Alkalmazott algebra 1.ea 2012.09.03.

4/1.

Irodalom: Ivanyos Gábor órajegyzete
Rózsa Pál
Peter Lax

—*—

*

$\mathbb{F}$ test $\cdot, +$

- (1) $+, \cdot$ asszociatív
  (2) $+, \cdot$ kommutatív
  (3) disztributivitás
  (4) $0, 1$ neutrális elemek
  (5) $-a$, $\frac{1}{a}$, inverzelemek
  $a \neq 0$
- $0, 1, -a, a^{-1}$ egyértelmű
- $a-b = a+(-b)$
  $a/b = a \cdot (b^{-1})$
- nullosztómentesség

  $ab = 0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$
- Pl: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_{(\text{prím})}$
- $\mathbb{F}_q$ q elemű test ($q = p^n$ prímhatvány)
  ↳ egyértelmű char $\mathbb{F}_q = p$, ha $q = p^n$

spec:

$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$

- $\mathbb{F}$ karakterisztikája p, ha $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p} = 0$
  char $\mathbb{F}$ (prím)
  ha $\exists n$: $\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n} = 0 \Rightarrow \exists p$

- nem test: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\text{nem prím}}$

de: gyűrűk

Polinomok

- $f(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ $\quad a_i \in \mathbb{F}$

$\in \mathbb{F}[X]$

- $\deg f = n$, ha $a_n \neq 0$; $\deg 0 = -\infty$
- $f = 0$, ha az együtthatók megegyeznek

(≠ polinomfüggvény)

↓

pl: véges test

- polinom gyöke α: $f(\alpha) = 0$

$\mathbb{F}[X] \ni f(x)$, $\deg f = n \Rightarrow \leq n$ gyök

- $\mathbb{F}[X]_{<n}$ n-nél kisebb fokú

Ⓟ $X^2 - 1$ gyökei $\underset{\text{gyűrű}}{\mathbb{Z}_8}$ felett: 4

- algebra alaptétele:

$f(x) \in \mathbb{C}[X]$, $\deg f = n \Rightarrow$ f-nek pontosan n gyöke van (multiplicitással)

$f(X) = a_n (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$

Alkalmazott algebra 1.ea

2012.09.03

4/2.

(P) lássuk be: char $\mathbb{F} = p \Rightarrow (a+b)^p = a^p + b^p$

(HF)

Vektorterek

V $\underline{v} \in V$ vektorok

$\mathbb{F}$ $\lambda \in \mathbb{F}$ skalárok

$\underline{u} + \underline{v}$, $\lambda \underline{v}$ $(+ , \cdot_\lambda)$

- (1) + kommutatív, asszociatív, $\underline{0}$

  (2) $(\lambda+\mu)\underline{v}$, $\lambda(\underline{u}+\underline{v})$, $(\lambda\mu)\underline{u}$, $1\underline{v}$

- $0\underline{v} = \underline{0}$, $-1\underline{v} = -\underline{v}$

(P) $\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \end{bmatrix}, a_i \in \mathbb{F} \right\}$

$\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x]_{<n}$

$\mathbb{F}^{n \times n}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv-ek

$S \to \mathbb{F}$

$\mathbb{C}$ a $\mathbb{Q}$ ill $\mathbb{R}$ felett $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$

Alterek

- lineáris kombináció $\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$
- $S \subseteq V$ altér, ha $(S \leq V)$

  - $S \neq \emptyset$
  - +-ra zárt
  - $\cdot_{\lambda}$-ra zárt

- Áll: $S \subseteq V$-re $S \leq V \Leftrightarrow \underline{0} \in S$ és S zárt lin. komb.-ra

Pl $\mathbb{R}^3$ alterei: $\{\underline{0}\} = 0$

origón áthaladó egyenesek

—||— síkok

$\mathbb{R}^3$

$\mathbb{F}[x]_n \leq \mathbb{F}[x] \leq \{\mathbb{F} \to \mathbb{F}\}$

Generált altér, generátorrendszer

- $S \subseteq V$

  S által generált altér $\langle S \rangle$ a legszűkebb $\supseteq S$

  $\langle S \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i$

- generátorrendszer $\langle S \rangle = V$

Alkalmazott algebra

2012.09.03.
4/3.

(P) $S = \{x+1, x^2-2x, x^2, 2x+3\}$

$\langle S \rangle \overset{?}{=} \mathbb{F}[x]_{<3}$

$x^2, 2x, x, 1$ ✓

elég kevesebb is!

Lineáris függetlenség

- $S \subseteq V$ lin. flen, ha

(1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = 0 \Rightarrow \forall i\ \lambda_i = 0$

(2) $|S| \geq 1: \quad \forall \underline{s} \in S: \ s \notin \langle S - \{\underline{s}\} \rangle$

- S flen, $S \cup \{\underline{v}\}$ öf $\Rightarrow$ $\underline{v} \in \langle S \rangle$

(P) $S = \{x+1, x^2-2x, x^2, \underline{2x+3}\}$ lin. öf.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Bázis, dimenzió

- lin. flen. gen. rsr.

$\mathbb{F}^n$ standard bázisa $\begin{matrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{matrix}$

$S \subseteq V$ bázis $\Leftrightarrow$ $\forall$ vektor egyértelműen áll elő a lin. kombo -ként

$\Leftrightarrow$ min. gen. rsz $\Leftrightarrow$ max. flen. rsz

Ⓟ $\mathbb{F}[x]$-ben bázis $1, x, x^2, \dots$

$\mathbb{F}[x]_{<n}$ $1, x, \dots, x^{n-1}$ standard bázis

$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ $1, i$

Dimenzió

- dim $V = |\mathcal{B}|$

Ⓟ dim $\mathbb{F}^n = n$

dim $\mathbb{F}[x]_{<n} = n$

dim $\mathbb{F}[x] = \infty$

dim $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$

dim $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}} = \infty$

Lineáris leképezés

$f: V \to W$, ahol V, W $\mathbb{F}$ felett lin. terek

összegtartó, skalárszorostartó

- $f(\underline{0}) = \underline{0}$

Ⓟ $\mathbb{R}^3$ $\underline{0}$-t helybenhagyó egybevágóságai

vetítés origón átmenő egyenesre / síkra / ...

deriválás : $\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható$\} \to \{\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

integrálás : $f(x) \mapsto \int_a^x f(x)dx$

Alkalmazott algebra 1. ea 2012. 09. 03.

4/4.

- $f(x) \longmapsto \begin{bmatrix} f(a_1) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{bmatrix}.$

$\{S \to \mathbb{F}\} \to \mathbb{F}^n$

- lineáris transzformáció $V \to V$ lin. lek.

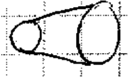
lineáris függvény (funkcionál) $V \to \mathbb{F}_{\mathbb{F}}$

- $\varphi: V \to W$

$\mathrm{Im}\,\varphi = \{ \varphi(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V \} \leq W$ képtér

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{ \underline{v} \mid \varphi(\underline{v}) = \underline{0} \} \leq V$ magtér

φ szürjektív, ha $\mathrm{Im}\,\varphi = W$



φ injektív, ha $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$

φ izomorfizmus, ha szürjektív és injektív

- dimenziótétel: $\dim \mathrm{Im}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim V$

(T) $\dim V < \infty$, $\varphi: V \to W$ lin.

φ izomorfizmus $\Longleftrightarrow$ φ injektív

$\Longleftrightarrow$ φ szürjektív } és $\dim V = \dim W$

(HF) végtelen dimenziós vektortér ellenpélda

(P) Alkalmazás: polinominterpoláció

ha $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ különbözők

$b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{F}$

$$\Rightarrow \exists!\ f(x) \in \mathbb{F}[X]_{<n} : f(a_i) = b_i$$

(B) $\varphi: \mathbb{F}[X]_{<n} \to \mathbb{F}^n$ lin

$$f(x) \mapsto \begin{bmatrix} f(a_1) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{bmatrix}$$

φ injektív: $\varphi(f(x)) = \underline{0} \Leftrightarrow f(a_i) = 0\ \forall i$

$\deg f < n-1$

$\Rightarrow f = 0$

$$\Rightarrow \varphi \text{ izo} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \operatorname{Im} \varphi \quad ✓$$

(K) $|\mathbb{F}| = \infty \Rightarrow$ polinomok ↔ polinomfüggvények

(HF) $\mathbb{Z}_5$ felett különböző polinomok azonos függvénnyel

Alkalmazott algebra 2. ea

2012. 09. 07.

4/1.

(Pl) polinominterpoláció

$$f \longmapsto \begin{bmatrix} f(a_1) \\ f(a_2) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{bmatrix}$$

$\mathbb{F}[X]_{<n} \rightarrow \mathbb{F}^n$ izomorfizmus

$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ -nek létezik ősképe

Ⓓ Lagrange-interpoláció

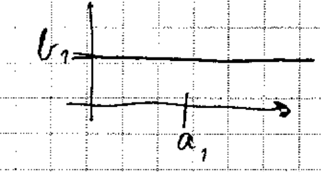
$L_i(X) =$ $a_i \mapsto 1$

$a_j \mapsto 0 \quad (j \neq i)$

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j\neq i} (X-a_j)}{\prod_{j\neq i} (a_i - a_j)}$$

Ⓓ Newton-interpoláció

(a_1, b_1)-ben



$f_0, \dots, f_{n-1}$ $\quad f_i$: $\deg f_i = i$

f_{i-1}: $a_1 \mapsto b_1$

$a_i \mapsto b_i$

$f_i(X) = f_{i-1}(X) + A(X-a_1)\dots(X-a_i)$ $\quad A = ?$ $\quad f(a_{i+1}) = b_{i+1}$

① Shamir-féle titokmegosztás

c szám

n emberek információ:

  n együtt ✓

  $\forall (n-1)$ ✗

$\deg f(X) \leq n-1$, konstans tagja c $(f(0)=c)$

kiosztja: $f(1), f(2), \dots, f(n)$

ha csak $(n-1)$: $f(0)$ bármi lehet:

  $f(0)$-ha és a többihez is interpolálhatunk

bármely k-ra: $(k-1)$-ed fokú

(HF) • $V \to V$ injektív, nem izomorfizmus

  $\mathbb{F}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in \mathbb{F}\}$

  $(a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$

• $|\mathbb{F}| = \infty$ polinomok $\Leftrightarrow$ polinomfv-ek

$$f(x) \qquad \begin{array}{c} \mathbb{F} \to \mathbb{F} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

$f(x)$ és $g(x)$ ugyanazt a pol. fv-t adja $(\deg f, g \leq h)$ $(h+1)$ helyen

$\Rightarrow f(X) = g(X)$

Alkalmazott algebra 2. ea 2012.09.07.

4/2.

- $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{F}_5$ fölött két polinom,

azonos polinomfüggvénnyel

$f(X) = X(X-1)(X-2)\dots(X-5)$

0

Vagy: kis Fermat tétel $a^4 \equiv 1 \ (5)$ $\forall 5 \nmid a$

$a^5 \equiv a \ (5)$ $\forall a$

$X^5 - X$ mindig 0

Műveletek lineáris leképezésekkel

- $V_{\mathbb{F}}, W_{\mathbb{F}}$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) = \{f: V \to W : f \ \mathbb{F}\text{-lineáris}\}$
- $\mathrm{Hom}(V,W)$ vektortér

$\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,W)$ endomorfizmus

- $\mathrm{id}_V \in \mathrm{End}(V)$ $\underline{v} \mapsto \underline{v}$
- $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(W,U)$

$\underbrace{\psi\varphi}_{\text{asszociatív}} \in \mathrm{Hom}(V,U)$ $v \mapsto \psi(\varphi(\underline{v}))$

disztributív: $\Theta(\varphi+\psi)(\underline{v}) = \Theta((\varphi+\psi)(\underline{v})) =$

$= \Theta(\varphi\underline{v} + \psi\underline{v}) = \Theta(\psi\underline{v}) + \Theta(\varphi\underline{v}) =$

$= (\Theta\psi)\underline{v} + (\Theta\varphi)\underline{v} = (\Theta\psi + \Theta\varphi)\underline{v}$

- $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$

  $\psi \in \mathrm{Hom}(W,V)$ φ inverze, ha $\psi\varphi = id_V$
  $\varphi\psi = id_W$

- áll: φ invertálható $\Leftrightarrow$ φ izomorfizmus

biz.:

$\Rightarrow$ a) $\varphi(\underline{u}) = \varphi(\underline{v})$

$\underline{u} = \psi\varphi(\underline{u}) = \psi\varphi(\underline{v}) = \underline{v}$ (injektív)

b) $\forall w: w = \varphi\psi(\underline{w})$ (szürjektív)

$\Leftarrow$ φ izomorfizmus:

$\forall w \in W: \exists! v: \varphi(v) = w$

$\psi: w \mapsto v$ lin.

Mátrixok

- $\mathbb{F}^{n\times m}$ $+, \cdot_{\mathbb{F}}, \cdot_{\mathbb{F}^{(x)}}$

- $AB = (c_{ij})$

  $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

- oszlopvektor:

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix} = [\Sigma a_{ij} x_j] \text{ i. sor} = \sum x_j \underline{\mathbf{a}}_j$$

- sorvektor

$$[x_1 \quad x_n] \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \sum x_i \underline{\mathbf{a}}_i$$

Alkalmazott algebra 2. ea 2012. 09. 07.

