak is. Legyen a $g_*(t)$ periodikus vivőjel Dirac-impulzusok sorozata:

$$g_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (4.4-28)$$

Ez tekinthető a $g(t) = 1$ jel mintavételezett megfelelőjének is. Láthatjuk, hogy ha $x(t)$ folytonos jel, akkor az általa modulált $x(t) \cdot g_s(t)$ Dirac-impulzus sorozat

$$x_s(t) = x(t) g_s(t) \quad (4.4-29)$$

az $x(t)$ jelnek a (19) szerinti mintavételezett jele.

Ezt felhasználhatjuk (25) igazolásához, vagyis $X_s(j\omega)$ és $X(j\omega)$ kapcsolatának előállítására. A (3.2-13) értelmében a $g_D[k] = 1$ jel spektruma

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - p 2\pi).$$

A (22) alapján a mintavételezett állandó jel spektruma $\omega_s = 2\pi/T$ jelöléssel

$$\mathcal{F}\{g_s(t)\} = T_0 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega T - p 2\pi) \equiv 2\pi \frac{T_0}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p \omega_s). \quad (4.4-30)$$

A folytonos időbeli szorzásnak a (3.2-41) értelmében frekvenciatartománybeli konvolúció felel meg:

$$\mathcal{F}\{u(t)v(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\lambda)V(j(\omega - \lambda))d\lambda.$$

Alkalmazzuk ezt az $x_s(t) = x(t)g_s(t)$ jelre:

$$X_s(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)g_s(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \lambda)) 2\pi \frac{T_0}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - p \omega_s) d\lambda.$$

Ebből következik, hogy

$$X_s(j\omega) = \frac{T_0}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - p \omega_s)), \quad \omega_s \equiv \frac{2\pi}{T}.$$

Ezzel megkaptuk a (25) igazolását folytonos $x(t)$ esetre. Az általánosabb esetet (amikor a jelek a $t = 0$ helyen ugrása van) nem tárgyaljuk.

4.4-2.3. Mintavételezett jel Laplace-transzformáltja

Az $x_s(t)$ mintavételezett jel $X_s(s) = \mathcal{L}\{x_s(t)\}$ Laplace-transzformáltja a definíció szerint

$$X_s(s) = \int_{-0}^{\infty} \left[T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \delta(t - kT) \right] e^{-st} dt = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} x_D[k] \int_{-0}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} x_D[k] e^{-s k T}.$$

A műveletek sorrendje a gyakorlatban előforduló jelekre felcserélhető.

Az $x_s(t)$ mintavételezett jel $X_s(s) = \mathcal{L}\{x_s(t)\}$ Laplace-transzformáltja kifejezhető a jelet leíró $x_D[k]$ diszkrét idejű jel ismeretében:

$$X_s(s) = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} x_D[k] e^{-s k T}; \quad x_D[k] \equiv x(kT + 0). \quad (4.4-31)$$

Az $X_*(s)$ rendszerint racionális függvénye az e^{-sT} változónak.

Az $x_D[k]$ jel DI Laplace-transzformáltja (4.1-1.1. pont)

$$X_D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_D[k] z^{-k}.$$

Ebből következik, hogy ezzel $X_*(s)$ egyszerűen kifejezhető $X_D(z)$ ismeretében:

$$X_*(s) = T_0 X_D(z) \Big|_{z=e^{sT}}. \quad (4.4-32)$$

Ezek szerint az $X_*(s)$ inverz Laplace-transzformáltja előállítható az inverz DI Laplace-transzformáció már megismert módszereivel (polinomosztás vagy részlettortekre bontás; 4.1-2. szakasz). Ez az $x_D[k]$ DI jelet szolgáltatja, amely viszont (18) értelmében már meghatározza az $x_*(t)$ mintavételezett jelet.

A (21) és a (31) összehasonlításával megkapjuk a belépő mintavételezett jel spektrumának és Laplace-transzformáltjának kapcsolatát:

$$X_*(j\omega) = X_*(s) \Big|_{s=j\omega}; \quad x_D[k] = 0, \quad k \in \mathbf{Z}_-; \quad \sum_{k=0}^{\infty} |x_D[k]| < \infty. \quad (4.4-33)$$

Az összefüggés biztosan alkalmazható, ha $X_D(z) = T_0^{-1} X_*(s) \Big|_{e^{sT}=z}$ racionális függvény és minden pólusa egységugarú körön belül.

Ha ismerjük az $x(t)$ jel $X(s)$ Laplace-transzformáltját, akkor az $x_*(t)$ mintavételezett jel $X_*(s)$ Laplace-transzformáltját általános esetben a következőképpen határozhatjuk meg. Először előállítjuk az $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ jelet, képezzük az $x_*(t)$ mintavételezett jelet, majd számítjuk ennek $X_*(s) = \mathcal{L}\{x_*(t)\}$ Laplace-transzformáltját. Vezessük be erre a műveletsorozatra a következő jelölést:

$$X_*(s) = \{X(s)\}_*. \quad (4.4-34)$$

Az $\{X(s)\}_*$ függvényt előállíthatjuk $x(t)$ számítása nélkül is, ha $X(s)$ racionális függvény vagy ha a következő alakú:

$$X(s) = \frac{B_0(s) + B_1(s)e^{-sT} + B_2(s)e^{-s2T} + \dots + B_r(s)e^{-srT}}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}, \quad (4.4-35)$$

ahol minden $B_i(s)$ legfeljebb $n-1$ fokszámú polinom és T a mintavételi periódusidő. Ha a pólusok egyszeresek, akkor részlettortekre bontással $X(s)$ előállítható

$$F(s) = \frac{1}{s-p_i} e^{-smT}, \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \varepsilon(t-mT) e^{p_i(t-mT)}$$

alakú tagok lineárokombinációjaként. A DI jel és Laplace-transzformáltja

$$f_D[k] = \varepsilon[k-m] e^{p_i(k-m)T}, \quad F_D(z) = \frac{z}{z - e^{p_i T}} z^{-m}.$$

Alkalmazzuk erre a (34) által értelmezett $\{ \}_*$ műveletet, akkor kapjuk, hogy

$$\left\{ \frac{1}{s-p_i} e^{-smT} \right\}_* = T_0 \frac{e^{sT}}{e^{sT} - e^{p_i T}} e^{-smT}, \quad m \in \mathbf{N}. \quad (4.4-36)$$

Látható, hogy a $\{ \}_*$ művelet és az e^{-smT} ($m \in \mathbf{N}$) tényezővel végzett szorzás sorrendje felcserélhető. Az eljárás nehézség nélkül általánosítható arra az esetre is, amikor valamelyik pólus többszörös.

Az is könnyen belátható, hogy ha $F_*(s)$ egy mintavételezett jel Laplace-transzformáltja, akkor bármely $g(t)$ és $G(s)$ esetén

$$\{F_*(s)G(s)\}_* = F_*(s)G_*(s). \quad (4.4-37)$$

Nincs egyszerű általános módszer $\{F(s)G(s)\}_*$ meghatározására $F_*(s)$ és $G_*(s)$ ismeretében. Ilyenkor az általános eljárást kell követni (visszatérés az időtatományba, mintavételezett jel előállítása, Laplace-transzformált számítása).

1. példa Tekintsük a következő két folytonos idejű jelet:

$$g(t) = \varepsilon(t) e^{-\alpha t},$$

$$h(t) = \frac{1}{T_0} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)].$$

A $h(t)$ kifejezésében T a mintavételi periódusidő és T_0 a mintavétel hossza.

Az ezekhez tartozó mintavételezett jelek,

$$g_*(t) = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha T k} \delta(t - kT), \quad h_*(t) = \delta(t).$$

A mintavételezett jelek Laplace-transzformáltja

$$G_*(s) = T_0 \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} e^{-sT}}, \quad H_*(s) = 1.$$

Az Olvasóra bízunk e két transzformált előállítását a

$$G(s) = \frac{1}{s + \alpha}, \quad H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{T_0 s}$$

Laplace-transzformáltak ismeretében.

2. példa Vezessük be az előzőekben meghatározott függvényekkel az alábbi komplex frekvenciatartománybeli függvényeket:

$$U(s) = G(s)H_*(s), \quad V(s) = G_*(s)H_*(s), \quad W(s) = G(s)H(s).$$

Határozzuk meg az ezekhez tartozó $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ jelek mintavételezett megfelelőjének Laplace-transzformáltját!

A (37) felhasználásával $\mathcal{L}\{u_*(t)\}$ és $\mathcal{L}\{v_*(t)\}$ egyszerűen kifejezhető:

$$U_*(s) = V_*(s) = G_*(s)H_*(s) = T_0 \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} e^{-sT}}.$$

A $\mathcal{L}\{w_s(t)\}$ számítása kicsit körülményesebb. Az adott $G(s)$ és $H(s)$ behelyettesítésével

$$W(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{T_0 s (s + \alpha)} = \frac{1}{\alpha T_0} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha} \right\} \{1 - e^{-sT}\}.$$

A (37) és a (36) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} W_*(s) &= \frac{1}{\alpha T_0} \left\{ T_0 \frac{1}{1 - e^{-sT}} - T_0 \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} e^{-sT}} \right\} \{1 - e^{-sT}\} = \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \frac{e^{-sT}}{1 - e^{-\alpha T} e^{-sT}}. \end{aligned}$$

Ennek a függvénynek az előállítása nem reményteljes a $G_*(s)$ és $H_*(s)$ függvények ismeretében.

Az Olvasóra bízunk az eredmények ellenőrzését úgy, hogy először meghatározza az $u(t)$, $v(t)$ és $w(t)$ függvényeket, képezi ezekből az $u_*(t)$, $v_*(t)$ és $w_*(t)$ mintavételezett jeleket, majd ezek Laplace-transzformáltját. Ez a számítás többnyire hosszadalmasabb, viszont általánosabb.

Ha például kis módosítással a két függvény

$$g(t) = \varepsilon(t) e^{-\alpha t}, \quad h(t) = \frac{1}{T_0} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)], \quad \tau \neq T$$

lenne, akkor a Laplace-transzformáltak meghatározása megfontolást igényelne. Az eredményt lényegesen befolyásolná τ/T értéke. Ha ez kisebb 1-nél, akkor az eredmények nem változnának, de $W_*(s)$ bemutatott számítása nem érvényes. Ha τ/T nagyobb 1-nél, akkor már $h_*(t)$ kifejezése is módosul! Az Olvasóra bízunk az utóbbi eset részletes vizsgálatát. #

4.4-2.4. A mintavételezett jel rekonstrukciója

A mintavételezett (vagy digitális) jelfeldolgozás egyik alapvető feladata a következő.

Ismerjük egy folytonos idejű és korlátos $y(t)$ „eredeti” jel $y_D[k] = y(kT + 0)$ *mintáit* vagy $y_*(t)$ *mintavételezett jelét*. Feladatunk olyan $\hat{y}(t)$ folytonos idejű jel előállítása, amely lehetőleg kevésbé különbözik az eredeti $y(t)$ jeltől, ezért annak egy közelítésének vagy *rekonstrukciójának* tekinthető. Ha az eredeti jel nem sávkorlátozott, akkor a minták alapján egy hibamentes rekonstrukció még elvileg is lehetetlen.

A következőkben három közelítő rekonstrukciós eljárás alapvetését mutatjuk be. A mintavételezett jeltől történő jelrekonstrukció hibája alapvetően annál kisebb, minél kisebb T mintavételi periódusidőt választottunk. Arra az esetre szorítkozunk, amikor az $\hat{y}(t)$ jelet az $y_*(t)$ múltbeli, azaz t előtti értékeiből állítjuk elő (on-line rekonstrukció).

Szakaszonként állandó jelrekonstrukció

Az $y(t)$ jelet $y_D[k]$ mintái alapján szakaszonként állandó $\hat{y}_0(t)$ jellel rekonstruáló jel definíciója

$$\hat{y}_0(t) = y_D[k] \equiv y(kT + 0), \quad kT \leq t < kT + T, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (4.4-38)$$

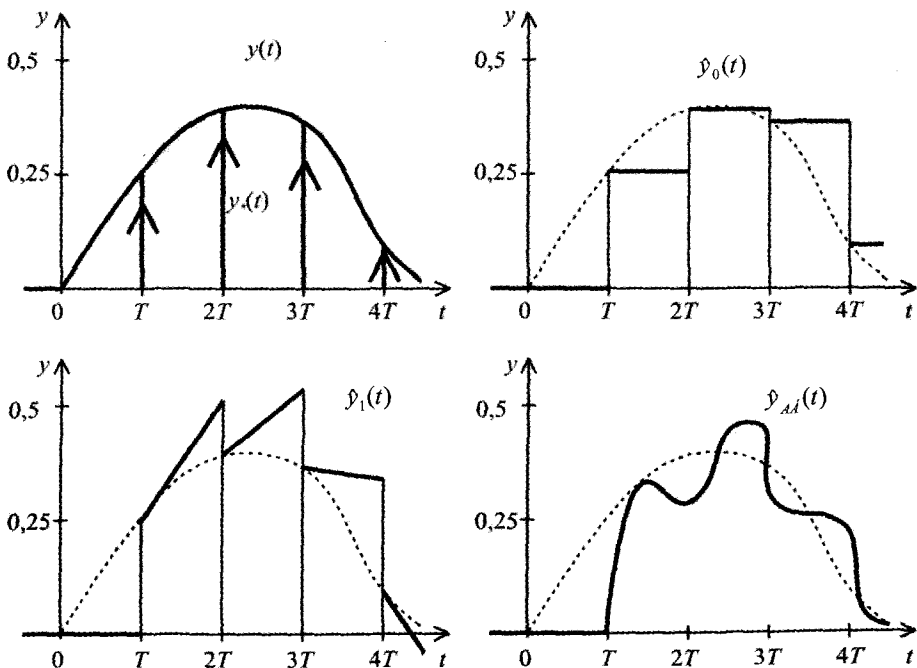
A rekonstruáló jel állandó értéke megegyezik az utolsó minta értékével. Ez egy lépcsős függvényt eredményez. Az eljárás nulladrendű extrapoláció. A rekonstrukció hibamentes a kT mintavételi időpontokban. Az eljárást a 9. ábra felső sorának jobb oldali részábrái szemléltetik. (Az ábra alsó soráról később lesz szó.) A jelrekonstrukció hibája kicsi azokban az intervallumokban, ahol az eredeti jel keveset változik, azaz maga is közel állandó.

