

Elektrodinamika globális mennyiségekkel

— kézirat —

Gyimóthy Szabolcs
gyimothy@evt.bme.hu

2018. április 24.

Bevezető

Ez a jegyzet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Karán oktatott „Elektromágneses terek alapjai” tantárgyhoz készült azzal a céllal, hogy az elektrodinamika alternatív megközelítését adja. Az elektromágneses tér matematikai leírásának széles körben elterjedt eszköze a *vektoranalízis*. Azonban az oktató gyakran tapasztalja, hogy ha valaki nem rendelkezik kellő ismerettel a vektoranalízis tárgykörében, az megakadályozza a térelmélet *fizikájának* megértésében.

Erre tekintettel az elektrodinamika alapvető összefüggéseit első lépésben olyan globális fizikai mennyiségekkel fogalmazzuk meg, amelyek matematikája egyszerűbb, és emiatt talán áttekinthetőbb. Ellentétben a skalár- és vektormezőkkel – amelyek a tér pontjaihoz kötődő, lokális mennyiségek – a globális mennyiségek kiterjedt alakzatokhoz (görbékhez, felületekhez, térfogatokhoz) köthetők. Továbbá létezik eljárás, amellyel akár közvetlenül mérhetők, vagyis nem szükséges azokat visszavezetni más, elemibb mennyiségekre. Megemlítjük, hogy a térelmélet ilyen alapon való következes tárgyalása elsősorban Tonti nevéhez fűződik [1].

A globális mennyiségek bevezetését oktatási szempontból az is indokolja, hogy általa egyszerűen bemutatható a *véges integrálok módszere*, egy olyan numerikus technika, amelyet széles körben használnak a villamosmérnöki szakma különböző területein az elektromágneses elvű eszközök számítógéppel segített tervezésére [2]. Ráadásul az említett numerikus módszer ismertetése során a térelmélet és a hálózatelmélet kapcsolata is feltárható.

Végső soron természetesen nem tekinthetünk el a terek vektoranalitikai leírásától sem, hiszen a tananyag további részében, amely az elektrodinamika klasszikus részterületeit veszi sorra, a hagyományoknak megfelelően mi is azt használjuk. Ezért megadjuk azokat az összefüggéseket, amelyek biztosítják az átmenetet a kétféle leírás között.

Tartalomjegyzék

Bevezető	1
1. Alakzatok topológiai irányítása	3
2. Forrásmennyiségek	5
3. Intenzitások és fluxusok	7
4. A Maxwell-egyenletek globális alakja	11
5. Kapcsolat a vektoranalitikai leírással	13
5.1. Források	13
5.2. Intenzitásvektorok	14
5.3. Gerjesztett vektorok	15
5.4. Maxwell-egyenletek	17
6. Konstitúciós egyenletek	19
7. A véges integrálok módszere	20
7.1. Térbeli diszkretizálás	20
7.2. Egyenletrendszer felállítása	21
7.3. Időbeli diszkretizálás	26
7.4. Peremfeltételek	27
7.5. Hálózati egyenletek	27
7.6. Kitekintés	29
Felhasznált irodalom	31

1. Alakzatok topológiai irányítása

Tekintsük a háromdimenziós tér különböző alakzatait: pontokat, görbéket, felületeket és térfogatokat. Ebben a szakaszban az alakzatok *topológiai* tulajdonságait vizsgáljuk. Először is leszűkítjük az alakzat fogalmát az egyszerűen összefüggő, folytonos sokaságokra. Ezen túlmenően kikötjük, hogy egy görbe nem tartalmazhat elágazást, a felület pedig nem metszheti önmagát. A görbe és a felület lehet *nyitott* vagy *zárt*: a nyitott görbének pontosan két végpontja van; a nyitott felületet egy zárt peremgörbe szegélyezi; a zárt felület pedig egy térfogatot ölel körül.

A görbéket és a felületeket kétféleképpen irányíthatjuk: egyiket *belső*, másikat *külső* irányításnak nevezzük. A külső irányítást úgy tekinthetjük, mint amelyhez az alakzat topológiai duálját (görbéhez felületet, illetve felülethez görbét) használjuk fel.

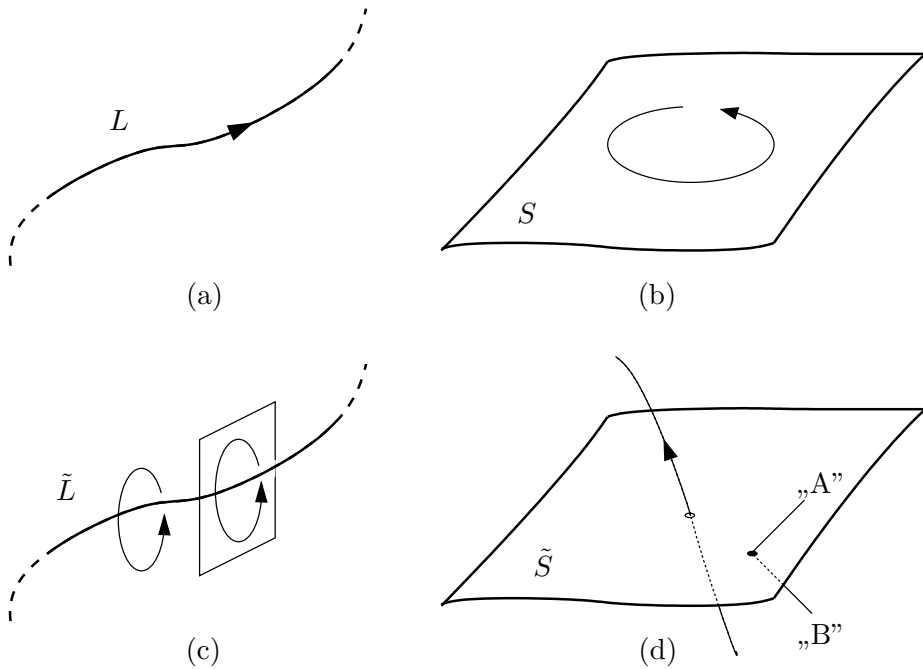
- Egy L görbe belső irányításán a görbe menti *haladási irány* kijelölését értjük (1/a. ábra).
- Egy S felület belső irányítását a felvett *körbefordulási irány*, jellemzi (1/b. ábra).
- Egy \tilde{L} görbe külső irányítása a *csavarodási irány* rögzítésével ekvivalens (1/c. ábra). Ez az irány (az ábra szerint) megfeleltethető egy a görbét keresztező felület belső irányításának, amely így a görbe *megkerülési irányaként* is értelmezhető.
- Végül egy \tilde{S} felület külső irányítása nem más, mint a *referenciaoldal* (pl. az „A” oldal) megválasztása (1/d. ábra). Ez az orientáció ugyanakkor kijelölhető egy a felületet átdőfő, belső irányítású görbével is, tehát a felület *keresztezési irányaként* fogható fel.

Vegyük észre a következőket:

- A referenciairányt mind a négy esetben pontosan *kétféleképpen* választhatjuk meg. Később látni fogjuk, hogy ez az irányítás határozza meg bizonyos skalár fizikai mennyiségek *előjelét*.
- Egyik orientáció esetében sem számít, hogy *nyílt* vagy *zárt* alakzatról van-e szó, ugyanis nem hivatkozunk a görbe végpontjaira, illetve a felületet szegélyező kontúrvonalra.
- Az irányítást úgy képzeljük el, mint amely az alakzat bármely pontjában értelmezett, továbbá „folytonos”, azaz a „szomszédos” pontokban megegyező.¹
- A „külső” jelzőt az indokolja, hogy ez a fajta irányítás csak az alakzatot befoglaló (esetünkben háromdimenziós) térből, azaz kívülről szemlélve értelmezhető, míg a belső irányítás független attól.
- Az irányítás típusa a jelölésben is kifejeződik: a külsőleg irányított alakzat szimbóluma fölé hullámvonalat teszünk.

Furcsának tűnhet, de a térfogatok, sőt a pontok is irányíthatók. Egy térfogat külső irányítása a „bentről-ki” vagy „kintről-be” referenciairány megválasztását jelenti. Egy

¹Három dimenzióban léteznek felületek, amelyek nem irányíthatók folytonosan, sem belső, sem külső értelemben. Legismertebb képviselőjük a Möbius-szalag.



1. ábra. Háromdimenziós görbék és felületek irányítása: (a) belső irányítású görbe, (b) belső irányítású felület, (c) külső irányítású görbe, (d) külső irányítású felület.

pont belső irányítása pedig a „forrás”, ill. „nyelő” tulajdonsággal ekvivalens. Belátható, hogy a térfogat külső irányítása megadható egy belső irányítású pont segítségével, és viszont, tehát a dualitás itt is érvényesül.

A mérnöki matematikaoktatásban általában csak a görbe belső, valamint a felület külső irányítása szerepel, mint a vektoranalízisben felhasznált fogalmak, azzal a kiegészítéssel, hogy térfogatnál a „bentről-ki”, pontnál pedig a „forrás” az alapértelmezett irány. Megjegyezzük, hogy a felület külső irányítását a *normálvektor* (felületi normális) kijelölésével szokás azonosítani, azonban ez a kelleténél jóval összetettebb fogalom, mivel feltételezi többek között a „hosszúság” és a „merőlegesség” értelmezését.

2. Forrásmennyiségek

Az elektromágneses tér közvetlen forrásai a töltések és az áramok. Mindkettő mérését az *erőhatásra* szokás visszavezetni.

Térfogatban foglalt össztöltés — A töltést egy zárt térfogathoz rendeljük: a V tér-rész össztöltése Q_V . A két nyugvó töltés által egymásra kölcsönösen kifejtett erőt a Coulomb-törvénnyel írjuk le. Ez lehetővé teszi a töltésmennyiség mérését például a 2. ábra szerinti elrendezésben: a 2. térfogatban foglalt töltés által az 1. számúra kifejtett erő közelítőleg

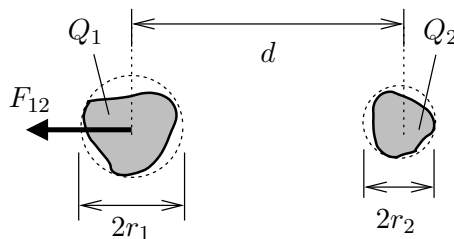
$$F_{12} \approx k_E \frac{Q_1 Q_2}{d^2}, \quad (1)$$

amelyben k_E ismert arányossági tényező. Az összefüggés annál pontosabb, minél inkább teljesül az $r_1, r_2 \ll d$ reláció, azaz minél kisebb a töltéeloszlások jellemző lineáris mérete azok közepes távolságához képest. Ha az egyik töltést ismerjük, a másik értéke számítható.

