Analízis, 2. PZH, MINTAMEGOLDÁS (α) 2012. nov. 29.

1, $\boxed{22}$

a, $\boxed{8}$

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{\operatorname{arsh}(x+1)}{\arccos(x^4)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to -1+0} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}\right)}{\left(\frac{-4x^3}{\sqrt{1-x^8}}\right)} = \quad 3 \quad 3$$

A számláló és a nevező határértéke is 0, így alkalmazható a L'Hospital szabály.

$$= \lim_{x\to -1+0} \frac{-\sqrt{1-x^8}}{4x^3\sqrt{1+(x+1)^2}} = \underline{\underline{0}} \quad 1 \quad 1$$

($\sqrt{1-x^8} \to 0$, $4x^3 \to -1$, $\sqrt{1+(x+1)^2} \to 1$)

b, $\boxed{6}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{ch}(3x)}{\operatorname{sh}(4x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^{3x}+e^{-3x})/2}{(e^{4x}-e^{-4x})/2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{-6x}}{e^{x}-e^{-7x}} = \underline{\underline{0}} \quad 2 \quad 2 \quad 2$$

($e^{-6x} \to 0$, $e^{x} \to \infty$, $e^{-7x} \to 0$)

c, $\boxed{8}$

$$\lim_{x\to 0+0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0+0} e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)} \quad 4$$

($\operatorname{tg} x \to 0$, $\ln(\sin x) \to -\infty$)

Csak a kitevő:

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+0} \frac{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} -\sin x \cdot \cos x = 0 \quad 3$$

($\sin x \to 0$, $\cos x \to 1$)

Így $\lim_{x\to 0+0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$ 1

2, $\boxed{8}$ $\lim\limits_{x\to 4+0} \frac{5}{2x-8} = \infty$; Legyen $P>0$.

$$\frac{5}{2x-8} \overset{③}{>} P \iff \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-4} \overset{②}{>} P \iff 0 < x-4 < \frac{5}{2P}, \text{ tehát } \delta(P) = \frac{5}{2P} \quad ③$$

3, $\boxed{15}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, & \text{ha } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{\sin(3x)}{x}, & \text{ha } x \notin [-\pi, 0] \end{cases}$$

Csak a $0, -\pi, -\pi/2$ pontokat kell vizsgálni, a többi pontban f folytonos, mert folyt. fgv-ek hányadosa, és a nevező nem nulla. ④

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(3x)}{3x} = 3$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0-0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1$$

Tehát $x=0$-ban véges ugrás van. ④

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}\pm 0} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}\pm 0} \frac{\overset{\nearrow -1}{\sin x}}{\underset{\downarrow -\frac{\pi}{2}}{x}\ \underset{\searrow \pm 0}{\cos x}} = \pm\infty$$

Tehát az $x = \frac{-\pi}{2}$-ben másodfajú szakadás van. ④

$$\lim_{x\to -\pi+0} f(x) = \lim_{x\to -\pi+0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{tg}(-\pi)}{-\pi} = 0$$

$$\lim_{x\to -\pi-0} f(x) = \lim_{x\to -\pi-0} \frac{\sin(3x)}{x} = \frac{\sin(-3\pi)}{-\pi} = 0$$

Tehát $x=-\pi$-ben megszüntethető szakadás van. ③

4, $\boxed{11}$

Az $x \neq 0$ helyeken f diff.-ható függvények szorzata, kompozíciója, így diff.-ható, tehát folytonos is. ③

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ esetén $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ ③

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \underset{\downarrow \atop 0}{x^2} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{korlátos}} = 0 = f(0), \text{ tehát } f \text{ folyt. 0-ban.}$$ ②

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \underset{\downarrow \atop 0}{x} \cdot \underset{\text{korl.}}{\sin\frac{1}{x}} = 0$$ ③

—— o ——

5, $\boxed{18}$ $f(x) = -\pi + 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(3x) - 1)$

