8. és 9. Gyakorlat

Abszolút folytonos valószínűségi változók

1. Válasszunk egy pontot véletlenszerűen az $(1;0)$, $(0;1)$ és $(-1;0)$ csúcsok által meghatározott egyenlő szárú háromszög belsejében, és jelölje X a választott pont és az x tengely távolságát. Adjuk meg az X változó sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását. (Lásd a 7. feladatsor 6. feladatát.)
2. Véletlenszerűen választunk két számot egymástól függetlenül a $[-1;1]$ intervallumból. Legyen X a két szám összege. Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását. (Lásd a 7. feladatsor 8. feladatát.)
3. Az egységnégyzeten találomra kiválasztunk egy P pontot. Jelölje X a P-hez legközelebbi oldal és a P pont távolságát. Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását. (Lásd a 7. feladatsor 9. feladatát.)

---

4. Az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:
$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\sqrt{t}}, & \text{ha } t \in (0;1), \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$
ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ egy paraméter. Határozzuk meg α értékét, valamint a $\mathbb{P}\left(\frac{1}{9} < X < \frac{1}{4}\right)$ valószínűséget.
5. Egy benzinkút üzemanyagtartályát hetente teletöltik. Jelölje X a heti fogyasztást (százezer literekben), melynek sűrűségfüggvénye: $$f_X : t \mapsto \begin{cases} 5(1-t)^4 & \text{ha } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
Mekkora legyen a tartály kapacitása, hogy annak a valószínűsége, hogy a héten kifogy az üzemanyag, kisebb legyen 0,05-nél? Mekkora az átlagos heti fogyasztás?

---

6. Tegyük fel, hogy az X folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye
$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0, \\ at, & \text{ha } t \in (0;3], \\ 1, & \text{ha } t > 3 \end{cases}$$
valamilyen $a \in \mathbb{R}$ valós számra.
   a) Mik az a lehetséges értékei? Milyen nevezetes eloszlást kapunk megfelelő a választása esetén?
   b) Mi a valószínűsége, hogy X értéke 2 és 5 közé esik?
   c) Határozzuk meg az X várható értékét.
7. Határozzuk meg az α értékét, ha tudjuk, hogy f sűrűségfüggvény. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f. Adjuk meg az F_X eloszlásfüggvényt, az X várható értékét és szórását is.
   a) $f : t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t - t^2) & \text{ha } 0 < t < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
   b) $f : t \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{t-2} & \text{ha } 2 < t < 3, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
   c) $f : t \mapsto \begin{cases} 2t - \alpha & \text{ha } 1 < t < \alpha \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
8. Legyen Y olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye:
$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \le 1 \\ \sqrt{t} - 1 & \text{ha } 1 < t \le 4 \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
Határozzuk meg az Y változó f_Y sűrűségfüggvényét. Legyen továbbá $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített, és definiáljuk a $g(t) = \alpha \cdot f_Y^3(t)$ függvényt ($t \in \mathbb{R}$). Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ választás esetén lesz a g függvény egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?