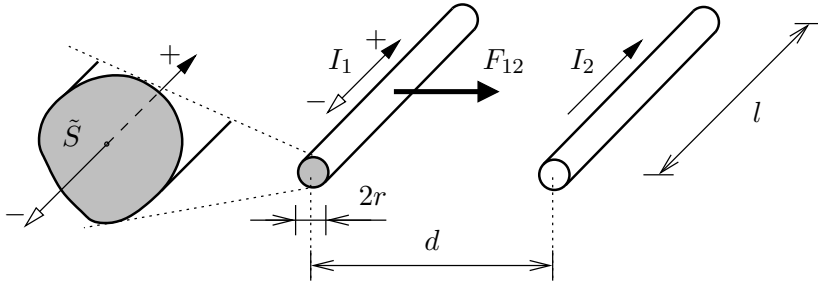
Az ábrán az erő referenciáiránya azonos előjelű töltéseket feltételez, ugyanis ekkor lép fel taszító erő; ha az erő tényleges iránya ezzel ellentétes (vonzó), akkor a két töltés előjele különbözik. Ennél több támpontot nem ad az erőtörvény a töltések előjelére nézve. Valóban, a pozitív-negatív előjel hozzárendelése a kétféle töltéshez *megállapodás* kérdése (eszerint pl. az elektron töltése negatív). A töltésre vonatkozó előjel-konvenció azután kihat az összes további mennyiség előjelére.

Az eddigiekből nem következik, de a később tárgyalandó Maxwell-egyenletek egységes írásmódja miatt mégis indokolt, hogy a töltést irányított, mégpedig külső irányítású térfogathoz rendeljük. Ez a töltés előjelét is befolyásolja: megállapodás szerint ha a \tilde{V} térfogat „bentről-ki” irányú, akkor a töltésére a hagyományos előjel-konvenció érvényes, ha viszont „kintről-be” irányú, akkor $Q_{\tilde{V}}$ a ténylegesen bennfoglalt töltés mínusz megszerese.

Felületen áthaladó áramerősség — Az áram többek között az Ampère-féle erőtörvény alapján mérhető (3. ábra). Ehhez vegyünk két hosszú, vékony, párhuzamos vezetőket, amelyekben I_1 , illetve I_2 áram folyik. Az elrendezés méreteire teljesüljön az $r \ll d \ll l$ feltétel. A vezetékek l hosszúságú szakaszai között ébredő erő



2. ábra. Elvi elrendezés a térfogatban lévő töltésmennyiség méréséhez.



3. ábra. Elvi elrendezés az áram méréséhez: az áram egy külső irányítású felülethez rendelhető.

képlete (az összefüggések közelítő jellegét itt és a továbbiakban nem jelöljük)

$$F_{12} = \pm k_M \frac{I_1 I_2}{d} l, \quad (2)$$

amelyben k_M ismert arányossági tényező. A képlet előjeles eredményt szolgáltat, amely pozitív érték esetén vonzó, negatív esetén taszító erőnek felel meg (1. az ábrán F_{12} referenciáirányát). A (2) formula elején álló, egyelőre meghatározatlan előjelet erre tekintettel kell összehangolni az *áramok előjelével*.

Megállapodás szerint az áram *tényleges* iránya a pozitív töltések haladási irányával egyezik meg (illetve negatív töltéshordozóknál azzal ellentétes). Tegyük fel, hogy az I_2 áram ismert, és I_1 meghatározása a cél. Az I_1 áram *referenciáiránya* az az irány, amelyhez az áram *tényleges* irányát viszonyítjuk, és amely megadja az utóbbi előjelét: egyező irány esetén pozitív, különben negatív. Ezt a referenciáirányt kétféleképpen vehetjük fel, amint a 3. ábrán látható: a teli és üres nyílhegy mellett pedig az az előjel áll, amelyet az adott referenciáirány választása esetén a (2) képletben használni kell.

A kinagyított részleten az is látszik, hogy ez a referenciáirány egyértelműen megfeleltethető a keresztmetszet, mint felület keresztvezési irányának, amely nem más, mint a felület külső irányítása (lásd 1. szakasz). Az áramerősséget valójában nem vezetékhez, hanem egy külső irányítású felülethez rendeljük hozzá – az \tilde{S} felület árama $I_{\tilde{S}}$ – és az ábrán bemutatott elrendezéssel (közvetve) ezt a mennyiséget mérjük.

3. Intenzitások és fluxusok

Az alábbiakban olyan eljárásokat mutatunk be, amelyekkel az elektromágneses teret jellemző globális mennyiségek *közvetlenül* mérhetők, ezért azok *operatív definíciójának* tekinthetők. Tartsuk szem előtt, hogy ezek a módszerek mindenek előtt a mérés *elvét* rögzítik, és bár megvalósíthatók lennének, de a gyakorlatban általában hatékonyabb, közvetett módszereket alkalmazunk.

Elektromotoros erő — Tekintsünk egy L görbét, amely mentén egy Q töltést mozgatunk (4. ábra). Jelölje W azt a munkát, amelyet ennek során az elektromos tér *ellenében* végzünk. Az L görbén mért elektromotoros erő (*electromotive force*, EMF) definíció szerint

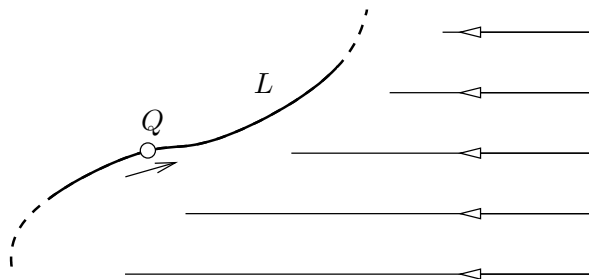
$$U_L = -\frac{W}{Q} \text{ [V]}. \quad (3)$$

A képlet mellet a mennyiség SI alapegységét tüntettük fel. U_L előjelét (rögzített Q esetén) a munka előjele határozza meg, utóbbi pedig a görbe mentén választott haladási iránytól függ. Az elektromotoros erőt tehát mindig egy belső irányítású görbén értelmezzük. (Megjegyezzük, hogy ha a mágneses tér időbeli változásának hatása elhanyagolható, akkor az EMF csak a görbe végpontjaitól függ, és ebben az esetben feszültségnek nevezzük.)

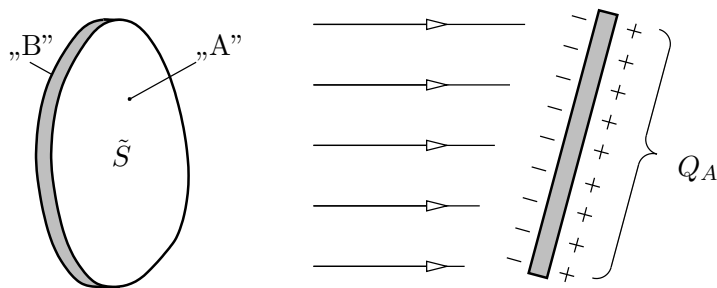
Elektromos fluxus — Vegyünk egy vékony fémlapot (pl. pénzérmét), és helyezzük elektromos térbe (5. ábra). Ismeretes, hogy ekkor megosztás jön létre a fémbe: a szabad töltéshordozók átrendeződnek oly módon, hogy a létrejött töltés többlet, ill. -hiány a külső teret kompenzálja, és ezzel egyszersmind megszűnik a töltésmozgató hatás. A lap két oldalán azonos nagyságú de ellentétes előjelű töltésmennyiség halmozódik fel. Válasszuk ki ebből az egyiket, pl. az „A” oldalon lévő. A fémlap által képviselt \tilde{S} felület elektromos fluxusa

$$\Psi_{\tilde{S}} = Q_A \text{ [As]}. \quad (4)$$

A fluxus előjele nyilvánvalóan attól függ, hogy a fémlapnak melyik az „A” oldala, tehát az elektromos fluxus egy külső irányítású felülethez kötődik.



4. ábra. Az elektromotoros erő mérési elve.



5. ábra. Az elektromos fluxus mérési elve.

Joggal vetődhet fel, hogy a fémlap módosítja a mérendő teret (kivéve ha eleve az erővonalakra merőlegesen helyezzük el). Az ilyen problémák gyakorlati megoldását e tárgyalásban – vagyis a mennyiségek definíciója szempontjából – technikai jellegű részletkérdésnek tekintjük.²

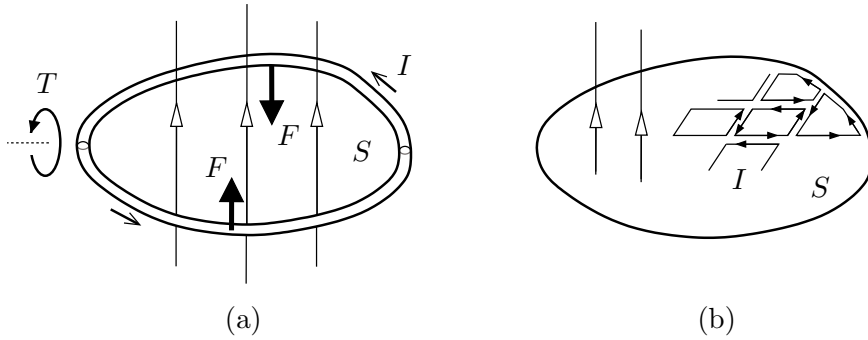
Mágneses fluxus — A fluxus mérésére alkalmas több módszer közül itt – a későbbiekre tekintettel – olyat választunk, amely statikus, és a nyomatékon alapul. Helyezzünk egy áram járta hurkot mágneses térbe (6/a. ábra). Ismeretes, hogy a hurokra ható erők eredője egy T forgatónyomatékú erőpár. Most forgassuk el a hurkot, és keressük meg azt a helyzetét, ahol a nyomaték maximális; ez a nyomaték legyen T_m . Az S felület mágneses fluxusa (a hurok eredeti helyzetében) így számolható.

$$\Phi_S = \frac{T_m}{I} \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_m}\right)^2} \text{ [Vs]}. \quad (5)$$

(A képlet azért ilyen bonyolult, mert a maximális nyomatékhoz zérus fluxus, a maximális fluxushoz pedig nulla nyomaték tartozik.) Ha a nyomaték referenciairányát rögzítjük, akkor a fluxus előjele csak az áram választott referenciairányától függ, amely viszont az S felület belső irányításának feleltethető meg. Ebből következően a mágneses fluxus egy belső irányítású felülethez tartozik.

Sajnos ez a módszer csak akkor ad elfogadható eredményt, ha a hurok környezetében az eredeti (vizsgálandó) mágneses tér megközelítőleg homogén. Ha ez nem teljesül, a módszert a következőképpen módosíthatjuk (elvi mérésről van szó!). Fedjük le az S felületet kis méretű, I áramú hurkokkal, amelyek szorosan illeszkednek egymáshoz, és nem lapolódnak át (6/b. ábra). A hurkok méretét olyan kicsire választjuk, hogy környezetükben a mágneses tér közelítőleg homogénnek tekinthető. Végezzük el a fenti mérést minden egyes hurokra; jelölje a k -ik hurokra

²Hasonló kérdés, hogy mi módon különíthető el Q_A és ellentettje, Q_B . Egy lehetséges megoldás, hogy két „pénzermét” használunk, amelyeket a lapjuk mentén szorosan összeillesztünk, majd miután a töltésmegosztás létrejött, szétválasztunk. Így az egyik érmén Q_A , a másikon $Q_B = -Q_A$ töltés marad.



6. ábra. A mágneses fluxus mérési elve.

kapott eredményt T_k , illetve $T_{k,m}$. A fluxust a következő összegképlet adja:

$$\Phi_S = \sum_k \frac{T_{k,m}}{I} \sqrt{1 - \left(\frac{T_k}{T_{k,m}} \right)^2}. \quad (6)$$

Ennek a látszólag bonyolult definíciónak a későbbiekben még hasznát vesszük.

