Valószínűségszámítás vizsga
2016. június 1.

1. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a lottóhúzásnál a kihúzott legnagyobb és legkisebb szám különbsége éppen 10?
Megoldás: Jelölje i a legkisebb kihúzott számot. A keresett valószínűség:
$$\sum_{i=1}^{80}\frac{\binom{9}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{80\binom{9}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{560}{3662439} = 1.529\times 10^{-4}$$

2. Milyen b értéknél lesz az $f(x) = b\sqrt{x-2}$, $x \in (3,4)$ függvény sűrűségfüggvény? Mi az eloszlásfüggvény képlete?
Megoldás: $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = b\int_3^4 \sqrt{x-2}\,dx =$
$$b\int_1^2 \sqrt{x}\,dx = b\left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = b\cdot\left(\tfrac{2}{3}\cdot\sqrt{8}-\tfrac{2}{3}\right) = b \cdot = b\cdot\left(\tfrac{4}{3}\sqrt{2}-\tfrac{2}{3}\right) = b\cdot 1.2190$$
$b = \frac{1}{1.2190} = 0.82034$
$F_X(t) = 0$, ha $t < 3$, $F_X(t) = 1$, ha $t > 4$, $F_X(t) = b\left[\frac{2}{3}(t-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\right]$, ha $3 \le t \le 4$.

3. Legyen $X \in Po(1)$ és $Y = X(X-1)(X-2)$. Számolja ki Y várható-értékét!
Megoldás: $\mathbf{E}Y = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)\frac{1}{k!}e^{-1} = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k-3)!}e^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}e^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1^l}{l!}e^{-1} = 1$, hiszen a szumma éppen a $Po(1)$ eloszlás valószínűséginek az összege, ami 1.

4. Egy mérés elvégzéséhez két lehetőségünk van. Vagy egy drága készülékkel mérünk egyet, ahol a mérés hibája $N(0,1)$ eloszlású, vagy egy olcsó készülékkel mérünk ötször, és a méréseredményeket átlagoljuk, ahol viszont a mérés hibája már $N\left(0,\ 2\right)$ eloszlású. Melyik mérési technika adja a kisebb szórású mérési hibát?
Megoldás: A "pontos" műszerrel a mérési hiba a szórás, azaz 1. Az ismételt mérés utáni átlagolásnál az átlag szórása $\frac{2}{\sqrt{5}} = 0.89443$, tehát a második eljárás kisebb hibát fog adni.

5. Legyenek X, Y azonos eloszlású, független változók, melyek azonos sűrűségfüggvénye
$$f_X(t) = f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\frac{(t-4)^2}{10}}, t \in \mathbb{R}$$
Számolja ki a $\mathbf{P}(3X - 2Y < 6)$ valószínűséget.
Megoldás: $X, Y \in N\left(4, \sqrt{5}\right) \Rightarrow 3X - 2Y \in N\left(4, \sqrt{65}\right) \Rightarrow \mathbf{P}(3X-2Y < 6) = \Phi\left(\frac{6-4}{\sqrt{65}}\right) = \Phi(0.24807) = 0.59$