A nulladrendű tartó az a rendszer, amelynek $u(t) = y_s(t)$ gerjesztéshez tartozó válasza éppen a fent értelmezett $\hat{y}_0(t)$.

E rendszer impulzusválaszának meghatározásához legyen $y_D[k] = \delta[k]$. Ekkor $y_s(t) = T_0 \delta(t)$ és $\hat{y}_0(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)$. Ebből már következik a $h_0(t)$ impulzusválasz kifejezése, majd ebből a $H_0(s)$ átviteli függvény és a $H_0(j\omega)$ átviteli karakterisztika kifejezése is. Könnyen belátható, hogy a rendszer gerjesztés-válasz stabilis.

A nulladrendű tartó rendszerjellemző függvényei

$$h_0(t) = \frac{1}{T_0} \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\}, \quad (4.4-39)$$



4.4-9. ábra Az y eredeti jel és az y_s mintavételezett jel, az \hat{y}_0 szakaszonként állandó, az \hat{y}_1 szakaszonként lineáris, az \hat{y}_{Ap} aluláteresztővel előállított rekonstruált jel

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{T_0 s}, \quad (4.4-40)$$

$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{T_0 j\omega} \equiv \frac{T}{T_0} \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} e^{-j\omega T / 2}. \quad (4.4-41)$$

Az impulzusválasz időben véges hosszúságú, az átviteli függvény és az átviteli karakterisztika nem racionális.

Ilyen véges impulzusválaszú (FIR típusú), folytonos idejű rendszer nem differenciális, rendszeregyenlete és állapotváltozós leírása nem az általunk eddig tárgyalt alakú, nem realizálható erősítők és integrátorok összekapcsolásából álló jelfolyam hálózattal.

Szakaszonként lineáris jelrekonstrukció

Az $y(t)$ jelet $y_D[k]$ mintái alapján szakaszonként lineáris $\hat{y}_1(t)$ jellel rekonstruáló jel definíciója

$$\hat{y}_1(t) = y_D[k] + \frac{y_D[k] - y_D[k-1]}{T}(t - kT), \quad kT \leq t < kT + T, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (4.4-42)$$

A rekonstruált jel T hosszúságú intervallumonként lineárisan változik, értéke a kT időpontban megegyezik a minta ottani értékével, meredeksége egyenlő az $y(t)$ átlagos meredekségével az előző T hosszúságú intervallumban. Az eljárás elsőrendű extrapoláció. A rekonstrukció hibamentes a $kT + 0$ mintavételi időpontokban. Az eljárást a 9. ábra alsó sorának bal oldali részébrára szemlélteti. A jelrekonstrukció hibája kicsi azokban az intervallumokban, ahol az eredeti jel folytonos és nagyjából lineárisan változik.

A lineáris extrapoláció jobb a nulladrendű extrapolációnál azokban a szakaszokban, ahol a jel monoton nő vagy csökken, de rosszabb a maximumok és a minimumok környezetében. Ebből következik, hogy ez a jelrekonstrukció nem tekinthető az előző fejlettebb változatának, viszont kivitele nyilván bonyolultabb, ezért a gyakorlatban ritkán használják.

Az *elsőrendű tartó* az a rendszer, amelynek $u(t) = y_*(t)$ gerjesztéshez tartozó válasza a fenti $\hat{y}_1(t)$. E rendszer impulzusválasza (l. az előző megfontolásainkat)

$$h_1(t) = \left\{ \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T) \right\} \frac{1 + (t/T)}{T_0} + \left\{ \varepsilon(t - T) - \varepsilon(t - 2T) \right\} \frac{1 - (t/T)}{T_0}. \quad (4.4-43)$$

A Laplace-transzformált számításával előállíthatjuk az átviteli függvényt és abból az átviteli karakterisztikát is:

$$H_1(s) = \frac{1 + sT}{T_0 T s^2} \left[1 - e^{-sT} \right]^2, \quad (4.4-44)$$

$$H_1(j\omega) = \frac{T}{T_0} \left[1 + j\omega T \right] \left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right]^2 e^{-j\omega T}. \quad (4.4-45)$$

Sem az átviteli függvény, sem az átviteli karakterisztika nem racionális, hálózati realizálása integrátorok és erősítők összekapcsolásával nem lehetséges.

Jelrekonstrukció aluláteresztő szűrővel

A jel rekonstrukcióját mintáiból közelítőleg elvégezhetjük aluláteresztő szűrővel is. Tudjuk ugyanis, hogy a sávkorlátozott jelet (alkalmas periódusidővel vett) mintáiból egyértelműen rekonstruálni tudjuk, spektrumát a mintavételezett jel spektrumából

(alkalmas sáv szélességű) aluláteresztő szűrővel előállíthatjuk. Ez következik az 4.4-2.2. pontban tárgyaltakból, és jól látható a 4.4-7a és b ábrából.

Az áttekinthetőség érdekében a lineáris fázisú ideális aluláteresztővel történő jelrekonstrukciót vizsgálatára szorítkozunk. Ez a rendszer ismeretesen nem kauzális, ezért ténylegesen ennek egy kauzális és stabilis közelítő realizációját célszerű alkalmazni (például maximálisan lapos aluláteresztőt a 9. ábra második sorának jobb oldali részébrája).

A lineáris fázisú *ideális aluláteresztő* szűrő átviteli karakterisztikája

$$H_{\Omega}(j\omega) = \begin{cases} \frac{T}{T_0} e^{-j\omega\tau}, & |\omega| < \Omega, \quad \tau \geq 0, \\ 0, & |\omega| > \Omega. \end{cases} \quad (4.4-46)$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy $\Omega = \pi/T \equiv \omega_s/2$, ahol Ω a szűrő sáv szélessége és T a mintavételi periódusidő.

E szűrőnek az $y_*(t)$ gerjesztéshez tartozó $y_{\Omega}(t)$ válasza inverz Fourier-transzformációval

$$\begin{aligned} y_{\Omega}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\Omega}(j\omega) Y_*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{T}{T_0} e^{-j\omega\tau} \left\{ T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT) e^{-jk\omega T} \right\} e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega(t-\tau-kT)} d\omega. \end{aligned}$$

Az utolsó integrál nehézség nélkül számítható. Némi rendezés után kapjuk az aluláteresztő válaszána kifejezését:

$$y_{\Omega}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT) \frac{\sin \pi \left(\frac{t-\tau}{T} - k \right)}{\pi \left(\frac{t-\tau}{T} - k \right)}. \quad (4.4-47)$$

A mintavételi tételből következik (3.2-1.5. pont), hogy ha az $y(t)$ jel Ω sávkorlátú sávkorlátozott közelítését $y_{\Omega}(t)$ jelöli, akkor a mintavételezett jelből előállított ideális *sávkorlátozott rekonstruált jel*

$$\hat{y}_{\Omega}(t) = y_{\Omega}(t-\tau). \quad (4.4-48)$$

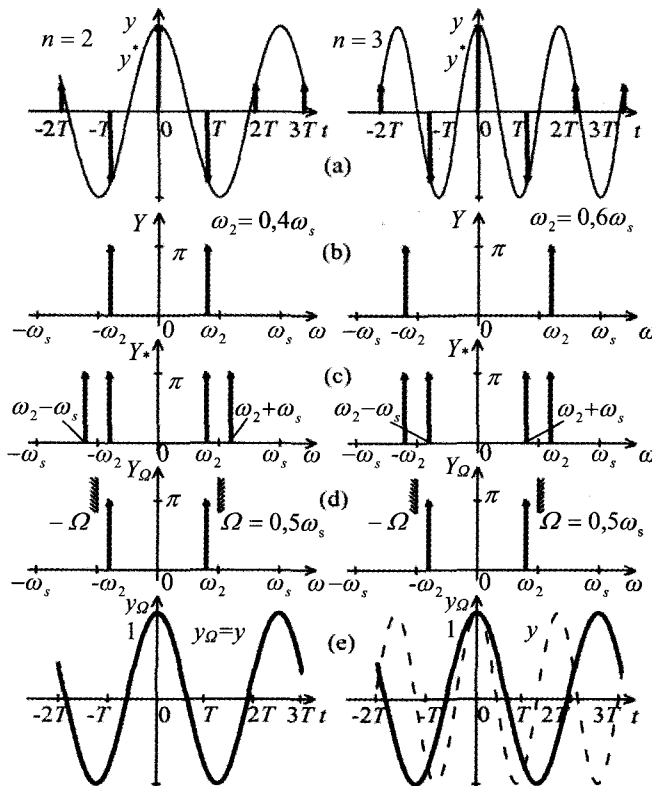
Ezek szerint $\hat{y}_{\Omega}(t)$ az $y(t-\tau)$ késleltetett eredeti jel sávkorlátozott közelítése. Ebből következik, hogy $\hat{y}_{\Omega}(kT) = y(kT-\tau)$, vagyis a jelrekonstrukció (a τ késleltetéstől eltekintve) hibamentes a mintavételi időpontokban.

Ha az eredeti $y(t)$ jel sávkorlátozott Ω_y sávkorlattal és a mintavételi periódusidőt úgy választjuk, hogy $T < \pi/\Omega_y$ (vagyis $\omega_s > 2\Omega_y$) teljesüljön, akkor $\hat{y}_{\Omega}(t) = y(t-\tau)$, vagyis ekkor az ideális aluláteresztővel végzett jelrekonstrukció tökéletes lenne.

Vizsgáljuk meg mi történik, ha egy szinuszos jelből veszünk mintákat, majd egy aluláteresztővel szűrjük a mintavételezett jelet. Legyen $\omega_1 = 0,4 \omega_s < \omega_s/2$ és $\omega_2 = 0,6 \omega_s > \omega_s/2$, vagyis

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos 0,4 \omega_s t, & Y_1(j\omega) &= \pi \{ \delta(\omega - 0,4 \omega_s) + \delta(\omega + 0,4 \omega_s) \}; \\ y_2(t) &= \cos 0,6 \omega_s t, & Y_2(j\omega) &= \pi \{ \delta(\omega - 0,6 \omega_s) + \delta(\omega + 0,6 \omega_s) \}. \end{aligned}$$

Mindkét jel sávkorlátozott: $\Omega_{y_1} = 0,4 \omega_s < \omega_s / 2$, $\Omega_{y_2} = 0,6 \omega_s > \omega_s / 2$. A mintavételi tétel értelmében $y_1(t)$ rekonstruálható $y_1^*(t)$ ismeretében, de $y_2(t)$ nem rekonstruálható $y_2^*(t)$ ismeretében. A 10a ábrán láthatóak az eredeti jelek és mintavételezett jelük. A 10b ábra az eredeti jelek, a 10c ábra a mintavételezett jelek spektrumát mutatja. Az utóbbiak az előbbiekből a (25) értelmében eltolással és összeadással állíthatók elő. E jelek párosak, spektrumuk valós értékű. A 10d ábrán feltüntettük az ideális aluláteresztő $\Omega = \omega_s / 2$ sávszélességét és kimeneti jelének spektrumát. Az egyszerűség kedvéért a $\tau = 0$ esetre szorítottunk, ezért a szűrt jel spektruma is valós, a jel páros. A 10d ábrából látható, hogy a szűrt jel egyetlen frekvenciakomponenset tartalmaz, és pedig mindkét jelre a körfrekvencia $0,4 \omega_s$. Ennek következtében mindkét szűrt jel megegyezik, és pedig $\hat{y}_{1\Omega}(t) = \hat{y}_{2\Omega}(t) = \cos 0,4 \omega_s t$. Ez azt jelenti, hogy $\hat{y}_{1\Omega}(t) = y_1(t)$, de $\hat{y}_{2\Omega}(t)$ teljesen más mint a rekonstruálandó $y_2(t)$ jel.



4.4-10. ábra Mintavételezett szinuszos jelek rekonstrukciója ideális aluláteresztővel: csak a kellően kis frekvenciájú jel rekonstruálható hibamentesen

A 10. ábrán követhető általános megállapításunk egy egyszerű esetre: az ideális aluláteresztő torzítatlanul átenged minden olyan szinuszos jelet, amelynek frekvenciája kisebb a mintavételi frekvencia felénél, minden ilyen frekvenciakomponens lineáris fázis-karakterisztika esetén ugyanannyi idővel késik. Ha tehát a jel csak ilyen frekvenciakomponenseket tartalmaz (tehát sávkorlátozott), akkor a lineáris fázisú ideális aluláteresztő képes a jelet a mintáiból, vagy a mintavételezett jeléből rekonstruálni. Ha a

jel az előírtnál nagyobb frekvenciakomponenseket is tartalmaz, akkor a jelrekonstrukció nem lehet hibamentes.