4/3

- A^T sorok → oszlopok
- mátrix → lin. lek.

$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$

$\varphi_A : \underset{\mathbb{F}^n}{\underset{\cap}{\underline{x}}} \mapsto \underset{\mathbb{F}^m}{\underset{\cap}{A\underline{x}}}$ és lineáris.

$\Uparrow$

A műveleti tul:

\+ assoc, komm

· assoc

disztr.

$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ egységelem

$A(x+y) = Ax + Ay$, $\lambda Ax = A\lambda x$

- φ_A megh. A-t

$A\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = A\underline{e}_i =$ A i-edik oszlopa

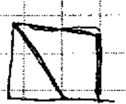
- speciális mx.-ok

I

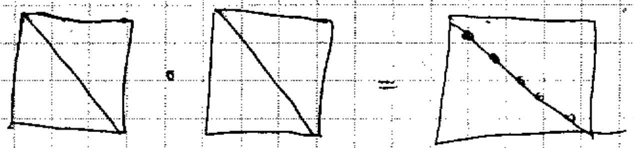
diagonális mx. $D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}_{n\times n}$ $\underline{e}_i \mapsto d_i\underline{e}_i$

felső Δ mx: $\begin{bmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$ $\langle e_1 \rangle \leq \langle e_1, e_2 \rangle \leq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \leq \dots$

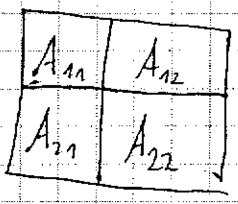
alsó Δ mx $\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{bmatrix}$



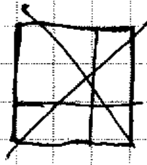
nem □-es eset



blokk mx:



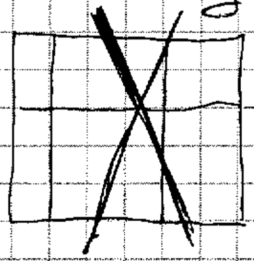
blokkmx-ok szorzása: ~ blokk ~ elem (nemkommutatív)

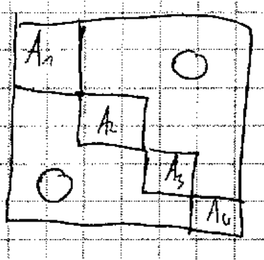


$$\begin{bmatrix} I & I \\ I & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I\cdot 0 + I\cdot I & -I+B \\ I\cdot 0 + A\cdot I & I(-I)+AB \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & -I+B \\ A & -I+AB \end{bmatrix}$$

blokkdiag mx:





permutációmx: 1-esek "bástyaelrendezésben" (a többi 0)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$e_1 \mapsto e_2$

$e_2 \mapsto e_3$

$e_3 \mapsto e_1$

Alkalmazott algebra 2. ea 2012. 09. 07.

4/4.

- $\operatorname{Im} \varphi_A = \langle A \text{ oszlopai} \rangle \leq \mathbb{F}^m$

- φ_A nem invertálható:

  $\operatorname{Im} \varphi_A = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^2$

  φ nem szürjektív

- $\varphi_A \varphi_B = \varphi_{AB}$

  $A(Bx) = (AB)x$

  $\varphi_A + \varphi_B = \varphi_{A+B}$

  $\lambda \varphi_A = \varphi_{\lambda A}$

  $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$

Lineáris leképezés mátrixa

- $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$

  V egy bázisa $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$

  W egy bázisa $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$

- $v \in V$: $v = \sum x_i b_i$ $\quad [v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ koordinátavektor

  $V \to \mathbb{F}^n$ izomorfizmus

- $A = [\varphi]_{B,C}$

  $A[v]_B = [\varphi v]_C$

- $v = \sum x_i \underline{b}_i \qquad [v]_B = X$

$\varphi(v) = \sum x_i \varphi(\underline{b}_i)$

$$[\varphi(v)]_{\mathcal{C}} = \sum x_i [\varphi(b_i)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [\varphi b_1]_{\mathcal{C}} \cdots \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{[v]_B}$$

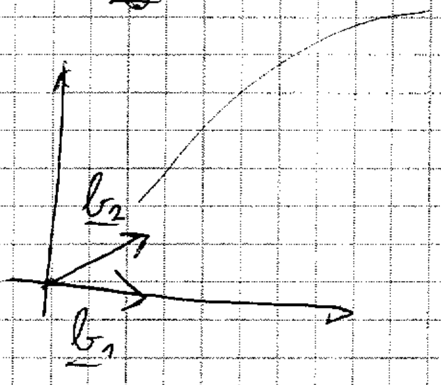
$$A = \begin{bmatrix} [\varphi b_1]_{\mathcal{C}} & [\varphi b_2]_{\mathcal{C}} & \cdots \end{bmatrix}$$

- Ha $\varphi \in End(V)$: többnyire $\mathcal{C} = B$

akkor $[\varphi]_B = [\varphi]_{B,B}$

- (Pl) $\mathbb{R}^2$-nek az $y=x$-re való tükrözése

$S = \{\underline{i}, \underline{j}\} \qquad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$



$\underline{i} \mapsto \underline{j} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{j} \mapsto \underline{i} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Alkalmazott algebra 3. ea 2012.09.14.

3/1.

Báziscsere, mátrixok hasonlósága

$\varphi: V \to W$ $\qquad V \quad \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ $\qquad$ adott $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

$\qquad\qquad\qquad W \quad \mathcal{C}, \mathcal{C}'$

$$[\varphi]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = [id]_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}\,[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,[id]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

$$[id]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left[\ \dots\ [b'_i]_{\mathcal{B}}\ \dots\ \right]$$

Speciálisan: $\varphi: V \to V$ $\quad [\varphi]_{\mathcal{B}}$ adott

$$[\varphi]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{[id]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}_{P^{-1}}\ \underbrace{[\varphi]_{\mathcal{B}}}_{A}\ \underbrace{[id]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}_{} = P^{-1}AP$$

P: az áttérés mátrixa, oszlopai az új báziselemek a régiben elkoordinátázva

(P1) tükrözés az $y=x$ egyenesre

standard: $A = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ $\quad \mathcal{S}$

$\mathcal{B}' = \{(1,0),(1,1)\}$ $\qquad P = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ $\quad P^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1&1\\1&0\end{bmatrix}\ \boxed{\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}} \end{array}$$

Inverz mátrix

- $A, A^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- állítás: $\exists A^{-1} \Rightarrow \exists! A^{-1}$
  $\exists A^{-1}, B^{-1} \Rightarrow \exists (AB)^{-1}$
  $\exists A^{-1}, AB=I \Rightarrow \exists B^{-1} = A$

bizonyítás:

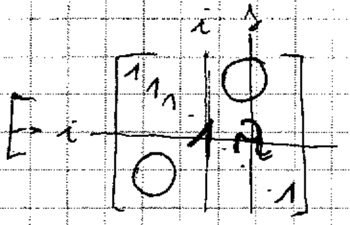
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}$
  $(A^{-1}A)B = IB = B$

Elemi sorműveletek

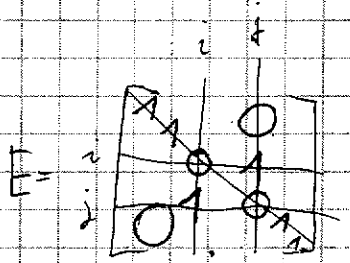
- $[x_1 \dots x_n]\, A = \sum x_i \underline{a}_i$

  PA ∀ sora A sorainak lin. komb.

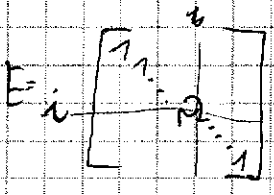
- 1) $\underline{a}_i \mapsto \underline{a}_i + \lambda \underline{a}_j \quad (i \neq j)$



2) $\underline{a}_i \mapsto \underline{a}_j$



3) $\underline{a}_i \mapsto \lambda \underline{a}_i$

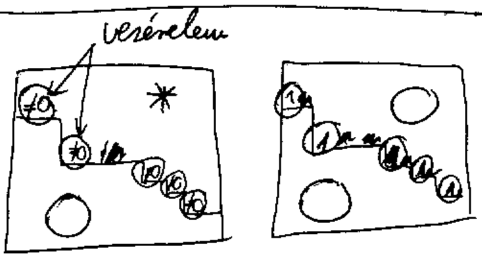


invertálható:
mátrix → emiatt
a művelet

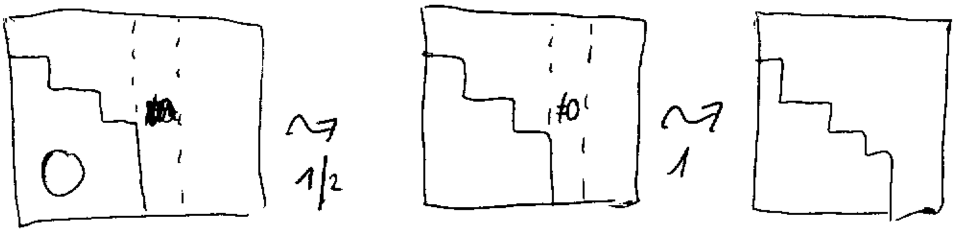
Alkalmazott algebra 3. ea

2012.09.14.
3/2.

def: lépcsős alak
redukált lépcsős alak



- ∀ m×n (redukált) lépcsős alakra hozható sorműveletekkel



Ⓣ $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \exists \varphi_A^{-1} \Leftrightarrow$ ∃ lépcsős alak n vezérelemmel $\Leftrightarrow$ ∃ red. lépcsős alak $= I$

$\Leftrightarrow A = \prod E_i$

$(A \in \mathbb{F}^{n \times n})$

Ⓑ $- AB = BA = I \Leftrightarrow \varphi_{AB} = \varphi_{BA} = id \Leftrightarrow \varphi_A \varphi_B = \varphi_B \varphi_A$ $(E = \prod E_i)$

- ∃E : EA az A lépcsős alakja, (EA) invertálható

ha lenne benne 0 sor : $\mathrm{Im}\, \varphi_{EA} < \mathbb{F}^n$ nem szürjektív

- ∀ sorban van vezéregyes

- $EA = I$

- Inverz kiszámítása:

$[A \mid I]$ redukált lépcsős alakban $[I \mid A^{-1}]$

$$[\underbrace{EA}_{I} \mid \underbrace{EI}_{A^{-1}}]$$

Ⓟl

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

ⒽⒻ $\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}$

Rang

$\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja $r(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}\,\varphi)$

$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ rangja $r(A) = r(\varphi_A)$

(az A oszlopaiból kiválasztható függetlenek max. száma)

- **áll:**

0) $r(A) \leq \min\{m, n\}$

1) $r(BA) = r(AC) = r(A)$, ha $\exists B^{-1}, C^{-1}$

2) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

3) $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

biz:

0) $\mathrm{Im}\,\varphi_A \leq \mathbb{F}^m \Rightarrow \dim \varphi_A \leq m$

$$\underbrace{\dim \mathrm{Im}\,\varphi_A}_{r(A)} + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi_A = n$$

1) báziscsere

2) $\mathrm{Im}\,\varphi_{AB} = \mathrm{Im}\,\varphi_A\varphi_B \leq \mathrm{Im}\,\varphi_A$

$r(AB) \leq r(A)$

$\mathrm{Im}\,\varphi_A\varphi_B = \varphi_A(\mathrm{Im}\,\varphi_B)$ dim.-ja ②

3) $\mathrm{Im}\,\varphi_{A+B} = \mathrm{Im}\,\varphi_A + \varphi_B \leq \mathrm{Im}\,\varphi_A + \mathrm{Im}\,\varphi_B$

- **áll:**

2) $\forall A \quad r(A) = s(A) = o(A)$

↓

lépcsős alakból a rang megállapítható

A lépcsős alakjában $r(A)$ nemnulla oszlo

Alkalmazott algebra 3.ea

2012.09.14.
3/3

---

① rang számítása: Gauss-kiküszöbölés

$r(A) = r(A^T)$

(HF) bizonyítani: redukált lépcsős alak egyértelmű

A helyett EA

---

alkalmazás: rang Fischer-egyenlőtlenség

$n, \lambda \in \mathbb{N}^+$

$|S| = n$, $\mathcal{H} \subseteq 2^S$, úgy, hogy

$H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, $H_1 \neq H_2 \Rightarrow |H_1 \cap H_2| = \lambda$

akkor $|\mathcal{H}| \le n$

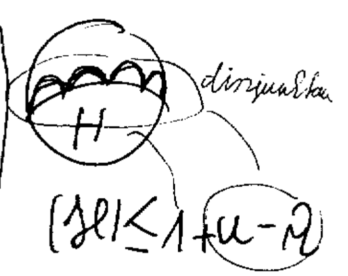
A $\mathcal{H}$ illeszkedési mx-a:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } s_j \in H_i \\ 0, & \text{ha } s_j \notin H_i \end{cases}$$

$AA^T \in \mathbb{R}^{k \times k}$: ~~[illegible]~~

ha $\exists H \in \mathcal{H}: H = \lambda$

$$AA^T \begin{bmatrix} \lambda + a_1 & & \lambda \\ & \lambda + a_2 & \\ \lambda & & \lambda + a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ 0 & & a_k \end{bmatrix}$$



$|\mathcal{H}| \le 1 + n - \lambda$

$\Downarrow$

$a_i > 0$

cél: $r(AA^T) = k \le r(A) \le n$

AA^T invertálható $\Leftarrow$ φ_{AA^T} injektív

azaz $x \neq \underline{0} \Rightarrow AA^T\underline{x} \neq \underline{0}$, sőt $x^T A A^T \neq \underline{0}$

$$x^T(\lambda J + D)\underline{x} = \lambda \underline{x}^T J x + x^T D x = \lambda \left[\sum x_i \dots \sum x_i\right] x +$$

$$+ [a_1 x_1 \dots a_k x_k]\, x = \underset{\geq 0}{\lambda\left(\sum x_i\right)^2} + \underset{> 0}{\sum a_i x_i^2}$$

Determináns

- $A = [\underline{a}_1 | \underline{a}_2 | \dots | \underline{a}_n]$

  det A = az $\underline{a}_i$ egy csúcsból kiinduló oldalak által meghatározott n-dimenziós paralelepipedon előjeles térfogata

- $$\det A = |A| = \sum_{\substack{i_1 \dots i_n \\ \text{az} \\ 1 \dots n \\ \text{permutációja}}} (-1)^{\text{inverziószám}} a_{1 i_1} \cdot \ldots \cdot a_{n i_n}$$

ⒽⒻ $\det \begin{bmatrix} \lambda + a_1 & \lambda \\ \lambda & \lambda + a_k \end{bmatrix} = ?$

Alkalmazott algebra 4.ea 2012.09.17.

