2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998/99 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Adjon meg két olyan pontot, mely rajta van az $x-y+2z=-3$, $2x+y+2z=1$ síkok metszésvonalán!
MO. Pl. $x=0$–val $-y+2z=-3$, $y+2z=1$, amiből $4z=-2$, tehát $y=2$, így $P_1=(0,2,-\frac{1}{2})$ és ugyanígy pl. $y=0$–val $x+2z=-3$, $2x+2z=1$, amiből $x=4$, tehát $z=-\frac{7}{2}$, így $P_2=(4,0,-\frac{7}{2})$. VAGY: Másodikból az elsőt levonva: $x+2y=4$, így $y=t, x=4-2t, z=0.5(2-2x-y)=$ $=0.5(1-8+4t-t)=-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}t$ a metszésvonal, tehát pl. $t=1,3$–al: $P_1=(2,1,-2)$, $P_2=(-2,3,1)$.

2. Határozza meg a következő határértékeket! a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(2+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2}$ b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n}$

MO. a) ∞, mert $\left(2+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2}\geq 2^{n^2}\longrightarrow\infty$. **b)** 1, mert $1\leq\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n}=\left(\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\leq 9^{\frac{1}{n}}\longrightarrow 1$, mert $\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2}\longrightarrow e^2\leq 3^2\leq 9$, hiszen az $a_n=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n}\longrightarrow e^2$ részsorozata.

3. Legyen $f(x)=e^x$ és $g(x)=f(f(f(\dfrac{1}{x})))$ $(x\neq 0)$, $g(0)=0$. Hol nem folytonos a g függvény, és itt milyen szakadása van?
MO. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0+}g(x)=\lim\limits_{y\longrightarrow\infty}e^{e^y}=\lim\limits_{z\longrightarrow\infty}e^z=\infty$ és $\lim\limits_{x\longrightarrow 0-}f(x)=\lim\limits_{y\longrightarrow-\infty}e^{e^{e^y}}=\lim\limits_{z\longrightarrow 0}e^{e^z}=\lim\limits_{w\longrightarrow 1}e^w=e$, tehát az origóban másodfajú szakadása van, másutt folytonos, mert elemi függvény.

4. Legyen n tetszőleges nemnegatív egész. Határozza meg a $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}x^ne^{-x}$ határértéket!
MO. L'Hospitalt felhasználva, n–re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}x^ne^{-x}=0$ minden természetes n–re. Valóban $n=0$ esetén $e^{-x}\xrightarrow[x\longrightarrow\infty]{}0$. Másrészt, $n\geq 1$–re $x^ne^{-x}=\dfrac{x^n}{e^x}\sim\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}\xrightarrow[x\longrightarrow\infty]{}0$ az indukciós hipotézis alapján.

5. Ábrázolja vázlatosan a gyökök, a szakadási helyeken és a végtelenben vett határértékek és a szélsőérték-helyek meghatározása alapján az $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$ függvényt!
MO. Csak az $x=1$–ben szakad. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1-}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f(x)=\infty$, $f'(x)=\dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2}$, ami az origóban növekedően, $x=2$–ben csökkenően vált előjelet, így lokális minimuma van az origóban, $f(0)=0$, lokális maximuma pedig az $x=2$–ben, $f(2)=-4$.

6. Legyen $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$. Van-e primitív függvénye f–nek a $[-1,1]$ intervallumon?
MO. f mindenütt folytonos (origón kívül elemi függvény, origóban korlátos és nullához tartó szorzataként nullához tart), így minden integrálfüggvénye primitív függvénye, és ez szintén a folytonosság miatt mindenütt létezik.