Mint korábban beláttuk: az ideális aluláteresztő nem kauzális rendszer, ezért nem valószínűsíthető meg. Feladatunk ezért egy olyan aluláteresztő szűrő tervezése, amelynek racionális az átviteli függvénye (4.2-3.6. és 7. pont). Egy realizált aluláteresztő még sávkorlátozott jelet sem tud mintáiból hibamentesen realizálni részben az amplitúdó-, részben a fázis-karakterisztika nem ideális volta miatt. Az alap gondolat mindazonáltal hasznos: egy megfelelő *aluláteresztő* felhasználásával a jel közelítőleg rekonstruálható a mintáiból, ha fázis-karakterisztikája az áteresztő tartományban - ahol az amplitúdó-karakterisztika nagyjából állandó - közelítőleg lineáris, vagyis futási idő karakterisztikája közelítőleg állandó. Az ω_s mintavételi körfrekvenciát legalább kétszer akkora kell választani, mint amekkora a rekonstruálandó jel sáv szélessége. Az aluláteresztő sáv szélességének legalább akkora kell lennie, mint az $\omega_s/2$ körfrekvenciának. A jelrekonstrukció pontossága a sáv szélességek értelmezésén is múlik.

A $\hat{H}_\Omega(s)$ átviteli függvény vagy a $\hat{H}_\Omega(j\omega)$ átviteli karakterisztika megválasztása után számíthatjuk a rendszer $\hat{h}_\Omega(t)$ impulzusválaszát is, amely belépő jellegű. A rekonstruált jel kifejezése a különböző tartományokban belépő $y(t)$ jelre szorítkozva

$$\begin{aligned} \hat{Y}(s) &= \hat{H}_\Omega(s) Y_*(s); \\ \hat{Y}(j\omega) &= \hat{H}_\Omega(j\omega) Y_*(j\omega); \\ \hat{y}_\Omega(t) &= T_0 \left\{ y[k] \hat{h}_\Omega(t) + y[k-1] \hat{h}_\Omega(t-T) + y[k-2] \hat{h}_\Omega(t-2T) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.4-49)$$

Szükség van még egy (T/T_0) erősítésre a közelítő egyenlőség (nem csak az arányosság) biztosítására. Természetesen más erősítés is alkalmazható.

A módszerek összehasonlítása

A mintavételezett jelet az eredeti jelből közelítőleg szűréssel rekonstruálhatjuk. Az előzőekben három szűrőt tárgyaltunk: a nulladrendű tartót, az elsőrendű tartót és a lineáris fázisú ideális aluláteresztőt. A tényleges kivételnél még approximációs és realizációs feladatokat is meg kell oldani, de ezeket nem részletezzük.

A két tartó által rekonstruált jel nem folytonos (még ha a rekonstruálandó jel folytonos is), a racionális átviteli függvényű aluláteresztő által rekonstruált jel folytonos (még ha a rekonstruálandó jel nem folytonos is, de korlátos).

A tartók által rekonstruált jel a mintavételi időpontokban pontos, a racionális átviteli függvényű aluláteresztő által rekonstruált jel nem bír ezzel a tulajdonsággal.

Az időtartományban már nehéz további összehasonlítást tenni a három módszer között. A frekvenciatartománybeli vizsgálat alapján azt mondhatjuk, hogy a szűrő annál jobb, minél jobban közelíti a lineáris fázisú ideális aluláteresztőt. A 11. ábrán láthatjuk a következő szűrők amplitúdó-karakterisztikáját:

K_Ω : ideális aluláteresztő

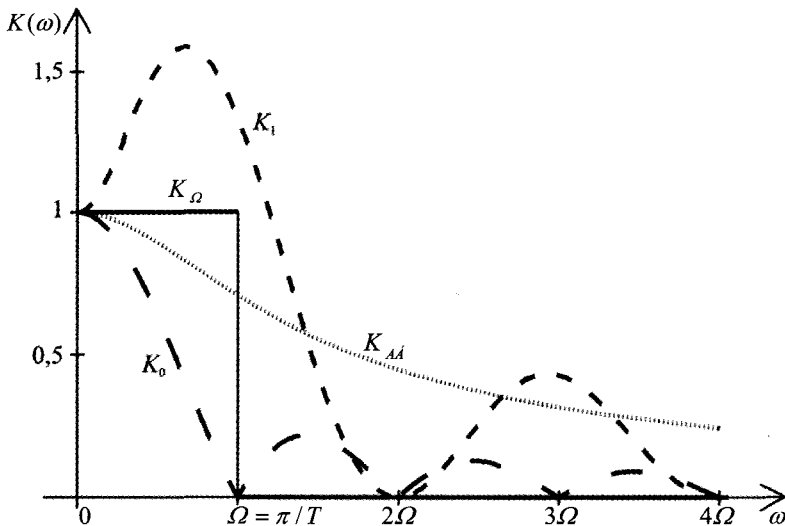
K_0 : nulladrendű tartó

K_1 : elsőrendű tartó

$K_{\text{AÁ}}$: aluláteresztő (maximális laposságú, $n=3$, $\omega_b = \Omega$, $\varepsilon = 0,5$; vö. 4.2-3.6. pont).

Az áteresztőtartományban az aluláteresztő tekinthető legjobb közelítésnek és az elsőrendű tartó a leggyengébbnek, a zárótartományban a sorrend megfordul. Nagyobb

rendszerű szűrővel a zárótartománybeli viselkedés javítható. Nem foglalkozunk a fáziskarakterisztikák (vagy a futási idő karakterisztikák) összehasonlításával.



4.4-11. ábra Különböző jelrekonstruáló szűrők amplitúdó-karakterisztikája

Példa Tekintsük a következő mintavételezendő, majd rekonstruálandó jelet:

$$y(t) = \varepsilon(t) \alpha t e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

A T periódusidővel mintavételezett jel

$$y_s(t) = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha T k e^{-\alpha T k} \delta(t - kT) = \alpha T T_0 \sum_{k=0}^{\infty} k (e^{-\alpha T})^k \delta(t - kT).$$

Az eredeti jel spektruma és amplitúdó-spektruma

$$Y(j\omega) = \frac{\alpha}{(\alpha + j\omega)^2}, \quad |Y(j\omega)| = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Válasszunk $T = 0,3/\alpha$ mintavételi periódusidőt ($\omega_s = 20\pi\alpha/3 \approx 20\alpha$). Ez akkor lenne lehetővé ideális jelrekonstrukciót, ha a jel $\omega_s/2 = 10\pi\alpha/3 \approx 10\alpha$ sávkorláttal sávkorlátozott lenne. Látható, hogy $|Y(j\omega)| < 0,01 |Y(j\omega)|_{\max}$, ha $|\omega| > \omega_s/2$, ezért választásunk elfogadható. A mintavétel $T_0 \ll T$ hosszát nem rögzítjük.

A korábban már látott 9. ábra éppen ehhez a jelhez és mintavételi periódusidőhöz tartozik. Aluláteresztőként egy maximálisan lapos harmadrendű szűrőt választottunk (a 4.2-3.7. pont példája). Ennek rendszerjellemező függvényei

$$\hat{H}_\Omega(s) = \frac{\omega_0^3}{(s + \omega_0)(s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2)},$$

$$\hat{K}_\Omega(\omega) = \frac{\omega_0^3}{\sqrt{\omega_0^6 + \omega^6}},$$

$$\hat{h}_{\omega}(t) = \omega_0 \varepsilon(t) \left\{ e^{-\omega_0 t} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\omega_0 t/2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 t + \frac{\pi}{6} \right) \right\}.$$

Az ω_0 körfrekvencia egy szabad paraméter, amelynek hatását az amplitúdó-karakterisztika jól mutatja. Alább megadjuk ennek értékét két jellegzetes frekvencián az ω_0 három választott értékére:

$\omega_0 =$	10α	12α	14α
$\hat{K}_{\omega}(0,5\omega_s) =$	0,6567	0,8329	0,9225
$\hat{K}_{\omega}(\omega_s) =$	0,1082	0,1848	0,2862

Az $\omega_0 = 10\alpha$ választás nem megfelelő áteresztőtartománybeli viselkedést eredményez, az $\omega_0 = 14\alpha$ választással pedig a zárótartománybeli viselkedés nem megfelelő, ezért az $\omega_0 = 12\alpha$ látszik $n=3$ esetén optimálisához közeli választásnak. Erre az esetre vonatkozik a 9. és a 11. ábra (1. előbb).

Mint azt előre is sejtettük, a harmadrendű aluláteresztő nem biztosít jó jelrekonstrukciót, azt csak az egyszerűség kedvéért választottuk. #

4.4-2.F. Feladatok

F-1. Határozza meg az $x(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$ jelhez tartozó mintavételezett jelet és annak spektrumát!

F-2. Adja meg az előző feladatban szereplő spektrum legegyszerűbb közelítését az eredeti jel spektrumának ismeretében a (25) alapján! Hasonlítsa össze a pontos és a közelítő értéket az $\omega_0 = 0$ és az $\omega_1 = \pi/T$ körfrekvencián! Adjon az eltérésre közelítő kifejezést annak figyelembe vételével, hogy αT kis érték!

***F-3.** Igazolja általánosan a (25) érvényességét az 1. feladatban szereplő jelre!

(Útmutatás. Használja fel az $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{\pi}{2z} \frac{1}{\operatorname{th} \pi z} - \frac{1}{2z^2}$ azonosságot!)

F-4. Ismert egy belépő jel $X(s)$ Laplace-transzformáltja.

Adjon kifejezést a mintavételezett jel Laplace-transzformáltjára az időfüggvények előállításánál nélkül!

F-5. Egy $y(t) = A \varepsilon(t)$ időfüggvényű FI jelet mintavételezünk, majd nulladrendű tartóval rekonstruálunk.

Igaz-e, illetve milyen feltételek mellett igaz, hogy a rekonstruált jel megegyezik az eredetivel?

F-6. Egy $y(t) = B \varepsilon(t)t$ időfüggvényű jelet mintavételezünk, majd elsőrendű tartóval rekonstruálunk.

Igaz-e, hogy a rekonstruált jel megegyezik az eredetivel?

***F-7.** Adjon meg egy olyan jelet, amely mintavételezés után elsőrendű tartóval hibamentesen rekonstruálható!

4.4-2.M. Megoldások

M-1. Az $a = e^{-\alpha T} < 1$ jelölés bevezetésével

$$x_*(t) = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT), \quad X_*(j\omega) = \frac{T_0}{1 - a e^{-j\omega T}}.$$

M-2. Tudjuk, hogy

$$X(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}; \quad X(j0) = \frac{1}{\alpha}, \quad X\left(j\frac{\pi}{T}\right) = \frac{1}{\alpha + j\pi/T}, \quad \frac{1}{2} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{j\omega X(j\omega)\} = \frac{1}{2}.$$

Ha csak egyetlen tagot veszünk figyelembe, akkor a közelítő alak

$$X_{*1}(j\omega) = \frac{T_0}{T} X(j\omega) = \frac{T_0}{\alpha T + j\omega T}, \quad X_{*1}(j0) = \frac{T_0}{\alpha T}, \quad X_{*1}\left(j\frac{\pi}{T}\right) = \frac{T_0}{\alpha T + j\pi} \approx \frac{T_0}{\alpha T}.$$

Ha még a járulékos 1/2 tagot is figyelembe vesszük, akkor a közelítő alak

$$X_{*2}(j\omega) = \frac{T_0}{T} X(j\omega) + \frac{T_0}{2} = \frac{T_0}{2} \frac{2 + \alpha T + j\omega T}{\alpha T + j\omega T},$$

$$X_{*2}(j0) = \frac{T_0}{2} \frac{2 + \alpha T}{\alpha T} \approx \frac{T_0}{\alpha T}, \quad X_{*2}\left(j\frac{\pi}{T}\right) = \frac{T_0}{2} \frac{2 + \alpha T + j\pi}{\alpha T + j\pi} \approx \frac{T_0}{2}.$$

A pontos értékek az előző feladat szerint

$$X_*(j0) = \frac{T_0}{1 - e^{-\alpha T}} \approx \frac{T_0}{\alpha T}, \quad X_*\left(j\frac{\pi}{T}\right) = \frac{T_0}{1 + e^{-\alpha T}} \approx \frac{T_0}{2}.$$

Kis frekvenciákon az additív tag nem játszik jelentős szerepet, az $\omega = \omega_s/2$ környezetében azonban már nem hagyható figyelmen kívül. Az $\omega_s/2 < \omega < \omega_s$ intervallumban már az első eltolt tag jelentősebb, de ennek nincs gyakorlati jelentősége, hiszen itt a valós mintavételezett jel spektrumát nem is kell előállítanunk.

***M-3.** Esetünkben $z = (\alpha T + j\omega T)/2\pi$ helyettesítéssel és némi elemi átalakítással adódik a mintavételezett jel spektruma. A jel ugrásával arányos tagot figyelembe kell venni!

M-4. Ha $x(t)$ legfeljebb a $t = 0$ helyen szakadásos, akkor a (25) mintájára

$$X_*(s) = \frac{T_0}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - jn\omega_s) + \frac{T_0}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} \{s X(s)\}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}.$$

M-5. Igen, éspedig a mintavételi periódusidő megválasztásától függetlenül. Ez annak következménye, hogy a mintákat $y(kT + 0)$ alakban értelmeztük.

M-6. Általánosan a két jel nem egyezik meg, mert a $0 < t < T$ intervallumban a rekonstruált $y_1(t) = 0$. Ezen intervallumon kívül $y_1(t)$ és $y(t)$ megegyezik.

***M-7.** Csak az intervallumonként azonos meredekségű, vagyis az

$$y(t) = A[t - kT] + B_k, \quad kT < t < kT + T$$

nem belépő és általában nem folytonos jel rekonstruálható hibamentesen elsőrendű tartóval. Ilyen jel a gyakorlatban nem fordul elő.

ML. A MATLAB néhány alkalmazása rendszeranalízisre

A MATLAB egy általános célú matematikai programcsomag, amely jól használható rendszeranalízisre is. A MATLAB egyes verziói némileg eltérőek. A következő rövid ismertetés keretében feltételezzük, hogy a „Control System Toolbox” szolgáltatásai rendelkezésre állnak. Más programcsomagok (például az OCTAVE) is nyújtnak hasonló szolgáltatásokat.

