ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2010. dec. 22.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (9 pont)

A állítás: (a_n) konvergens B állítás: (a_n) korlátos

Melyik állítás igaz? Az igaz állítást bizonyítsa be, a hamisra adjon ellenpéldát!

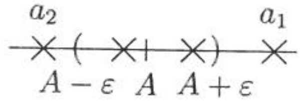
a) $A \implies B$ b) $B \implies A$

a) $A \Rightarrow B$ igaz

$\boxed{6}$ (B) $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists N(\varepsilon)$:

$$A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon) = N$$

Tehát $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$- on kívül legfeljebb csak az $a_1, a_2, \ldots, a_N$ elemek eshetnek.



$$\implies \begin{cases} \exists k_a \ : \ \forall n\text{-re } k_a \le a_n & k_a = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N, A-\varepsilon\} \\ \exists k_f \ : \ \forall n\text{-re } a_n \le k_f & k_f = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N, A+\varepsilon\}. \end{cases}$$

Így $\exists K: |a_n| \le K$, tehát korlátos.

b) $B \Rightarrow A$ hamis

$\boxed{3}$ Pl. $a_n = (-1)^n$ korlátos, de nem konvergens

2. feladat (10 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sort!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4+\frac{1}{n}}{n+3}$

a) $a_n = \frac{n}{n^2+3} > \frac{n}{n^2+3n^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{n}$; $\frac{1}{4}\sum^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens

$\boxed{4}$ $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ div.

minoráns kr.

b) Konvergens, mert Leibniz sor.

$\boxed{6}$ Ugyanis

$$|b_n| = \frac{4+\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}{\underbrace{n+3}_{\to\infty}} = 0$$

és $|b_n|$ monoton csökkenő, mert n növelésével a számláló csökken, a nevező nő.

anlv 101222/1.

3. feladat (20 pont)

a) Bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \sin(5x)$$

nem létezik!

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(5x)}{2x^2} = ?\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2(5x)}{2x^2} = ?$$

c) $f(x) = (2+\sin x)^{\operatorname{sh} 3x}$

$f'(x) = ?\,, \qquad D_{f'} = ?$

a) $\sin 5x = 0$, ha $5x = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\pi}{5}$

$\boxed{6}$ Tehát $x_n^{(1)} = n\frac{\pi}{5} \to \infty$ sorozatnál $f(x_n^{(1)}) = 0 \to 0$

$\sin 5x = 1$, ha $5x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + n\frac{2\pi}{5}$

Tehát $x_n^{(2)} = \frac{\pi}{10} + n\frac{2\pi}{5} \to \infty$ sorozatra $f(x_n^{(2)}) = 1 \to 1 \neq 0$

$\underset{\text{átviteli elv}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty} \sin 5x \nexists$.

b.) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 5x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2}_{\to 1} \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2}$ (4)

$\boxed{7}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2 5x}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2x^2}}_{\to 0} \underbrace{\sin^2 5x}_{\text{korl.}} = 0$ (3)

c.) $f(x) = e^{\ln(2+\sin x)^{\operatorname{sh}3x}} = e^{\operatorname{sh}3x \ln(2+\sin x)}$ (2) $D_f = \mathbb{R}$

$\boxed{7}$ $f'(x) = e^{\operatorname{sh}3x \cdot \ln(2+\sin x)} \cdot (\operatorname{sh}3x \cdot \ln(2+\sin x))' =$ (2)

$= (2+\sin x)^{\operatorname{sh}3x} \left(3\cdot\operatorname{ch}3x \cdot \ln(2+\sin x) + \operatorname{sh}3x \frac{\cos x}{2+\sin x}\right)$ (2)

$D_{f'} = \mathbb{R}$ (1)

an1v-101222/2.

4. feladat ((4+7+7)=18 pont)

a) Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!
Készítsen ábrát a szemléltetésére!

b) Az f függvény differenciálható az $I = (a\,,\,b)$ intervallumon és itt $f'(x) > 0$.
Mit állíthatunk a függvényről? Állítását bizonyítsa be!

c)

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - 4)\, e^{3t^2}\, dt\ , \qquad x > 0$$

Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan mononoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!

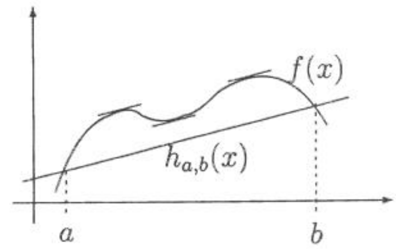
a) 4

(T) Lagrange-féle középértéktétel:

Ha f folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n, akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(3)



(1)

b) 7 Ha f differenciálható I-n és itt $f'(x)>0$, akkor f szigorúan monoton nő I-n. (2)

(B) $x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_2$: $[x_1, x_2]$-ben alkalmazható a Lagrange középértéktétel:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0 \text{ (a feltétel miatt)} \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Mivel $x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$. (5)

c) 7 $f(x) = \int_0^x \underbrace{(t^2-4)e^{+3t^2}}_{\text{folyt. (1)}} dt \xrightarrow[\text{II. alaptétele}]{\text{int. szám.}} f'(x) = (x^2-4)e^{+3x^2}$; $x>0$ (2)

$f'(x) = (x^2-4)\underbrace{e^{+3x^2}}_{>0}$

	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

(4)

Tehát f szig. mon. csökken $(0,2)$-en és szig. mon. nő a $(2,\infty)$ intervallumon

anlo 10122213.

