4. vizsga

Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. a) Legyenek $A, B \subset \Omega$ események. Milyen feltételek mellett és hogyan definiáljuk a B-nek az A-ra vett feltételes valószínűségét?

   b) Mondjuk ki a Bayes-tételt. (Elegendő az előadáson "egyszerű Bayes-tételnek" nevezett alakot kimondani, de a teljes valószínűség tételével kombinált alak is megfelelő.)

   Megoldás:

   a)

   (1 pont) Ha $\mathbb{P}(A) > 0$,

   (4 pont) akkor a B-nek az A-ra vett feltételes valószínűsége $\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$

   b)

   (1 pont) Legyenek $A, B \subset \Omega$ események, melyekre $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$.

   (4 pont) Ekkor $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

   Ehelyett megadható a teljes valószínűség tételével kombinált alak:

   (1 pont) Legyen $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ teljes eseményrendszer, ahol $\mathbb{P}(A_i) > 0$,

   (1 pont) legyen továbbá $B \subset \Omega$ tetszőleges esemény, melyre $\mathbb{P}(B) > 0$,

   (3 pont) ekkor

   $$\mathbb{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}.$$

2. Egy 32 lapos magyarkártya-pakliban 8 darab piros lap található. A pakli megkeverése után húzunk egy lapot, és ha az piros, akkor egy másodikat is (egyéb esetben megállunk az első húzás után). Továbbá, ha a második húzott lap is piros, akkor egy harmadik lapot is húzunk (egyéb esetben ismét megállunk). Mi a valószínűsége, hogy pontosan 2 darab piros lapot húzunk?

Megoldás:

(1 pont) Legyen Pi_1 az az esemény, hogy elsőre pirosat húztunk, Pi_2 az az esemény, hogy (húztunk legalább két lapot, és) másodikra pirosat húztunk, Pi_3 pedig az, hogy (három lapot húztunk, és) harmadszorra pirosat húztunk. A kérdéses valószínűség a $\mathbb{P}(Pi_2 \cap \overline{Pi_3})$.

(1 pont) Itt $\mathbb{P}(Pi_2 \cap \overline{Pi_3}) = \mathbb{P}(Pi_1 \cap Pi_2 \cap \overline{Pi_3})$,

(1 pont) a szorzási szabályt felhasználva pedig ez éppen

$$\mathbb{P}(Pi_1)\,\mathbb{P}(Pi_2 \mid Pi_1)\,\mathbb{P}(\overline{Pi_3} \mid Pi_1 \cap Pi_2)$$

(2 pont) Itt, mivel 8 piros lap van a 32-ből, $\mathbb{P}(Pi_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

(2 pont) Feltéve, hogy az első húzás piros lett, a maradék 31 lapból 7 piros van, így $\mathbb{P}(Pi_2 \mid Pi_1) = \frac{7}{31}$.

(2 pont) Végül, ha az első két húzás piros, akkor a maradék 30 lapból 6 piros és 24 nem piros marad, így $\mathbb{P}(\overline{Pi_3} \mid Pi_1 \cap Pi_2) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$.

(1 pont) Tehát a végeredmény: $\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{155} \approx 0{,}0452$.

3. Egy urnában 3 fehér és 3 piros golyó van, melyekből véletlenszerűen kihúzunk összesen 3 golyót visszatevés nélkül. Jelölje X a húzott piros golyók számát. Határozzuk meg az X várható értékét és szórását.

Megoldás:

(1 pont) Az X értékkészlete: $\mathrm{ran}X = \{0, 1, 2, 3\}$.

(1 pont) Összesen $\binom{6}{3} = 20$-féleképp húzhatunk ki 3 golyót,

(2 pont) így

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}(\text{csak fehéret húzunk}) = \frac{\binom{3}{3}}{20} = \frac{1}{20},\\
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(\text{1 pirosat és 2 fehéret húzunk}) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{2}}{20} = \frac{9}{20},\\
\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(\text{2 pirosat és 1 fehéret húzunk}) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{1}}{20} = \frac{9}{20},\\
\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(\text{3 pirosat húzunk}) = \frac{\binom{3}{3}}{20} = \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

(2 pont) Az X várható értéke (a várható érték definíciója szerint)

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) = \frac{9}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}.$$

(2 pont) A transzformált várható értéke alapján

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2^2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3^2 \cdot \mathbb{P}(X = 3) = \frac{9}{20} + \frac{36}{20} + \frac{9}{20} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10}.$$

(1 pont) Tehát az X szórásnégyezte

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X^2) = \frac{27}{10} - \frac{9}{4} = \frac{9}{20},$$

(1 pont) azaz az X szórása

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{9}{20}} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \approx 0{,}6708.$$

(Más eseménytér segítségével is megoldható a feladat, pl. ha a húzott golyók sorrendjét is figyelembe vesszük. Ilyen esetben is analóg módon történik a pontozás.)