Feltételezzük, hogy az Olvasó ismeri a MATLAB használatának alapvető szabályait, habár a legtöbb rendszeranalízis-feladat megoldásához ezekre alig van szükség. Az alább megadott módon kapott eredményekből a MATLAB felhasználásával sok további, a rendszeranalízis szempontjából fontos következtetésre lehet jutni.

Az ismertetés során a beírandó MATLAB utasításokat **vastag betűkkel** írjuk, hogy a magyarázatoktól jól elkülönüljenek.

Az összefoglalás végén megadott néhány példát egyszerűnek választottuk, hogy az Olvasó az eredményt papír-ceruza módszerrel is ellenőrizhesse.

A továbbiakban a *rendszer* lineáris, invariáns, kauzális, egy-gerjesztésű, egy-válaszú (SISO) rendszert jelent. A diszkrét idejű (DI) rendszerre további megkötés nincs, a folytonos idejű (FI) rendszerről feltételezzük, hogy differenciális is.

A rendszer megadására, jellemzőinek meghatározására, adott gerjesztéshez tartozó válaszána számítására a MATLAB sok lehetőséget kínál. Az áttekinthetőség érdekében ezeknek csak egy részét ismertetjük. További lehetőségeket az Olvasó maga is értelmezhet vagy valamilyen **help** segítségével kaphat felvilágosítást.

A MATLAB egyes verziói szimbolikus műveletek elvégzésére és jelfolyam hálózatok analízisére is alkalmasak. A továbbiakban sem ezekre, sem sok más általánosítási lehetőségre (például sok-gerjesztésű, sok-válaszú rendszerek analízise) nem térünk ki. A lineáris rendszereket illetően a **help ltimodels** és más **help** felhasználásával kaphatunk felvilágosítást.

E függelék szakaszaira és pontjaira ML jelzéssel (például ML-1. vagy ML-1.2) hivatkozunk.

ML-1. A rendszer megadása

ML-1.1. Általános elvek

Lineáris, invariáns, kauzális DI és differenciális FI rendszer három módon adható meg úgy, hogy abból a rendszerre vonatkozó sok információ (például valamelyik rendszerjellemző függvény) vagy a másik két leírás előállítható legyen. Ezek az *állapotváltozós leírás* (**ss** „state space”), az *átviteli függvény* két polinom hányadosaként (**tr** „transfer function”) vagy pólusaival és zérusaival (**zpk** „zero-pole-gain”).

Célszerű a rendszerre egy vagy több betűből és számból álló *azonosítót* választani. A továbbiakban általában az **rsz** azonosítót használjuk vagy az **rd** illetve az **rc** azonosítót

a DI illetve a FI jelleg hangsúlyozására. Egyes feladatok megoldhatók azonosító választása nélkül is, de ezt nem tárgyaljuk.

A rendszer impulzusválasza és átviteli karakterisztikája a három alak bármelyikéből meghatározható. Jóval nehezebbek a fordított feladatok. Ezekkel nem foglalkozunk.

ML-1.2. Az állapotváltozós leírás

A DI és a FI rendszer *állapotváltozós leírásának* normálalakja

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}^T \mathbf{x} + Du.$$

Az állapotváltozós leírás MATLAB megadása (1. példa)

$$\text{DI: rd=ss(A,B,C,D,1)} \quad \text{FI: rc=ss(A,B,C,D)}$$

Az **A,B,C,D** mátrixok beírhatók az **ss** utasításba, de megadhatjuk előre, és ekkor csak azonosítójukat kell beírni az utasításba.

A **ENTER** után megjelennek az állapotváltozós leírásban szereplő mátrixok könnyen azonosítható alakban.

ML-1.3. Az átviteli függvény

A DI és a FI rendszer racionális *átviteli függvénye* két polinom hányadosa

$$\text{DI: } H(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}, \quad a_0 \neq 0, m \leq n;$$

$$\text{FI: } H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \quad a_0 \neq 0, m \leq n.$$

Szokásos az $a_0 = 1$ választás.

A két polinomot az együtthatókból alkotott **a** és **b** vektorokkal adjuk meg:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a0} \ \mathbf{a1} \ \dots \ \mathbf{an}]; \quad \mathbf{b} = [\mathbf{b0} \ \mathbf{b1} \ \dots \ \mathbf{bm}];$$

A nulla értékű együtthatókat is be kell írni a megfelelő helyre. A **b** vektor tekinthető $n+1$ eleműnek is, amelynek első néhány eleme esetleg nulla.

Az átviteli függvény MATLAB megadása (2. példa)

$$\text{DI: rd=tf(b,a,1)}$$

$$\text{FI: rc=tf(b,a)}$$

Az **a,b** vektorok beírhatók a **tf** utasításba, de megadhatók előre, és ekkor csak azonosítójukat kell beírni az utasításba.

A **ENTER** után megjelenik az átviteli függvény képlete.

ML-1.4. Az átviteli függvény gyöktényező alakja

A DI és a FI rendszer racionális *átviteli függvénye* gyöktényező alakban

$$DI: H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}, \quad m \leq n;$$

$$FI: H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}, \quad m \leq n.$$

A p_i pólusokat és a z_i zérusokat egy-egy vektorba foglalva adjuk meg:

$$p=[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]; \quad z=[z_1 \ z_2 \ \dots \ z_m];$$

Kétszeres (többszörös) pólust vagy zérust kétszer (többször) kell megadni.

Az átviteli függvény MATLAB megadása (3. példa)

$$DI: rd=zpk(z, p, K, 1) \quad FI: rc=zpk(z, p, K)$$

Az z , p vektorok és a K szám beírható a zpk utasításba, de megadhatók előre, és ekkor elegendő azonosítójukat beírni az utasításba.

A komplex pólus vagy zérus képzetes része (például $j4$) a következő módok bármelyikén megadható: $4j$ $4*j$ $j*4$ $4i$ $4*i$ $i*4$. A MATLAB a képzetes részt **4.0000i** alakban adja meg. Ha a képzetes rész nem szám, hanem egy jel (például b), akkor a $*$ nem hagyható el.

A **ENTER** után megjelenik az átviteli függvény gyöktényező alakjának képlete. A konjugált komplex párok szorzata egy valós együtthatós másodfokú kifejezést eredményez. Többszörös pólusok és zérusok a gyöktényező hatványaként jelentkeznek.

ML-1.5. A rendszert jellemző adatok

Bármelyik utasítással (**ss**, **tf**, **zpk**) adtuk meg a például **rsz** azonosítójú rendszert, annak jellemző adatai (az állapotváltozós leírás mátrixai, az átviteli függvény számlálója és nevezője vagy zérusai és pólusai) a megfelelő

$$[A,B,C,D]=ssdata(rsz, 'v')$$

$$[b,a]=tfdata(rsz, 'v')$$

$$[z,p,K]=zpkdata(rsz, 'v')$$

utasítás és az **ENTER** hatására megjelennek. Az így adódó vektorok és mátrixok a továbbiakban definiált változókként kezelhetők.

Az átviteli függvény pólusainak p vektora és zérusainak z vektora a

$$p=pole(rsz), \quad z=zero(rsz)$$

utasításokkal is meghatározhatók (4. példa). A komplex pólusok és zérusok **algebrai** alakban adódnak. Az abszolút értékek és a szögek (radiánban vagy fokban) az

$$rp=abs(p), \quad \text{fip}=angle(p), \quad \text{fipfok}=angle(p)*180/\pi$$

utasításokkal kapjuk. Értelem szerinti a zérusok kezelése.

A rendszer átviteli függvényének pólus-zérus ábrája a

pzmap(rsz)

utasítással állítható elő.

A rendszer állapotmátrixának sajátértékei az **A** mátrix ismeretében az **eig(A)** vagy **la=eig(A)** utasítással adódnak. Utóbbi esetben **la** vektorként kezelhető.

ML-1.6. Rendszerleírás átalakítása

Az **ss**, **tf**, **zpk** utasítások bármelyikével megadott **rsz** azonosítójú rendszer egy másik leírásának képlete a

ss(rsz) tf(rsz) zpk(rsz)

utasítások egyikével **ENTER** hatására adódik. Ennek az alaknak is adhatunk azonosítót, például **rsz1=ss(rsz)**.

Mivel egy rendszer állapotváltozós leírása nem egyértelmű, ezért ismételt átalakításokkal rendszerint nem ugyanaz az állapotváltozós leírás adódik.

Mivel a rendszerre vonatkozó információk bármelyik alakból előállíthatók, ezért erre a szolgáltatásra ritkán van szükség.

A rendszerleírás *egyszerűsítése* egy olyan rendszer-leírást eredményez, amelyben nem szerepelnek a gerjesztés-válasz kapcsolatot nem befolyásoló állapotváltozók vagy megtörtént az átviteli függvény számlálójának és nevezőjének a közös gyöktényezővel történt egyszerűsítése. Ez a **minreal** („minimal realization”) utasítással végezhető el. Ha **rsz** egy valamilyen módon (**ss**, **tf**, **zpk**) értelmezett rendszer, akkor

rm=minreal(rsz)

minimális számú állapotváltozót vagy minimális fokszámú átviteli függvényű, az előzővel megegyező gerjesztés-válasz kapcsolatú, **rm** azonosítójú rendszert értelmez. Az **ENTER** hatására annak az alaknak a képlete jelenik meg, amelyben **rsz** meg lett adva.

A minimalizált állapotváltozós leírás függhet attól, hogy **rsz** melyik leírásával lett megadva.

A kerekítési hibán belüli egyenlőség 10^{-8} nagyságrendű hibával értelmezett. Értelmezhető ennél nagyobb relatív hibahatár is.

A rendszerleírás egyszerűsítése csak akkor megengedett, ha ennek hatására nem tűnnek el instabilitást jelentő sajátértékek vagy pólusok. Ellenkező esetben célszerű az objektumot jobb modellel leírni.

ML-1.7. Diszkrét idejű szimuláció

Az **rc** azonosítójú FI rendszerhez a **c2d** („continuous to discrete”) utasítás egy valamilyen elv szerint szimuláló DI rendszer rendel.

A $H_c(s)$ átviteli függvényhez T mintavételi periódusidővel a

$$H_D(z) = H_C(s), \quad s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

bilineáris transzformációval $H_D(z)$ átviteli függvényt rendelő **rd** azonosítójú rendszer a

$$\mathbf{rd} = \mathbf{c2d}(\mathbf{rc}, T, \text{'tustin'})$$

utasítással állítható elő. Ha **rc** állapotváltozós leírásával értelmezett, akkor az utasítás olyan DI állapotváltozós leírást eredményez, amelyhez a fenti átviteli függvényt tartozik (tehát nem a FI állapotváltozós leírást szimulálja valamilyen módszerrel).

Más szimulációs eljárásokat a **help c2d** ad meg.

ML-1.P. Példák

1. példa Állapotváltozós leírás megadása

A DI illetve egy FI rendszer állapotváltozós leírásának közös alakja

$$x_1' = -0,1x_1 - 0,25x_2 + 2u, \quad x_2' = 0,8x_1 - 0,5x_2 + 4u; \quad y = 0,2x_1 + 0,4x_2.$$

A DI illetve a FI rendszer MATLAB megadásának egyik módszere

$$\text{DI: } \mathbf{rd1} = \mathbf{ss}([-0.1 \ -0.25; \ 0.8 \ -0.5], [2; \ 4], [0.2 \ 0.4], 0, 1)$$

$$\text{FI: } \mathbf{rc1} = \mathbf{ss}([-0.1 \ -0.25; \ 0.8 \ -0.5], [2; \ 4], [0.2 \ 0.4], 0)$$

A rendszerek megadásának egy másik módszere

$$\mathbf{A} = [-0.1 \ -0.25; \ 0.8 \ -0.5]; \quad \mathbf{B} = [2; \ 4]; \quad \mathbf{C} = [0.2 \ 0.4]; \quad \mathbf{D} = 0;$$

$$\text{DI: } \mathbf{rd2} = \mathbf{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, 1)$$

$$\text{FI: } \mathbf{rc2} = \mathbf{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$$

Az első alakban megadott rendszer mátrixainak értelmezése

$$\text{DI: } [\mathbf{Ad1}, \mathbf{Bd1}, \mathbf{Cd1}, \mathbf{Dd1}] = \mathbf{ssdata}(\mathbf{rd1}, \text{'v'})$$

$$\text{FI: } [\mathbf{Ac1}, \mathbf{Bc1}, \mathbf{Cc1}, \mathbf{Dc1}] = \mathbf{ssdata}(\mathbf{rc1}, \text{'v'})$$

A második módszerrel megadott **A**, **B**, **C**, **D** mátrixok adódnak.

A rendszermátrix sajátértékeit a

$$\text{DI: } \mathbf{lad} = \mathbf{eig}(\mathbf{rd1})$$

$$\text{FI: } \mathbf{laf} = \mathbf{eig}(\mathbf{rc1})$$

utasítással kapjuk. Ugyanezt adja az **eig(rd2)** illetve az **eig(rc2)** utasítás is. Ha **A** adott, akkor az **eig(A)** vagy a **la=eig(A)** utasítás is használható.

2. példa Átviteli függvény megadása polinomok hányadosaként
Diszkrét idejű illetve folytonos idejű rendszer átviteli függvénye

$$\text{DI: } H_D(z) = \frac{2z + 0,8}{z^2 + 0,6z + 0,25} \quad \text{FI: } H_C(s) = \frac{2s + 0,8}{s^2 + 0,6s + 0,25}$$

A rendszer megadásának egyik módszere

$$\text{DI: rd3=tf}([2, 0.8], [1 \ 0.6 \ 0.25], 1)$$

$$\text{FI: rc3=tf}([2, 0.8], [1 \ 0.6 \ 0.25])$$

A rendszer megadásának egy másik módszere

$$\mathbf{b}=[2, 0.8]; \mathbf{a}=[1 \ 0.6 \ 0.25];$$

$$\text{DI: rd4=tf}(\mathbf{b}, \mathbf{a}, 1) \quad \text{FI: rc4=tf}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

Az első alakban megadott rendszer számlálójának és nevezőjének értelmezése

$$\text{DI: [bd3, ad3]=tfdata(rd3, 'v')} \quad \text{FI: [bf3, af3]=tfdata(rc3, 'v')}$$

A második módszernél megadott \mathbf{b} és \mathbf{a} vektorok adódnak.

