3. Vizsgazárthelyi

A1 2011/12 tél Munkaidő 90'

1. Legyen E tetszőleges nem üres halmaz és $\overline{A} = \{x \in E : x \notin A\}$ tetszőleges $A \subseteq E$ esetén. Mit mondhatunk az $A \subseteq E$ és $B \subseteq E$ halmazok viszonyáról, ha

$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \emptyset \,.$$

2. (a) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sqrt{16n^2 + 2n} - \sqrt{16n^2 - 2n} = ?$ (b) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\dfrac{16n^2 + 2n}{16n^2 - 2n}} = ?$

3. Legyen $f(x) = xe^{-x}$. Döntse el, hogy invertálható-e f a $(0, \infty)$ intervallumon és ha nem, akkor adja meg azt a legbővebb nyílt intervallumot (ha van ilyen), melynek kezdőpontja az origó és melyen f invertálható!

4. Legyen $f(x) = x^x$ minden $x > 0$-ra. $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = ?$

5. (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos x}\, dx = ?$

(b) Konvergens-e az $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + \cos^2 x}\, dx$ improprius integrál?

6.

Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem?

(1) Legyenek (a_n) és (b_n) tetszőleges valós elemű végtelen számsorozatok.

(a) Ha (a_n) és (b_n) konvergens, akkor $(a_n + b_n)$ is konvergens.

(b) Ha (a_n) és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ is divergens.

(c) Ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ konvergens.

(d) Ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ divergens.

(2) Legyen $a < b$ tetszőleges valós, $I = [a, b]$ és f egy I-n értelmezett valós függvény.

(a) Ha f folytonos I-n , akkor f egyenletesen folytonos I-n.

(b) Ha f egyenletesen folytonos I-n, akkor f folytonos I-n.

(c) Ha f egyenletesen folytonos I-n és deriválható is itt, akkor a deriváltja korlátos I-n.

(d) Ha f deriválható I-n és a derivált korlátos itt, akkor f egyenletesen folytonos I-n.

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal A1 2011/12 tél Munkaidő 90'

1. Legyen E tetszőleges nem üres halmaz és $\overline{A} = \{x \in E : x \notin A\}$ tetszőleges $A \subseteq E$ esetén. Mit mondhatunk az $A \subseteq E$ és $B \subseteq E$ halmazok viszonyáról, ha $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \emptyset$.

MO. A feltételt használva: $x \in A \rightsquigarrow x \in A \cup B \rightsquigarrow x \notin \overline{A} \cup \overline{B} \rightsquigarrow x \notin \overline{B} \rightsquigarrow x \in B$ 4p

és pontosan ugyanígy $x \in B \to x \notin \overline{A} \rightsquigarrow x \in A$.

Következésképp $A = B$. 4p

Vagy disztributivitással a feltételből: $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = \emptyset \rightsquigarrow A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset$, 6p
amikből direkte leolvasható, hogy $x \in A \rightsquigarrow x \notin \overline{B} \rightsquigarrow x \in B$ és $x \in B \rightsquigarrow x \notin \overline{A} \rightsquigarrow x \in A$,

azaz $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$. $\frac{4p}{10p}$ $\frac{}{10p}$

2. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{16n^2+2n} - \sqrt{16n^2-2n} = ?$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{16n^2+2n}{16n^2-2n}} = ?$

MO. (a) $\sqrt{16n^2+2n} - \sqrt{16n^2-2n} = \dfrac{4n}{\sqrt{16n^2+2n} + \sqrt{16n^2-2n}} =$ 2p

$$= \frac{4}{\sqrt{16+\frac{2}{n}} + \sqrt{16-\frac{2}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$ 2p

(b) Elég nagy n-ekre: $1 = \sqrt[n]{\dfrac{16n^2}{16n^2}} \le \sqrt[n]{\dfrac{16n^2+2n}{16n^2-2n}} \le \sqrt[n]{\dfrac{16n^2+2n^2}{16n^2-2n^2}} = \sqrt[n]{\dfrac{18n^2}{14n^2}} = \sqrt[n]{\dfrac{9}{7}}$ 5p

és persze $\sqrt[n]{a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ tetsz. $a > 0$-ra, így csendőrelvvel: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{16n^2+2n}{16n^2-2n}} = 1$ $\frac{1p}{10p}$

3. Legyen $f(x) = xe^{-x}$. Döntse el, hogy invertálható-e f a $(0,\infty)$ intervallumon és ha nem, akkor adja meg azt a legbővebb nyílt intervallumot (ha van ilyen), melynek kezdőpontja az origó és melyen f invertálható!