Magnetomotoros erő — Ugyancsak bonyolult az \tilde{L} görbéhez rendelt magnetomotoros erő (*magnetomotive force*, MMF) közvetlen mérése. Az [1] szakirodalom javaslata szerint vennünk kellene egy a görbét szorosan körülvevő, vékony szupravezető csövet (7/a. ábra). Ebben – a külső mágneses tér kizárására – kompenzáló áramok indulnak körkörös irányban, amelyek eredője a cső teljes hosszmetzetén I . A magnetomotoros erő definíció szerint

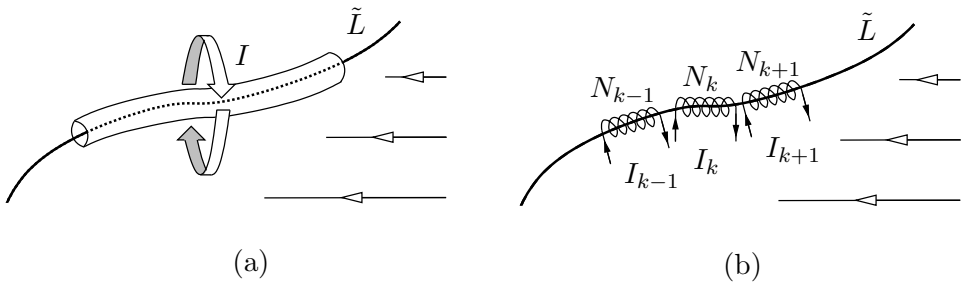
$$\Theta_{\tilde{L}} = I [\text{A}]. \quad (7)$$

Előjelét az áram választott referenciáiránya határozza meg. Mivel ez egyúttal a görbe megkerülési iránya is, ezért kijelenthetjük, hogy a magnetomotoros erő egy külső irányítású görbéhez köthető mennyiség.

Bár az iménti eljárás elegánsnak tűnik, azonban a „szupravezető” anyagnak csak a végtelen vezetőképességét veszi számításba, egyéb mágneses tulajdonságait nem, ez pedig több méréstechnikai kérdést vet fel. Kevésbé elegáns, de még mindig inkább kivitelezhető a 7/b. ábra mérési elrendezése. Eszerint kisméretű, szorosan a görbe köré csévéltek tekercsüket helyezünk el sűrű egymásutánban, végig a görbe mentén. Ezekben olyan áramot indítunk, amely az adott tekercsen belül a mágneses térnek a görbe irányába eső komponensét kompenzálja (ez pl. kis méretű iránytűvel ellenőrizhető). A magnetomotoros erő ekkor

$$\Theta_{\tilde{L}} = \sum_k N_k I_k, \quad (8)$$

vagyis az áram-menetszám szorzatok előjeles összege, ahol az előjel ismételten a görbe megkerülési referenciáiránya határozza meg.



7. ábra. A magnetomotoros erő két mérési elve.

A bevezetett négy globális fizikai mennyiség úgy az iránnyal rendelkező alakzatok (belső és külső irányítású görbe, illetve felület), mint a mértékegységek (V, Vs, A, As) tekintetében figyelemreméltóan szép, szimmetrikus rendszert alkot. Ez tekinthető át az 1. táblázatban, amelyben a forrásmennyiségeket is feltüntettük.

1. táblázat. Globális forrásmennyiségek és térjellemzők.

Szimbólum	Alakzat	Mértékegység	Elnevezés
Q	\tilde{V} (térfogat, külső)	As	töltésmennyiség
I	\tilde{S} (felület, külső)	A	áramerősség
U	L (görbe, belső)	V	elektromotoros erő
Ψ	\tilde{S} (felület, külső)	As	elektromos fluxus
Θ	\tilde{L} (görbe, külső)	A	magnetomotoros erő
Φ	S (felület, belső)	Vs	mágneses fluxus

4. A Maxwell-egyenletek globális alakja

A Maxwell-egyenleteket egy nyitott felület és annak kontúrgörbéje, illetve egy térfogat és annak peremfelülete viszonylatában fogalmazzuk meg. Az említett alakzatok irányítását összehangoljuk (lásd 8. ábra).

Maxwell-Ampère — A gerjesztési törvényként is ismert összefüggést egy külső irányítású, nyitott \tilde{S} felületre és az azt szegélyező, szintén külső irányítású, zárt \tilde{L} görbére fogalmazzuk meg. A felület és a görbe irányát a 8/a. ábra szerint hangoljuk össze. Az első Maxwell-egyenlet,

$$\Theta_{\tilde{L}(\tilde{S})} = I_{\tilde{S}} + \frac{d}{dt}\Psi_{\tilde{S}} \quad (9)$$

kimondja, hogy egy zárt görbén mért magnetomotoros erő megegyezik az általa kifeszített felületen áthaladó vezetési és eltolási áram összegével (a Maxwell által bevezetett eltolási áram az elektromos fluxus változási gyorsasága). Az egyenletben használt $\tilde{L}(\tilde{S})$ jelölés olvasata: „az \tilde{S} felületet szegélyező, zárt \tilde{L} görbe”.

Maxwell-Faraday — Az ún. indukciótörvényt egy belső irányítású, nyitott S felületre és az azt körülvevő, belső irányítású, zárt L görbére írjuk fel. A felület és a görbe irányát a 8/b. ábra szerint egyeztetjük. A második Maxwell-egyenlet,

$$U_{L(S)} = -\frac{d}{dt}\Phi_S \quad (10)$$

kimondja, hogy egy zárt görbén mért elektromotoros erő – amelyet indukált feszültségnek is nevezünk – megegyezik az általa kifeszített felületen áthaladó mágneses fluxus idő szerinti deriváltja mínusz egyszeresével.

Maxwell-Thomson — A harmadik Maxwell-egyenlet egy térfogatra és az azt körülvevő, belső irányítású, zárt S felületre vonatkozik:

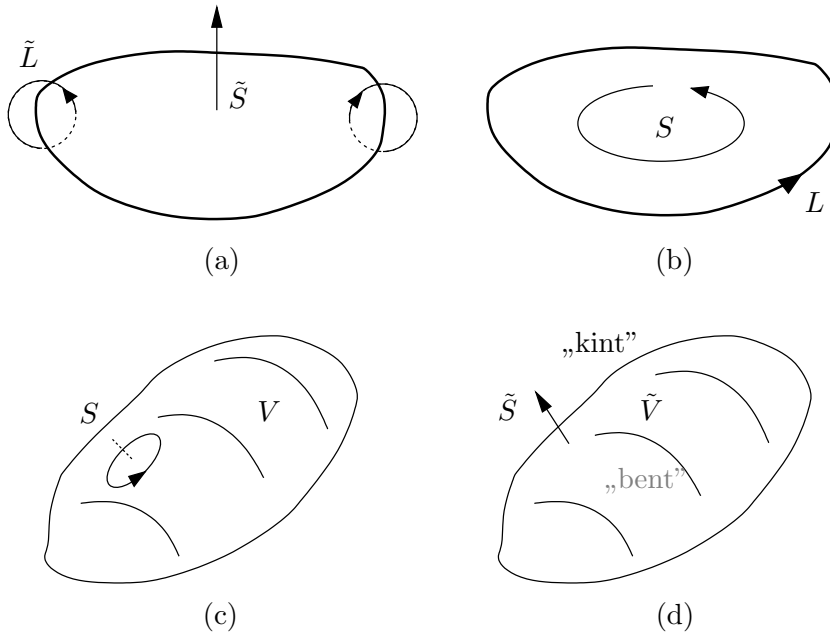
$$\Phi_{S(V)} = 0 \quad (11)$$

A térfogat irányításának nincs szerepe (8/c. ábra). A törvény kimondja, hogy bármely zárt felület mágneses fluxusa zérus.

Maxwell-Gauss — Végül a negyedik egyenlet a jól ismert Gauss-törvény. Ehhez veszünk egy külső irányítású térfogatot, amelynek peremfelülete szintén külső irányítású; az irányokat a 8/d. ábra szerint igazítjuk egymáshoz. A törvény kimondja, hogy bármely zárt felület elektromos fluxusa a térfogatban foglalt össztöltéssel egyezik meg:

$$\Psi_{\tilde{S}(\tilde{V})} = Q_{\tilde{V}} \quad (12)$$

Vegyük észre, hogy az összefüggés igaz marad, ha a felület irányítását megfordítjuk, és egyúttal – következetesen – felcseréljük a térfogat kint-bent referenciáirányát is. Ekkor ugyanis nem csak a $\Phi_{\tilde{S}}$ fluxus előjele változik az ellentettjére, de (a 2. szakasz értelmében) a $Q_{\tilde{V}}$ töltésé is!



8. ábra. A Maxwell-egyenletek megfogalmazásához használt irányított alakzatok.

Érdekes összefüggéseket kapunk, ha az első két egyenlethez használt felületet bezárjuk úgy, hogy azok rendre \tilde{V} , ill. V térfogatot foglaljanak magukba, míg peremgörbékük nullméretűvé zsugorodik. A gerjesztési törvény a

$$0 = I_{\tilde{S}(\tilde{V})} + \frac{d}{dt} \Psi_{\tilde{S}(\tilde{V})} = I_{\tilde{S}(\tilde{V})} + \frac{d}{dt} Q_{\tilde{V}} \quad (13)$$

alakot ölti, ahol az utóbbi átalakításhoz felhasználtuk a (12) Gauss-törvényt. Ez az egyenlet a töltésmegmaradás törvényét fejezi ki, és az elektrodinamikában folytonossági egyenletnek hívjuk. Hasonlóan eljárva a (10) indukciótörvénnyel a

$$0 = -\frac{d}{dt} \Phi_{S(V)} \quad (14)$$

összefüggést kapjuk, amely szerint bármely zárt felület mágneses fluxusa legfeljebb egy időtől független állandó lehet. A (11) egyenlet ehhez csupán annyit tesz hozzá, hogy ez az állandó a 0.

5. Kapcsolat a vektoranalitikai leírással

Az elektrodinamika leírásának legerjedtebb módja a *vektoranalízis* matematikai eszköztárán alapul [3]. Ebben a jelenségek színterének a háromdimenziós, irányított (jobbsodrású) euklideszi teret tekintjük, amelyben – praktikus szempontok szerint – koordináta-rendszert veszünk fel. Az időt (nem relativisztikus megközelítésben) a tértől független, abszolút változónak tekintjük. Ezen keretek között az elektromágneses tér mennyiségeit időfüggő skalár-, ill. vektormezőkkel reprezentáljuk.

Ebben a szakaszban kapcsolatba hozzuk az említett mezőket a fentebb definiált globális mennyiségekkel. A továbbiakban feltételezzük, hogy az olvasó tisztában van a vektoranalízis alapfogalmaival és alapvető műveleteivel, és azok ismertetésére nem térünk ki. Tekintsük elsőként a tér forrásait.