Az átviteli függvény pólusai és zérusai \mathbf{a}

$$\text{DI: pd=pole(rd3), zd=zero(rd3)} \quad \text{FI: pc=pole(rc3), zc=zero(rc3)}$$

utasítással állítható elő. A pólusok és a zérusok közvetlenül meghatározhatók a rendszer másféle (például állapotváltozós) leírásából is.

3. példa Átviteli függvény megadása gyöktényezős alakban

Diszkrét idejű illetve folytonos idejű rendszer átviteli függvényének egyetlen zérusa $z_1 = -0,4$, két pólusa $p_{1,2} = -0,3 \pm j0,4$, a kiemelt tényező $K = 2$, vagyis

$$\text{DI: } H_D(z) = 2 \frac{z + 0,4}{(z + 0,3 - j0,4)(z + 0,3 + j0,4)}$$

$$\text{FI: } H_C(s) = 2 \frac{s + 0,4}{(s + 0,3 - j0,4)(s + 0,3 + j0,4)}$$

A rendszer megadásának egyik módszere

$$\text{DI: rd5=zpk}(-0.4, [-0.3+j0.4, -0.3-j0.4], 1)$$

$$\text{FI: rc5=zpk}(-0.4, [-0.3+j0.4, -0.3-j0.4])$$

A rendszer megadásának egy másik módszere

$$\mathbf{z}=-0.4; \mathbf{p}=[-0.3+j0.4, -0.3-j0.4]; \mathbf{K}=2;$$

$$\text{DI: rd6=zpk}(\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{K}, 1)$$

$$\text{FI: rc6=zpk}(\mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{K})$$

Az **ENTER** hatására az átviteli függvény képletében nem a komplex gyöktényezők, hanem a szorzatok, vagyis egy másodfokú kifejezés adódik. A pólusokat vagy a zérusokat (például ellenőrzés céljából) a **pole(rd6)** vagy a **zero(rd6)** utasítással kaphatjuk.

4. példa Pólusok és zérusok meghatározása

Határozzuk meg a folytonos idejű rendszer átviteli függvényének pólusait, ha

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 0,25}.$$

Az 5.2. példa mintájára értelmezhetünk egy **rc** azonosítójú rendszert, majd alkalmazzuk a **p=pole(rc)** utasítást. Egy másik lehetőség

pole(tf([2 1], [1 1 0.25]) ENTER -0.5000 -0.5000

A nevezőnek $-0,5$ valóban kétszeres zérushelye. Az átviteli függvény azonban egyszerűsíthető $H(s) = 2/(s + 0,5)$ alakra, tehát a pólus csak egyszeres. Az átviteli függvény egyszerűsítése az ML-1.5. pontban leírt módon végezhető el (v.ö. 6. példa).

5. példa Rendszerleírás átalakítása

Az előző példákban vizsgált **rd1**, **rd2**, ..., **rd6** illetve **rc1**, **rc2**, ..., **rc6** azonosítójú rendszerek ekvivalensek abban az értelemben, hogy azonos gerjesztés-válasz kapcsolatú rendszereket írnak le, például impulzusválaszuk ugyanaz.

Az **rd1** megadása után az **rd7=tf(rd1)** illetve az **rd8=zpk(rd1)** utasítás az átviteli függvénynek azt az alakját adja, mint amelyet a 2. illetve a 3. példában megadtunk. Az **rd9=ss(rd7)** vagy az **rd10=ss(rd8)** utasítás azonban nem adja vissza az 1. példában megadott állapotváltozós leírást. Az utóbbiakból előállított átviteli függvény azonban megegyezik az **rd1** szerintivel.

Hasonló a helyzet a vizsgált hat FI rendszer különböző leírásainak kapcsolatával is.

***6. példa** Rendszer minimál reprezentációja

Két FI rendszer átviteli függvénye

$$H_a(s) = \frac{s + 0,6}{s^2 + 1,1s + 0,3}, \quad H_b(s) = \frac{1}{s + 0,5}.$$

Ha az együttthatók (esetünkben $0,6$ illetve $1,1$ és $0,3$) pontosnak tekinthetők, akkor a két átviteli függvény egyenlő, vagyis ekvivalens rendszereket ír le.

A két rendszer MATLAB megadása

ra=tf([1 0.6], [1 1.1 0.3]); rb=tf(2, [1 0.5]);

Az **[Aa, Ba, Ca, Da]=ssdatsa(ra, 'v')** utasítás egy másodrendű rendszer állapotváltozós leírásának mátrixait adja, míg az **[Ab, Bb, Cb, Db]=ssdatsa(rb, 'v')** utasítás egy elsőrendűt.

Az **rc=minreal(ra)** utasítással értelmezett rendszer az **rb** rendszerrel ekvivalens, a MATLAB a $H_b(s)$ átviteli függvényt szolgáltatja.

Az **ra1=ss(Aa, Ba, Ca, Da)** rendszerből az **rb1=minreal(ra1)** utasítás egy elsőrendűt, az **rb** és az **rc** rendszerrel ekvivalens rendszert ad. Ennek **Aa1, Ba1, Ca1, Da1** mátrixai az **rb** és **rc** rendszer mátrixaitól különbözhetnek.

Mivel mindegyik rendszer GV stabilis, ezért az egyszerűsítés elfogadható.

Ha viszont a két átviteli függvény

$$H_p(s) = \frac{s - 0,6}{s^2 - 1,1s + 0,3}, \quad H_b(s) = \frac{1}{s + 0,5},$$

akkor az **rq=minreal(rp)** utasítással értelmezett rendszer ekvivalens az **rb** rendszerrel. Az **rp** rendszer azonban csak akkor stabilis, ha az adatok pontosak, ezért az ekvivalencia kétséges. Az **impulse(rp)** ábrájából úgy tűnhet, hogy az impulzusválasz nullához tart, de

az **impulse(rp, 100)** ábrájából az derül ki, hogy az impulzusválasz $t = 90$ után növekedni kezd. Az **rp** impulzusválaszt különféle más módon (például különböző időlépésekkel) számítva lényegesen eltérő eredmények adódhatnak. A $H_p(s)$ átviteli függvényt a megadottnál pontosabban kell ismerni.

7. példa Diszkrét idejű szimuláció

Az első három példában valamelyik módon megadott **rc** azonosítójú FI rendszer diszkrét idejű szimulátorának **rcs** azonosítója $T = 0,1$ mintavételi periódusidővel a bilineáris transzformációval a

$$\mathbf{rcs} = \mathbf{c2d}(\mathbf{rc}, 0.1, 'tustin')$$

utasítással állítható elő. Ebből a szimulátor átviteli függvényét a **Hs=tf(rcs)** utasítással kaphatjuk meg. Az **abs(pole(rcs))** megmutatja, hogy a stabilis FI rendszer szimulátora is GV stabilis. A FI rendszernek és szimulátorának egyaránt két pólusa van, a szimuláció az egy zérus helyett kettőt ad (az egyik a $z = -1$ helyen).

ML-2. Impulzusválasz és ugrásválasz meghatározása

ML-2.1. Általános elvek

Az **ss**, **tf**, **zpk** utasítások bármelyikével értelmezett **rsz** azonosítójú DI illetve FI rendszer impulzusválaszának és ugrásválaszának ábrája vagy kijelölt időpontokban fellépő értékei a MATLAB felhasználásával többféleképpen is meghatározhatók. A FI rendszer impulzusválasztát és ugrásválasztát a MATLAB diszkrét idejű szimulációval határozza meg.

Ha a FI rendszer állapotváltozós leírásában $D \neq 0$, vagy az átviteli függvény számlálójának és nevezőjének fokszáma megegyezik (ezért $D \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) \neq 0$), akkor a MATLAB által szolgáltatott impulzusválaszhoz még $D \delta(t)$ hozzáadandó. A MATLAB a Dirac-impulzust közvetlenül nem tudja kezelni.

Ha olyan átviteli függvényt adunk meg, amelyre a számláló fokszáma nagyobb a nevező fokszámánál, akkor a MATLAB hibát jelez.

ML-2.2. Az impulzusválasz meghatározása

Az **rd** illetve **rc** azonosítójú rendszer impulzusválaszának ábrája például az

DI: **impulse(rd)**

FI: **impulse(rd)**

utasítással határozható meg. Ekkor a k_{\max} illetve a t_{\max} értékét a MATLAB választja meg.

A vizsgálandó maximális L illetve T időpont elő is írható:

DI: **impulse(rd, L)** FI: **impulse(rc, T)**

Az ábrából az értékek leolvashatók a **ginput**, **ENTER** utasítással. Ennek hatására fonálkereszt jelenik meg az ábrán, amelyet az egérrel a kívánt pontra vagy pontokra állítunk, majd kattintunk. **ENTER**, majd **ESC** után a képernyőn megjelennek a független és a függő változó vagy változók összetartozó értékei. Ez az eljárás más módon előállított ábrával is lehetséges.

Ez az utasítás a **DI** impulzusválaszt intervallumonként állandó (lépcsős) ábraként adja meg. Egy más módszert alább ismertetünk.

Az **rsz** azonosítójú rendszer impulzusválaszának numerikus értékei táblázatos formában a

DI: [h, k]= impulse(rd); [k, h]

FI: [h, t]= impulse(rc); [t, h]

utasítással határozhatók meg. Ekkor a figyelembe vett időpontokat a MATLAB választja meg.

Az impulzusválasz értékeit a $k = 0, 1, 2, \dots, L$ illetve a $t = 0, dt, 2 \cdot dt, \dots, L \cdot dt$ időpontokban a

DI: k=0:L; [h, k]= impulse(rd, k); [k, h]

FI: t=0:dt:L*dt; [h, t]= impulse(rc, t); [t, h]

utasításokkal számíthatjuk. A **FI** impulzusválaszt a MATLAB közelítőleg számítja. A **t** vektor másként is megadható (ML-3.2. pont).

Az impulzusválasz értékét a $k = p$ illetve a $p \cdot dt$ időpontban a **h(p+1)** adja (mivel a **h** vektor első eleme a $k = 0$ illetve a $t = 0$ időpontnak felel meg).

Az impulzusválasz ábráját (a **DI** esetre oszlop-diagram a célszerű) a választott pontokra a **h** meghatározása után a

DI: bar(k, rd, w) vagy bar(k, rd)

FI: plot(t, rc)

utasításra kapjuk. A **w** ($0 < w < 1$) az oszlopok szélességét adja, a **w** elhagyása $w = 0,8$ választást jelent.

Az időpontokat és az impulzusválasz értékeit táblázatos alakban rendszerint csak decimálva állítjuk elő. Legyen **m** (például **m=5**) az a természetes szám amellyel decimálni akarunk, akkor a **h** meghatározása után a $k = k_0, k_0 + m, k_0 + 2m, \dots, k_0 + L_1 m$ illetve a $t = k_0 dt, (k_0 + m)dt, (k_0 + 2m)dt, \dots, (k_0 + L_1 m)dt$ időpontokra

DI: km=k0 : m : L1*m; [km', h(km+1)]

FI: km=k0 : m : L1*m; [dt*km', h(tm+1)]

megadja a kijelölt időpontokban az impulzusválaszt. Rendszerint **k0=0**. Természetesen csak a $k_0 + L_1 \leq L$ feltételt kielégítő L_1 választható.

A decimálás elvégezhető a **decimate** utasítással is. Ezt nem részletezzük.

ML-2.3. Az ugrásválasz meghatározása

Az **rsz** azonosítójú rendszer ugrásválaszának ábráját és numerikus értékeit ugyanúgy határozhatjuk meg, mint az impulzusválaszét csak az **impulse** utasítás helyére a **step** utasítást kell írni.

A $D \neq 0$ esetben a FI ugrásválasz a $t = +0$ helyen nem nulla, de ez nem igényel külön kezelést, a MATLAB ezt adja meg (nem az ugrásválasz bal és jobb oldali határértékének számtani közepét).

ML-2.4. Rendszer-identifikáció

A DI rendszer impulzusválaszát meg tudjuk határozni a $k = 0, 1, \dots, L$ diszkrét időpontokban, ha ismerjük a gerjesztés és a válasz értékét ugyanezen időpontokban. A DI rendszer lehet egy FI rendszer diszkrét idejű szimulátora.

E rendszer-identifikációs eljárás MATLAB utasításai („deconvolution”)

$$\mathbf{u}=[\mathbf{u}[0] \ \mathbf{u}[1] \ \dots \ \mathbf{u}[L]]; \ \mathbf{y}=[\mathbf{y}[0] \ \mathbf{y}[1] \ \dots \ \mathbf{y}[L] \ \mathbf{zeros}(1, L)];$$

$$[\mathbf{h}]=\mathbf{deconv}(\mathbf{y}, \mathbf{u}); \ \mathbf{k}=0:L; \ [\mathbf{k}; \ \mathbf{h}]'$$

Adott k esetén $h[k]$ értékét $\mathbf{h}(k+1)$ adja.

Az impulzusválasz oszlop-diagramját a **bar(k, h, w)** utasítással kapjuk.

Ha $u[0] = 0$ és ezért $y[0] = 0$, akkor ezeket el kell hagyni az adatokból, vagyis csak L számú hasznos adat-párral rendelkezünk. Ekkor $h[k]$ csak $k = 0, 1, \dots, L-1$ ütemekre állítható elő. Ekkor a fenti utasításokban **zeros(1, L-1)** és **k=0:L-1** irándó.