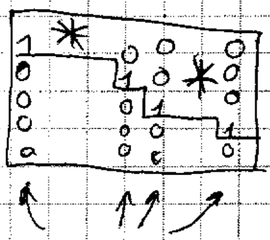
4/1.

(HF) a redukált lépcsős alak egyértelmű

A , $\varphi_A : V \to W$

$\exists E$ invertálható $EA = R$ red. lépcsős

$A \mapsto EA$ báziscsere W-n



a vezéregyesek oszlopai lettek az új báziselemek

A megfelelő oszlopai gen. rr. Im φ_A-ban

A oszlopai közül balról jobbra új elem, ha független a korábbiak generátumától

$\to$ ez egyértelmű $\Rightarrow E$ egyértelmű $\Rightarrow R = EA$ egyértelmű

(HF) $$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \overset{?}{=} \left[\begin{array}{cc|cc} I & A & I & 0 \\ \textcircled{A} & I & 0 & I \end{array}\right] \xrightarrow{S_1+AS_2} \left[\begin{array}{cc|cc} I & 0 & I & -A \\ 0 & I & 0 & I \end{array}\right]$$

Determináns

- def
- következmények:

  $|A^T| = |A|$

⊙ sorcserénél változik az előjel

  0-sor $\Rightarrow$ det = 0

  két sor azonos $\Rightarrow$ det = 0

  $$\det\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_i+s_i' \\ s_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_i \\ s_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_i' \\ s_n \end{bmatrix}$$

⊙ $s_i \mapsto \lambda s_i \Rightarrow$ det λ-szoros

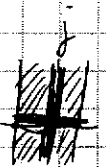
⊙ $s_i \mapsto s_i + \lambda s_j \Rightarrow$ A nem vált.

  (oszlopokra hasonlóan)

- kifejtési tétel

  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, i-edik sor szerinti kifejtés

  $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \cancel{\#} \, \boxed{A_{ij}} \longrightarrow \text{előjeles aldet: } (-1)^{i+j}$$



- det számítása: sor- és oszlopműveletek + kif. tétel

(Pl)
$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \ 2 \ 3} \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- spec. eset: 2x2

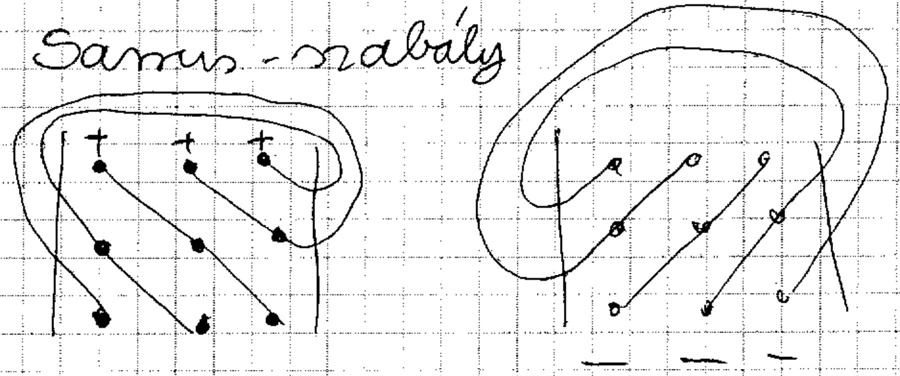
  $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Alkalmazott algebra 4. ea 2012.09.17.

4/2.

- spec. eset: 3×3

Sarrus-szabály



- spec eset: Δ

átlós elemek szorzata

blokk Δ mx: átlón lévő blokkok determi. szorzata

(P1) • x=y-ra tükrözés

$\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$

- $\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4$ kétszeres nyújtás

(P1)

$$\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&-1\\3&1&0&0\\2&5&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2&1\\-3&1&1&-1\\0&1&0&0\\-13&5&1&2\end{vmatrix}=$$

$$=-1\begin{vmatrix}1&2&1\\-3&1&-1\\-13&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&0&1\\-2&3&-1\\-15&-3&-2\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}0&0&1\\-2&1&-1\\15&-1&2\end{vmatrix}=$$

$$=\ =-3\cdot 17=-51$$

Ⓟ $$\begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} \underset{\substack{\uparrow \\ \left[\frac{n}{2}\right] \text{ sorcsere}}}{=} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} |I| \overset{?}{=}$$

vagy: def. szerint $(-1)^{\overbrace{inv(\ldots)}^{\binom{n}{2}}} \cdot 1$

Ⓟ Fischer-egyenlőtlenség

$$\begin{vmatrix} \lambda+a_1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ \lambda & & \lambda+a_n \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \lambda+a_1 & & \lambda \\ \vdots & \lambda & \ddots & \\ 0 & & & \lambda+a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$a_1, \ldots, a_n \neq 0$

kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -\lambda & a_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\lambda & 0 & & a_n \end{vmatrix} \overset{s_1 \mapsto s_1 - \frac{1}{a_1} s_2 - \ldots}{=} \begin{vmatrix} 1+\lambda\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) & 0 \ldots 0 \\ -\lambda & a_1 \quad 0 \\ \vdots & 0 \quad \ddots \\ -\lambda & \qquad a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \left(1+\lambda\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\right) > 0$$

- szorzástétel: $|AB| = |A| \cdot |B|$
- köv: $\exists A^{-1} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$
- Cauchy-Binet formula:

$A = \left[\underset{i_1}{\|} \ \underset{i_2}{\|} \ \underset{i_k}{\|} \right]_{k\times n}$ $\quad B = \begin{bmatrix} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{bmatrix}_{\substack{i_1 \\ i_2 \\ i_k \\ n\times k}}$ $\quad k \leq n$

$AB = \left[\quad \right]_{k\times k}$, $|AB| = \underset{\binom{n}{k} \text{ kül. kiv.} \nearrow}{\sum} |A_i||B_i|$

Alkalmazott algebra 4. ea 2012.09.17.

4/3.

Lineáris transzformáció determinánsa

- $\det \varphi = \det [\varphi]_B$ tetszőleges B bázisra

ez egyértelmű: $|P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \frac{1}{|P|}|A||P| = |A|$

- állítás: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

biz: $\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$ $\exists E$ inv. $EA = R$ red. lépcsős

$|EA| = |E||A| \neq 0 \Rightarrow R$-nek $\nexists$ $\underline{0}$ sora $\Rightarrow R = I$

- inverz mátrix előjeles aldeterminánsokkal

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} & \\ & A_{ij} \end{bmatrix}^T$$

pl: $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek

$A \in F^{m \times n}$

$Ax = \underline{b}$

$[A|b]$ GJA : $EAx = Eb$, E inv.

$\Updownarrow$ nyilván

$Ax = b$

(P)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 5 \end{array}\right)$$

X_1, X_4 tetszőleges

$X_5 = 5$

$X_3 + 2X_4 = -1 \Rightarrow X_3 = -1-2X_4$

$X_2 + X_4 = 1 \rightarrow X_2 = 1 - X_4$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ -1-2X_4 \\ 1-X_4 \\ X_4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- ellentmondásos sor: $r(A) < r(A|B)$
  nincs mo.
- I: egy megoldás $r(A) = r(A|B) = n$
- különböző sok megoldás $r(A) = r(A|B) < n$
  (nincs ellentmondás, $k < n$ vezéregyes)
  $n-k$ szabad változó: $|\mathbb{F}|^{n-k}$ megoldás

(K) hom. lin. egy. rdsz.-nek van $\neq \underline{0}$ megoldása $\Leftrightarrow r(A) < n$

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

$\varphi \in End(V)$

- $0 \neq \underline{v}$ sajátvektor, ha $\varphi(\underline{v}) \parallel \underline{v}$
- $\lambda \in \mathbb{F}$ sajátérték, ha $\exists \underline{v} \neq \underline{0}$: $\varphi(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$
- V_λ sajátaltér: λ-hoz tartozó sajátvektorok és $\underline{0}$

$V_\lambda \leq V$

Alkalmazott algebra 4.ea 2012.09.17.

(Pl) $\nexists \varphi^{-1} \Leftrightarrow 0$ sajátérték 4/4

- $\mathbb{R}^3$-nak origón átmenő síkra való merőleges vetítése: $S=V_1$
- S-re merőleges, $\underline{0}$-n átmenő egyenes: V_0
- $\mathbb{R}^2$ 90°-os forgatása origó körül

  $\nexists$ sajátvektora

Vektorterek direkt összege

- $U_1,\dots,U_m \leq V$

$\langle U_1,\dots,U_m\rangle = U_1+\dots+U_m=\sum_{i=1}^{m} U_i=$

$=\{u_1+\dots+u_m \mid u_i\in U_i\}$ összeg

- direkt összeg

$U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$

1) $U_i \cap \sum_{j\neq i} U_j = \underline{0}$

2) $\sum_{i=1}^{m} U_i = V$

- áll: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m \Leftrightarrow$

  V minden eleme egyértelműen írható

  $u_1+u_2+\dots u_m$ alakban

- áll:

$\dim U_1 \oplus \dots \oplus U_n = \sum \dim U_i$

biz: U_i bázisa $\mathcal{B}_i$

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ bázisa $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_i$

- áll:

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ φ különböző sajátértékei

$\sum V_{\lambda_i} = \bigoplus V_{\lambda_i}$

elég belátni: $\underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \forall \underline{v}_i = 0$

$\varphi v_1 + \dots + \varphi v_n = \varphi(\underline{0})$ ...

Ⓚ $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\dim V = n$

φ-nek $\leq n$ db sajátértéke van

Ⓓ sajátérték, sajátvektor mátrixra

- sajátérték, sajátvektor megtalálása

$Av = \lambda v$ nemnulla megoldásai

$(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0} \iff |A - \lambda I| = 0$

Alkalmazott algebra 5. ea 2012. 09. 21.

6/1.

- láttuk: $\lambda \in \mathbb{F}$ sajátértéke $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$-nek

$$\Longleftrightarrow$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

- Def: $k_A(X) = |A - xI|$ karakterisztikus polinom
  gyökei A sajátértékei

- $k_A(X) \in \mathbb{F}[x]$ n-ed fokú, főegyütthatója $(-1)^n$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

∀ kifejtési tagja ≤ n-ed fokú

egyetlen n-ed fokú: főátló

- következmény: ≤ n sajátérték

- sajátaltér meghatározása:

$\underline{v} = ?$ $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ λ_0 rögzített

$(A - \lambda_0 I)\underline{v} = \underline{0}$ homogén lin. e.r.

$[A - \lambda_0 I \mid \underline{0}] \rightsquigarrow \ldots$

- mátrix magterének és képterének a bázisa

$$[A \mid \underline{0}] \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow [\underset{\uparrow \text{r.l.a.}}{R} \mid \underline{0}]$$

A oszlopait csak átkoordinátázzuk

Ⓜ ↳ (oszloptér = képtér)

R oszlopterében a vezéregyesek oszlopai bázist alkotnak

⇒ A oszlopterében a megfelelő oszlopok szintén

ha $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ a szabad változók ($k = n - r$)
↳ nincs vezér

és az e. rsz. megoldása:

$$\underline{x} = x_{i_1}\underline{v}_1 + \dots + x_{i_k}\underline{v}_k \quad \text{(fix vektorokkal)}$$

akkor $\mathrm{Ker}\,\varphi_A = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$ ← k elemű gen. rsz $\Rightarrow$ bázis

$\dim \mathrm{Ker}\,\varphi_A = n - r(A) = n - r = k$

(P1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \varphi_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

feladat: $\mathrm{Ker}\,\varphi_A$, $\mathrm{Im}\,\varphi_A$ bázisa

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & x_2 & & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & & \uparrow & \end{array} \end{array}$$

$\mathrm{Im}\,\varphi_A$ bázisa: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} -2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Ker}\,\varphi_A$ bázisa: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Alkalmazott algebra 5. ea 2012.09.21.