5.1. Források

Töltéssűrűség — Tudjuk, hogy a töltés a természetben véges kvantumokban fordul elő, de a mérnöki gyakorlatban előforduló töltésmennyiségek a kvantumhoz képest általában igen nagyok, ezért a kvantáltságtól eltekinthetünk. A töltéseloszlást a ρ térfogati töltéssűrűség írja le: alapegysége As/m^3 ; matematikai reprezentációja olyan vektor-skalár függvény, amely a három térkoordináta-hoz egyetlen skalár értéket rendel. A töltéssűrűség *implicit* definíciója, hogy az integrálja megadja egy térfogat össztöltését:

$$Q_{\tilde{V}} = \pm \int_{\tilde{V}} \rho \, dv \quad (15)$$

Mivel a térfogati integrálás nem veszi figyelembe \tilde{V} irányítását, ezért azt egy előjellel korrigáljuk, amely pozitív, ha \tilde{V} „bentről-ki” irányú, ellenkező esetben negatív. A (15) egyenletből képezhetünk akár *explicit* definíciót is, például így:

$$\rho = \lim_{|\Delta\tilde{V}| \rightarrow 0} \frac{Q_{\Delta\tilde{V}}}{|\Delta\tilde{V}|} \quad (16)$$

ahol $|\Delta\tilde{V}|$ a térfogat *előjeles* köbtartalma (negatív, ha a térfogat „kintről-be” irányú). Ez azonban lényegileg nem mond többet, mint a (15) implicit definíció, ezért más mennyiségeknél is az utóbbit használjuk.³

Áramsűrűség — Az előbbiek nyomán az áramsűrűséget legegyszerűbben úgy definiálhatjuk, mint a vektormező (vektor-vektor függvényt), amelynek felületi integrálja az adott felület összarámát adja. Képletben kifejezve

$$I_{\tilde{S}} = \int_{\tilde{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (17)$$

³Megemlítjük, hogy a gyakorlatban előnyös lehet egyéb típusú, pl. felületszerű, vonalszerű vagy pontszerű töltéseloszlások bevezetése ill. matematikai leírása is, de azok – disztribúciók használatával – mind visszavezethetők a térfogati töltéssűrűségre, ezért az utóbbit tekintjük alapvető mennyiségnek.

A \mathbf{J} térfogati áramsűrűség alapegysége A/m. Mint láttuk, az áram előjele a felület külső irányításától függ, és épp ez az irányítás, amelyet a felületi integrál kiértékelésénél is felhasználunk.⁴

5.2. Intenzitásvektorok

Az elektromágneses termennyiségek egyik csoportját az *intenzitásvektorok* alkotják, amelyek közös jellemzője, hogy az *erőhatással* kapcsolatosak. Egy \mathbf{v} sebességgel mozgó, pontszerű Q töltésre ható erőt a Lorentz-törvénnyel fejezzük ki

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (18)$$

alakban, ahol \mathbf{E} [V/m] az elektromos térerősség, és \mathbf{B} [Vs/m²] a mágneses indukció vektora.

Elektromos térerősség — Nyugvó töltésre (18) szerint csak az \mathbf{E} mező hat:

$$\mathbf{F} = QE. \quad (19)$$

Ha a töltést egy infinitezimálisan kicsiny $d\mathbf{l}$ szakaszon elmozdítjuk, akkor a *tér ellenében* végzett munka

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -QE \cdot d\mathbf{l}. \quad (20)$$

Tekintsük most a 4. ábra L görbét, és osszuk fel $d\mathbf{l}$ vonalelemekre. Nyilvánvaló, hogy a töltésnek a görbe menti mozgataása során végzett munka a (20) elemi munkák összege, azaz $W = \int_L dW$. Behelyettesítve a (3) definícióba

$$\boxed{U_L = \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (21)$$

adódik. Eszerint az elektromos térerősség *az* a vektormező, amelynek tetszőleges görbe menti integrálja az adott görbe elektromotoros erejét adja. Vegyük észre, hogy U_L definíciójában éppúgy a görbe belső irányítását használjuk, mint a görbe menti integrál kiértékelésénél.

Mágneses indukció — Vegyünk egy kicsiny, I áramot vivő hurkot, amely ds nagyságú felületet feszít ki. Vezessük be a ds felületelem-vektort, amelynek abszolút értéke ds , iránya merőleges a felületre, állása pedig a „jobbcsavar-szabály” szerint van összehangolva a hurokban körbefolyó I áram referenciairányával. A (18) erő-törvény segítségével rövid úton belátható, hogy az áramhurokra ható nyomaték

$$\mathbf{T} = I ds \times \mathbf{B}. \quad (22)$$

⁴Felületszerű áramlás leírására előnyös lehet még a felületi áramsűrűség fogalma, vonalszerű áramhoz viszont nincs szükség „eloszlás” bevezetésére, mivel azt a skalár áramerősség-érték egyértelműen jellemzi.

Ha a ds és \mathbf{B} vektorok által bezárt szög α , akkor a nyomaték nagysága, illetve annak maximuma

$$T = IB \sin \alpha \, ds, \quad \text{ill.} \quad T_m = IB ds. \quad (23)$$

Az elemi áramhurok fluxusa (5) alapján

$$d\Phi = \frac{T_m}{I} \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_m}\right)^2} = B ds \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = B ds \cos \alpha = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (24)$$

Idézzük fel a 6. ábra mérési elrendezését valamint a (6) képletet, amely szerint a kiterjedt S felület fluxusa képezhető az azt kitevő felületelemek fluxusainak összegként. Ebből látszólag következik, hogy az összfluxus (24) integrálja. Csakhogy ds külső irányítású felület, míg a fluxust belső irányításúra értelmezzük. Emiatt a felületi integráláshoz el kell végeznünk az $S \rightarrow \tilde{S}$ átalakítást a már említett jobbcsavar szabállyal:

$$\boxed{\Phi_S = \int_{S \rightarrow \tilde{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}} \quad (25)$$

Röviden megfogalmazva: \mathbf{B} az a vektormező, amelynek tetszőleges felületre vett integrálja megadja az adott felület fluxusát.

5.3. Gerjesztett vektorok

A gerjesztett vektorok mezői az anyagnak az intenzitásvektorokra, mint gerjesztésre adott „válaszát” adják. A \mathbf{D} [As/m²] eltolási vektor definíciója

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (26)$$

amelyben \mathbf{P} a polarizáció-vektor. Utóbbi a polarizált dielektrikumban a külső tér hatására létrejött elemi töltésdipólusok makroszkopikus hatását írja le, és definíció szerint a dipólusmomentum-vektor térfogati sűrűségével egyenlő. A mágneses térnél ehhez hasonlóan bevezetjük a \mathbf{H} [A/m] mágneses térerősséget:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (27)$$

\mathbf{M} a mágnesezettség vektora, amely az anyagban lévő elemi köráramok – mágneses dipólusok – statisztikus (átlagolt) hatását írja le, és definíció szerint a mágneses dipólusmomentum-vektor térfogati sűrűségével egyenlő.

Dielektromos eltolás — Lapozzunk vissza az 5. ábra elrendezéséhez, de most a kiterjedt fémlap helyett vegyünk egy infinitezimális dl vastagságú, kicsiny felületű fémlapot, amelyet a külső irányítású ds felületelem-vektor reprezentál (az irányítás típusára utaló hullámvonalat elhagytuk). Megosztás révén a fémlap két oldalán

$\pm dQ$ töltés jelenik meg, amely egy $dp = dQdl$ momentumú dipólusnak tekinthető; a dipólus iránya a felületelem irányával megegyező. Mivel a fémen belül a térerősség nulla, a (26) képlet így írható:

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dv} = \frac{dQdl}{|ds|dl} \cdot \frac{ds}{|ds|}, \quad (28)$$

ahol felhasználtuk \mathbf{P} definícióját.⁵ Az utolsó szorzótényező nem más, mint egy ds irányú egységvektor, amely a dipólusmomentum irányát adja. Ha az egyenlet mindkét oldalát skalárisan megszorozzuk a ds vektorral, a

$$\mathbf{D} \cdot ds = dQ \quad (29)$$

összefüggést kapjuk. Nem nehéz belátni, hogy kiterjedt fémlemez össztöltését ennek felületi integrálja adja, amelyet a (4) definícióba helyettesítve a

$$\boxed{\Psi_{\tilde{S}} = \int_{\tilde{S}} \mathbf{D} \cdot ds} \quad (30)$$

összefüggésre jutunk. A dielektromos eltolás tehát az a mező amelynek tetszőleges felületre vett integrálja az adott felület elektromos fluxusát adja.

Mágneses térerősség — Végül tekintsük a 7/b. ábra elrendezését, amelyből válasszunk ki egyetlen kis tekercset. Ennek árama legyen dI , menetszáma N , keresztmetszetét jelölje ds , hosszát és tengelyének irányát pedig együttesen reprezentálja a $d\mathbf{l}$ vonalelem-vektor. A tekercs minden egyes menete egy $d\mathbf{m}$ elemi mágneses dipólusnak tekinthető; momentumának nagysága $dm = dI ds$. A dipólus iránya megegyezik a $d\mathbf{l}$ vonalelem-vektoréval, feltéve hogy a dI áram referenciáirányát utóbbival a jobbcsavar-szabály szerint összehangoljuk; ezáltal a $d\mathbf{l}$ vonalelemnek hallgatólagosan külső irányítást (is) tulajdonítunk. A mágneszettség a dipólusmomentum térfogati sűrűsége, ezért (27) alapján a tekercsben

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \frac{N d\mathbf{m}}{dv} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + N \frac{dI ds}{|dl| ds} \cdot \frac{dl}{|dl|}, \quad (31)$$

az utóbbi tényező a $d\mathbf{l}$ irányú egységvektor. Szorozzuk skalárisan az egyenlet mindkét oldalát a $d\mathbf{l}$ vektorral, és használjuk fel, hogy a 9. oldalon leírt mérési utasítás értelmében a mágneses indukciónak a tekercs tengelyével párhuzamos összetevőjét kioltjuk, azaz $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Ezzel

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NdI \quad (32)$$

⁵A (28) összefüggés nem mond ellent annak a ténynek, hogy *véges* vastagságú fém *belsejében* $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, ott ugyanis nincsenek dipólusok. Ezzel szemben az általunk vizsgált „végtelenül vékony” lemez lényegében egy *kettősréteg*, azaz dipólusok felületszerű eloszlása.

adódik.⁶ Tekintettel a (8) definícióra nyilvánvaló, hogy a teljes \tilde{L} görbe magnetomotoros erejét a

$$\boxed{\Theta_{\tilde{L}} = \int_{\tilde{L} \rightarrow L} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}} \quad (33)$$

integrál adja. Az $\tilde{L} \rightarrow L$ jelölés kifejezi, hogy a vonalintegrál számításának érdekében a magnetomotoros erőt hordozó, külső irányítású görbéhez – a jobbcsavar-szabály szerint – belső irányítást rendelünk. Végző soron tehát \mathbf{H} az a vektormező, amelynek tetszőleges görbére vett vonalintegrálja az adott görbe magnetomotoros erejét szolgáltatja.