Ugyanígy járhatunk el ha az impulzusválasz és a válasz ismeretében a gerjesztés értékeit akarjuk meghatározni.

ML-2.P. Példák

1. példa DI rendszer impulzusválasza

Határozzuk meg annak a DI rendszernek az impulzusválaszát, amelynek átviteli függvénye

$$H(z) = \frac{z}{z + 0,5}.$$

A rendszer azonosítója legyen

$$\mathbf{rd}=\mathbf{tf}([1 \ 0], [1 \ 0.5]);$$

Az impulzusválasz értékeit táblázatosan illetve lépcsős ábráját az

$$[\mathbf{h}, \mathbf{k}]=\mathbf{impulse}(\mathbf{rd}); \ [\mathbf{k}, \mathbf{h}] \ \text{illetve} \ \mathbf{impulse}(\mathbf{rd})$$

utasítások adják ez esetben $0 \leq k \leq 10$ értékeire.

Előírt maximális k értékre $0 \leq k \leq 15$ esetén a

$$\mathbf{k}=0:15; \ [\mathbf{h}, \mathbf{k}]=\mathbf{impulse}(\mathbf{rd}); \ [\mathbf{k}, \mathbf{h}] \ \text{illetve} \ \mathbf{k}=0:15; \ \mathbf{bar}(\mathbf{k}, \mathbf{h}, 0.2)$$

utasítást alkalmazhatjuk. Ennek egy részletét az

k=2:5; [k', h(k+1)] illetve **k=2:5; bar(k, h(k+1), 0.2)**

utasítások adják. A $h[2]$ értékét $h(3)$ adja meg.

Ha eleve csak egy intervallumot akarunk meghatározni, akkor a

k=2:5; [h, k]=impulse(rd); [k, h] illetve **k=2:5; bar(k, h, 0.2)**

utasítások alkalmazhatók.

2. példa FI rendszer impulzusválasza

Határozzuk meg annak a FI rendszernek az impulzusválaszát, amelynek átviteli függvénye

$$H(s) = \frac{1}{s + 0,5}.$$

A rendszer azonosítója legyen

rf=tf(1, [1 0.5]);

Az impulzusválasz értékeit táblázatosan illetve ábráját az

[h, t]=impulse(rf); [t, h] illetve **impulse(rf)**

utasítások adják ez esetben $0 \leq t < 12$ értékeire $dt \approx 0,11$ lépésközzel.

Előírt maximális t értékre és dt lépésközzel $0 \leq t \leq 1$, $dt = 0,05$ esetén a

t=0:0.05:1; [h, t]=impulse(rf, t); [t, h] illetve **t=0:0.05:1; plot(t,h)**

utasítást alkalmazhatjuk. A $h(0.5) = h(10 \cdot 0.05)$ értéket a **h(11)** adja. Az ábra egy részletét az

p=10:14; plot(p*0.05, h(p+1))

utasítás adja a $0,5 \leq t \leq 0,7$ intervallumban.

A MATLAB ugyanezt az impulzusválaszt adja a

$$H_1(s) = \frac{4s + 3}{s + 0,5} = 4 + \frac{1}{s + 0,5} \Rightarrow h_1(t) = 4\delta(t) + h(t)$$

átviteli függvényű, tehát például **rf1=tf([4 3], [1 0.5])** azonosítójú rendszerre is, tehát a Dirac-impulzus összetevőt „kézzel” kell számítani és figyelembe venni.

*3. példa DI rendszer identifikációja

Egy DI rendszer gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k] \{1 - 0,5^k\}$. Az erre adott válasz következő értékeit ismerjük: $y[0] = 0$, $y[1] = 0,5$, $y[2] = 1,15$, $y[3] = 1,795$. Noha ez négy adat, csak három $h[k]$ értéket tudunk meghatározni, mivel $u[0] = 0$ és ezért $y[0] = 0$ nem információ.

u=[0.5 0,75 0.875]; y=[0.5 1.15 1.795];

h=deconv(y, u); k=0:2; [k;h]'

Érdeemes összehasonlítani az eredményt, azzal, amit az $y[3] = 1,8$ kerekített érték felhasználásával kapunk.

Ha $u[0]$ nem lenne nulla, akkor $y[0] = 0$ is hasznos információ lenne.

Használható identifikációhoz természetesen sokkal több válsz-érték ismeretére van szükség.

ML-3. A válasz számítása

ML-3.1. Általános elvek

A DI rendszer $u[k]$ gerjesztéshez tartozó $y[k]$ válasza $k = 0, 1, 2, \dots, L$ értékeire illetve a FI rendszer $u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y(t)$ válasza $t = 0, dt, 2 \cdot dt, \dots, L \cdot dt$ értékeire számítható ha megadjuk a rendszer **rd** illetve **rc** azonosítóját (vö. ML-1.), az időpontokat tartalmazó **k** illetve **t** vektort és a gerjesztés értékeit tartalmazó **u** vektort. A válasz értékeit az **lsim** („linear simulation”) utasítás hatására az **y** vektor adja meg.

A FI választ a MATLAB közelítőleg számítja.

A válasz értékét a $k = p$ illetve a $t = p \cdot dt$ időpontban a **y(p+1)** adja (mivel az **y** vektor első eleme a $k = 0$ illetve a $t = 0$ időpontnak felel meg).

Ha a rendszer kezdeti állapota nem nulla, akkor a rendszer állapotváltozós leírását kell megadni az **ss** utasítással, a kezdeti állapotot egy **x0** oszlopvektorba kell foglalni. A MATLAB a választ a $k = 0$ illetve a $t = 0$ időponttól adja meg a kezdeti állapot figyelembe vételével.

ML-3.2. A gerjesztés megadása

A **k** illetve **t** vektorba foglalt időpontokhoz tartozó **u** gerjesztés-vektor megadható bármely, a MATLAB által megengedett módon, akár pontonként is. Az $u[k]$ illetve az $u(k \cdot dt)$ értékét **u(k+1)** adja meg.

A legegyszerűbb a helyzet, ha a gerjesztés a vizsgált idő-intervallumon belül egyetlen elemi függvénnyel (elemi függvények szorzatával és ilyenek összegével) kifejezhető. Például

DI: **k=0:10; u=2+3*(0.8.^k).*cos(0.5*k); FI: t=0:0.01:1; u=1+2*exp(-2*t);**

A FI idővektort nem csak **t=0:dt:T** alakban adhatjuk meg, hanem **t=0:T/L:T** vagy **t=0:dt:L*dt** alakban is, amelyek $T = L \cdot dt$ esetén ekvivalensek. Még célszerűbb egy egész értékű k változót bevezetni:

FI: **dt=0.01; k=0:100:1; t=k*dt; u=1+2*exp(-2*t);**

A gerjesztés ábráját a következő utasítással állíthatjuk elő:

DI: **bar(k, u, 0.2)** FI: **plot(t, u)**

Ha a függvény intervallumonként írható le elemi függvényekkel, akkor az $L = 10$ illetve a $T = 1$ hosszúságú háromszögimpulzus megadásának módja a $0 \leq k \leq 20$ illetve a $0 \leq t \leq 2$ intervallumban például

DI: **k=0:10; u(k+1)=10-k; k=11:20; u(k+1)=0;**

FI: **dt=0.05; k=0:20; t=k*dt; u(k+1)=10-10*t; k=11:20; t=k*dt; u(k+1)=0;**

A gerjesztés értékeit vagy ábráját (például ellenőrzés érdekében) a következő utasítással állíthatjuk elő:

DI: **k=0:20; [k; u(k+1)]'** vagy **k=0:20; bar(k, u, 0.2)**

FI: **k=0:40; t=k*dt; [t, u]** vagy **k=0:40; t=k*dt; plot(t, u)**

ML-3.3. A válasz meghatározása

A DI rendszer **rd** azonosítójának, **k** idővektorának, **u** gerjesztés-vektorának illetve a FI rendszer **rc** azonosítójának, **t** idővektorának, **u** gerjesztés-vektorának megadása után meghatározhatjuk az **y** válaszvektor ábráját és értékeit.

Bekapcsolási folyamat (belépő gerjesztés, zérus kezdeti állapot) esetén a válasz ábráját a következő utasítással kapjuk:

DI: **lsim(rd, u, k)** FI: **lsim(rc, u, t)**

A válasz értékeit a következő utasítás adja:

DI: **y=lsim(rd, u, k)** FI: **y=lsim(rc, u, t)**

A válasz értékét a $k = p$ illetve a $t = p \cdot dt$ időpontban **y(p+1)** adja. Az összes számított értéket táblázatos alakban a **[k', y]** illetve **[t', y]** adja.

A válasz ábráját (DI esetben oszlop-diagram a célszerű)

DI: **bar(k, y, w)** FI: **plot(t, y)**

állítja elő. A FI esetben a gerjesztést és a választ együtt is ábrázolhatjuk a **plot(t, y, t, u)** utasítással. Több változó együttes ábrázolásának további módjait a **help plot** segítségével ismerhetjük meg.

Az időpontokat és a válasz értékeit táblázatos alakban rendszerint csak decimálva (minden m -edik időpontban, például minden tizedik) akarjuk csak elő állítani. Az y meghatározása után a $k = k_0, k_0 + m, k_0 + 2m, \dots, k_0 + L_1 m$ DI illetve a $t = k_0 dt, (k_0 + m)dt, (k_0 + 2m)dt, \dots, (k_0 + L_1 m)dt$ FI időpontokra ($k_0 + L_1 \leq L$ és rendszerint $k_0 = 0$) a válasz értékeit a kijelölt időpontokban a következő utasítás adja:

DI: **km=k0 : m : L1*m; [km', y(km+1)]**

FI: **km=k0 : m : L1*m; [dt*km', y(tm+1)]**

Tetszőleges *kezdeti állapot* (vagyis nem belépő gerjesztés) esetén a rendszer állapotváltozós alakjával, az **ss** utasítással adandó meg, a kezdeti állapotot egy **x0** oszlopvektorba foglaljuk. A válasz meghatározása ugyanúgy történhet, mint bekapcsolási folyamat esetén csak most az ábra

DI: **lsim(rd, u, k, x0)** FI: **lsim(rc, u, t, x0)**

a válasz értékei pedig a

DI: **[y, k, x]=lsim(rd, u, k, x0)**

FI: **[y, t, x]=lsim(rc, u, t, x0)**

utasításra adódnak. A táblázatos alakba vagy az ábrába belefoglalhatjuk az **x** állapotvektort vagy annak r -edik rendezőjét amelyet **x(:, r)** azonosít. Például

plot(t, y, t, x(:, 1), t, x(:, 3))

megadja $y(t), x_1(t), x_3(t)$ ábráját. Másodrendű rendszerre a **plot(x(:,1), x(:,2))** utasítással a síkbeli trajektória ábrája adódik.

További részletek **help lsim** hatására tudhatók meg.

ML-3.P Példák

1. példa DI rendszer válasza belépő gerjesztésre

Egy DI rendszernek az állapotváltozós leírása és gerjesztése

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u;$$

$$u[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]\} \{5 + 0,2 \cdot k^2\} + \{\varepsilon[k-6] - \varepsilon[k-10]\} 5 \sin \frac{\pi}{6} (k-6).$$

Meghatározandó az $y[k]$ válasz a $0 \leq k \leq 15$ intervallumban táblázatosan és oszlop-diagramban, külön táblázatban $y[k]$ a $k = 0, 5, 10, 15$ diszkrét időpontokra.

A rendszer megadása

$$\mathbf{A}=[0 \ -0.24; \ 1 \ 1]; \ \mathbf{B}=[-0.24; \ 1.5]; \ \mathbf{C}=[0 \ 1]; \ \mathbf{D}=1; \ \text{rd}=\text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, 1);$$

A gerjesztés megadása a vizsgálandó intervallumra

$$k=0:5; \ u(k+1)=5+0.2*k.^2; \ k=6:9; \ u(k+1)=5*\sin(\pi*(k-6)/6); \ k=10:15; \ u(k+1)=0;$$

Ellenőrzésként például $k=0:15$; $\text{bar}(k, u, 0.2)$. A válasz értékei illetve ábrája

$$k=0:15; \ y=\text{lism}(\text{rd}, u, k); \ [k', y] \text{ illetve } \text{bar}(k, y, 0.2)$$

A válasz rövidített táblázata

$$k1=0:5:15; \ [k1', y(k1+1)] \text{ vagy } k2=[0 \ 5 \ 10 \ 15]; \ [k2', y(k2+1)]$$

A második alak akkor is alkalmazható, ha az időpontok távolsága nem állandó.

2. példa FI rendszer válasza belépő gerjesztésre

Egy FI rendszernek az állapotváltozós leírása és gerjesztése

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

$$u(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)\} 2 \{1 - e^{-3t}\} + 2 \varepsilon(t-2).$$

Meghatározandó az $y(t)$ válasz a $0 < t < 5$ intervallumban táblázatosan és grafikusán, külön táblázatban $y(t)$ a $t = 0, 0,1, 0,2, \dots, 5$ időpontokban, a válasz maximuma és állandósult értéke.

