

## 6-7. előadás

Az 1-7. feladatok megoldásokkal együtt megtalálhatók a Bevezető matematika példatár 1.4 és 1.5 fejezetében.

### Abszolút értékes és gyökös egyenletek és egyenlőtlenségek

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

1.a)  $|x+2| + |x-3| = 9$

b)  $|x^2 - 2x| = 1$

c)  $x^2 + 7|x| - 8 = 0$

d)  $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 = 0$

e)  $\frac{6}{x} = -2 |x-1| + 6$

f)  $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 10$

2.a)  $|2x-1| < 4$

b)  $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \geq 3$

c)  $|x^2 - 5| > 4$

d)  $|x-3| \geq 1-2x$

3.a)  $\sqrt{\frac{2}{3} - 5x} - \sqrt{3x + \frac{1}{2}} = 0$

b)  $\sqrt{x+2} + \sqrt{1-3x} = 0$

c)  $\sqrt{10-x} = x-10$

d)  $\sqrt{4x-7} = 1-x$

e)  $\sqrt{2x^2 - 3x - 10} - x = 0$

f)  $\sqrt{2-x} - \sqrt{x+7} = -3$

g)  $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+4}$

h)  $x + 3\sqrt[3]{x^2} - 18\sqrt[3]{x} = 0$

i)  $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}}$

j)  $\frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} - 1} = \frac{x+1}{x-2}$

k)  $\sqrt{4x+17} > x+3$

### Exponenciális és logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

4.a)  $2^{|x+1|+x} = 2$

b)  $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$

c)  $2^x + 38 \cdot 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2}$

d)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+9}{2x+2}}$

e)  $3^{2x^2+2x-12} = 9^{\frac{x-2}{x+3}}$

f)  $\left(\frac{25}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{125}\right)^{3x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-x}$

g)  $2^{3x+4} \cdot \frac{8^{2x-1}}{\sqrt{16^{x+1}}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{2-x}$

h)  $5^x = 5^{-x} + \frac{24}{5}$

i)  $\frac{1+4^{x-1}}{4^x} = \frac{17}{2^{x+3}}$

j)\*  $4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}$

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\mathbf{5.a)} \sqrt{9^x + 8 - 3^{x+2}} > 3^x - 5 \quad \mathbf{b)} 4^{3-|x|} < 32$$

$$\mathbf{c)} \left(\frac{2}{7}\right)^{10-3x} \leq \frac{49}{4} \quad \mathbf{d)} \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-17} > \frac{1}{27}$$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$\mathbf{6.a)} \frac{\lg(x-10)}{1-\lg 5} = 2$$

$$\mathbf{b)} \frac{\log_7(x+4)}{\log_7(x+2)} = 2$$

$$\mathbf{c)} \lg \sqrt{x-5} + \lg \sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30$$

$$\mathbf{d)} \log_3[(x-4)(x+3)] = \log_3(5x+4)$$

$$\mathbf{e)} \log_8(23x+8) - 2 \log_8(4x+4) = -\frac{2}{3}$$

$$\mathbf{f)} \lg \sqrt{x^2-3x} - \lg \sqrt{3-x} = \lg 5$$

$$\mathbf{g)} \ln(x^2+2x-3) = \ln \frac{x-1}{x+3}$$

$$\mathbf{h)} 2 \lg 2 - 1 + \lg(x^3+1) = \lg\left(\frac{1}{x^3}+1\right)$$

$$\mathbf{i)} \log_x(x^3+3x^2-27) = 3$$

$$\mathbf{j)} \log_{x+1}(2x^2+1) = 2$$

$$\mathbf{k)} \log_2(\log_3(\log_4)) = 0$$

$$\mathbf{l)} \log_{\frac{1}{4}}(\log_{16}(\log_2 x)) = 1$$

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\mathbf{7.a)} \log_3(x^2-2x) < 0$$

$$\mathbf{b)} \log_2(5-6x) \leq 2$$

$$\mathbf{c)} \log_{\frac{1}{2}}(3x-4) > \log_2 \frac{1}{8}$$

$$\mathbf{d)} \log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-1) < -1$$