6/2.

- def: $\varphi \in End(V)$

$$k_{\varphi}(x) = k_A(x), \text{ ahol } A = [\varphi]_B$$

és jól definiált, hiszen más bázisban

$$k_{P^{-1}AP}(x) = |P^{-1}AP - xI| = |P^{-1}AP - xP^{-1}P| =$$

$$|P^{-1}(A - xI)P| = |A - xI| = k_A(x)$$

- def: $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ hasonló, ha

$$\exists P \text{ invertálható} : \underbrace{P^{-1}AP}_{} = B$$

az A mx. P-vel vett konjugáltja

(A és B ugyanazt a transzformációt adja meg más bázisban)

bázispárban

- szeretnénk a mátrixot minél egyszerűbb alakra hozni;

A diagonalizálható, ha $\exists P$ inv. mx:

$$P^{-1}AP \text{ diagonális } \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

- állítás: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ esetén

(1) A diagonalizálható

(2) $\mathbb{F}^n$-nek $\exists$ φ_A sajátvektoraiból álló (saját)bázisa

(3) $\sum \dim V_{\lambda_i} = n$, ahol λ_i sajátértékek

ekvivalensek

Ⓑ (1) ⟺ (2)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow [\varphi_A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$, ahol

$\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ esetén

$\varphi(\underline{b}_i) = d_i \underline{b}_i$, ahol

$\underline{b}_i$ a P oszlopa

sajátvektorok ↗

(2) ⟺ (3)

$$\Longrightarrow \underset{\underset{\bigoplus}{\|}}{\sum} V_{\lambda_i} = V = \mathbb{F}_n$$

$$\Longrightarrow n = \dim \mathbb{F}^n = \sum \dim V_{\lambda_i}$$

$$\Longleftarrow \quad \dim \bigoplus V_{\lambda_i} = n \Longrightarrow V = \bigoplus V_{\lambda_i}$$

az egyes bázisok uniója megfelelő

Ⓟ1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 0 & 5-x & -4 \\ 0 & 5 & -4-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 5-x & -4 \\ 5 & -4-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)(x^2 - x) = (x-1)^2 x$$

$x = 0, 1$ sajátértékek

Alkalmazott algebra 5. ea 2012.09.21.

6/3.

$\lambda=1$-re a sajátaltér

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

V_1 bázisa

mivel $\dim V_0 \geq 1 \Rightarrow \sum \dim V_{\lambda_i} = n$

sajátvektorokból álló bázis:

$$\lambda=0: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5}x_3 \\ \frac{4}{5}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{x_1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

V_0 bázisa

Összesen: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ sajátbázis

(HF) ellenőrizzük: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$-re

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(P1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nem diagonizálható

$$|A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 = 0$$
$$x = 1$$

$$\lambda = 1: \ [A - \lambda I | 0] \to \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1 rangú → a magtér csak 1 dimenziós

- állítás:

$\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixnak van sajátvektora

bizonyítás: $k_A(x)$-nek van gyöke

(elég feltenni: $\mathbb{C}$ algebrailag zárt; $\forall f(x) \in \mathbb{F}(x)$, $\deg f > 0$: f-nek $\exists$ gyöke $\mathbb{F}$-ben

illetve $\forall \mathbb{F}$-hez $\mathbb{F} \leq \overline{\mathbb{F}}$, hogy $\overline{\mathbb{F}}$ alg zárt.)

- tétel:

$\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hasonló egy (alsó) Δ-mx-hoz

bizonyítás:

n-re teljes indukció:

- $n = 1$ ✓
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A-nak $\exists$ s. vektora:

(t.f.h. $< n$-re igaz) | $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$, $\mathcal{B} = \{\underline{v}, \dots\}$

Alkalmazott algebra 5. ea 2012.09.21.

6/4.

$$A \sim (\varphi_A)_{\mathcal{B}} = B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \quad \text{ind. feltevés}$$

$$C \longleftarrow \Delta\text{-mx}$$

$$P = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$$

$$P^{-1}BP = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & Q^{-1}C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & Q^{-1}CQ \end{array}\right] \checkmark$$

$A \sim B \sim P^{-1}BP$

- def: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $f(x) \in \mathbb{F}[x]$

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_0 I$$

mátrix polinomja

- Cayley-Hamilton tétel

$k_A(A) = 0$

- bizonyítás $\mathbb{C}^{n \times n}$-re:

$A \sim B \Rightarrow k_A(A) \sim k_A(B) = k_B(B)$

elég a B Δ-mx-ra belátni, hogy $k_B(B) = 0$

$$|B - xI| = \begin{vmatrix} b_{11} - x & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} - x \end{vmatrix} =$$

$$= (b_{11} - x)\underbrace{(b_{22} - x) \dots (b_{nn} - x)}_{g(x)}$$

$$B = \left[\begin{array}{c|c} b_{11} & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right], \text{ ahol } k_C(x) = g(x)$$

$$(b_{11} I - B)\, g(B) = 0$$

$$b_{11} I - B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right], \quad g(B) = \left[\begin{array}{c|c} g(b_{11}) & * \\ \hline 0 & g(C) \end{array}\right]$$

az indukciós feltevés szerint 0

$$(b_{11} I - B)\, g(B) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \checkmark$$

Alkalmazott algebra 5. ea

2012.09.21.
6/5.

- következmény: $\forall A : \exists f(x) : f(A)=0$

- def: minimálpolinom

$m_A(X)$, mely és $m_A(A)=0$
  - → 1 főegyütthatós
  - → minimális fokú

- állítás:

$$A \sim B \Rightarrow m_A(X) = m_B(X)$$

$$B = P^{-1}AP$$

$$B^k = P^{-1}AP\,P^{-1}AP \dots P^{-1}AP = P^{-1}A^kP$$

$f(B) = P^{-1}f(A)P$, így $f(A)=0 \Leftrightarrow f(B)=0$

- állítás:

$$f(A)=0 \Rightarrow m_A(x) \mid f(x)$$

bizonyítás:

$f(X) = m(x)g(x) + r(x)$, $\deg r < \deg m$

$$\underset{0}{\overset{\parallel}{f(A)}} = \underset{0}{\overset{\parallel}{m(A)}}\,g(A) + r(A) = r(A) \Rightarrow r(A) = 0 \Rightarrow$$

$$r(X) = 0$$

(különben a minimálpolinomnál kisebb fokú)

- köv: $m_A(X) \mid k_A(X)$
- állítás:

  λ sajátértéke A-nak $\Rightarrow m_A(\lambda)=0$

bizonyítás

λ s.é., $\underline{v}$ a megfelelő s.vektor.

$$0 = m_A(A)\underline{v} = \sum a_i A^i \underline{v} = \sum a_i \lambda^i \underline{v} = m(\lambda)\underset{\neq 0}{\underline{v}}$$

- következmény:

$$k_A(X) = (X-\lambda_1)^{a_1} \dots (X-\lambda_m)^{a_m} (-1)^n$$

$$m_A(X) = (X-\lambda_1)^{b_1} \dots (X-\lambda_m)^{b_m} \quad 1 \le b_i \le a_i$$

Jordan-normálalak

- def: Jordan-blokk

$$\begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$ (szokták a transzponáltat is így nevezni)

- $$J = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow J - \lambda \underline{I} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$b_1 \mapsto b_2$

$b_2 \mapsto b_3$

$\vdots$

$b_n \mapsto 0$

$$(J-\lambda I)^n = 0 \quad , \text{ és } (J-\lambda I)^{n-1} \neq 0$$

Alkalmazott algebra 5. ea 2012.09.21.

6/6.

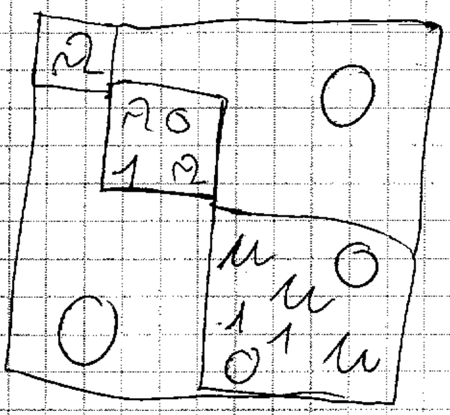
$k_J(x) = (\lambda - x)^n$, $m_J(x) = (x - \lambda)^n$

- Tétel:

$\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mx. hasonló egy Jordan-normálalakban lévő mátrixhoz, ami egy blokkdiagonális mátrix Jordan-blokkokból

és az alak a blokkok sorrendjétől eltekintve

- Pl $B =$



$k_B(x) = \prod (x - \lambda_i)^{a_i}$

$m_B(x) = \prod (x - \lambda_i)^{b_i}$

Alkalmazott algebra 6.ea 2012.09.24.

5/1.

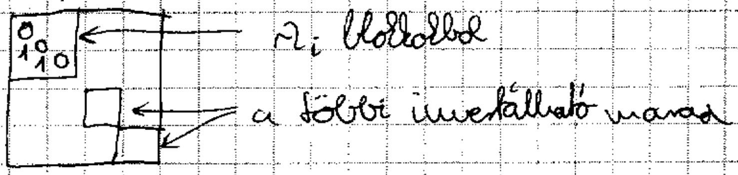
Jordan-normálalak

$k_A(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{a_1} \dots (X-\lambda_k)^{a_k}$

$m_A(X) = (X-\lambda_1)^{b_1} \dots (X-\lambda_k)^{b_k}$

ahol a_i: a λ_i blokkok méreteinek összege

$0 = m_A(A) = (A-\lambda_1 I)^{b_1} \dots (A-\lambda_k I)^{b_k}$



b_i: a λ_i blokkok méreteinek maximuma

$\dim V_{\lambda_i} = \dim \mathrm{Ker}(J-\lambda_i I) =$

$\begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k \times k} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ rangja $(k-1)$

$r(J-\lambda_i I) = \sum r(J-\lambda_i I$ blokkjai$) = n - (\lambda_i$ blokkok száma$)$

dimenziótétel miatt $\dim \mathrm{Ker}(J-\lambda_i I) =$
$= \lambda_i$ blokkok száma $= \dim V_{\lambda_i}$

- kisméretű mátrixokra
  $k_A(X)$, $\dim V_{\lambda_i}$, $m_A(X)$ alapján
  kiszámítható a Jordan-normálalak

(P1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a) $k_A(X) = (1-X^3)(2-X)$ (felső Δ-mx)

b) $\lambda = 1$-hez $\dim V_\lambda$

$$A - \lambda I = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \xcancel{\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] , \text{rang} = 2$$

$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 4 - 2 \Rightarrow \dim V_\lambda = 2$

c) 2 db $\lambda = 1$-es blokk van

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 1 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & \\ & & & 2 \end{array}\right] \qquad 3 = 2 + 1$$

(T) A diagonalizálható $\Leftrightarrow$ $m_A(X)$ ∀gyöke egyszeres (és gyöktényezőkre bomlik)

(B) ~~dim~~ es A Jordan-normálalakja
$b_i = 1$ ∀i-re

Alkalmazott algebra 6.ea 2012.09.24.

5/2.

- alkalmazások

1, $A \sim B \Leftrightarrow$ Jordan-normálalakjuk (a blokkok permutálásától eltekintve) megegyezik

2, $A \sim A^T$, mivel $J \sim J^T$

$$\begin{bmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \ddots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ \lambda & 1 & \\ & \lambda & \ddots \end{bmatrix}$$

3, mátrixok hatványozása

$J = P^{-1}AP$

$J^n = P^{-1}A^nP \Rightarrow A^n = PJ^nP^{-1}$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \ddots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \textcircled{D_1^n} & & \\ & \ddots & \\ & & D_k^n \end{bmatrix}$$

$J = \lambda I + N$, ahol $N = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & \ddots \end{bmatrix}$

N hatványai:

$$= \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & \ddots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \ddots \\ & 1 & \ddots \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ 1 & \end{bmatrix}, \bigcirc$$

$$J^n = (\lambda I + N)^n =$$

$$= \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} \lambda^{n-t} N^t$$

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & & \\ \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \ddots & \\ \binom{n}{2}\lambda^{n-1} & & \ddots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

Euklideszi terek

Skalárszorzat:

$\mathbb{F}^n$-ben standard skalárszorzat

$$\underline{u}^T \underline{v} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$$

Szimmetrikus bilineáris függvények

$\langle\, , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}^n$

mindkét változóban lineáris

$$\langle u+u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle$$

$$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$$

a másik változóra hasonlóan

és szimmetrikus. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

Ⓟ 1. standard skalárszorzat $\mathbb{F}^n$-en (közte a geometriai értelemben vett skalárszorzat $\mathbb{R}^2$-en, $\mathbb{R}^3$-on)

2. $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ szimmetrikus ($A = A^T$)

$$\langle u, v\rangle = u^T A v$$

3. $[0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Alkalmazott algebra 6. ea 2012.09.24.