5.4. Maxwell-egyenletek

Ha a (15), (17), (21), (25), (30) és (33) összefüggéseket rendre behelyettesítjük a (9), (10), (11) és (12) egyenletekbe, akkor közvetlenül a Maxwell-egyenletek ún. integrális alakját kapjuk. Ha pedig ezekre alkalmazzuk a Stokes-, ill. a Gauss-integráltételt, akkor az ún. differenciális alakra jutunk. A Maxwell-egyenletek eddig megismert három különböző alakját a 9. ábrán foglaltuk össze; a közöttük lévő nyilak az átjárhatóságot mutatják.

Az integrális alakban szándékosan nem jelöltük az alakzatok irányítását, mivel ott a vektoranalízisben alapértelmezett irányítást használjuk: a görbére belső, a felületre külső irányt adunk meg, amelyeket az első két Maxwell-egyenlet esetében a jobbcsavar-szabály szerint hangulunk össze. A negyedik egyenletnél a zárt felület alapértelmezett iránya a körülvevő térfogatból kifelé mutat.

A globális alaknak a differenciálissal való összevetése (lásd 9. ábra) azt sugallja, hogy ha az előbbit infinitezimálisan kicsiny görbékre, felületekre, illetve térfogatokra írjuk fel, akkor lényegében az utóbbit kapjuk. Ez azonban nem igaz, mivel a globálisból az integrális alakra való áttérésnél elvész az alakzatok irányításának belső-külső kettőssége (ezért mutat a nyíl csak az egyik irányba). Még kevésbé igaz, hogy az U , Ψ , Φ és Θ mennyiségek infinitezimális megfelelői rendre az \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} és \mathbf{H} vektormezők lennének,⁷ hiszen ha az utóbbiakat az egyenletektől függetlenül szemléljük, akkor – az eltérő mértékegység kivételével – nem látjuk rajtuk az előbbieket sokszínű jellegzetességét és dualitását, csupán négy vektor-vektor függvényt.

Nem képezi tananyagunk részét, de a teljesség kedvéért megemlítjük, hogy a globális alak differenciális határátmenetét valójában a *differenciálgeometriai* leírás jelenti, amely a vektoranalízistől eltérő matematikai apparátus [4]. Az ott használt ún. *differenciális formák* ugyanis megőrzik az alaplmenyiségek eltérő jellegét: U helyébe az e -vel jelölt differenciális 1-forma, Φ helyébe a b jelű 2-forma, Θ helyébe a \tilde{h} csavart 1-forma, Ψ

⁶Nyilvánvaló, hogy ennél a mérésnél nincs jelen klasszikus értelemben vett közeg, de *ha lenne*, a benne lévő mágneses dipólusok hatását ugyanígy kellene figyelembe venni.

⁷Habár a szakirodalomban gyakori, hogy a globális térjellemzőket *ab ovo* a vektormezők integráljaként vezetik be, ez nem következetes.

$$\begin{aligned}
\Theta_{\tilde{L}(\tilde{S})} &= I_{\tilde{S}} + \frac{d}{dt} \Psi_{\tilde{S}} \\
U_{L(S)} &= -\frac{d}{dt} \Phi_S \\
\Phi_{S(V)} &= 0 \\
\Psi_{\tilde{S}(\tilde{V})} &= Q_{\tilde{V}}
\end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}
\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \\
\oint_{L(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\
\oint_{S(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= 0 \\
\oint_{S(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} &= \int_V \rho \, dv
\end{aligned}$$

↕

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \\
\text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\
\text{div } \mathbf{B} &= 0 \\
\text{div } \mathbf{D} &= \rho
\end{aligned}$$

9. ábra. A Maxwell-egyenletek három alakja: globális (fent), integrális (középen) és differenciális (lent).

és I helyébe a \tilde{d} és \tilde{j} csavart 2-formák, végül Q helyébe a \tilde{q} csavart 3-forma lép. A Maxwell-egyenletek differenciálgeometriai alakja:

$$\begin{aligned}
d\tilde{h} &= \tilde{j} + \partial_t \tilde{d} \\
de &= -\partial_t b \\
db &= 0 \\
d\tilde{d} &= \tilde{q}
\end{aligned} \tag{34}$$

amelyben ∂_t az idő szerinti differenciálhányadost jelöli, a d operátor pedig az ún. külső derivált (*exterior derivative*). Megjegyezzük, hogy ehhez nagyon hasonló alakra jutunk a globális egyenletek *diszkretizálása* során is, amelyről a 7. szakaszban lesz szó.

6. Konstitúciós egyenletek

Túlzás nélkül állítható, hogy a konstitúciós egyenletek (más néven közegegyenletek vagy anyagegyenletek) jelentik a globális leírás Achilles-sarkát. Tekintsük a vektormezők közötti lokális (26) és (27) összefüggéseket, amelyek még tovább egyszerűsödnek lineáris közegek esetén, ahol a \mathbf{P} polarizáció arányos az \mathbf{E} elektromos térerősséggel, az \mathbf{M} mágneszettség pedig a \mathbf{H} mágneses térerősséggel:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{ill.} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \quad (35)$$

Ebben χ_e és χ_m az anyag elektromos és mágneses szuszceptibilitása. Innen

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{ill.} \quad (36)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (37)$$

következik, ahol ε_r és μ_r a közeg relatív permittivitása, illetve permeabilitása. Tegyük még ehhez hozzá a differenciális Ohm-törvényt:

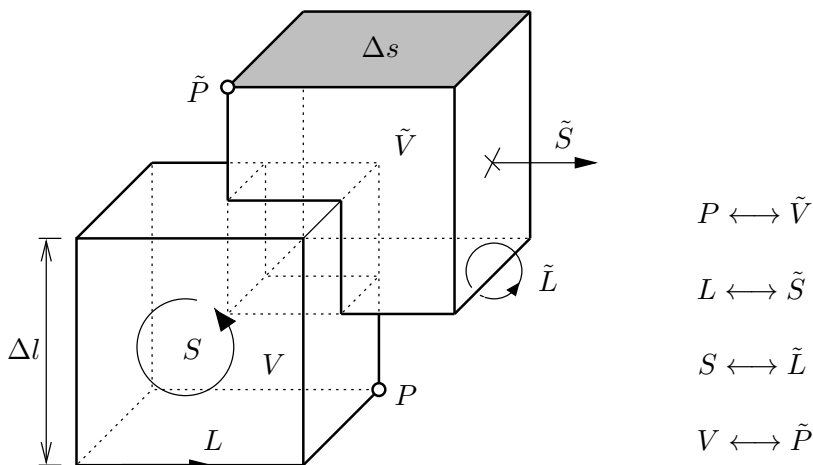
$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (38)$$

amelyben σ a fajlagos vezetőképesség.

Sajnos a fenti vektormezőknek megfelelő globális mennyiségek (források, intenzitások és fluxusok) között már nem írható fel ilyen egyszerű kapcsolat, mivel az azokat hordozó kiterjedt alakzatok kapcsolódása sem egyszerű. Márpedig köztudott, hogy a négy Maxwell-egyenlet nem oldható meg ezen kiegészítés nélkül. Meg kell említenünk, hogy ugyanakkor az előző szakaszban bevezetett differenciális formák között léteznek a megfelelő konstitúciós egyenletek:

$$\begin{aligned} \tilde{d} &= \varepsilon (\star e) \\ b &= \mu (\star \tilde{h}) \\ \tilde{j} &= \sigma (\star e) \end{aligned} \quad (39)$$

ahol \star az ún. Hodge-operátort jelöli. A Hodge-operátor diszkrét megfelelőjével találkozunk majd a 7. szakaszban.



10. ábra. A FIT duális cellastruktúrája.

7. A véges integrálok módszere

A véges integrálok módszere (*finite integration technique*, FIT), népszerűbb nevén „cella módszer” egy numerikus térszámítási eljárás, amelynek eredeti változatát Thomas Weiland alkotta meg az 1970-es évek végén, és azóta jelentős mértékben továbbfejlesztették. A CST, egy manapság piacvezető elektromágneses szimulációs szoftver is ezen a módszeren alapul [5]. Ismertetése azonban nem csupán a gyakorlati haszna miatt fontos számunkra, hanem mert általa – pontosabban a benne alkalmazott diszkrétizációs séma által – teljeseedik ki az eddigiekben bemutatott elmélet. A módszer leírásában nagyrészt a [2] irodalmat követjük, bár a jelölésekben itt-ott eltérünk attól.

7.1. Térbeli diszkrétizálás

A FIT alapja egy duális cellastruktúra, amely lényegében két ekvidisztáns, egymáshoz képest fél rácsozottsággal eltolt, köbös (avagy kocka-) rácsot jelent (10. ábra). Az ábrán a két rácsból csak egy-egy kiragadott, egymással áthatásban lévő kockát mutatunk, de a struktúra minden irányban periodikusan folytatódik. A kockák élhossza Δl , lapjainak felszíne Δs , így térfogatuk $\Delta v = \Delta s \Delta l$.

A két struktúrát megkülönböztetendő, azokat – némileg következetlenül – *primer*, illetve *duál* jelzővel szokás ellátni. A primer cellák éleit, lapjait és térfogatát belső, míg a duál cellák megfelelő alakzatait külső irányítással látjuk el (ez indokolja utóbbiak jelölésében a hullámvonalat). Figyeljük meg az ábrán a következőket:⁸

- Minden primer él pontosan egy duál lapon megy át, valamint minden primer lap egy duál élet metsz, tehát egymásnak megfeleltethetők. Hasonló megfeleltetés lehetséges a rácspontok és térfogatok között is (lásd a 10. ábra jobb oldalán felsorolva).

⁸A felsorolt tulajdonságokkal rendelkező összetett struktúra angol neve *cell complex*, amelynek egyelőre nincs frappáns magyar megfelelője.

2. táblázat. A duális cellastruktúra változói (vö. 1. táblázat).

Alakzat	P	\tilde{P}	L	\tilde{L}	S	\tilde{S}	V	\tilde{V}
Mennyiség	–	–	U	Θ	Φ	Ψ, I	–	Q
Jelölés	–	–	e	h	b	d, j	–	q

- Az él-lap párok irányát *nem* kell összehangolni, de az irányok természetesen közvetlenül (azaz pl. a jobbszavas-szabály nélkül) összevethetők.
- Az élek és lapok merőlegesek egymásra, azaz fennáll az *ortogonalitás*.

A cellastruktúra különböző elemeihez globális fizikai mennyiségeket rendelünk a 2. táblázat szerint.⁹ A numerikus módszer kontextusában ezeket a mennyiségeket változóknak hívjuk. Jelölésükre új szimbólumokat vezetünk be (lásd a táblázatot), hogy a megfelelő vektormezőkre, de még inkább hogy a megfelelő differenciális formákra emlékeztessenek. A módszer programozása szempontjából nem mellékes, hogy a duál cellák összes változója tárolható a primer struktúrán az él-lap és pont-tér fogat megfelelések miatt.

7.2. Egyenletrendszer felállítása

Célunk, hogy a bevezetett változókkal lineáris algebrai egyenletrendszert állítsunk fel, amelynek fő összetevői a diszkrét alakú Maxwell- és konstitúciós egyenletek. Ehhez feltesszük, hogy a duális cellastruktúra véges kiterjedésű, és a benne foglalt alakzatok száma rendre $n_P, \tilde{n}_P, n_L, \tilde{n}_L, n_S, \tilde{n}_S, n_V$ és \tilde{n}_V . Az alakzatokat sorszámmal látjuk el, minden kategóriában 1-esel kezdve, de tetszőleges sorrendben; az egymáshoz rendelhető alakzatpárok (lásd 10. ábra) célszerűen azonos indexet kapnak. Az alakzatok számozását használjuk a hozzájuk rendelt változóknál is.