A rendszer megadása

$$\mathbf{A}=[0 \ 1; \ -3 \ -4]; \ \mathbf{B}=[0; \ 1]; \ \mathbf{C}=[1 \ 5]; \ \mathbf{D}=0; \ \text{rf}=\text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D});$$

A gerjesztés megadása a vizsgálandó intervallumra $dt = 0,01$ lépésközzel

$$dt=0.01; \ p=0:200; \ t=p*dt; \ u(p+1)=2-2*\exp(-3*t); \ p=201:500; \ t=p*dt; \ u(p+1)=2;$$

Ellenőrzésként például $p=0:500$; $t=p*dt$; $\text{plot}(t, u)$. A válasz értékei illetve ábrája

$$p=0:500; \ t=p*dt; \ y=\text{lism}(\text{rf}, u, t); \ [t', y] \text{ illetve } \text{plot}(t, y)$$

A válasz rövidített (51 sorból álló) táblázata

$$p1=0:10:500; \ t1=p1*dt; \ [t1', y(p1+1)]$$

A részletes táblázatból $y_{\max} \approx y(1,07) = 1,8511$ adódik. Az utolsó számított válaszérték $y(5) = 0,7068$. Látható azonban, hogy a válasz állandósult értéke ennél valamivel kisebb, tehát a számítást hosszabb intervallumra kellene kiterjeszteni. A válasz állandósult állapotban a pontos számítás szerint $\bar{y} = 2/3 = 0,6667$. Ha a fenti számítás során az **500** értéket **5000** értékkel helyettesítjük, akkor $y(5001) = 0,6667$ adódik.

ML-4. Az átviteli karakterisztika

ML-4.1. Általános elvek

A DI rendszer $H(e^{j\theta})$ illetve a FI rendszer $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikáját a MATLAB az átviteli függvényből képi $z = e^{j\theta}$ illetve $s = j\omega$ helyettesítéssel. Az eredmény ezért csak akkor fogadható el, ha előzőleg meggyőződünk a rendszer stabilitásáról a rendszer rendszermátrixa sajátértékeinek vagy átviteli függvénye pólusainak meghatározásával a **la=eig(A)** vagy a **p=pole(rsz)** utasítással.

Alább a DI és FI rendszer közös tárgyalása során a θ (rad mértékegységben) illetve az ω (rad/s mértékegységben) körfrekvenciákat közösen egy **w** vektorba foglaljuk. Ha az FI esetben a frekvenciákat akarjuk egy **f** vektorban megadni, akkor a **w=2*pi*f** értelmezést használhatjuk. (Más eljárás: **help frd** „frequency response data”, ahol további információk is találhatóak.)

Az alább megadott módokon értelmezett átviteli karakterisztikát nem tekinthetjük egy rendszer azonosítójának, tehát abból más rendszerleírások vagy azok jellemzői nem határozhatók meg egyszerűen. Az impulzusválasz inverz Fourier-transzformációval számítható az itt nem részletezett **ifft** utasítással. (A **help fft** szolgál részletekkel, az eljárás alkalmazása figyelmet igényel.)

ML-4.2. Az átviteli karakterisztika számítása

Az **rsz** azonosítójú DI illetve FI rendszer amplitúdó-karakterisztikáját és fázis-karakterisztikájának a **w** vektorba foglalt körfrekvenciákon (l. alább) a

$$[\mathbf{K1}, \mathbf{fi1}] = \text{bode}(\text{rsz}, \mathbf{w}); \mathbf{p} = 1:\text{length}(\mathbf{w}); \mathbf{K}(\mathbf{p}) = \mathbf{K1}(\mathbf{p}); \mathbf{fi}(\mathbf{p}) = \mathbf{fi1}(\mathbf{p});$$

utasítás adja. Az amplitúdó-karakterisztikát decibelben a **k(p)=20*log10(K)**; bevezetésével kapjuk. Az összes frekvencia-értékre vonatkozó táblázatot a

$$[\mathbf{w}; \mathbf{K}; \mathbf{fi}]' \text{ vagy } [\mathbf{w}; \mathbf{k}; \mathbf{fi}]'$$

utasítással kapjuk. A **w** vektor q -adik eleméhez tartozó értékek a **w(q)**, **K(q)**, **fi(q)**, **k(q)** utasítások szolgáltatják. Több frekvencia esetén **q** vektorként is definiálható (például a ML-3.3. pontban megadott módon).

A **w** vektor megadható a számítandó körfrekvenciák egyenkénti megadásával:

$$\mathbf{w} = [\mathbf{w}_a \ \mathbf{w}_b \ \mathbf{w}_c \ \mathbf{w}_d];$$

Lineáris skálázás esetén a **w0** (ez gyakran **0**) és a **w1** (ez DI esetben gyakran π azaz **pi**) által határolt körfrekvencia-intervallumban a következő megadás használható:

$$\mathbf{w} = [\mathbf{w}_0:\mathbf{dw}:\mathbf{w}_1];$$

A \mathbf{dw} megadható $(\mathbf{w1}-\mathbf{w0})/L$ alakban is $L+1$ számú pontban. Ennek egy más alakja

$$\mathbf{w}=\text{linspace}(\mathbf{w0}, \mathbf{w1}, L);$$

A FI esetben előnyös lehet a logaritmikus skálázás $\omega_0 = 10^a$, $\omega_1 = 10^b$ körfrekvenciák között L számú pontban a

$$\mathbf{w}=\text{logspace}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, L)$$

utasítással.

A \mathbf{w} vektor q -adik eleméhez tartozó értékek a $\mathbf{w}(\mathbf{q})$, $\mathbf{K}(\mathbf{q})$, $\mathbf{fi}(\mathbf{q})$, $\mathbf{k}(\mathbf{q})$ utasítások szolgáltatják. Több frekvencia esetén \mathbf{q} vektorként is definiálható (például a ML-3.3. pontban megadott módon). Ekkor egy rövidített (például ritkább osztású vagy egy frekvencia-intervallumra vonatkozó) táblázatot állíthatunk elő.

Az átviteli karakterisztika valós és képzetes része a

$$[\mathbf{re1}, \mathbf{im1}] = \text{nyquist}(\mathbf{rsz}, \mathbf{w}); \mathbf{p}=1:\text{length}(\mathbf{w}); \mathbf{re}(\mathbf{p})=\mathbf{re1}(\mathbf{p}); \mathbf{im}(\mathbf{p})=\mathbf{im1}(\mathbf{p});$$

utasítással állítható elő, majd kezelhető az előbb leírt módon.

ML-4.3. Az átviteli karakterisztika ábrázolása

Az \mathbf{rsz} azonosítójú DI illetve FI rendszer átviteli karakterisztikájának *Nyquist-diagramja* a

$$\text{nyquist}(\mathbf{rsz}) \text{ vagy } \text{nyquist}(\mathbf{rsz}, \mathbf{w})$$

utasítással állítható elő. Az első esetben a \mathbf{w} vektort a MATLAB választja, a második esetben megválaszthatjuk az előző pontban leírt valamelyik módon.

A *Bode diagram* (a logaritmikus amplitúdó- és fázis-diagram) a

$$\text{bode}(\mathbf{rsz}) \text{ vagy } \text{bode}(\mathbf{rsz}, \mathbf{w})$$

utasítással állítható elő az előzőhöz hasonló értelmezéssel.

Az előző pontban leírt módon előállított \mathbf{K} és \mathbf{fi} meghatározása után a

$$\text{plot}(\mathbf{w}, \mathbf{K}) \text{ plot}(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \text{ plot}(\mathbf{w}, \mathbf{fi}) \text{ plot}(\mathbf{w}, \mathbf{K}, \mathbf{w}, \mathbf{fi})$$

$$\text{subplot}(2, 1, 1), \text{plot}(\mathbf{w}, \mathbf{K}); \text{subplot}(2, 1, 2), \text{plot}(\mathbf{w}, \mathbf{fi})$$

utasítással állíthatók elő az ábrák. A második sor esetén a két görbe az osztott ábra felső és alsó felében jelenik meg.

Az előző pontban leírt módon előállított \mathbf{re} és \mathbf{im} meghatározása után ábrázolható az átviteli karakterisztika valós és képzetes része egyetlen ábrán vagy osztott ábrán. Ennek alapján is előállítható az átviteli karakterisztika Nyquist-diagramja.

ML-4.4. Az átviteli karakterisztika pontonkénti megadása

Az DI illetve FI rendszer átviteli karakterisztikája megadható a \mathbf{w} vektorba foglalt \mathcal{G}_p illetve ω_p körfrekvenciákhoz tartozó, a \mathbf{H} vektorba foglalt $H(e^{j\omega_p})$ illetve $H(j\omega_p)$ értékekkel. Ez tipikusan mérési eredmények feldolgozásánál jelentkeznek. A \mathbf{w} utasításként is megadható például $\mathbf{w}=[\mathbf{w0};\mathbf{dw}; \mathbf{w1}]$ alakban.

Az átviteli karakterisztika értékei táblázatos alakban az

[w; H].' vagy **[w; abs(H); angle(H)]'**

utasítással állítható algebrai vagy exponenciális alakban.

Egy más lehetőség egy DI vagy FI rendszert értelmezni a

DI: **rf=frd(H, w, 1)** FI: **rf=frd(H, w)**

utasítással. Az **ENTER** hatására kapjuk a táblázatos alakot (**H** algebrai alakban). Ekkor a Nyquist- vagy a Bode-diagram az előző pontban leírt módon határozható meg. Ez az **rf** illetve **rd** azonosító azonban nem alkalmas az ML-1. szakaszban leírt műveletekre (például az állapotváltozós leírás előállítására).

ML-4.P. Példák

1. példa DI rendszer átviteli karakterisztikája

Határozzuk meg annak a DI rendszernek az amplitúdó- és fázis- karakterisztikáját, amelyet az ML-1.P. első három példájában vizsgáltunk. Adjuk meg az amplitúdó-karakterisztika értékét a $\vartheta = 0$ és a $\vartheta = \pi$ helyen, továbbá maximumát és annak helyét.

rd=tf([2 0.8], [1 0.6 0.25], 1); abs(pole(rd))

Mindkét pólus abszolút értéke 0,5, a rendszer stabilis

te=0:0.01*pi:pi; [K1, fi1]=bode(rd, te); p=1:length(te);

K(p)=K1(p);

plot(te, K(p))

Az ábrából látható, hogy a $K(\vartheta)$ függvénynek egyetlen lokális maximuma van $\vartheta = 2,1$ rad környékén értéke 2,7 körüli. A $K(0)$, $K(\pi)$ és K_{\max} értékét

K(1), K(101), max(K)

adja. A maximum helye például az (előző sor felhasználásával könnyen előállítható)

te=2.1:0.01:2.2; [K1, fi1]=bode(rd, te); p=1:length(te); K(p)=K1(p);

[te; K(p)]', max(K)

táblázata alapján határozható meg: $K_{\max} = 2,6849$, $\vartheta = 2,13$ rad.

2. példa FI rendszer átviteli karakterisztikája

Határozzuk meg annak a FI rendszernek az amplitúdó- és fázis- karakterisztikáját, amelyet az ML-1.P. első három példájában vizsgáltunk. Adjuk meg az amplitúdó-karakterisztika maximumát és annak helyét.

rc=tf([2 0.8], [1 0.6 0.25]); real(pole(rc))

Mindkét pólus valós része negatív, a rendszer stabilis

Az átviteli karakterisztika meghatározásához első tájékozódásra a **bode(rc)** utasítás hatására kapjuk hogy esetünkben a lényeges frekvencia-tartomány 0,1 rad/s és 10 rad/s közé esik. Az amplitúdó-karakterisztikának lapos maximuma van 0,5 rad/s környékén, ettől balra és jobbra monoton csökken. (Nagyobb rendszámú rendszerekre a MATLAB szélesebb intervallumot jelöl ki.) Az

```
om1=0.4:0.01:0.6; [K1, fi1]=bode(rc, om1); p=1:length(om1); K(p)=K1(p);
```

```
[om; K(p)]', max(K)
```

táblázatból illetve utasításból kiderül, hogy a maximum valóban ebben az intervallumban van 0,41 rad/s körfrekvencián és értéke 0,4189. Kisebb frekvencialéppel ezek helyett 0,415 rad/s és 0,4191 adódik, de ez a pontosság valószínűleg fölösleges. Az amplitúdó-karakterisztika a maximum környezetében a **plot(om1, K(p))** utasítással ábrázolható. A fázis-karakteristikáról (fokban) a **fi(p)=180*fi1(p)/pi** bevezetésével kaphatunk egy választott intervallumban áttekinthető ábrát.