5/3.

- def:

$\underline{u}$ és $\underline{v}$ merőleges ($\underline{u} \perp \underline{v}$), ha $\langle u, v \rangle = 0$

$v_1, \dots, v_n$ ortogonális rendszer, ha $v_i \perp v_j, \forall i \neq j$

$v_1, \dots, v_n$ ortonormált rendszer,
ha ortogonális és $\langle v_i, v_i \rangle = 1$

- áll:

$b_1, b_2, \dots$ ortonormált generátorrendszer $\Rightarrow$
es bázis is, és

$\underline{v} = \sum x_i b_i$ -re a koordináták $x_i = \langle v, b_i \rangle$

biz: $\langle \sum x_i b_i, b_j \rangle = x_j \langle b_j, b_j \rangle = x_j$

$\Rightarrow$ ftlen-ek: $\underline{0}$ eh.-i 0-k

Ⓟ 2π szerint periodikus folytonos függvények

$$\int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$$

$\{1, \cos nx, \sin nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ ortogonális

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ ortonormált

ld: Fourier-sorfejtés

① $S \subseteq V$-re $\quad S^{\perp} = \{ \underline{v} \in V \mid \underline{v} \perp \underline{u} \ \forall \underline{u} \in S \} \leq V$

merőleges altér

nyilván: $\quad S^{\perp\perp} \supseteq S$

• áll:

ha $V^{\perp} = 0$, akkor $U \leq V$-re $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$

biz:

$\{v_1, \dots, v_n\}$ V bázisa

$\{u_1, \dots, u_k\}$ U bázisa

$$A = i \left[\overset{j}{\boxed{\ }}_{\langle u_i, v_j \rangle} \right]_{k \times n}$$

A a φ mátrixa:

$$\varphi : V \to \mathbb{F}^k$$
$$\underline{v} \mapsto [\langle u_1, v \rangle \dots \langle u_k, v \rangle]^T$$

A^T a ψ mátrixa

$$\psi : U \to \mathbb{F}^n$$
$$\underline{u} \mapsto [\langle u, v_1 \rangle \dots \langle u, v_n \rangle]^T$$

$V^{\perp} = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} \psi = 0$

$r(A^T) = \dim \operatorname{Im} \psi = k - 0 = k = r(A)$

$\Longrightarrow$ φ szürjektív, és $\operatorname{Ker} \varphi = U^{\perp}$

$\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Im} \varphi =$

$= \dim V - \dim U$

Alkalmazott algebra 6. ea 2012.09.24.

5/4

- köv:

$V^{\perp} = 0 \Rightarrow U \leq V$-re $U^{\perp\perp} = U$

- (Pl) $V = \mathbb{F}^n$ standard skalárszorzatára $V^{\perp} = 0$

1, $\underline{v} = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow (\underline{v}, \underline{e}_i) = \alpha_i \neq 0$

2, $A = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ -ra $\langle u, v\rangle = u^{T} A v$

itt $\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} \in V^{\perp}$, $(0\,1) A \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = 0$

3, Spec:

$V = \mathbb{R}^n$-ben $v \neq 0 \Rightarrow \langle u, v\rangle > 0 \Rightarrow U \cap U^{T} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow U + U^{\perp} = \boxed{U \oplus U^{\perp} = V}$

$\dim U \oplus U^{\perp} = \ldots$

Lineáris kódok

$\mathbb{F}$ véges test (pl. $\mathbb{F}_2$)

lineáris kód: $U \leq \mathbb{F}^n$

kódszavak: $u \in U$

Hamming-távolság: $d(u,v)$

Hamming-súly: # nemnulla helyek $s(u)$

$d(u,v) = s(u-v)$

kódtávolság: $d = \min\{d(u,v) \mid u \neq v\}$

d kódtávolság $\Rightarrow \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ hiba javítható

(egy ilyen közeli kódszó van csak)

kódtér: ~~[illegible]~~ U

dimenzió: dim U

(Pl) triviális kódok

$\underline{u} \mapsto \underline{u}$ $\quad d=1$

$\underline{u} \mapsto \underline{0}$ $\quad$ nulla információ

ismétlő kód: $a \mapsto (a\ a \ldots a)$ $\quad d = n$

hosszú üzenet

paritáskód:

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

$d=2$

Hadamard-kód (elsőrendű Reed-Muller kód)

$\mathbb{F}^2$ felett, $n = 2^m$ hosszú

$k = m+1$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{bmatrix} \qquad f_{\underline{v}} = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_m X_m + \beta$$

$$\underline{X} \downarrow$$

a kód: az f_v összes (2^m) helyettesítési értéke adott sorrendben

$d = 2^{m-1}$

$\beta = 0$ esetén $f_{\underline{v}}$ lineáris

ha $f_{\underline{v}} \neq 0$, akkor dim Ker $f_{\underline{v}} = m-1$ $\left\langle \begin{array}{l} 2^{m-1} \text{ helyen } 0 \\ 2^{m-1} \text{ helyen } 1 \end{array} \right.$

Alkalmazott algebra 6.ea 2012.09.24.

5/5.

ha $B=1$: $f_{\underline{v}}$-1 lin.

vagy: $f_{\underline{v}} \equiv 1$

vagy: $f_{\underline{v}}$-1 $\left\langle \begin{array}{l} 2^{m-1} \text{ helyen } 0 \\ 2^{m-1} \text{ helyen } 1 \end{array} \right.$

Mariner 9 Mars-szonda: $m=5$, $n=32$

(7 hibát javít) $k=6$, $d=16$

Hadamard-kód fele

csak $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$ $f_{\underline{v}}$-ek

$n=2^m-1$, $d=2^{m-1}$

G sorai: $\mathbb{F}^m - \{0\}$ elemei

$$\left\{ G \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \right\} = U = \operatorname{Im} G$$

ehelyett:

Hamming-kód: $\operatorname{Ker} G^T = \{u : G^T u = 0\} =$

$= \{u : u^T G = 0\}$

azt mondja meg, G melyik sorainak az összege $\underline{0}$

Alkalmazott algebra 7. ea

2012.09.28.

6/1.

- Hadamard-kód fele $\leq \mathbb{F}_2^{2^m-1}$

G sorai az $\mathbb{F}_2^m \setminus \{\underline{0}\}$ $\quad U_1 = \operatorname{Im} G$ (G oszloptere)

- Hamming-kód $\leq \mathbb{F}_2^{2^m-1}$

$\operatorname{Ker} G^T = \{\underline{u} \in \mathbb{F}_2^{2^m-1} \mid \underline{u}^T G = \underline{0}\} = U_2$

$\dim U_1 = m \quad d = 2^{n-1} \quad U_2 = U_1^\perp$

$\dim U_2 = 2^m - 1 - m$

U_2-ben a $\neq \underline{0}$ szavak súlya $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad s \geq 3$

$d = 3$ $\quad s \neq 1, s \neq 2$

$\frac{2^m-1}{2^m-1-m} = \frac{\text{kódhossz}}{\text{dim}}$ 1 hibát javít

- Hamming-korlát

$$|C| \cdot \sum_{s=0}^{t} \binom{n}{s} (q-1)^s \underset{\uparrow}{\leq} q^n$$

$=:$ perfekt-kód

Euklideszi terek és transzformációik

- valós euklideszi tér: $V_{\mathbb{R}}$, $\langle , \rangle$ bilineáris függvény szimmetrikus, pozitív definit

$\forall v: \langle v, v \rangle > 0 \Leftarrow$

$\langle , \rangle$ valós skalárszorzat

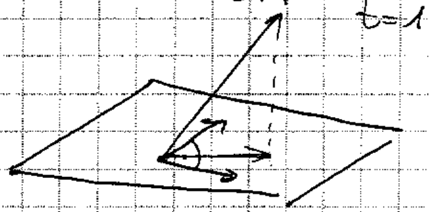
- Gram-Schmidt ortogonalizálás

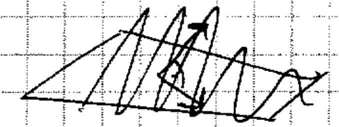
$\forall \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$ független rsz: $\exists \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$ ortonormált

__biz:__

$$\underline{e}_1 = \frac{\underline{b}_1}{|\underline{b}_1|} \; ; \; e_1, \dots, e_i \text{ adott}$$

$$c_{i+1} = \underline{b}_{i+1} - \sum_{t=1}^{i} \langle b_{i+1}, e_t \rangle e_t$$





$$c_{i+1} \perp \langle e_1, \dots, e_t \rangle$$

$$e_{i+1} = \frac{c_{i+1}}{|c_{i+1}|}$$

__köv:__ V valós eukl tér $\Rightarrow \overset{(V, \langle , \rangle)}{\cong} (\mathbb{R}^n, \cdot)$

ugyanis ortonormált bázisban koord:

$$\left\langle \sum x_i e_i, \sum y_j e_j \right\rangle = \sum x_i y_i$$

__megj:__ $\mathbb{C}^n$ standard skalárszorzata

$$[1, i] \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Alkalmazott algebra 7.ea 2012.09.28.

6/2.

- def: komplex euklideszi tér

$V_{\mathbb{C}}$, $\langle , \rangle$ hermitikus bilineáris függvény

$$\langle u+u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle$$

(hasonlóan a másik komponensre)

$$\langle \lambda u, v\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$$

$$\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$$

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \qquad (\Rightarrow \langle u, u\rangle \in R$$

és pozitív definit

- áll.:

V n-dimenziós, komplex euklid. tér

u.a. $\mathbb{C}^n$,

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle = \sum \overline{x_i} y_i = \boxed{\underset{\overline{X}^T}{X^*}} y \rightarrow \text{adjungált}$$

- def: valós szimmetrikus / komplex hermitikus bilineáris fv.

pozitív definit

pozitív szemidefinit

negatív definit

negatív szemidefinit

indefinit

- def: kvadratikus alak

$$Q(\underline{u}) = \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle$$

↳ egyértelműen meghatároz egy szimmetrikus / hermitikus bilineáris fv.-t

(P1) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\langle x, y \rangle = x^T A y$ bilineáris szimmetrikus, ha $A^T = A$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\langle x, y \rangle = x^* A y$ bilineáris hermitikus, ha $A^* = A$

$$(A^* = \overline{A^T})$$

- def: valós bilineáris függvény mátrixa adott bázisra

$$[\underline{u}]_{B}^{T} A [\underline{v}]_{B} = \langle u, v \rangle$$

komplex test felett:

$$[u]_{B}^{*} A [v]_{B} = \langle u, v \rangle$$

ilyen A létezik:

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ $a_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$

ekkor

$$\langle \sum x_i b_i, \sum y_j b_j \rangle = \sum x_i y_i$$

Alkalmazott algebra 7. ea 2012.09.28.

6/3.

- Áttérés másik bázisra:

P az áttérés mátrixa

$[u]_{\mathcal{B}} = x$, $[u]_{\mathcal{B}'} = u'$

$$\langle u, v \rangle = x^* A y = (Px')^* A (Py') =$$

$$= (x')^* \underbrace{(P^* A P)}_{\text{az új mátrix}} y'$$

$\left(\text{ha } A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^* = A^T \right)$

$v \in \mathbb{R}^n$

$v^* = v^T$

- def:

$A = A^T$ szimmetrikus mátrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A = A^*$ önadjungált mátrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

↳ kompl. herm. } bil. fv.

↳ valós szimm.

Pl

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ szimm.} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix} \text{ önadj.}$$

- def:

mx. poz. def   a megfelelő

poz. szem. def $\Longleftrightarrow$ leképezés ilyen

$\vdots$

(P!) $\begin{bmatrix} + & & * \\ & \ddots & - \\ * & & \ddots \end{bmatrix}$ indefinit $\langle e_i, e_i\rangle > 0$

$\langle e_j, e_j\rangle < 0$

- állítás:

$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} \in R^n$ diagonális mx.

valós / komplex mátrixként

poz. def $\forall d_i > 0$

neg def $\forall d_i < 0$

poz. szem. def $\forall d_i \geq 0, \exists d_j > 0$

neg. szem. def $\forall d_i \leq 0, \exists d_j < 0$

indefinit $\exists d_i > 0, \exists d_j < 0$

biz.:

$$x^* D x = \sum d_i \underbrace{\overline{x_i} x_i}_{\geq 0}$$

Alkalmazott algebra 7.ea 2012.09.28.

6/4.