Maxwell-egyenletek

Elsőként tekintsük a primer rács tetszőleges, k indexű S_k lapját (11/a. ábra). Az indukcióörvény erre vonatkozóan a következő alakban írható fel:

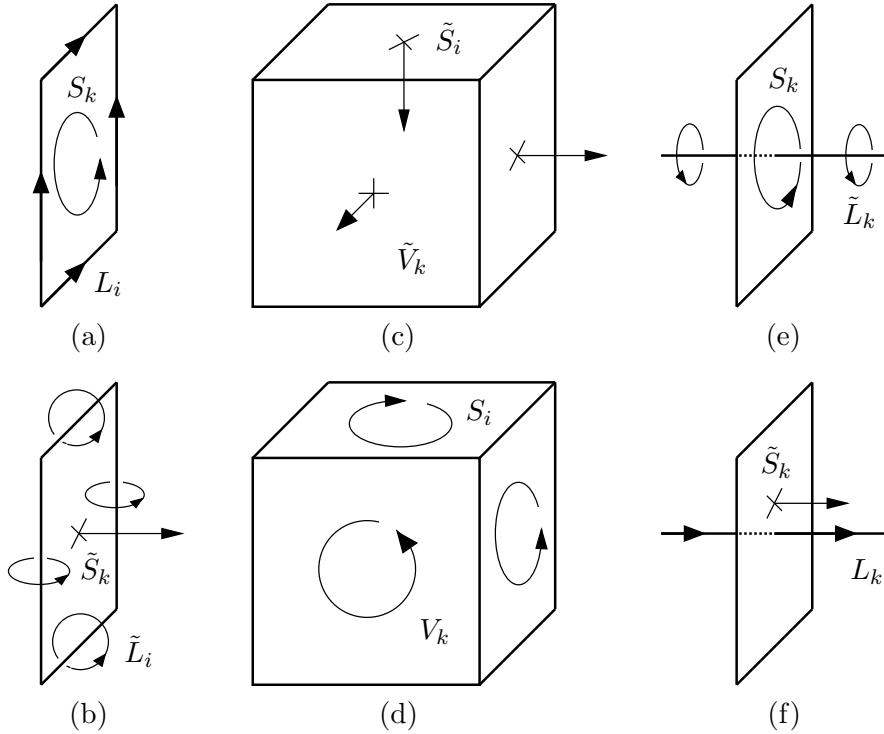
$$\sum_{i=1}^{n_L} C_{ki} e_i = -\partial_t b_k, \quad k = 1 \dots n_S, \quad C_{ki} = \begin{cases} \pm 1 & L_i \subset \partial S_k \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (40)$$

Amint látható, az összegzés formálisan kiterjed a primer struktúra minden élére, de a C_{ki} együttható „kiválasztja” közülük azt a négyet, amely a szóban forgó lap ∂S_k peremét alkotja. C_{ik} előjele attól függ, hogy az él irányítása megegyezik-e a lap iránya által a peremen indukált körjárási iránnyal (+), vagy ellentétes azzal (–).

A (40) egyenletcsoport – egyelőre – nem algebrai egyenletekből áll, mivel azok még tartalmazzák a ∂_t idő szerinti deriváltat.¹⁰ Az időbeli diszkrétizálás módjára, és a derivált közelítésére a 7.3 szakaszban térünk vissza.

⁹A módszer általánosabb változatában az itt mellőzött alakzathoz is rendelhetünk valamilyen mennyiséget, például P -hez elektromos skalárpotenciált, de ilyenekre egyelőre nincs szükségünk.

¹⁰A parciális deriválás jele itt nem indokolt, csupán az egyszerűbb írásmód kedvéért használjuk.



11. ábra. A FIT-egyenletekhez tartozó konfigurációk.

A gerjesztési törvényt a duál cellák \tilde{S}_k lapjaira tudjuk megfogalmazni (11/b. ábra):

$$\sum_{i=1}^{\tilde{n}_L} \tilde{C}_{ki} h_i = j_k + \partial_t d_k, \quad k = 1 \dots \tilde{n}_S, \quad \tilde{C}_{ki} = \begin{cases} \pm 1 & \tilde{L}_i \subset \partial \tilde{S}_k \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (41)$$

Ebben \tilde{C}_{ki} szerepe megfelel a (40) C_{ki} együtthatójának, és az előjelszabály is hasonló, csak itt a külső irányításra vonatkozik.

Vegyük most a duál struktúra \tilde{V}_k celláit (11/c. ábra). A Gauss-törvényt a következő egyenletcsoport írja le:

$$\sum_{i=1}^{\tilde{n}_S} \tilde{F}_{ki} d_i = q_k, \quad k = 1 \dots \tilde{n}_V, \quad \tilde{F}_{ki} = \begin{cases} \pm 1 & \tilde{S}_i \subset \partial \tilde{V}_k \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (42)$$

A szumma tehát sorra veszi az összes duál lapot, míg \tilde{F}_{ki} kiválasztja azt a hatot, amely az adott cellakocka $\partial \tilde{V}_k$ peremfelületét alkotja.¹¹ Az előjel attól függ, hogy \tilde{S}_i külső irányítása megegyezik-e a \tilde{V}_k „bent-kint” referenciáirányából a peremfelületére adódó dőfési iránnyal, vagy sem.¹²

¹¹A szakirodalomban gyakori F helyett az S jelölés.

¹²A gyakorlatban a töltésre egyszerűen a „saját” előjelét használjuk, és ennek megfelelően a térfogtból kifelé mutató irányt tekintjük pozitívnak.

Végül a mágneses tér forrásmentességét a primer struktúra V_k celláira fogalmazzuk meg (11/d. ábra):

$$\sum_{i=1}^{n_S} F_{ki} b_i = 0, \quad k = 1 \dots n_V, \quad F_{ki} = \begin{cases} \pm 1 & S_i \subset \partial V_k \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (43)$$

F_{ki} szerepe ugyanaz, mint az iménti \tilde{F}_{ki} együtthatóé, csak éppen a primer struktúrára vonatkozik. Mivel azonban a primer cellát nem irányítjuk, ezért az előjelet a következőképpen határozzuk meg: kiválasztjuk a cella egyik lapját, amelynek belső irányítását, valamint a hozzá tartozó F_{ik} együtthatót, pozitívnak tekintjük. A többi lapot – az irányítást folytonosnak tekintve – ehhez igazítjuk. A referencialap önkényes megválasztása nyilvánvalóan nem befolyásolja az egyenlet tartalmát, mivel annak jobb oldalán 0 áll.

Az egyszerűbb írásmód végett rendezzük mátrixokba a C_{ki} , \tilde{C}_{ki} , F_{ki} és \tilde{F}_{ki} együtthatókat, valamint vektorokba az e , b , h , d , j és q változókat. Ekkor a (41), (40), (42) és (43) egyenletek rendre a következő alakban írhatók:

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{j}} + \partial_t \tilde{\mathbf{d}} \quad (44)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b} \quad (45)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (46)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{q}} \quad (47)$$

A \mathbf{C} , $\tilde{\mathbf{C}}$, \mathbf{F} és $\tilde{\mathbf{F}}$ ún. incidenciamátrixok a duális cellastruktúra *topológiáját* reprezentálják, ugyanakkor semmilyen információt nem tartalmaznak a cellaméretre vonatkozóan. Ebben az az érdekes tény tükröződik, hogy a négy Maxwell-egyenlethez szigorúan véve nincs szükség metrikus térre (affin tér elegendő), másrészt megmutatja, hogy ebben a diszkrétizált alakban is *egzaktak*, tehát nem tartalmaznak közelítést. A tér metrikája, és egyúttal a FIT közelítő jellege majd csak a konstitúciós egyenleteknél lép be.

Diszkrét operátorok algebrai tulajdonságai

Ismerkedjünk meg a cellastruktúra topológiáját leíró incidenciamátrixok algebrai tulajdonságaival, de a levezetések mellőzésével.¹³ Ezek a mátrixok egyben operátornak is tekinthetők, mert fizikai mennyiségek közötti transzformációt írnak le.

A szaknyelvben \mathbf{C} és duálja a *diszkrét rotáció*, míg \mathbf{F} és duálja a *diszkrét divergencia* nevet kapta, ami indokolt, ha tekintetbe vesszük a Maxwell-egyenletek differenciális alakjának párhuzamait a FIT egyenleteivel (lásd a 12. ábrán). Létezik *diszkrét gradiens* is, amely viszont kifejezhető a diszkrét divergenciával:

$$\mathbf{G} = -\tilde{\mathbf{F}}^\top, \quad \text{ill.} \quad \tilde{\mathbf{G}} = -\mathbf{F}^\top. \quad (48)$$

A vektoranalízis ismert nulla-azonosságainak is van diszkrét megfelelője:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} () = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{F}\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad \text{ill.} \quad \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0}, \quad (49)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} () = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{C}\tilde{\mathbf{F}}^\top = \mathbf{0}, \quad \text{ill.} \quad \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{F}^\top = \mathbf{0}. \quad (50)$$

¹³Bővebbet a [2] irodalomban, de a jelölés ott kicsit más.

Végül belátható a következő dualitási összefüggés:

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}^\top. \quad (51)$$

Konstitúciós egyenletek

Amint korábban már említettük, a közeg viselkedésére jellemző összefüggéseket globális mennyiségekkel nem tudjuk közvetlenül megfogalmazni, de a diszkretizáció révén – legalábbis közelítő alakban – ez lehetséges.

Az 5. szakaszban bemutatott összefüggések alapján a globális mennyiségekből kifejezhető az elektromos és mágneses vektormezőök bizonyos komponenseinek *átlagértéke* a cellákon: az éleken a velük párhuzamos térvektor-komponensek átlaga,

$$e_k = \int_{L_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \bar{E}_k = \frac{e_k}{\Delta l} \quad \text{és} \quad h_k = \int_{\tilde{L}_k} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \bar{H}_k = \frac{h_k}{\Delta l}, \quad (52)$$

míg a lapokon a rájuk merőleges komponensek átlaga,

$$b_k = \int_{S_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow \bar{B}_k = \frac{b_k}{\Delta s} \quad \text{és} \quad d_k = \int_{\tilde{S}_k} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow \bar{D}_k = \frac{d_k}{\Delta s}. \quad (53)$$

Ha a cellák mérete elegendően kicsiny, akkor ezek az átlagok jó közelítései a tényleges térértékeknek az adott él, illetve lap bármely pontjában.