MO.

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \begin{cases} > 0 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{ha } x = 1 \\ < 0 & \text{ha } x > 1 \end{cases} \rightsquigarrow x = 1\text{-ben maximum.}$$ 3p

$f(0) = 0$, $f(1) = 1/e$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \rightsquigarrow f$ bármely $0 < c < 1/e$ értéket felvesz
mind a $(0,1)$ mind pedig az $(1,\infty)$ intervallumon és csak ezeket veszi fel $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén f nem invertálható a $(0, 1+\varepsilon)$-on, így persze a $(0,\infty)$-en sem. 4p

Mivel $(0,1)$-en $f'(x) > 0$, f szigorúan monoton növő a $(0,1)$-en, így ott invertálható. $\frac{3p}{10p}$

4. Legyen $f(x) = x^x$ minden $x > 0$-ra. $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = ?$

MO. $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$. 4p

Tehát $f'(x) = e^{x\ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x(\ln x + 1)$. 2p

$\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$ hiszen $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x = 0$. 2p

Mivel $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ így $f'(x) = x^x(\ln x + 1) \xrightarrow[x\to 0+]{} -\infty$. $\frac{2p}{10p}$

Folytatás a következő oldalon.

5. **(a)** $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = ?$ **(b)** Konvergens-e az $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+\cos^2 x}\,dx$ improprius integrál?

MO.

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \ln 2$ 5p

(b) Majoráns kritériummal létezik mert $\left|\frac{\sin^2 x}{x^2+\cos^2 x}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|$ és persze az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ létezik. 5p

10p

6.

Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem?

(1)

(a) Ha (a_n) és (b_n) konvergens, akkor (a_n+b_n) is konvergens.

(b) Ha (a_n) és (b_n) divergens, akkor (a_n+b_n) is divergens.

(c) Ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_n+b_n) konvergens.

(d) Ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_n+b_n) divergens.

(2) Legyen $a<b$ tetszőleges valós, $I=[a,b]$ és f egy I-n értelmezett valós függvény.

(a) Ha f folytonos I-n , akkor f egyenletesen folytonos I-n.

(b) Ha f egyenletesen folytonos I-n, akkor f folytonos I-n.

(c) Ha f egyenletesen folytonos I-n és deriválható is itt, akkor a deriváltja korlátos I-n.

(d) Ha f deriválható I-n és a derivált korlátos itt, akkor f egyenletesen folytonos I-n.

MO.

(1)

(a) Igen: konvergencia invariáns az alapműveletekre 1p

(b) Nem: $a_n=n$, $b_n=-n$ divergens, de az $a_n+b_n=0$ konvergens. 1p

(c) Nem: $a_n=0$ konvergens, $b_n=n$ divergens, és $a_n+b_n=n$ is divergens. 1p

(d) Igen: ha a_n+b_n konvergens lenne, akkor $b_n=(a_n+b_n)-a_n$ is konvergens lenne. 1p

(2)

(a) Igen: Heine-tétel. 1p

(b) Igen: a definíció alapján az egyenletes folytonosság szigorúan erősebb tulajdonság, mint a folytonosság. 1p

(c) Nem: $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$ az origón kívül $f(0)=0$, folytonos így egyenletesen folytonos pl. a $[-1,1]$-en, deriválható az origóban is ($f'(0)=0$), de a deriváltja az origón kívül: $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ nem korlátos. 3p

(d) Igen: Lagrange-val: $|f(x)-f(y)|=|f'(c)(x-y)|\le K|x-y|$. 1p