- Sylvester-féle tehetetlenségi tétel

$\langle , \rangle$ v.sz vagy k.h. b.fv.

ekkor $\forall \{b_1, \dots, b_n\}$ ortogonális bázisra

$\langle b_i, b_i \rangle$ között ugyanannyi $0, +, -$

azaz a mátrix $\forall$ diagonális alakjában ugyanannyi a $+, -, 0$ elem

köv: elég $A^* = A$ $A \rightsquigarrow P^*AP$ diag

szimultán sor-oszlopműveletekkel

$A \rightsquigarrow EAE^*$

(Pl)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 + s_1 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} o_2 \to 2o_1 \\ o_3 \to o_3 + o_1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{bmatrix}$$ indefinit

- def:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus : ortogonális

$A^* = A$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált : unitér

$A^* = A^{-1}$

normális, ha $AA^* = A^*A$

nyilván ortogonális ~~önadjungált~~ unitér $\Rightarrow$ normális

- áll:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ esetén ekvivalensek ($\varphi = \varphi_A$ jelölés)

(1) A unitér

(2) φ skalárszorzattartó

(3) φ ortonormált bázist ortonormáltba visz

(4) A oszlopai és sorai is ortonormált rendszert alkotnak

biz:

$1 \Rightarrow 2$ $\langle Au, Av \rangle = (Au)^* Av = u^* \underbrace{A^* A}_{I} v =$

$= u^* v = \langle u, v \rangle$

$2 \Rightarrow 3$ ✓

$3 \Rightarrow 1$ $e_1, \dots, e_n$ orton. bázis (folyt.)

Alkalmazott algebra 7. ea 2012.09.28.

6/5.

$$\underbrace{e_i \underbrace{A^*A e_j}_{C}}_{c_{ij}} = e_i^* A^*A e_j = \langle Ae_i , Ae_j \rangle = \delta_{ij}$$

$1 \Leftrightarrow 4$

A^*A elemei: A oszlopainak az egymással vett szorzata

AA^* ugyanez sorokra

- következmény:

φ unitér/önadj/... $\Leftrightarrow$ $\forall$ ortonormált bázisban a mátrixa ilyen

$\Leftrightarrow$ $\exists$ ilyen

$P^{-1}AP$ másik ortonormált bázisra való áttérés

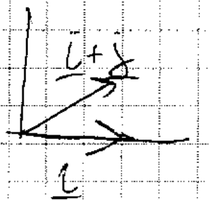
$\Rightarrow$ P unitér

$$(P^{-1}AP)^* = (P^*AP)^* = P^*AP^* = P^{-1}AP^*$$

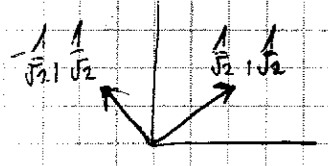
$\Rightarrow$ az összes feltétel átmegy konjugáltra

(P1) $y=x$ -re tükrözés ortogonális (skalárszorzattartó, lineár egybevágóság)

$\langle i,j\rangle$-ben $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ortog



$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nem ortog (a bázis nem ortonormált!)



$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ortog.

- def: mátrix / lin. tr. spektruma a sajátértékek halmaza

- áll:

1, A unitér $\Rightarrow$ $\forall \lambda$ s.é: $|\lambda|=1$

2, A önadjungált $\Rightarrow$ $\forall \lambda$ s.é valós

biz

1) $A^* = A^{-1}$ $\underline{x}$ s.v. $0 \neq x^*x = (Ax)^*(Ax) = (\lambda x)^*(\lambda x) =$
$= \bar{\lambda}\lambda x^*x \Rightarrow |\lambda|^2 = 1$ ✓

2) $(Ax)^*x = \bar{\lambda} x^*x = x^*A^*x = x^*Ax = x^*\lambda x =$
$= \lambda x^*x \Leftrightarrow \lambda = \bar{\lambda}$

Alkalmazott algebra 7. ea 2012.09.28.

6/6.

- Schur - felbontás

$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$-hez $\exists$ P unitér: P^*AP felső Δ-mx

biz: indukcióval n-re (~ sima konjugálás)

első lépésben: $\underline{v}$ s.é. $|\underline{v}|=1$

kiegészítés ortonormált bázissá ⇝ U unitér

$U^{-1}AU = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\lambda} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$ ↻ hasonlóan a korábbiakhoz

- Spektráltétel (→ főtengelytétel)

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

A normális $\Leftrightarrow$ A unitérrel átkonjugálható

$P^{-1}AP$ diagonális mátrixra

$\Leftrightarrow$ $\exists$ ortonormált bázis, mely

A sajátvektoraiból áll

biz:

2) ✓

1) A norm. $\Rightarrow$ $P^{-1}AP$ norm.

továbbá felső Δ-mx-be konjugálható

unitérrel

felső Δ-mx: normális $\Leftrightarrow$ diagonális

- következmény:

normális mátrix egyszerre diagonalizálható:

— lineáris leképezés } mátrixaként
— bilineáris függvény }

P unitér $\Rightarrow P^{-1}AP = P^*AP$

- következmény

A önadjungált ~~$\Leftrightarrow$ A spektrumában~~ mátrixra.

A pozitív definit: A spektrumában $\forall$elem pozitív

~~[illegible]~~ (többire hasonlóan)

mivel:

$$\exists P \text{ unitér } \quad P^*AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(P) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ milyen definit?

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$$

$\Rightarrow$ pozitív definit

(P) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ normális
nem ortogonális
nem szimmetrikus

($\sqrt{2}$ ortog)

(P) V valós eukl. tér

$V = W \oplus W^\perp$ felbontás

a W-re való merőleges vetítés Π_W

B-ben:

$$\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline B_1 & I & 0 \\ B_2 & 0 & 0 \end{array}$$

standard

UAU^{-1}
UAU^*

Alkalmazott algebra 8. ea 2012. 10. 01.

5/1.

(PI)

$V = W \oplus W^{\perp}$ $\qquad W \quad \mathcal{B}_1 \quad U_1$ oszlopai

$\qquad W^{\perp} \quad \mathcal{B}_2 \quad U_2$ oszlopai

$\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}_2 \quad U = [U_1 \mid U_2]$

(1.) $\pi_W : V \to V$

$$\underset{W}{\underset{\cap}{w}} + \underset{W^{\perp}}{\underset{\cap}{w'}} \qquad [\pi_W]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

ha A a standard mátrix: $[\pi_W]_{\mathcal{B}} = U^{-1} A U =$

$= \ldots = [U_1 U_1^*]$

$\underline{v} \in V$-re hatása: $U_1 U_1^* \underline{v} = U_1 \begin{bmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_k^* \end{bmatrix} \underline{v} =$

$\ldots = \sum_{i=1}^{k} \langle b_i, v \rangle b_i$

*

$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I_n - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, azaz $\pi_W = id - \pi_{W^{\perp}}$

ebből a standard mátrix: $I - U_2 U_2^*$

pl: ha $\dim W^{\perp} = 1$, bázisa $\langle \underline{u} \rangle$

↳ (normálvektor) $\frac{u}{|\underline{u}|}$

a vetítés mátrixa:

$$I - \frac{u}{|u|}\left(\frac{u}{|u|}\right)^* = I - \frac{u u^*}{\langle u, u \rangle}$$

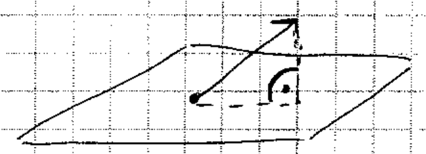
Ⓟ $2x-3y+z=0$ síkra való vetítés

$\underline{u}=(2,-3,1)$

mátrixa $= I-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}=$

$$= I-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}4 & -6 & 2\\ -6 & 9 & -3\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}10 & 6 & -2\\ 6 & 5 & 3\\ -2 & 3 & 13\end{bmatrix}$$

Ⓐ $\pi_W(\underline{v})$: a W-nek a v-hez legközelebbi vektora



Ⓑ $\langle \underline{v}-\underline{w},\, v-\underline{w}\rangle = \langle (v-\pi(v))+(\pi(v)-v),\, (v-\pi(v))+(\pi(v)-v)\rangle =$

$= |v-\pi(v)|^2 + |\pi(v)-w|^2$

② W-re való tükrözés: τ_W

$$[\tau_W]_B = \left[\begin{array}{c|c} I & 0\\ \hline 0 & -I\end{array}\right] = I_n - 2\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0\\ \hline 0 & I\end{array}\right] = 2\left[\begin{array}{c|c} I & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right] - I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_W = id - 2\pi_{W\perp} = 2\pi_W - id$$

Ⓟ $W^\perp=\langle \underline{u}\rangle$ mátrixa $I-2\frac{\underline{u}\,\underline{u}^*}{\langle \underline{u},\underline{u}\rangle}$

Alkalmazott algebra 8. ea 2012.10.01.

5/2.

(Áll)

· Π_W: önadjungált, pozitív szemidefinit

T_W: ortogonális (unitér), önadjungált, indefinit

③ permutációs mátrix:

permutálja a báziselemeket

∀ sorban, oszlopban 1db 1-es, a többi nulla

→ unitér ⇒ unitérrel diagonalizálható

• A permutációs mátrix ⇒ $\exists m$: $A^m = I$

⇒ $m_A(X) \mid X^m - 1$ ⇒ ∀ sajátértéke m-edik egységgyök

(Pl)

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} \\ 0 & 1 & 0 & & \\ \hline & \mathbf{0} & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad A^6 = \underline{I}$$

$$m_A(X) = (X-1)(X^2+X+1)(X+1)$$

Speciálisan: n-es ciklus

$$\underline{b}_n \mapsto \underline{b}_{n-1} \mapsto \dots \mapsto \underline{b}_1 \mapsto \underline{b}_n$$

$$\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

kar. pol: $k_A(x) = (X^n - 1)$

↑ minden gyök kül.

s.é: $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$ ⇒ $k_A(X) - m_A(X)$

$w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1$: $[1\ 1 \dots 1]^T$

$\lambda = \omega$: $[1\ \omega\ \omega^2 \dots \omega^{n-1}]^T$

$\vdots$

$\lambda = \omega^k$: $[1\ \omega^k\ \omega^{2k} \dots \omega^{(n-1)k}]^T$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & & \omega^n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

Vandermonde-mátrix

$V(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$

Á. $A \in \mathbb{C}^{n \times n} \Rightarrow A^*A$ önadjungált pozitív szemidefinit

$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ önadj ✓

$v^*(A^*A)v = (Av)^*(Av) \geq 0$ poz. szem. def. ✓

Mostantól: poz. def. ⇒ poz. szem. def. elnevezés

Összefoglalva:

- unitér és önadj: unitérrel diagonálisba konjugálható (spektráltétel)
- unitér: skalárszorzattartó (távolság és szögtartó) az inverze kényelmesen szám: $U^{-1} = U^*$ jó konjugálómátrix
- önadjungált: unitérrel valós diagonálisba konjugálható (valós unitérrel is: főtengelytétel)

A^*A önadjungált $\forall A$-ra - könnyen előállít

Alkalmazott algebra 8. ea 2012.10.01.

5/B.

Ⓣ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ pozitív szemidefinit $\Rightarrow$

$\exists!$ B poz. szem. def: $B^2 = A$

(A valós $\Rightarrow$ B lehet valós)

Ⓑ $\exists$ U unitér: $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = D$ $(\lambda_i \geq 0)$

$B := U^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U$ poz. szem. def

egyértelmű:

$B^2 = A$, $V = \mathbb{C}^n$-re

$V = \oplus V_i$, ahol V_i-k B szerinti sajátalterek

($V_i \rightarrow \mu_i$ s.é)

V_i elemei B^2 szerint μ_i^2 értékű sajátv.

$\uparrow$ ($\mu_i^2 \neq \mu_j^2$, $i \neq j$)

tehát ezek A μ_i^2 sajátaltereinek részei, de nagyobb, mert már ezek összege is V

$\Rightarrow$ V_i-k az A teljes s. alterei, $\lambda_i = \mu_i^2$

$\Rightarrow$ A s. vektorain egyértelmű a B hatása

és $V = \sum V_i \Rightarrow \forall$ vektoron egyértelmű a hatása

SVD (Singular Value Decomposition)

A önadjungált, pozitív szemidefinit

$\Rightarrow \exists U$ unitér: $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} D$ poz. szem. def.

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$

$\Rightarrow A = UDU^{-1} = UDU^*$

ha A önadjungált, nem pozitív szemidefinit

$\begin{bmatrix} |\lambda_i| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n| \end{bmatrix} \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

U helyett U': ha $\lambda_i < 0$, akkor U i-edik oszlopát a (-1)-szeresével helyettesítjük

$\rightarrow$ unitér marad

$$U' \begin{bmatrix} |\lambda_i| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n| \end{bmatrix} U^* = U \begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} U^* = A$$

Ⓓ

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ szinguláris értékei

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \geq 0$ (valósak),

ha

A^*A sajátértékei

$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2$

Alkalmazott algebra 8. ea 2012.10.01.

5/4.

Áll 1, $r(A^*A) = r(A) =$ a $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sorozat pozitív elemeinek száma

2, A és A^* pozitív szinguláris értékei ugyanazok, ugyanakkora multiplicitással

B 1, cél : $\operatorname{Ker} A^*A = \operatorname{Ker} A$

$\operatorname{Ker} A \leq \operatorname{Ker} A^*A$ nyilvánvaló

$A^*Av = 0 \Rightarrow v^*A^*Av = 0 \Rightarrow (Av)^*(Av) \Rightarrow Av = 0$

először

$r(A) = n - \dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^*A = r(A^*A)$

2, $\sigma > 0$ A^*A σ^2-hez tartozó sajátaltere V

AA^* —— ‖ —— W

$v \in V$ $A^*Av = \sigma^2 V$

$(AA^*)(Av) = A\sigma^2 v = \sigma^2 Av \Rightarrow Av \in W$

$v \neq 0 \Rightarrow Av \neq 0$, $A^*Av = \sigma^2 v \neq 0$

Így $A|_V : V \to W$ injektív

~~dim~~ $\dim W \geq \dim V$

fordítva hasonlóan

$\dim W = \dim V \Rightarrow \sigma^2$ multiplicitása ugyanannyi

Ⓜ megj.

