1. feladat (5+10=15 pont)
a) Írja le egy f függgvény x_0 pontbeli határértékének definícióját!
b) A definíció alapján igazolja, hogy $\lim\limits_{x_0\to 2} \sqrt{5x+6} = 4$!

Mo. *a*) Tegyük fel, hogy x_0 torlódási pontja az f függvény értelmezési tartományának, ekkor $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\epsilon) > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. **(5p)** .
b) Legyen $\varepsilon > 0$, ekkor

$$|\sqrt{5x+6} - 4| \overset{(3p)}{=} \left| \frac{5x+6-16}{\sqrt{5x+6}+4} \right| \overset{(2p)}{=} \frac{5|x-2|}{\sqrt{5x+6}+4} \overset{(2p)}{\leq} \frac{5}{4}|x-2| \overset{(1p)}{<} \varepsilon,$$

ha $|x-2| < \delta(\epsilon) = \frac{4}{5}\varepsilon$ **(2p)** .

---

2. feladat (8 pont)
Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+5} + \frac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$$

A feladatsorra sajnálatos módon rákerült a megoldás egy része, ezért itt csak az $x = -5$ pont vizsgálatáért jár 8 pont.

Mo. A függvény folytonos függvények kompozíciója, így a nevezők zérushelyeiben, tehát az $x = -5$, $x = -3$, $x = 4$ pontban lehet szakadása **(3p)** .

$$\lim_{x\to -5\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}, \mathbf{(3p)}$$

így az $x = -5$ pontban véges ugrása van a függvénynek. **(2p)**

A piros rész rákerült a feladatlapra, ezért ezek a pontok NEM járnak!

$$\lim_{x\to -3\pm} f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \lim_{x\to -3\pm} \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-4)} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{1}{7}, \mathbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to 4\pm} f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{9} + \lim_{x\to 4\pm} \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-4)} = \operatorname{arctg} \frac{1}{9} + 6 \lim_{x\to 4\pm} \frac{1}{x-4} = \pm\infty, \mathbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek másodfajú szakadása van. **(2p)**

3. feladat (10+10+10=30 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(4x+5)}{\operatorname{sh}(3-4x)}$ *b)* $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{\operatorname{arsh}(-15-5x)}{\operatorname{sh}(3x+9)}$ *c)* $\lim\limits_{x\to0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x}}$

Mo. *a)* A függvények definíciója szerint

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{ch}(4x+5)}{\operatorname{sh}(3-4x)} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{4x+5}+e^{-4x-5}}{e^{3-4x}-e^{4x-3}} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x}}{e^{4x}} \cdot \frac{e^{5}+e^{-8x-5}}{e^{3-8x}-e^{-3}} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{e^5}{-e^{-3}} \overset{(\mathbf{1p})}{=} -e^8.$$

b) $\frac{0}{0}$ típusú határérték, így használható a L'Hospital-szabály **(1p)**

$$\lim_{x\to-3} \frac{\operatorname{arsh}(-15-5x)}{\operatorname{sh}(3x+9)} \overset{(\mathbf{6p})}{=} \lim_{x\to-3} \frac{\frac{-5}{\sqrt{1+(-15-5x)^2}}}{3\operatorname{ch}(3x+9)} \overset{(\mathbf{3p})}{=} -\frac{5}{3}.$$

c) 1^∞ típusú határérték **(1p)** :

$$\lim_{x\to0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{x\to0} \left(e^{\ln\cos(2x)}\right)^{\frac{3}{x}} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{x\to0} e^{3\frac{\ln\cos(2x)}{x}} \overset{(\mathbf{1p})}{=} e^{3\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos(2x)}{x}} \overset{(\mathbf{1p})}{=} 1,$$

mert

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln\cos(2x)}{x} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}}{1} \overset{(\mathbf{1p})}{=} 0$$

4. feladat (17 pont)
Határozza meg az $f(x) = \dfrac{e^{4x^3}\ln(3x^2+5x+1)}{\cos(\operatorname{sh} x)}$ függvény érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = 0$ pontban!

Mo. $f(0) = 0$ **(2p)** . $f'(x) =$

$$= \frac{\left(12x^2e^{4x^3}\ln(3x^2+5x+1) + \frac{(6x+5)e^{4x^3}}{3x^2+5x+1}\right)\cos(\operatorname{sh} x) - e^{4x^3}\ln(3x^2+5x+1)\operatorname{ch} x(-\sin(\operatorname{sh} x))}{\cos^2(\operatorname{sh} x)} (\mathbf{10p})$$

$f'(0) = 5$ **(3p)** , így az érintőegyenes egyenlete $y = 5x$ **(2p)** .

5. feladat (20 pont)
Melyek azok a legbővebb intervallumok, amelyeken az $f(x) = (x-4)^3(x+1)^2$ függvény monoton növő, illetve monoton fogyó? Hol és milyen típusú szélsőértékei vannak a függvénynek? Adja meg a függvény maximumát illetve minimunát a $[-2,3]$ intervallumon.

Mo. $D_f = \mathbb{R}$ **(1p)** , és

$$f'(x) = 3(x-4)^2(x+1)^2 + 2(x-4)^3(x+1) = \\ = (x-4)^2(x+1)(3x+3+2x-8) = (x-4)^2(x+1)(5x-5)\mathbf{(4p)}$$

így $f'(0) = 0$ ha $x=-1$, $x=1$, vagy $x=4$ **(3p)** .

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,4)$	4	$(4,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	infl. p.	$\nearrow$

(4p),

vagyis a függvény monoton fogy a $(-1,1)$ intervallumon, és nő a $(-\infty,-1)$ és $(1,\infty)$ intervallumokon, az $x=-1$ pontban lokális maximuma, az $x=1$ pontban lokális minimuma van. **(2p)** A függvény az intervallumon a maximumát, illetve minimumát az intervallum végpontjaiban, vagy az intervallum belsejében található lokális szélsőértékhelyeken veheti fel **(3p)** .

$$f(-2) = -216 < f(1) = -108 < f(3) = -16 < f(-1) = 0 \qquad \mathbf{(3p)}$$

vagyis a függvény maximuma az intervallumon 0, minimuma pedig -216.

Mivel a 2. feladatban 10 ponttal kevesebb pontot osztottunk ki, ezért minden dolgozat összpontszámát szorozzuk meg $\frac{10}{9}$-el, és a kapott eredményt egészre kerekítve vigyük be a pontszám táblázatba.

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez $A = 2\,\mathrm{m}^2$ területű lemezt használtunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy a V térfogata a legnagyobb legyen, és mekkora ez a legnagyobb térfogat?

Mo. Legyen az alaplap oldaléle a és a doboz magassága h. Ekkor a dobozhoz elhasznált lemez területe:

$$A = a^2 + 4ah \qquad \Longrightarrow \qquad h = \frac{A - a^2}{4a} \quad (\mathbf{2p})$$

A doboz térfogata:

$$V(a) = a^2 h = \frac{Aa - a^3}{4} \quad (\mathbf{2p})$$

A doboz térfogatának szélsőértékénél

$$V'(a) = \frac{A - 3a^2}{4} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \sqrt{\frac{A}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \mathrm{m} \quad (\mathbf{2p})$$

ami azt jelenti, hogy

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ \mathrm{m}, \qquad V_{\max} = \frac{A^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\ \mathrm{m}^3. \quad (\mathbf{2p})$$

A szélsőérték valóban maximum, hiszen $V''(a) = \dfrac{-3a}{2} < 0$.