5. feladat (8 pont)*

A kétszer differenciálható $y(x)$ függvény kielégíti az

$$(x+1)\,y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4} = 0$$

implicit függvénykapcsolatot és $y(-1) = 1$.
Van-e lokális szélsőértéke a függvénynek az $x_0 = -1$ pontban?
Írja fel a függvény $x_0 = -1$ pontbeli érintőegyenesének az egyenletét!

$x=-1,\ y=1$: $\quad 0\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{4} = 0$ ✓

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$1\cdot y^3 + (x+1)\,3y^2y' + \frac{1}{4}\,4\cdot y^3\cdot y' = 0$ (3)

$x=-1,\ y=1$:

$1 + 0 + y'(-1) = 0 \implies y'(-1) = -1$ (1)

$y'(-1) \neq 0$ (nem teljesül a lok. szélsőérték létezésének szükséges feltétele) $\implies$ nincs lok. sz.é. az $x=-1$ pontban (2)

$y_é = y(-1) + y'(-1)\,(x-(-1)) = 1 - 1\,(x+1)$ (2)

6. feladat (14 pont)*

Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $\int \cos^3 x \; dx = ?$

b) $\int \cos^2 x \; dx = ?$

c) $\int (2x-1)\cdot\cos(3x)\; dx = ?$

a) $\boxed{4}$

$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos x \cos^2 x\, dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\, dx =$

$= \int (\cos x - \underbrace{\cos x}_{f'}\, \underbrace{\sin^2 x}_{f^2})\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

b) $\boxed{3}$

$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2} + C$

c) $\boxed{7}$

$\int (2x-1)\cdot\cos 3x\, dx = (2x-1)\frac{\sin 3x}{3} - \frac{2}{3}\int \sin 3x\, dx =$ (3)

$\left.\begin{matrix} u = 2x-1 & v' = \cos 3x \\ u' = 2 & v = \frac{\sin 3x}{3} \end{matrix}\right\}$ (2)

$= (2x-1)\frac{\sin 3x}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{-\cos 3x}{3} + C$ (2)

an1v-1012221/4.

7. feladat (10 pont)*

a) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+8}\,dx = ?$ b) $\displaystyle\int \frac{4x+5}{4x^2+8}\,dx = ?$

a.) $\boxed{4}$ $\displaystyle\frac{1}{8}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{8}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C$

b.) $\boxed{6}$ $\displaystyle\int \frac{4x+5}{4x^2+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{8x}{4x^2+8}\,dx + 5\underbrace{\int \frac{1}{4x^2+8}\,dx}_{\text{a.)-beli feladat}} =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\ln(4x^2+8) + 5\,\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

8. feladat (11 pont)*

Vezesse be a $t = e^x$ új változót és határozza meg az alábbi integrált!

$$\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^x+3)}\,dx$$

Figyelem! A *-gal jelölt feladatokból legalább 12 pontot el kell érni!

$t = e^x \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$

Elvégezve a helyettesítést:

$\displaystyle\int \frac{t}{(t-2)(t+3)}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{(t-2)(t+3)}\,dt = \int\left(\frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+3}\right)dt$ 3

$\displaystyle\frac{1}{(t-2)(t+3)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+3}$

$t := -3:\ 1 = -5B \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$

$1 = A(t+3) + B(t-2)$ $t := 2:\ 1 = 5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

$\displaystyle\int\left(\frac{1}{5}\,\frac{1}{t-2} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{t+3}\right)dt = \frac{1}{5}\ln|t-2| - \frac{1}{5}\ln|t+3| + C$ 4 3

Így a keresett integrál:

$I = \frac{1}{5}\ln|e^x-2| - \frac{1}{5}\ln(e^x+3) + C$ 1

aulo 101222/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{6n} = ?$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsh} 5x^2}{\arcsin 3x^2} = ?$

$\boxed{4}$ a.) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{6n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{-2}{3n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}}\right)^2 = \left(\frac{e^{-2}}{e}\right)^2 = e^{-6}$

$\boxed{6}$ b.) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsh} 5x^2}{\arcsin 3x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+(5x^2)^2}} \cdot 10x}{\frac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}} \cdot 6x} = \frac{5}{3}$

$\frac{0}{0}$ $\quad \frac{10x}{6x} = \frac{5}{3}$

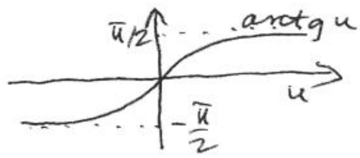
10. feladat (10 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-7}{(x-6)^2}$$

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = ?$, $\lim_{x\to 6} f(x) = ?$,

b) $f'(x) = ?$, ha $x \neq 6$

$\boxed{6}$ a.) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{x-7}{(x-6)^2}}_{} = \operatorname{arctg} 0 = 0$



$= \underbrace{\frac{x}{x^2}}_{=\frac{1}{x}} \frac{1-\frac{7}{x}}{\left(1-\frac{6}{x}\right)^2} \to 0 \cdot \frac{1-0}{(1-0)^2} = 0$ (3)

$\lim_{x\to 6} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-7}{(x-6)^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ (3)

$x-7 \to -1$, $(x-6)^2 \to +0$, $\frac{x-7}{(x-6)^2} \to -\infty$

$\boxed{4}$ b.) Ha $x \neq 6$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-7}{(x-6)^2}\right)^2} \underbrace{\left(\frac{x-7}{(x-6)^2}\right)'}_{\frac{1\cdot(x-6)^2-(x-7)2(x-6)}{(x-6)^4}}$$

an1v-101222/6.