$A^*A_{n\times n}$ $AA^*_{m\times m}$ $m\neq n$ esetén a 0 mult. különböző

Ⓣ $\forall A\in\mathbb{C}^{m\times n}$-re

$\exists M'\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $M\in\mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrix,

hogy $A=M'\Sigma' M^*$, ahol $\Sigma'=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots\end{bmatrix}_{m\times n}$

$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\ldots$

Ⓜ pozitív szemidefinitbe

σ-k a sajátértékek,

önadjungáltba a sajátértékek absz. ért

Ⓑ $r(A)=r(A^*A)=r$

$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}_{r\times r}$ $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ sing. ért

$\Sigma'=\left[\begin{array}{c|c}\Sigma & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]_{m\times n}$

A^*A önadj. poz. szem def $\Rightarrow\exists M$ unitér:

$$M^{-1}A^*AM=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=M^*A^*AM=$$

$$=(AM)^*(AM)$$

$\Rightarrow$ AM oszlopai ortogonális rendszert alkotnak hosszuk négyzete σ_i^2

$\Rightarrow$ $r+1$-től 0 oszlopok vannak

Alkalmazott algebra 8. ea

2012. 10. 01.
5/5.

$$AM = \left[\, \underset{\substack{\uparrow}}{T} \,\middle|\, 0 \right]$$

első r oszlop, ortog., hossz σ_i

$$(AM)^*(AM) = \begin{bmatrix} T^* \\ \hline 0 \end{bmatrix} [T \mid 0] = \left[\begin{array}{c|c} T^*T & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$M' = [T' \mid T_1]$

$T' = T\Sigma^{-1}$: a T oszlopainak normáltja

T_1 oszlopai kiegészítik ezt ortonormált bázissá

$(T'^* T_1 = T^* T_1 = 0)$

először $(M')^* AM = \cancel{\left([T' \mid T_1] \begin{bmatrix} T \\ \hline 0 \end{bmatrix}\right)}$

$$\begin{bmatrix} T'^* \\ \hline T_1^* \end{bmatrix} [T \mid 0] = \left[\begin{array}{c|c} T'^*T & 0 \\ \hline T_1^*T & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

így $A = M' \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^*$

Ⓜ Valós A-ra valós felbontást kapunk

(P1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^* A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

sajátértékek:

$\begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{bmatrix} = x^2 - 5x = 0 \qquad x_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} ⑤ \\ 0 \end{matrix} \right.$ poz.

$\Rightarrow r = 1 \ , \sigma_1 = \sqrt{5} \ , \ \sigma_2 = 0$

$M^{-1} A M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 5$-höz: s.v. $\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow AM = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$

$M' =$ ~~[illegible]~~ $\begin{bmatrix} \sqrt{5} \end{bmatrix} \rightsquigarrow 1$

~~[illegible]~~

$A \overset{?}{=} M' \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} M^* =$

M' első r oszlopa

(M) SVD redukált alakja $A = U' \Sigma U^*$

Alkalmazott algebra 9. ea 2012.10.08.

5/1

SVD

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$A = M' \Sigma' M^*$, M', M^* unitér

$\Sigma' \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

σ_i A szinguláris értéke A^*A sajátértéke

M: az A^*A-t a Σ^2-be konjugáló unitér

AM

$r(A) = r(AA^*) =$

$\#$pozitív σ_i

$$AM = \Big[\underbrace{T}_{r} \,\Big|\, 0\Big]$$ ortogonális

$$M' = \left[T' \,|\, T_1\right]$$ T' oszlopai T oszlopai normálva

$(T' \Sigma^{-1})$

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Sigma_{r \times r}$ csak poz. s.é.

T_1 az ortonormált kiegészítője

Redukált SVD

$A = U' \Sigma_{r\times r} U^*$ $\left.\begin{matrix} U'_{m\times r} \\ U_{n\times r} \end{matrix}\right\}$ ortonormált oszlopúk

$U' = T'$, azaz M' első r oszlopa

$U =$ M első r oszlopa

$*$

$$A = \left[\, T' \mid T_1 \,\right] \left[\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U^* \\ \hline U_2^* \end{array}\right] = \dots = T'\Sigma U^*$$

Ⓟ1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad r(A) = 1$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{s.é: } 4, 0$$

$$\sigma_1 = 2,\ \sigma_2 = 0$$

$$\lambda = 4\text{-hez} \quad \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dots \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

normálás

$$v_1 \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 \dots$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad AM = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$T' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad M' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{SVD: } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^{*} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} = A$$

Alkalmazott algebra 9. ea 2012.10.08.

5/2.

(Pl) redukált SVD:

csak poz. s.é.-ekhez tartozó v-k

$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ U'-höz: $AU = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$U' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $\Sigma = [2]$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}[2]\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix} = A$$

SVD alkalmazásai:

Nyilván: $r(A)$ leolvasható (Σ' vagy Σ)

Ker A ortonormált bázisa:

(teljes SVD-nél) M $(r+1.)$-$(n.)$ oszlopa

(u.i.: $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^*A$)

Poláris felbontás

(Áll) $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ felírható $A = PQ$ alakban, ahol

P pozitív (szemi)definit és

Q unitér

Ⓑ teljes SVD-ből

$$A = M'\Sigma'M^* = \overset{P}{\underbrace{\left(M'\Sigma'(M')^*\right)}}\overset{Q}{\left(M'M^*\right)}$$

poz. szem. def. : Σ poz. szem. def

M' unitér

Ⓣ legkisebb rangú közelítések
(Eckart-Young tétel)

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $\quad r = r(A)$

$A = U'\Sigma U^*$ redukált SVD

ekkor ∀ $0 \le k \le r$ -re $B = (U')^{(k)}\Sigma^{(k)}(U^{(k)})^*$

m×k-as

ahol $(U')^{(k)}$ az U' első k oszlopából áll

$(U)^{(k)}$ —||—

$$\Sigma^{(k)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_k \end{bmatrix}$$

B olyan k rangú mx, amely legközelebb van A-hoz

a közelítés hibája: $\sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2}$

távolság: Frobenius-norma

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

és két mx távolsága: $\|A-B\|$

Alkalmazott algebra 9. ea 2012. 10. 08.

5/3.

Moore-Penrose féle pszeudoinverz

Def: $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$

$A^+\in\mathbb{C}^{n\times m}$ A pszeudoinverze, ha

$AA^+A = A$ ⌝
$A^+AA^+ = A^+$ } (M) általánosított inverz

A^+A
AA^+ } önadjungált

nyilván: $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ invertálható: $A^+=A^{-1}$

$(A^+)^+=A$

(Á) 1) AA^+ a $\mathbb{C}^m$ merőleges vetítése Im A-ra

2) A^+A a $\mathbb{C}^n$ merőleges vetítése Im A^*-ra

(B) 1) elég: $A\underline{v}\to A\underline{v}$

$\underline{w}\perp \text{Im}\,A \to \underline{w}\to 0$

$AA^+(A\underline{v}) = A\underline{v}$

$w \perp \text{Im}\,A \Leftrightarrow w\perp A$ oszlopaira $\Leftrightarrow \underline{w}^*A=0^T \Leftrightarrow$

$A^*\underline{w}=\underline{0} \Rightarrow AA^Tw=(A^+A)^*w=(A^+)^*A^*w=A^+\underline{0}=\underline{0}$

2, $A^+A = (A^+A)^* = A^*\underbrace{(A^+)^*}$

$(A^*)^+$: $A^*(A^+)^*A^* = (AA^+A)^* = A^*$

$A^+A = A^*(A^*)^T \Rightarrow$ az 1) miatt ez merőleges vetítés Im A^*-ra

(Áll) a pszeudoinverz egyértelmű

Ⓑ A_1^+, A_2^+

$AA_1^+ = AA_2^+$ (mindkettő ⊥ vetítés Im A-ra)

hasonlóan

$A_1^+A = A_2^+A$

$A_1^+ = \underbrace{A_1^+A}A_1^+ = A_2^+\underbrace{AA_1^+} = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$ ✓

(Áll) Pszeudoinverz előállítása SVD-vel (redukált)

$A = U'\Sigma U^*$ (r. SVD)

akkor $A^+ = U\Sigma^{-1}(U')^*$

Ⓑ $A' = U\Sigma^{-1}(U')^*$

$$AA' = U'\Sigma\underbrace{U^*U}_{I_{r\times r}}\Sigma^{-1}(U')^* = U'(U')^*$$

$$A'A = U\Sigma^{-1}\underbrace{(U')^*U'}_{I_{r\times r}}\Sigma U^* = UU^*$$

Alkalmazott algebra 9. ea 2012. 10.08.

5/34.

$AA'A = U'(U')^* U' \Sigma U^* = U' \Sigma U^* = A$

$A'AA' = \ldots$

$AA' = U'(U')^*$ önadjungált ✓

$A'A = \ldots$

~~Legkisebb közelítő megoldás)~~

Legjobb közelítő megoldás

Ⓣ $Ax = b$ nem megoldható

$x = A^+ b$ a lehető legjobban közelítő megoldás, azaz erre $|Ax - b|$ minimális

Ⓑ cél: olyan $\underline{x}$, amelyre $Ax = b_0$ és

$|b - b_0|$ minimális

b_0 az A oszlopterében b-hez legközelebbi elem

$\Rightarrow$ b $\perp$ vetülete Im A-ra

$b_0 = AA^+ b$

továbbá $Ax = AA^+ b$ egyik megoldása $x = A^+ b$

(T) $A\underline{x}=\underline{0}$ legjobb közelítő megoldása az egységgömbön

$\underline{x}$, melyre $|A\underline{x}|$ minimális és $|\underline{x}|=1$

(Á) $A=M'\Sigma'M^*$ SVD felbontásnál

az M utolsó oszlopa ilyen, erre $|A\underline{x}|=\sigma_n$

(B) ∀ egységvektor előáll $M\underline{y}$ alakban,

ahol $\underline{y}=1$, hiszen

M invertálható és skalárszorzattartó(-hossztartó),
mivel unitér

$$|AM\underline{y}|^2=(AM\underline{y})^*(AM\underline{y})=\underline{y}^*M^*A^*AM\underline{y}=\underline{y}^*(\Sigma')^2\underline{y}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2|y_i|^2\geq\sum_{i=1}^{n}\sigma_n^2|y_i|^2=\sigma_n |y_i|^2=\sigma_n$$

itt = áll, ha $y=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$, azaz $M\underline{y}$ az M utolsó oszlopa

QR-felbontás

$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $A=QR$, ahol Q unitér
R felső-△

1. módszer: A^*A poz. szem. def.

szimultán sor-oszlop műveletekkel
diagonális alak, **sőt** I alakra
(működik, ha $\exists A^{-1}$, azaz A^*A poz. def.)

Alkalmazott algebra 9. ea

2012.10.08.
5/5.

A sorműveletek: csak lefelé 0-zás
nincs sorcsere

$$\Downarrow$$

$\rightsquigarrow G^* A A^* G = I$

↳ felső-Δ mx

továbbá AG unitér, hiszen $(AG)^* AG = I$

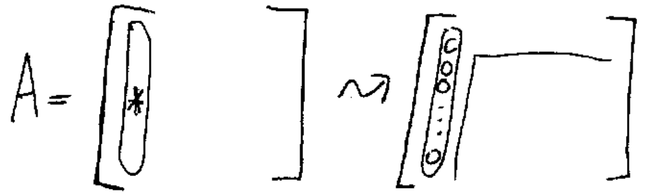
$$A = \underset{\text{unitér}}{(AG)}\,\underset{\text{felső-}\Delta}{G^{-1}}$$

2. módszer

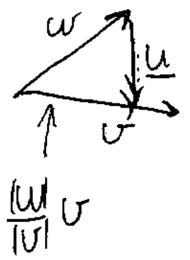
$A \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow$ balról szorzás unitérekkel, amíg felső-Δ alak

$MA = R$

$A = M^{-1}R$



Áll ∀v, w ≠ 0: ∃ hipersíkra való tükrözés, ami $w \mapsto$ v



az $\underline{u} = \frac{|w|}{|v|}\underline{v} - w$ normálvektorú hipersíkra való tükrözés, mátrixa $\underline{I} - \frac{2}{|\underline{u}|^2}\underline{u}\underline{u}^*$

Ⓟ1 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ kell τ: $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$$u=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$I-\frac{2}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & A \\ & \begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

---

kell τ: $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}c$ $\underline{u}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}+1\\-1\end{bmatrix}$

$$I-\frac{2}{4+2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3+2\sqrt{2}&-1-\sqrt{2}\\-1-\sqrt{2}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$\sim$

$$\begin{bmatrix}\ \ \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{array}\right]\begin{bmatrix}1&1&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

(HF) ugyanez az első módszerrel

övő szerda 16^{00} konzi

Alkalmazott algebra 2012. 10. 12.