Mivel $\operatorname{sh} x$ és $\operatorname{arctg} x$ szigorúan monoton növők $\mathbb{R}$-en, ezért f is szigorúan monoton nő, így invertálható. ④

$D_f = \mathbb{R}$. ② (Másképp: $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ esetén.)

$$y = -\pi + 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(3x) - 1) \iff \operatorname{tg}\left(\frac{y+\pi}{2}\right) = \operatorname{sh}(3x) - 1$$

$$x = \underline{\underline{f^{-1}(y) = \frac{1}{3} \operatorname{arsh}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{y+\pi}{2}\right) + 1\right)}}$$ ④

$$D_{f^{-1}} = R_f = -\pi + 2 \cdot R_{\operatorname{arctg}} = \left[-\pi + 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right); -\pi + 2\frac{\pi}{2}\right] = [-2\pi, 0]$$ ③

$$R_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$$ ①

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x+\pi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \left(\operatorname{tg}\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + 1\right)^2}}$$ ④

6, [13] $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$; $f'(x) = \dfrac{x^2+4-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$ (2)

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+4)^2-(4-x^2)2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} \text{ (2) } = \frac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{(x^2+4)^3} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2-12)}{(x^2+4)^3} \text{ (2) } = \underbrace{\frac{2}{(x^2+4)^3}}_{>0}\cdot x\cdot(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$$

x	$x<-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}<x<0$	0	$0<x<2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}<x$
$f''(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	∩	infl.	∪	infl	∩	infl.	∪

(7)

7, [13]

a, [9] $f(x) = 2x\ln x + x$ $\quad |x>0|$

$f'(x) = 2\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 3$ (2)

$f'(x) > 0 \iff \ln x > -\frac{3}{2}$ (2) $\iff x > e^{-3/2}$ (2)

x	$0<x<e^{-3/2}$	$e^{-3/2}$	$e^{-3/2}<x$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	lok. min.	↗

(3)

b, [4] f folytonos, ezért Weierstrass II. tétele értelmében korlátos zárt intervallumon f felveszi szélsőértékeit. (2) Előző eredményünk szerint f szig. mon. csökken az $[e^{-2}, e^{-3/2}]$ int.-on, és szig. mon. nő a $[e^{-3/2}, e^{2}]$-en, így a minimum hely $e^{-3/2}$, és

$$f(e^{-3/2}) = 2\cdot e^{-3/2}\cdot(-3/2) + e^{-3/2} = e^{-3/2}(-3+1) = \underline{\underline{-2e^{-3/2}}}$$

(2)

8, $\boxed{8}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x-1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1-(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2-x-1}+\sqrt{x^2+x+1}}= \quad 3$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-2}{\sqrt{x^2-x-1}+\sqrt{x^2+x+1}} \quad 2 \quad =\lim_{x\to\infty}\frac{-2-2/x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-1/x^2}+\sqrt{1+1/x+\frac{1}{x^2}}} \quad 2 \quad =$$

ha $\uparrow$ $x>0$

$$=\frac{-2}{2}=\underline{\underline{-1}} \quad 1$$

— ∘ —

9, $\boxed{12}$

$$f(x)=(x^2+e^x)^{\operatorname{tg}x} \quad ; \quad x_0=0$$

$$f(0)=(0+1)^0=1^0=1 \quad 2$$

$$f'(x)=\left(e^{\operatorname{tg}x\cdot\ln(x^2+e^x)}\right)' \quad 2 \quad =f(x)\cdot\left(\operatorname{tg}x\cdot\ln(x^2+e^x)\right)'=$$

$$=f(x)\cdot\left(\frac{1}{\cos^2x}\ln(x^2+e^x)+\operatorname{tg}x\cdot\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}\right) \quad 3$$

$$f'(0)=1\cdot\left(1\cdot\underbrace{\ln 1}_{0}+0\cdot\frac{1}{1}\right)=0 \quad 2$$

Érintő: $\left.\begin{array}{l} y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \\ \boxed{y=1} \end{array}\right\}$ 3