## További gyakorló feladatok

$$\mathbf{8.a)} \left(\frac{1}{16}\right)^{x+11} \cdot \frac{64^{x-1}}{\sqrt{32^{x-2}}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+10}$$

$$\mathbf{b)} \left(\frac{1}{81}\right)^{x+3} \cdot \frac{\sqrt{3^{x+4}}}{9^{4x-1}} = 27^{2x-5}$$

$$\mathbf{c)} \left(\frac{81}{16}\right)^{|x|+1} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-3x+6} = \sqrt{\left(\frac{27}{8}\right)^{6x+4}}$$

$$\mathbf{d)} \left(\frac{5}{2}\right)^{6x+8} \cdot \sqrt{\left(\frac{8}{125}\right)^{2x+7}} = \left(\frac{25}{4}\right)^{3x-2}$$

$$\mathbf{e)} 4^{x+1} + 2 = 9 \cdot 2^x$$

$$\mathbf{f)} 9^{x+1} + 27 = 3^{x+5} + 3^x$$

$$\mathbf{g)} \left(\frac{16}{81}\right)^{x^2-5x+7} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^4$$

$$\mathbf{h)} \left(\frac{1}{32}\right)^{x^2-3x-2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$$

$$\mathbf{9.a)} \log_8\left(\log_{25}(8 \log_2 x + 1) + \frac{7}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{b)} \log_{\frac{1}{9}}\left(6 \log_4\left(5 - \log_{\frac{1}{3}} x\right)\right) = -1$$

$$\mathbf{c)} \log_2^2 x - 2 \log_2 \frac{1}{x^3} + 5 = 0$$

$$\mathbf{d)} \lg^2 x + \lg x^5 - 6 = 0$$

$$\mathbf{e)} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$$

$$\mathbf{f)} \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) > -1$$

## Eredmények

1.a)  $x = -3$  vagy  $x = 5$     b)  $x = 1$  vagy  $x = 1 \pm \sqrt{2}$

c)  $x = -1$  vagy  $x = 1$     d)  $x = \frac{1}{2}$  vagy  $x = -\frac{2}{3}$

e)  $x = 1$  vagy  $x = 3$  vagy  $x = -3$     f)  $x = \frac{11}{2}$  vagy  $x = -\frac{9}{2}$

2.a)  $-\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$     b)  $x \geq 7$  vagy  $x \leq 1$

c)  $x < -3$  vagy  $-1 < x < 1$  vagy  $x > 3$     d)  $x \geq 2$

3.a)  $x = \frac{1}{48}$     b) Nincs megoldás.    c)  $x = 10$     d) Nincs megoldás.

e)  $x = 5$     f)  $x = 2$     g)  $x = 5$     h)  $x = 0$  vagy  $x = -216$  vagy  $x = 27$

i)  $x = -3$     j)  $x = 3$     k)  $-\frac{17}{4} \leq x < 2$

4.a)  $x = 0$     b)  $x = 2$     c)  $x = 4$     d)  $x = 1$     e)  $x = 2$  vagy  $x = -2$  vagy  $x = -4$

f)  $x = \frac{3}{4}$     g)  $x = -11$     h)  $x = 1$     i)  $x = 3$  vagy  $x = -1$     j)  $x = 4$

5.a)  $x \leq 0$  vagy  $x > \log_3 17$     b)  $x < -\frac{1}{2}$  vagy  $x > \frac{1}{2}$     c)  $x \leq 4$     d)  $-4 < x < 5$

6.a)  $x = 14$     b)  $x = 0$     c)  $x = 6$     d)  $x = 8$     e)  $x = 4$  vagy  $x = -\frac{1}{4}$

f)  $x = -25$     g)  $x = -4$     h)  $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$     i)  $x = 3$     j)  $x = 2$     k)  $x = 64$     l)  $x = 4$

7.a)  $1 - \sqrt{2} < x < 0$  vagy  $2 < x < 1 + \sqrt{2}$     b)  $-\frac{11}{6} \leq x < \frac{5}{6}$

c)  $\frac{4}{3} < x < 4$     d)  $x < -4$  vagy  $x > 1$

8.a)  $x = 6$     b)  $x = \frac{2}{5}$     c)  $x = -2$  vagy  $x = 14$     d)  $x = \frac{1}{2}$

e)  $x = -2$  vagy  $x = 1$     f)  $x = -2$  vagy  $x = 3$

g)  $x \leq 1$  vagy  $x \geq 4$     h)  $-\frac{3}{5} < x < 4$

9.a)  $x = \sqrt{2}$     b)  $x = 27$     c)  $x = \frac{1}{32}$  vagy  $x = \frac{1}{2}$     d)  $x = \frac{1}{1000000}$  vagy  $x = 10$

e)  $-2 < x \leq 3 - \sqrt{5}$  vagy  $x \geq 3 + \sqrt{5}$     f)  $-1 < x < 0$  vagy  $2 < x < 3$