5/1.

Konzultáció: okt. 17. szerda, 16.15 QBF08

(HF)

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

QR-felbontása szimultán sor-oszlop transzformációkkal

$A^*A \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow$ csak lefelé 0-zunk vagy $s_i \mapsto \lambda s_i$

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{s_2-s_1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{o_2-o_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt2}s_2}$$

$$\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\sqrt2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt2}o_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt2}s_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\sqrt2\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt2}o_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$G^*(A^*A)G=I \qquad G^*=?$$

1. $\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}=G^*$

AG

$$\begin{bmatrix}1&-1/\sqrt2&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1/\sqrt2&1/\sqrt2\\0&-1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1&0&0\end{bmatrix}=AG$$

G^{-1}

$$\begin{bmatrix}1&\textcircled{1}&\textcircled{0}\\0&\sqrt2&\textcircled{0}\\0&0&\sqrt2\end{bmatrix}$$

ekkor $A=\underset{\text{unitér}}{(AG)}\,\underset{\text{felső }\Delta\text{ (G is az)}}{G^{-1}}$

(A1) QR - algoritmus sajátértékek közelítő kiszámolására

$A_1 = A = Q_1 R_1$

cél: $A \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow$ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

átkonjugálni unitérrel

felső Δ mx. alakba

$A_2 = R_1 Q_1$

$A_2 = Q_2 R_2$

$\vdots$

$A_i = Q_i R_i$

$A_{i+1} = R_i Q_i$

$\hookrightarrow A_{i+1} = R_i Q_i = Q_i^* Q_i R_i Q_i =$

$= Q_i^* A_i Q_i = Q_i^{-1} A_i Q_i$

ha az (A_i) sorozat konvergens $\to \tilde{A}$

$\prod Q_n \to Q$

akkor

$\tilde{A}$ felső-Δ mx. és $\tilde{A} = Q^{-1} A Q$

$\downarrow$

az átlóban A sajátértékei

(= $\tilde{A}$ sajátértékei)

→ $\tilde{A}$ közelítése Δ-mx.-szal

(M) SVD kiszámításakor:

A^*A-ra alkalmazva

→ önadjungálthoz tart, tehát diagonális

$\to (M')^* A^* A M$

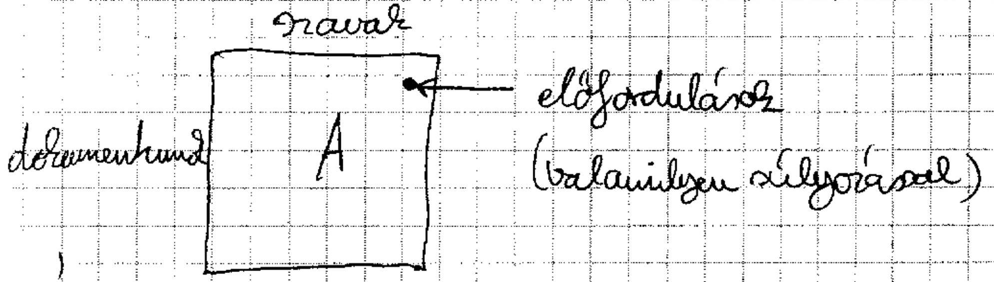
Alkalmazott algebra

2012.10.12.
5/2.

Mögöttes szemantikájú indexelés

(LSI: latent semantic indexing)

Nagy számú dokumentumban keresések



alacsonyrangú közelítés: $A \approx U'^{(k)} \Sigma^{(k)} (U^{(k)})^*$

→ $U^{(k)}$-beli szókombinációkkal közelítve A-t

a nemjellemző adatokat levágja

Nemnegatív mátrixok

Ⓓ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$-re $A \geq 0$, ha $\forall a_{ij} \geq 0$ (nemnegatív)

$A > 0$, ha $\forall a_{ij} > 0$ (pozitív)

$A \geq B$, ha $(A-B) \geq 0$

$A > B$, ha $(A-B) > 0$

Ⓓ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ spektrálsugara

$\varrho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda\ A$ sajátértéke$\}$

cél: nemnegatív mátrixok spektrálsugara

Ⓜ $A \geq 0,\ B \geq 0 \Rightarrow AB \geq 0$

speciálisan:

$A_{n\times n} \geq 0,\ v_{n\times 1} \geq 0 \Rightarrow Av \geq 0$

$A > 0,\ v \neq \underline{0} \geq 0 \Rightarrow Av > 0$

$$\Big(\sum \underset{0}{\underset{\vee}{a_{ij}}}\ \underset{0}{\underset{\vee\!\!|}{v_j}}\Big)$$, van nemnulla

Ⓓ

$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A \geq 0$

$\varrho'(A) = \sup\{r \in \mathbb{R} : \exists \underbrace{v \neq \underline{0}}_{v \geq 0} : Av \geq rv\} =$

$= \sup\{r \in \mathbb{R} : \exists v \geq 0 : |v| = 1 :$

$Av \geq rv\} =$

$= \max\{ -{}''- \}$

↑ adott v-hez a legnagyobb r:

$A : v \mapsto w$

$v_i \mapsto w_i$

$\frac{w_i}{v_i}$ minimuma

$v_i \neq \underline{0}$

erre az r-re:

$Av \geq rv$, de $Av \not> rv$

u.i. $\{v : |v| = 1,\ v \geq 0\}$ korlátos és zárt (kompakt)

és $v \mapsto r_v$ folytonos

Alkalmazott algebra 2012.10.12.

5/3.

Ⓣ

$$A \geq 0,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \varrho(A) = \varrho'(A)$$

$\textcircled{L_1}$ $B \in \mathbb{C}^{n \times n},\ A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ |b_{ij}| \leq a_{ij} \quad \forall i,j$

$$\Rightarrow \varrho(B) \leq \varrho'(A)$$

Ⓑ legyen λ sajátértéke B-nek $\underline{v} \neq \underline{0}$ sajátvektorral

$$B\underline{v} = \lambda \underline{v} \qquad \overset{|a_1 + \dots + a_n| < |a_1| + \dots + |a_n|}{=} \Leftarrow a_1 \upuparrows \dots \upuparrows a_n \qquad \nwarrow \Delta\text{-egyenl.}$$

$$w := \begin{bmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{bmatrix} \neq \underline{0},\quad |\lambda||v_i| = |\lambda v_i| = |s_i^B \underline{v}| \leq$$

(s_i^B, s_i^A B és A i-edik sora)

$$\leq s_i^A \underline{w} \rightarrow |\lambda| \underline{v} \leq A\underline{w} \Rightarrow |\lambda| \leq \varrho'(A)$$

és igaz $\forall \lambda$-ra $\Rightarrow \varrho(B) \leq \varrho'(A)$

$\textcircled{L_2}$ $A > 0,\ A\underline{v} \geq \varrho' \underline{v}$ (ilyen $\exists$) $\quad v \neq 0,\ v \geq 0$

$\Rightarrow A\underline{v} = \varrho' \underline{v}$, azaz ϱ' sajátértéke

Ⓑ indirekt

$A v - \varrho' v \geq 0$, de $\neq 0 \Rightarrow$

$A(Av - \varrho' v) > 0$, hiszen $A > 0$

$A(A\underline{v}) > \varrho'(A\underline{v})$ és $A\underline{v} \ge 0$, $A\underline{v} \neq 0$,

u.i. $A > 0$

↯ ϱ' maximális $\Rightarrow A v = \varrho' v$

~~×~~

tehát

$A > 0 \Rightarrow \varrho'$ sajátérték $\Rightarrow \varrho'(A) \le \varrho(A)$

Ⓑ (tétel) vázlatosan

$A \ge 0$-hoz $A_\varepsilon = A + \varepsilon J$

$\hookrightarrow J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

erre $\varrho'(A_\varepsilon) < \varrho(A_\varepsilon) \Rightarrow$ határátmenettel $\varrho'(A) \le \varrho(A)$

az $\textcircled{L_1}$ lemmából $\varrho(A) \le \varrho'(A) \Rightarrow \varrho(A) = \varrho'(A)$

(A'II) $A \ge 0 \Rightarrow$

$s_1 =$ minimális sorösszeg $\overset{①}{\le} \varrho(A) \overset{②}{\le}$ maximális sorösszeg $= s_2$

Ⓑ

① $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sor-} \\ \text{összegek} \end{bmatrix} \ge s_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varrho = \varrho' \ge s_1$

② Legyen $\underset{\neq 0}{\underline{v}} \ge 0$ a ϱ-hoz tartozó s.v.

legnagyobb eleme $v_i = c > 0$ $\quad \varrho v = A v$

$$\varrho c = \varrho v_i = s_i v \le s_i \begin{bmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ c \end{bmatrix} = c \underbrace{s_i \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{az } i\text{-edik sor összege}} \le c s_2$$

$\Rightarrow \varrho \le s_2$

Alkalmazott algebra

2012.10.12.
5/4.

Ⓚ $A \geq 0 \Rightarrow$

legkisebb oszlopösszeg $\leq \varrho(A) \leq$ legnagyobb oszl.

Ⓑ $\varrho(A^T) = \varrho(A)$, mert A^T és A kar. polinomja megegyezik $\Rightarrow$ u.a. a spektrumuk

(Pl) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ sorösszegekből $2 \leq \varrho \leq 4$

oszlopösszegekből $3 \leq \varrho \leq 3 \Rightarrow \varrho = 3$

$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 6 = 0$ s.é: $3, -2$

$(x-3)(x+2) = 0$

Pozitív mátrixok (Perron tételei)

Ⓣ $A > 0 \Rightarrow$

① $\varrho(A) > 0$ (Ⓑ a legkisebb sorösszeg > 0)

② $\exists \underline{v} > 0$ ~~[illegible]~~ sajátvektor ϱ s.é.-hez

Ⓑ $\exists v \geq 0, v \neq \underline{0}$: $Av = \varrho v$

$A > 0, v \geq 0 \Rightarrow \varrho v > 0, \underline{v} > 0$

③ a ϱ-hoz tartozó pozitív sajátvektorok egymás skalárszorosai

Ⓑ t.f.h. $v \neq v'$ is poz. s.v. ϱ-hoz

ekkor $\exists r : v \geq rv$, de $v \not> rv$

(r a legkisebb a $\frac{v_i}{v_i'}$-k között)

$\Rightarrow v - rv \geq 0$ s.v., de $v - rv \not> 0$ ↯

(ld. ②)

④ ha λ s.é., hogy $|\lambda| = \varrho \Rightarrow \lambda = \varrho$ és

$\dim V_\lambda = 1$

Ⓑ $\underline{v}$ λ-sajátvektor, $(v \in \mathbb{C}^n)$

$$w = \begin{bmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{bmatrix}$$

ekkor $\varrho |v_i| = |\lambda| |v_i| = |\lambda v_i| = |Av \text{ i-edik eleme}| =$

$= |s_i v| \overset{\Delta\text{-egyenl.}}{\leq} s_i \underline{w}$

$\Rightarrow \varrho w \leq Aw$, $w \geq 0 \Rightarrow \varrho w = Aw$ $\textcircled{L_2}$ szerint

$\Rightarrow$ végig [illegible] $=$ van

$\Rightarrow v_1 \uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow v_n$ a Δ-egy. miatt

$|v_i| = w_i \Rightarrow v_i = w_i \varepsilon$ egy $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$-re

$\Rightarrow v = \varepsilon v \Rightarrow v \in \langle w \rangle$

↑ és egyértelmű ③ miatt

Alkalmazott algebra 2012.10.12.

5/5.

$$\left.\begin{array}{l} \varrho w = Aw \Rightarrow \varrho v = Av \\ \quad\text{és } \lambda v = Av \end{array}\right\} \varrho = \lambda$$

⑤ $\varrho(A)$ egyszeres gyöke $k_A(x)$-nek

(erősebb ④-nél)

$\neg$Ⓑ

Irreducibilis mátrixok

Ⓓ $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $A \geq 0$ reducibilis, ha szimultán sor-oszlop permutációval valódi blokk Δ-alakra hozható

$$\begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline 0 & * \\ \hline \end{array}$$

a báziselemek permutációja

$P^{-1}AP = P^*AP$

irreducibilis, ha nem reducibilis

ekvivalens megfogalmazás

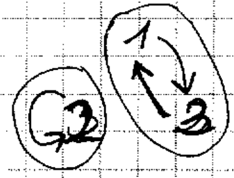
$A_{n\times n} \geq 0 \rightsquigarrow G_A$ az $\{1, 2, \dots, n\}$-en

$i \to j$, ha $a_{ij} > 0$

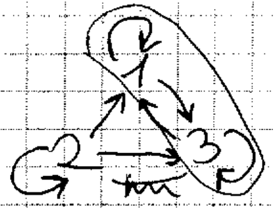
A reducibilis $\Longleftrightarrow$ $V(G)$-nek $\exists$ valódi része, melyből nem megy él kifelé

Ⓟ1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



reducibilis



reducibilis

irreducibilis

irreducibilis

(HF) $A_{n\times n}$ irreducibilis $\Rightarrow$ $(A+I)^n > 0$