IRODALOMJEGYZÉK

A témakör hatalmas irodalmából csak néhány alapvető könyvet adtunk meg. Ezek irodalomjegyzékében számos további mű található

- Anderson, B. D. O. - Vongpanitlerd, S.:** Network Analysis and Synthesis. Prentice-Hall, 1973
- Antoniou, A.:** Digital Filters. McGraw-Hill, 1979
- Balabanian, N. - Bickart, Th.:** Electrical Network Theory. Wiley, 1969
- Britte, R. – Leich, H.:** Les filtres numeriques. Masson, 1990
- Candy, J. V.:** Signal Processing. McGraw-Hill, 1988
- Champaney, D. C.:** Fourier Transforms and their Physical Applications. Academic Press, 1973
- Chua, L. O. :** Introduction to Nonlinear Network Theory. Wiley, 1969
- Chua, L. O. - Desoer, C. A. - Kuh, E. S. :** Linear and Nonlinear Circuits, McGraw-Hill, 1987
- Chua, L. O. - Lin, P. M.:** Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits, Englewood Cliffs, 1975
- Coyle, R. G.:** Management System Dynamics. Wiley, 1977
- Csáki F.:** Korszerű szabályozáselmélet. Akadémiai Kiadó, 1988
- Csáki F. (szerk.):** Lineáris szabályozási rendszerek analízise. Műszaki Könyvkiadó, 1976
- Davies, B.:** *Integral Transforms and Their Applications.* Springer, 1978
- Director, S. W. - Kuh, E. S.:** Introduction to System Theory. McGraw-Hill, 1972
- Doetsch, G.:** Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation. Oldenbourg, 1967
- Doetsch, G.:** Handbuch der Laplace-Transformation I.-II.-III. Birkhauser, 1950-1955-1956
- Erdélyi, A. :** Tables of Integral Transforms I. McGraw Hill, 1954
- Fodor Gy.:** A Laplace-transzformáció műszaki alkalmazása. Műszaki Könyvkiadó, 1966
- Fodor Gy.:** Lineáris rendszerek analízise. Műszaki Könyvkiadó, 1967
- Fodor, G.:** Signals, Systems and Networks. Akadémiai Kiadó, 2003
- Föllinger, O.:** Laplace- und Fourier-Transformation. Hüthig, 1990
- Géher, K.:** Theory of Network Tolerances. Akadémiai Kiadó, 1971

- Géher K. - Solymosi J.:** Lineáris áramkörök tervezése. Tankönyvkiadó, 1992
- Gabel, R. A. - Roberts, R. A.:** Signals and Linear Systems. Wiley, 1963
- Guillemin, E. A.:** Theory of Linear Physical Systems. Wiley, 1963
- Hale, J. K.:** Nonlinear Oscillations. McGraw-Hill, 1963
- Harkevic, A. A.:** Spektry i analiz. Izd. fiz.-mat. lit., 1962
- Hayashi, C.:** Nonlinear Oscillations in Physical Systems. McGraw-Hill, 1964
- Hughes, W. L.:** Nonlinear Electrical Networks. Ronald Press, 1960
- Jury, E. I.:** Sampled-data Control Systems. Wiley, 1958
- Kailath, T.:** Linear Systems. Prentice-Hall, 1980
- Küpfmüller, K.:** Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung. S. Hirzel Verlag, 1968
- Lange, F. H.:** Signale und Systeme. Vieweg, 1966
- Lynn, P. A. - Fuerst, W.:** Digital Signal Processing. Wiley, 1989
- Oppenheim, A. - Shafer, R.:** Digital Signal Processing. Prentice-Hall, 1975
- Oppenheim, A. - Willsky, A. S. - Young, I.:** Signals and Systems. Prentice-Hall, 1983
- Papoulis, A.:** The Fourier-Integral and its Applications. McGraw-Hill, 1962
- Papoulis, A.:** Signal Analysis. McGraw-Hill, 1977
- Papoulis, A.:** Circuits and Systems. Holt, 1980
- Phillipow, E.:** Nichtlineare Elektrotechnik. Akad. Verlagsges. 1963
- Rohrer, S. A.:** Circuit Theory: An introduction to the State Variable Approach. McGraw-Hill, 1970
- Rózsa P.:** Lineáris algebra és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, 1974
- Schüssler, H. W.:** Netzwerke, Signale und Systeme 1.-2. Springer, 1991
- Silijan, D.:** Nonlinear Systems. Wiley, 1969
- Simonyi E.:** Digitális szűrők. Műszaki Könyvkiadó, 1984
- Unbehauen, R.:** Systemtheorie. Oldenbourg, 1993
- Vlach, J. - Singhal, K.:** Computer Methods for Circuit Analysis and Design. Van Nostrand, 1983
- Zadeh, L. A. - Desoer, C. A.:** Linear System Theory - The State Space Approach. McGraw-Hill, 1963
- Zemanian, A. H.:** Distribution Theory and Transform Analysis. McGraw-Hill, 1965
- Zinovev, A. L. - Filippov, L. I.:** Vvedenie v teoriju signalov i cepej. Vysshaja Shkola, 1975
- Zubov, V. I.:** Kolebanija v nelinejnih i upravljemuh sistemah. Szudpromgiz, 1962

Tárgymutató

A, Á

ablak 23, 254
ablakozott jel 254
abszolút integrálható jel 22
abszolút stabilitás 184
abszolút összegezhető jel 22
abszolút stabilitás 183
akauzális rendszer 30
alapharmonikus 217, 222
állandó jel spektruma 236, 237
állapotegyenlet 93, 95
állapotsík 170
állapottér 170
állapotváltozó 92
állapotváltozós leírás 93, 95
-- megoldása 101, 118, 178, 363
-- szimulációja 420
-- transzformációja 97
állapotvektor 92, 96
általánosított derivált 17
aluláteresztő 266, 382, 383, 439
alulmintavételezés 433
amplitúdó 193
amplitúdó-karakterisztika 200
amplitúdó-moduláció 277
amplitúdó-spektrum 239
AR rendszer 63, 66
ARMA rendszer 63, 66
aszimptotikus stabilitás 134, 182
áteresztőszáv 382
átmeneti sáv 382
átviteli együttható 200, 296
átviteli függvény 343, 346, 348, 350, 360, 396
átviteli függvény szimulációja 415
átviteli karakterisztika 198, 205, 206, 266, 295, 349
átviteli karakterisztika ábrázolása 205
-- szimulációja 417, 419
autonóm rendszer 182

B

Bartlett-ablak 255
bekapcsolási folyamat 106
belépő jel 20
-- spektruma 246
bemeneti változó 34
BIBO 31
bilineáris transzformáció 416
Bode-diagram 209
Bode tételei 246, 379
bond gráf 37
Butterworth 384

C, Cs

Cayley–Hamilton-tétel 121
csillagozott jel 429
csillapítás 206
csillapítási tétel 307
csomópont 35, 141
csonkítás 238

D

dB 209
diszkrét értékű jel 5
diszkrét idejű jel 5
decibel 209
dekád 209
derivált jel 242
-- Laplace-transzformáltja 312
-- spektruma 242
determinisztikus jel 6
DFS 215
differenciális rendszer 64
differenciátor 207
digitális jel 6
DI 5
dinamikus komponens 140
Dirac-impulzus 15, 241, 306
direkt realizáció 406
diszkrét idejű jel, diszkrét idő 5
Duhamel tétele 57

E, É

egyensúlyi állapot 163, 165
 egyensúlyi pont → egyensúlyi állapot
 egy lépéses algoritmus 165
 egységimpulzus 10, 234, 305
 egységugrás 11, 14, 236, 306
 egyszerű csomópont 35, 142
 elemi komponens 240, 290, 395
 elsőrendű algoritmus 180
 eltolás 11
 eltolási tétel 240
 energia (jelé) 22, 243
 energiaátviteli karakterisztika 264
 energiaspektrum 244, 264
 erősítő 140, 290, 396
 Euler-algoritmus 130, 181
 Euler–Cauchy-algoritmus 181
 Euler-reláció 196
 explicit algoritmus 180

F

fázis-karakterisztika 200
 fázis-moduláció 278
 fázis-spektrum 301
 fazor 196
 felharmonikus 217, 222
 felüláteresztő 382, 386
 FI 4
 FIR rendszer 42, 374
 fizikai objektum 25
 fokozatos behelyettesítés 64, 94
 folytonos értékű jel 5
 folytonos idejű jel 4
 folytonos idő 4
 forgatás 209
 forrás 34, 140
 Fourier-polinom 225
 Fourier-sor 215, 221
 Fourier-transzformáció 221, 317
 frekvencia 193
 frekvencia-moduláció 280
 Frobenius-alak 97
 futási idő karakterisztika 201, 209

G

Gauss-jel 245
 Gear-algoritmus 181
 gerjesztés 25
 gerjesztés-válasz kapcsolat 25, 159

gerjesztés-válasz stabilitás 31, 45, 55,
 84, 135, 350
 gerjesztett összetevő 77, 104
 Gibbs-jelenség 224, 251
 globális stabilitás 182, 184
 GV → gerjesztés-válasz

H

hálózat 33, 139
 hálózatanalízis 34, 122, 289, 395, 399
 hálózat regularitása 144, 146
 hálózat stabilitása 148
 hálózatszintézis 34
 Hamming-ablak 256
 háromszögletű ablak 255
 határciklus 172, 184
 Hermite-mátrix 124
 Hilbert-transzformáció 350, 379

I, Í

ideális aluláteresztő 266
 ideális szimuláció 412
 időálló 76
 időkorlátozott jel 252
 IIR rendszer 42
 implicit algoritmus 180
 impulzus 15
 impulzusválasz 41, 49
 -- számítása 71, 111, 265, 344
 -- szimulációja 422
 integrált jel Laplace-transzformáltja 312
 -- spektruma 246
 integrátor 140, 291, 396
 invariáns rendszer 29
 inverz Fourier-transzformáció 232
 inverz Laplace-transzformáció 326
 inverziós integrál 304
 ismétlési operátor 315

J

jel 4
 jelfolyam gráf 36
 jelfolyam hálózat 34, 140
 -- szimulációja 422
 -- jelrekonstrukció 438
 jel sávzélessége 269, 273
 jelszélesség 274
 Jury-kritérium 86

K

kanonikus realizáció 405
 kaotikus viselkedés 173
 karakterisztika 34
 karakterisztikus egyenlet 72, 85, 87,
 102, 121
 karakterisztikus polinom 72, 102, 121
 kaskád kapcsolás 407
 kauzális rendszer 30, 267
 késleltetés 12, 308, 311
 késleltetési tétel 308
 késleltető 140, 291, 396
 kezdeti állapot 93, 96, 106
 kezdeti érték 63, 66, 314
 kezdőfázis 193
 kiindulási állapot 96, 107
 kiindulási érték 63, 66
 kimeneti változó 34
 Kirchhoff-hálózat 37
 komplex amplitúdó 196
 komplex frekvencia 300, 304
 komponens 33, 140, 290
 konvergencia-abszcissa 319
 konvergencia-sugár 319
 konvolúció 43, 52
 -- Laplace-transzformáltja 315
 -- spektruma 240
 korlátos állapot 182
 korlátos jel 22
 körfrekvencia 193
 kvantált jel 5

L

labilis rendszer 31, 46, 56
 Lagrange-stabilitás 183
 Lagrange-mátrix 122
 Laplace-transzformáció 19
 -- inverze 326
 -- mintavételezett jelé 435
 lépésköz 129
 lépésről lépésre módszer 64, 94
 lineáris fázis 440
 lineáris operátor 28
 lineáris rendszer 28
 linearizálás 170
 Ljapunov-függvény 185
 Ljapunov-stabilitás 183
 logaritmikus ábrázolás 209
 logikai hálózat 37

M

MA rendszer 63, 66
 MATLAB 449
 mátrix függvénye 122
 maximálisan lapos 384, 388
 memóriamentes hurok 147
 -- komponens 139
 -- rendszer 31
 MIMO 27
 mindentáteresztő 375, 382
 minimálfázisú rendszer 378
 mintavételezett jel 428
 -- Laplace-transzformáltja 435
 -- rekonstrukciója 438
 -- spektruma 430
 mintavételi periódusidő 248
 mintavételi tétel 248, 432
 MISO 24
 modális mátrix 126
 moduláció 240, 277
 munkapont → egyensúlyi állapot

N, Ny

négyszögletes ablak 22, 255
 négyszögletes impulzus 15
 -- spektruma 235
 négyzetes középérték 217
 nemlineáris erősítő 161
 / rendszer 29, 159
 neper 209
 neurális hálózat 36
 normálalak 93, 95
 Np 209
 nyelő 25, 140
 Nyquist-diagram 208
 Nyquist-frekvencia, Nyquist-tétel 248

O, Ó, Ö, Ő

objektum 24
 oktáv 209
 összegező csomópont 35, 141
 összekapcsolási szabály 35
 összetett komponens 292

P

Paley–Wiener kritérium 268
 paraméter tétel 308
 páratlan és páros jel 20
 Parseval tétele 216, 224, 243

periodikus állapot 174, 213, 364
 -- jel Laplace-transzformáltja 315
 periódusidő 193
 polinomosztás 326
 pólus 330
 pólus-zérus elrendezés 352
 próbafüggvény 77, 104

R

realizáció 34, 155, 156, 405
 referenciaszűrő 385
 regularitás 144, 146
 rekonstrukció (mintavételezett jelé) 438
 rendszám 62, 92
 rendszer 25
 rendszer egyenlet 62, 65, 345, 361
 -- előállítása 99, 149, 345
 -- realizálása 405
 rendszer mátrix 93, 96
 rendszer sávszélessége 269, 271
 reprezentáció 34
 részlettörtekre bontás 328
 Routh-kritérium 88
 Runge–Kutta-algoritmus 181

S, Sz

sajátérték 72, 102, 120
 sajátvektor 102, 120
 sáváteresztő, sávzáró 382, 388
 sávkorlátozott jel 248
 -- közelítés 249, 250, 441
 sávszélesség 269, 271, 273
 segéd-impulzusválasz 71
 siettetés 12, 208
 SIMO, SISO 27
 skálázás 243
 sokváltozós komponens 142
 spektrum 217, 232, 430
 stabilis egyensúlyi állapot 188
 stabilis hálózat 148
 stabilis rendszer → stabilitás
 stabilitás → aszimptotikus stabilitás,
 → gerjesztés-válasz stabilitás
 stabilitás (nemlineáris rendszeré) 182
 stabilitás határhelyzete 31, 46, 58
 stabilitási tartomány 185
 súlyfüggvény → impulzusválasz
 szabad összetevő 75, 101
 szakaszonként állandó rekonstrukció 438

-- lineáris rekonstrukció 439
 -- szeparatrix 188
 szétágazó csomópont 35, 141
 szétcsatolt forma 128
 szimmetria tulajdonság 245
 szimuláció 411
 szinuszos jel 193
 szuperpozíció elve 28
 szűrő 382

T, Ty

tartományonkénti linearizálás 172
 teljesítmény (jelé) 22, 216, 224
 toleranciaséma 382
 torzításmentes jelátvitel 268
 többlépéses algoritmus 180
 többszörös pólus 333
 trajektória 170
 transzfer → átviteli

U, Ū

ugrásválasz 46, 56
 ütem 4

V

válasz 25, 42, 52, 257
 változó 3
 variáns rendszer 29
 végérték tétel 314
 véges energiájú jel 49
 véges idejű jel 22
 véges impulzusválasz 42, 374
 véges teljesítményű jel 49

Z

zárósáv 382
 zérus 352
 z-transzformáció 304
 -- inverze 326