A továbbiakban csak lineáris közegeket vizsgálunk, de a kapott összefüggések könnyen általánosíthatók. Tekintsük elsőként a 11/e. ábra elrendezését, ahol a duál struktúra egyik éle áthalad a primer struktúra egy lapján (számozási konvenciónk szerint az indexük megegyezik). A mágneses anyagegyenletből az iméntiek alapján a következő közelítő összefüggés adódik az él-lap párra:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \longrightarrow \quad \frac{b_k}{\Delta s} \approx \pm \mu_k \frac{h_k}{\Delta l}, \quad \forall k, \tilde{L}_k \leftrightarrow S_k. \quad (54)$$

Kihasználtuk, hogy lap és él merőlegesek egymásra (ez a struktúra ortogonalitási tulajdonsága), tehát a hozzájuk rendelt térvektor-komponensek *azonos* irányúak. Ha az él külső irányítása kompatibilis a lap belső irányításával, a pozitív előjel érvényes, különben a negatív. A μ_k együttható többféleképpen értelmezhető: vehetjük például egyszerűen az él és lap metszéspontjában érvényes értéket, vagy – ha a permeabilitást cellánként állandó értékkel jellemezzük – az S_k lappal szomszédos két cellabeli érték átlagát.

A k indexre vonatkozó feltétel arra utal, hogy egy véges kiterjedésű cellastruktúra peremén fekvő éleknek és lapoknak nincs duális párja, tehát az él-lap párok száma *kisebb*, mint az élék vagy a lapok száma. Ez a tény előrevetíti a *peremfeltételek* szükségességét és megadásuk módját, amelyre a 7.4. szakaszban térünk ki.

Másodszorra vegyünk egy primer élet, amely egy duál lap közepén halad át (11/f. ábra). Az elektromos anyagegyenletből adódó összefüggés a következő:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \longrightarrow \quad \frac{d_k}{\Delta s} \approx \pm \varepsilon_k \frac{e_k}{\Delta l}, \quad \forall k, L_k \leftrightarrow \tilde{S}_k. \quad (55)$$

$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho \\ \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned}$	\longrightarrow	$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}} &= \tilde{\mathbf{j}} + \partial_t \tilde{\mathbf{d}} \\ \mathbf{C}\mathbf{e} &= -\partial_t \mathbf{b} \\ \mathbf{F}\mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{d}} &= \tilde{\mathbf{q}} \\ \\ \tilde{\mathbf{d}} &= \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{e} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{M}_\mu \tilde{\mathbf{h}} \\ \tilde{\mathbf{j}} &= \mathbf{M}_\sigma \mathbf{e} \end{aligned}$	\longleftarrow	$\begin{aligned} d\tilde{h} &= \tilde{j} + \partial_t \tilde{d} \\ de &= -\partial_t b \\ db &= 0 \\ d\tilde{d} &= \tilde{q} \\ \\ \tilde{d} &= \varepsilon (\star e) \\ b &= \mu (\star \tilde{h}) \\ \tilde{j} &= \sigma (\star e) \end{aligned}$
---	-------------------	---	------------------	---

12. ábra. A FIT egyenletrendszerének (középen) összehasonlítása az elektrodinamika törvényeinek differenciális (balra) és differenciálgeometriai (jobbra) alakjával.

A differenciális Ohm-törvény közelítése is megfogalmazható ugyanerre az él-lap párra:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \longrightarrow \quad \frac{j_k}{\Delta s} \approx \pm \sigma_k \frac{e_k}{\Delta l}, \quad \forall k, L_k \leftrightarrow \tilde{S}_k. \quad (56)$$

Az anyagjellemző együtthatók képzése és az előjelre vonatkozó szabályok hasonlóak, mint az (54) egyenletnél.

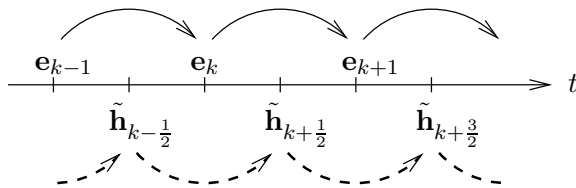
Az (54)-(56) egyenletek – átrendezés után mátrix-alakban is felírhatók:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{M}_\mu \tilde{\mathbf{h}} \\ \tilde{\mathbf{d}} &= \mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{e} \\ \tilde{\mathbf{j}} &= \mathbf{M}_\sigma \mathbf{e} \end{aligned} \quad (57)$$

Ezúttal figyelmen kívül hagytuk, hogy nincs minden élnek és lapnak duális párja, mert az bonyolulttá tenné a formalizmust.

* * *

A 12. ábrán összehasonlítjuk a FIT egyenletrendszerét a Maxwell-egyenletek differenciális és differenciálgeometriai alakjával (emlékeztetünk arra, hogy utóbbi nem része a tananyagnak), amelyeket kiegészítettünk a konstitúciós egyenletekkel. A FIT és a differenciális alak párhuzamairól már beszéltünk. A FIT-egyenleteket a differenciálgeometriai alakkal összevetve azt látjuk, hogy a \mathbf{C} , $\tilde{\mathbf{C}}$, \mathbf{F} és $\tilde{\mathbf{F}}$ incidenciamátrixok a d külső derivált, míg az \mathbf{M}_μ , \mathbf{M}_ε és \mathbf{M}_σ diagonálmátrixok a \star Hodge-operátor diszkrét megfelelőinek tekinthetők. Az említett megfeleltetések, valamint a 12. ábrán látható párhuzam miatt szokás a FIT-et „full-Maxwell” algoritmusnak is nevezni.



13. ábra. A leap-frog algoritmus sémája.

7.3. Időbeli diszkretizálás

A sztatikus, illetve stacionárius közelítésben tárgyalható problémáknál az idő szerinti deriváltakat tartalmazó tagok elhagyhatók. Ha pedig a térjellemzők mindegyike szinuszosan változik az időben, akkor – áttérve komplex reprezentációra – az idő szerinti deriválásból egyszerű szorzás lesz. Ezekben az esetekben a FIT eleve lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet, amelynek megoldására számos numerikus algoritmus használható.

Az időtartománybeli (tranziens) problémák megoldására általában valamilyen időlépéses sémát használunk. Két egymással *csatolt*, elsőrendű, közönséges differenciálegyenlet megoldásának hatékony módszere a leap-frog („békaugrás”) algoritmus. A módszer egyszerűbb és áttekinthetőbb bemutatásához lineáris és forrásmentes közeget tételezünk fel; utóbbi miatt $\tilde{\mathbf{j}} = \tilde{\mathbf{0}}$ és $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{0}}$. A szóban forgó két egyenlet a (44) gerjesztési és a (45) indukciótörvény, amelyek csatolt volta nyilvánvalóbb, ha behelyettesítjük az (57) konstitúciós egyenleteket, kiküszöbölve ezáltal a $\tilde{\mathbf{d}}$ és \mathbf{b} mennyiségeket:

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{M}_\varepsilon \partial_t \mathbf{e} \quad (58)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{e} = -\mathbf{M}_\mu \partial_t \tilde{\mathbf{h}} \quad (59)$$

A differenciálegyenletek numerikus integrálásához felvesszünk egy Δt időlépést, amellyel az időtengelyen két, egymáshoz képest fél lépésközzel eltolt, ekvidisztáns felosztást definiálunk; az egyikben az időpontokat egész, a másikon „feles” indexszel látjuk el (13. ábra). (Ez a duális időbeli rács emlékeztetheti az olvasót a térbeli diszkretizálás módjára.) Az \mathbf{e} vektor időbeli mintáit az egész indexű, míg a $\tilde{\mathbf{h}}$ vektoréit a feles indexű időpontokhoz rendeljük hozzá, deriváltjaikat pedig a megfelelő véges differenciákkal közelítjük:

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}}_{k+\frac{1}{2}} \approx \mathbf{M}_\varepsilon \frac{\mathbf{e}_{k+1} - \mathbf{e}_k}{\Delta t} \quad (60)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{e}_k \approx -\mathbf{M}_\mu \frac{\tilde{\mathbf{h}}_{k+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{h}}_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (61)$$

Ebből átrendezéssel megkapjuk az ún. *update*-formulákat:

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\mathbf{h}}_{k+\frac{1}{2}} &:= \tilde{\mathbf{h}}_{k-\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_\mu^{-1} \mathbf{C}\mathbf{e}_k \Delta t \\ \mathbf{e}_{k+1} &:= \mathbf{e}_k + \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}}_{k+\frac{1}{2}} \Delta t \end{aligned}} \quad (62)$$

E formulákat rekurzívan alkalmazva ($\tilde{\mathbf{h}}_{k-1/2}$ és \mathbf{e}_k ismeretében) először $\tilde{\mathbf{h}}_{k+1/2}$, majd \mathbf{e}_{k+1} számítható ki. Az algoritmus elindításához persze kezdeti feltételekre van szükség, például $\tilde{\mathbf{h}}_{-1/2}$ és \mathbf{e}_0 ismeretére. Ezek a téreloszlások azonban nem választhatók meg tetszőlegesen, mert ki kell elégíteniük a (46) és (47) Maxwell-egyenleteket, azaz

$$\mathbf{F}\mathbf{M}_\mu\tilde{\mathbf{h}}_{-\frac{1}{2}} = \mathbf{0} \quad (63)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{M}_\epsilon\mathbf{e}_0 = \tilde{\mathbf{0}} \quad (64)$$

(utóbbi a forrásmentességet tükrözi). Azonban belátható, hogy ha a kezdeti feltételekre teljesülnek, akkor automatikusan fennállnak bármely későbbi időpontban is, tehát az időlépések kiértékelése során ezekre a Maxwell-egyenletekre nincs többé szükség.

A (62) rekurzív formulák egy sokváltozós diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírásának tekinthetők. A numerikus integrálás konvergenciájának szükséges feltétele e rendszer stabilitása. A stabilitásvizsgálat révén belátható, hogy az időlépés nem választható meg a térbeli felosztástól függetlenül, pontosabban a Δl térbeli rácsosztás felső korlátot szab a Δt időlépésre. Ez a Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) kritérium. Az általunk vizsgált cellastruktúrára a kritérium speciális alakja

$$\Delta t < \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}} = \frac{\Delta l}{c\sqrt{3}}, \quad (65)$$

amelyben c a közegbeli fénysebesség. A feltétel szemléletes tartalma (illetve szokásos magyarázata), hogy az időlépésnek kisebbnek kell lennie, mint amennyi idő alatt a fény a két szomszédos rácspont közötti távolságot befutja.

7.4. Peremfeltételek

A FIT numerikus számításához a modelltartománynak véges méretűnek kell lennie, vagyis a cellastruktúrát valahol le kell zárni. Emiatt az (54)-(56) konstitúciós egyenletek rendszere hiányos lesz, mivel a peremen fekvő lapok és élek nem rendelkeznek duális párral. A hiányzó egyenleteket a peremre vonatkozó speciális feltételekkel kell pótolni, amelyek lehetséges alakja attól is függ, hogy a struktúra primer, vagy duál cellával ér véget. Megjegyezzük, hogy a FIT peremfeltételei teljes összhangban vannak a Maxwell-egyenletek zárt tartományon való egyértelmű megoldhatóságának ismert feltételeivel.

Legkézenfekvőbb megoldásnak az tűnhet, hogy a struktúrát a forrásoktól olyan távolságban zárjuk le, ahol a tér már elhanyagolhatóan kicsiny, és így a peremen a 0 térértéket írhatjuk elő. A gyakorlatban ez nem mindig célszerű, és számos, ennél sokkal hatékonyabb megoldás létezik, de ezek tárgyalása meghaladja jegyzetünk kereteit.