4. Egy adott típusú villanykörte X élettartama (években mérve) exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és tudjuk, hogy e^{-1} a valószínűsége annak, hogy a körte két évnyi használat során nem ég ki. Határozzuk meg azt az y valós számot, melyre igaz, hogy $1/2$ annak a valószínűsége, hogy a körte kevesebb, mint y év használat alatt kiég, azaz, amelyre a $\mathbb{P}(X < y) = 1/2$ egyenlet teljesül. (Ezt az y számot az X mediánjának nevezzük.)

   Megoldás:

   (2 pont) A megadott valószínűség kifejezhető az X eloszlásfüggvénye segítségével. A komplementer eseményre áttérve, az X folytonosságát is használva:

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \le 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - F_X(2) = 1 - (1 - e^{-2\lambda}) = e^{-2\lambda},$$

   ahol λ az eloszlás paramétere.

   (2 pont) Mivel a fenti valószínűség e^{-1}, így ebből $2\lambda = 1$, azaz $\lambda = \frac{1}{2}$.

   (1 pont) Mivel $\mathbb{P}(X < y) = F_X(y) = 1 - e^{-y\lambda} = 1 - e^{-y/2}$,

   (1 pont) így az $1 - e^{-y/2} = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk.

   (1 pont) Átrendezve $e^{-y/2} = \frac{1}{2}$,

   (2 pont) végül mindkét oldal logaritmusát véve $-y/2 = \log \frac{1}{2}$,

   (1 pont) azaz $y = 2 \log 2 \approx 1{,}3863$.

5. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat, amelyből két értéket kitöröltek. Határozzuk meg az X és az Y marginális eloszlását (peremeloszlását), ha tudjuk, hogy $\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2}$.

Y \ X	0	2
0		1/2
3	1/3	

   Megoldás:

   (1 pont) Legyenek a hiányzó értékek: $u = \mathbb{P}(X = Y = 0)$ és $v = \mathbb{P}(X = 2, Y = 3)$.

   (1 pont) Az Y marginális eloszlása ezekkel kifejezve:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = u + \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{3} + v.$$

   (2 pont) Az Y várható értéke

$$\frac{3}{2} = \mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + 3 \cdot \mathbb{P}(Y = 3) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + v\right),$$

   (1 pont) tehát $v = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

   (1 pont) Mivel a táblázat elemei egy teljes eseményrendszer valószínűségeit adják, így összegük 1,

   (1 pont) azaz

$$1 = u + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + v = u + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = u + 1,$$

   tehát $u = 0$.

   (1 pont) Ezért Y peremeloszlása:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{2}.$$

   (2 pont) Az X peremeolszlása pedig:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

6. Egy bevásárlóközpontban a látogatók száma egy hétköznapnak egy adott órájában normális eloszlást követ. Egymás után 10 hétköznap megszámoljuk a látogatókat ebben az órában, és a következő számokat kapjuk: 1986, 1870, 2030, 2067, 2172, 2041, 1994, 2022, 2012, 2146. Szerkesszünk 95%-os szignifikanciaszintű konfidenciaintervallumot a látogatók számának várható értékére, ha a szórás értékét 78-nak tételezzük fel. Hány elemű mintára volna szükség, ha azt szeretnénk, hogy az intervallum hossza legfeljebb 30 legyen?

   Megoldás:

   (1 pont) Az intervallum szerkesztéséhez először kiszámoljuk az átlagot

$$\overline{x} = \frac{1986 + 1870 + 2030 + 2067 + 2172 + 2041 + 1994 + 2022 + 2012 + 2146}{10} = 2034.$$

   (1 pont) A konfidenciaintervallum $(\overline{x} - r_\varepsilon; \overline{x} + r_\varepsilon)$ alakú,

   (1 pont) ahol, mivel a $\sigma = 78$ szórás ismert,

   (1 pont) a sugarat az

$$r_\varepsilon = \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sigma}{\sqrt{n}}$$

   képlettel számoljuk, ahol $n = 10$ a minta elemszáma, $1 - \varepsilon = 0{,}95$ a konfidenciaszint.

   (1 pont) Azaz $r_\varepsilon = \dfrac{\Phi^{-1}(0{,}975) \cdot 78}{\sqrt{10}} = \dfrac{1,96 \cdot 78}{\sqrt{10}} \approx 48,34.$

   (1 pont) Tehát a konfidenciaintervallum $(2034 - 48{,}34;\ 2034 + 48{,}34) = (1985{,}66; 2082{,}34)$.

   (1 pont) Az intervallum hossza akkor lesz legfeljebb 30, ha a sugara 15,

   (1 pont) ez pedig pontosan akkor teljesül, ha

$$r_\varepsilon = \frac{1{,}96 \cdot 78}{\sqrt{n}} = \frac{152{,}88}{\sqrt{n}} \leq 15,$$

   azaz ha $10{,}192 \leq \sqrt{n}$.

   (1 pont) Ez pedig azzal ekvivalens, hogy $n \geq 103{,}876864$,

   (1 pont) tehát legalább 104 elemű mintára van szükség, hogy az intervallum hossza legfeljebb 30 legyen.