Felsőbb matematika vizsga – 2015-01-20

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Definiálja egy mátrix Frobenius-normájának fogalmát! *(1 pont)*

2. Hány darab nemnulla elem van egy 2015×2015-ös (komplex) unitér mátrix Jordan-féle normálalakjában? (rövid indoklást is kérünk) *(2 pont)*

3. Legyen az $f : V \to V$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. Legyen $\mathbf{B}$ az f egy másik bázisban felírt mátrixa. Mennyi $\mathrm{trace}(\mathbf{B})$? *(1 pont)*

4. Mutasson példát olyan lineáris leképezésre, melynek van egy olyan invariáns altere, mely nem sajátaltér. Adja meg az invariáns alteret is! *(2 pont)*

5. Melyek azok a lineáris transzformációk, amelyeknek minden nemnulla vektor sajátvektora? *(1 pont)*

6. Mennyi az $U = \{(x, y, z, w) : x+y+z+w = 0\}$ altér és az $(1, 2, 3, 4)$ pont távolsága? *(2 pont)*

7. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 9 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását! *(2 pont)*

8. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ * & * & -5 \end{bmatrix}$, ahol a $*$-gal jelölt elemeket nem ismerjük. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A}$ egyik sajátértéke $\lambda \neq 0$. Határozzuk meg a többi sajátértéket! (ne a karakterisztikus polinom felírásával próbálkozzunk!) *(2 pont)*

9. Az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris felbontása

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel azt a mátrixot, melynek 1 a rangja, és Frobenius-normában a legközelebb van $\mathbf{A}$-hoz! *(2 pont)*

10. Mondja ki a pozitív mátrixokról szóló Perron-tételt! *(2 pont)*

11. Mondja ki és bizonyítsa be a lineáris leképezés mátrixának létezéséről szóló tételt! *(4 pont)*

12. Mit értünk egy mátrix unitér diagonalizálhatóságán? Igazoljuk, hogy unitéren diagonalizálható mátrix normális. *(4 pont)*