7.5. Hálózati egyenletek

Rendezzük nullára az indukciótörvény (45) diszkrét alakját:

$$\mathbf{C}\mathbf{e} + \partial_t\mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (66)$$

3. táblázat. A FIT általánosított hálózati egyenletei.

	Elektromos körök	Mágneses körök
Kirchhoff I.	$\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{j}} + \partial_t \tilde{\mathbf{d}}) = \tilde{\mathbf{0}}$	$\mathbf{F}\mathbf{b} = \mathbf{0}$
Kirchhoff II.	$\mathbf{C}\mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0}$	$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}} - \tilde{\mathbf{j}} = \tilde{\mathbf{0}}$
Ohm-törvény	$\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{M}_\sigma \mathbf{e}$	$\mathbf{b} = \mathbf{M}_\mu \tilde{\mathbf{h}}$

Ez nem más, mint Kirchhoff feszültségtörvénye a primer élekből alkotott zárt hurkokra vonatkozóan. Az áramkörökben a $\partial_t \mathbf{b}$ indukált feszültségek általában a tekercsek kapcsain mérhetőek (habár a tekercs menetei által kifizített felület valójában a hurok felületéhez számítandó), ezért élfeszültségnek tekinthetők, és így beépíthetők az \mathbf{e} vektorba. Ha a primer cellák P csúcaiban felvesszük a φ elektromos skalárpotenciált, és abból az élfeszültségeket a diszkrét gradiens operátorával képezzük,

$$\mathbf{e} = -\mathbf{G}\varphi = \tilde{\mathbf{F}}^\top \varphi, \quad (67)$$

akkor a feszültségtörvény az (50) azonosság miatt automatikusan teljesül:

$$\mathbf{C}\mathbf{e} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{F}}^\top \varphi = \mathbf{0}\varphi = \mathbf{0}. \quad (68)$$

Ezen alapul a csomóponti potenciálok módszere a hálózatelméletben.

Kirchhoff áramtörvénye a duál cellák térfogataira írható fel, és úgy származtatható, hogy a (44) Maxwell-egyenletet balról szorozzuk az $\tilde{\mathbf{F}}$ mátrixszal:

$$\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{\mathbf{F}}\partial_t \tilde{\mathbf{d}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{j}} + \partial_t \tilde{\mathbf{d}}) = \tilde{\mathbf{0}}, \quad (69)$$

ahol felhasználtuk a (49) azonosságot. A $\partial_t \tilde{\mathbf{d}}$ eltolási áramok a villamos hálózatokban a kondenzátorok áramának felelnek meg.

Ha az eltolási áram hatása elhanyagolható, akkor a (44) Maxwell-egyenlet nullára rendezett alakja

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{h}} - \tilde{\mathbf{j}} = \tilde{\mathbf{0}}. \quad (70)$$

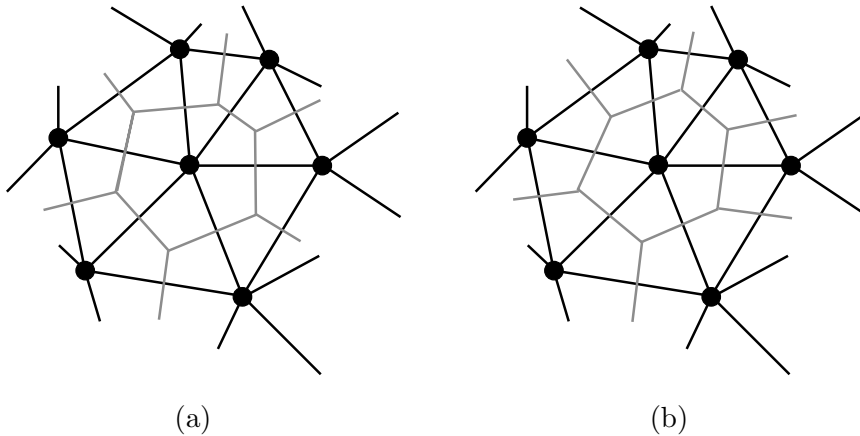
Ez is Kirchhoff-törvény csak éppen az ún. *mágneses körökre* vonatkozik. Azt fejezi ki, hogy a duál élekből alkotott bármely zárt hurkon a magnetomotoros erők (mágneses feszültségek) algebrai összege egyenlő a hurok által kifizített felületen áthaladó árammal. Ezt az áramot a mágneses körök esetében *gerjesztésnek* nevezzük, és forrásnak tekintjük.

A mágneses köröknek a fluxus megmaradását kifejező Kirchhoff-törvénye a primer cellák térfogataira vonatkozik, és a (46) Maxwell-egyenlet fejezi ki:

$$\mathbf{F}\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (71)$$

Végül a hálózati egyenletek eme kontextusában (57) első és harmadik egyenlete a mágneses, illetve elektromos Ohm-törvény:

$$\mathbf{b} = \mathbf{M}_\mu \tilde{\mathbf{h}}, \quad \text{ill.} \quad \tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{M}_\sigma \mathbf{e}. \quad (72)$$



14. ábra. Szimplex alapú duális cellakomplexumok szemléltetése két dimenzióban: Delaunay-Voronoi-duál (a) és súlyponti duál (b).

A felsorolt hálózati egyenleteket a 3. táblázatban rendszereztük. Kijelenthető tehát, hogy a FIT egyenletrendszer lényegében az elektromos és mágneses körök általánosított hálózati egyenleteiből áll.

7.6. Kitekintés¹⁴

A véges integrálok módszerét több irányban továbbfejlesztették. A fejlesztések egyik legfontosabb célja a térbeli diszkretizálás javítása volt. A bemutatott kocka-struktúra ugyanis nem csupán „önkéntes” választásnak tűnhet, de viszonylag rugalmatlan is: egyrészt általában nem követhetők jól vele a közegethatár-felületek, másrészt nehezen oldható meg a cellastruktúra *adaptív finomítása*, ha egyes térrészekben pontosabb számításra van szükség. A gyakorlatban ezért másfajta duális cella-struktúrákat (ún. cellakomplexumokat) is használnak. A legelterjedtebb változatban a primer struktúra egy *szimplex-háló* (két dimenzióban háromszögekből, három dimenzióban pedig tetraéderekből épül fel), ezzel ugyanis bonyolult geometriájú tartományok is diszkretizálhatók, és a változó sűrűségű felosztás kivitelezése is egyszerűbb.

A szimplex-háléhoz többféleképpen rendelhető duális struktúra. A legkézenfekvőbb, hogy a duál cellák éleit a szomszédos háromszögek (tetraéderek) körülírt körei (gömbjei) középpontjának összekötése adja; ez a Delaunay-Voronoi-duál (14/a. ábra). Előnye, hogy rendelkezik az ortogonalitási tulajdonsággal (az él-lap párok merőlegesek egymásra). Hátránya viszont, hogy nem minden hálóra képezhető, ugyanis előfordulhat, hogy a körülírt kör (gömb) középpontja a cellán kívülre esik. A duál cella láthatóan nem szimplex alakú; bonyolult és sokféle topológiája azért nem jelent problémát, mert nem kell tárolni: a változóit akár a primer struktúra alakzataihoz is hozzárendelhetjük. Az incidenciamátrixok szerkezete itt más, mint a kockacellák esetében, azonban ezek is a rotáció-, illetve divergenciaoperátor diszkrét reprezentációjának tekintendők.

¹⁴Az e szakaszban leírtak nem képezik a tananyag részét.

Egy másik megoldás az ún. súlyponti duál (14/b. ábra), amelynél a szimplexek súlypontjainak összeköttetése adja a duál cellák éleit. Ez a duál struktúra bármely szimplex-hálóra képezhető, de hátránya, hogy az ortogonalitási feltétel nem teljesül. Ez a Maxwell-egyenletek diszkrétizált alakját nem érinti (hisz azok ezúttal is egzaktak), a konstitúciós egyenletekét viszont annál inkább. Az ilyen irányú továbbfejlesztések sarkalatos pontját ebből következően a „diszkrét Hodge operátor”, azaz \mathbf{M}_ε , \mathbf{M}_μ , illetve \mathbf{M}_σ hatékony implementálása jelenti.

A fejlesztések másik célja a konvergencia javítása: a FIT algoritmusának a diszkrétizálásból eredő numerikus hibája a cellaméret csökkentésével csupán *lineárisan* csökken, míg más módszereké (pl. a végeelem-módszeré) másod-, vagy annál magasabb rendben. Ennek a hátrálynak a kiküszöbölésére is számos megoldás született.

* * *

A FIT több más numerikus térszámítási módszerrel rokonságot mutat. Például nagyon hasonló tér- és időbeli diszkrétizáláson alapul a népszerű „időbeli véges differenciák módszere” (*finite-difference time-domain*, FDTD), amelyet Yee-algoritmusnak is neveznek [6]. Hovatovább szokás a FIT-et az FDTD egyfajta általánosításának tekinteni. Ez azonban legfeljebb fordítva igaz, tudniillik hogy az FDTD a FIT egy *nagyon* speciális esete. A különbség nem csupán az, hogy az FDTD a Maxwell-egyenletek differenciális alakját közelíti a vektormezők rácsponti mintáiból (amely a FIT-től teljesen eltérő módszer), hanem hogy az FDTD *lényege* az időlépéses séma. Emiatt az FDTD kizárólag időbeli szimulációra alkalmas, míg a FIT frekvenciatartománybeli, sőt akár stacionárius modellezésre is.

A végeelem-módszerrel is vannak közös pontok, habár ott a közelítő megoldás elvi alapja egészen más, mint a FIT-nél. Az elektromágneses térszámításban használt végeelemes programokban eleinte csak a háló csomópontjaihoz rendeltek fizika mennyiséget (nodális elemek). Később azonban megjelentek az edge-elemek, más néven Whitney-, vagy Nedelec-elemek, amelyeknél a változókat a vektormezőknél az elem éleire vett vonalintegráljai jelentik. De léteznek már ún. lap-elemek is (facet-element), amelyek változói a mezőknek a lapokra vett felületi integráljai. Az olyan végeelemet, amelynek csúcsaihoz, éleihez, lapjaihoz és térfogatához egyaránt rendelünk valamilyen változót, Whitney-komplexumnak hívjuk, és ebben nagyon hasonlítanak a FIT-cellákra [7].

Felhasznált irodalom

- [1] Enzo Tonti: Finite formulation of the electromagnetic field. In *Progress in Electromagnetic Research, PIER 32* (konferenciaanyag). 2001, 1–44. p.
- [2] Markus Clemens–Thomas Weiland: Discrete electromagnetism with the Finite Integration Technique. In *Progress in Electromagnetic Research, PIER 32* (konferenciaanyag). 2001, 65–87. p.
- [3] Simonyi Károly–Zombory László: *Elméleti villamosságtan*. 2000, Műszaki Könyvkiadó.
- [4] Alain Bossavit: *Differential Geometry for the Students of Numerical Methods in Electromagnetism*. 1990, EDF, Paris.
- [5] CST – Computer Simulation Technology. URL www.cst.com.
- [6] Allen Taflove–Susan C. Hagness: *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. 3. kiad. 2005, Artech House.
- [7] Alain Bossavit: *Computational Electromagnetics: Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements*. 1998, Academic Press.