12. A Riemann-integrál fogalma, létezésének elégséges feltétele. kiszámítása, alkalmazása

Def: Legyen f az $[a,b]$ intervallumon legfeljebb véges számú pont kivételével mindenütt értelmezett korlátos valós fv. Képezzük az $[a,b]$ intervallumnak beosztásainak minden határon túl finomodó B_n sorozatát és a hozzájuk, vmivel az fv fv-hez tartozó „integrálközelítő" összegek I_n sorozatát. Ha az I_n sorozat konvergens, akkor a fv az $[a,b]$ intervallumon integrálható

Def: Ha az f fv az $[a,b]$ intervallumon integrálható, akkor az f fv-hez és az $[a,b]$ intervallum minden határon túl finomodó beosztássorozataihoz tartozó integrálközelítő sorozatainak közös határértékét az f fv. $[a,b]$ intervallumon vett <u>határozott integráljának</u> nevezzük

jelölés: $\int_a^b f(x)dx$ a - alsó határa, b - felső határa

Megj: - egy fv határozatlan integrálja egy fvhalmaz, határozott integrálja egy szám

- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- Def: $a < b$ megállapodás szerint: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ → feltéve, hogy létezik

- bármely konstans fv. minden zárt intervallumon integrálható: $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

- folytonosság az integrálhatósághoz elégséges (de nem szükséges) feltétel.

Def: Egy korlátos számhalmaz legnagyobb alsó korlátját a halmaz <u>alsó határának</u>, legkisebb felső korlátját a halmaz <u>felső határának</u> nevezzük.

- Legyen az f fv értelmezett és korlátos az $[a,b]$ zárt intervallumon (Feltétel)

- Osszuk fel az intervallumot n részre tetszőleges módon és minden részintervallum hosszát szorozzuk meg a részintervallum pontbeli fv-értékek alsó határaival és adjuk össze. Az így kapott összeget <u>alsó összegek</u> nevezzük.

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i}$, ahol m_i a függvényértékek alsó határa az i intervallumon és $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ az i intervallum hossza ($x_0 = a \wedge x_n = b$)

Hasonlóan készítjük el a felosztáshoz tartozó ún. <u>felsőösszeget</u>: $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, ahol M_i a fv-értékek felső határa az i intervallumon

- Az $[a,b]$ intervallum minden felosztásához készítsük el az alsó és a felsőösszeget

- Ha csak egy olyan J szám létezik amely minden alsóösszegnél nagyobb vagy egyenlő és minden felsőösszegnél kisebb v. egyenlő az J számot az f fv $[a,b]$ intervallumhoz tartozó határozott integráljának nevezzük ~~ésa~~ Jele: $\int_a^b f(x)dx = J$

alsó összegek felső határa → f fv alsó integrálja: $\underline{J} = \underline{\int_a^b} f(x)dx$

felső összegek alsó határa → f fv felső integrálja: $\overline{J} = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

Ha $\underline{J} = \overline{J} = J$

Minden határon túl finomodónak nevezzük az intervallum felosztásainak egy sorozatát, ha a leghosszabb részintervallumok hosszai minden határon konvergálnak.

Tétel: Ha f integrálható egy intervallumon, akkor a minden határon túl finomodó felosztássorozathoz tartozó alsóösszegek és felsőösszegek sorozata az integrálhoz konvergál.

Az f fv integrálhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a minden-határon túl finomodó intervallum felosztáshoz tartozó alsóösszegek és felsőösszegek sorozata azonos határértékhez konvergáljon.

Az integrálhatóság elégséges feltételei:

1. Ha az f fv folyamatos egy zárt intervallumon, akkor integrálható ott.
2. Ha az f fv korlátos és monoton egy intervallumon $\Rightarrow$ integrálható
3. Ha véges sok hely kivételével folytonos $[a,b]$ és korlátos $\Rightarrow$ integrálható

A határozott integrál tulajdonságai:

Legyen f és g integrálható az $[a,b]$ intervallumon és $C \in \mathbb{R}$

1. $\int_a^b c f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ ~~[illegible]~~
3. Ha egy egyváltozós valós fv valamely intervallumon integrálható, akkor integrálható annak részintervallumán is.
4. Ha egy fv az a, b, c számokat tartalmazó valamely intervallumban integrálható, akkor
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$
5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
6. Ha egy egyváltozós valós f fv-nek az $[a,b]$ intervallumon alsó korlátja az m, felső korlátja az M szám, és a fv az $[a,b]$ intervallumon integrálható, akkor:
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Folytonos fv-ek határozott integrálja:

Ha egy egyváltozós valós fv egy véges zárt intervallumon folytonos v. korlátos és véges számú pont kivételével folytonos - akkor integrálható is azon az intervallumon.

Tétel: (Integrál-középértéktétel): Ha az egyváltozós valós f függvény az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos, akkor van olyan $C \in [a,b]$, hogy $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$

Biz: m - legnagyobb alsó korlát M - legkisebb felső korlát.
↳ fv folyamatos $\Rightarrow$ korlátos is.
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
$$m \leq \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx \leq M \Rightarrow$$ Fv folytonos zárt intervallumon $\Rightarrow$ felveszi m és M értéket $\Rightarrow$ felvesz minden olyan értéket is amely e két korlát közé esik.

Tétel: Ha az egyváltozós valós f fv. folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, akkor az $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ fv. értelmezve van az $[a,b]$ zárt intervallumon, továbbá differenciálható az (a,b) nyílt intervallumon $\Rightarrow I'(x) = f(x)$ ha $x \in (a,b)$

Vagyis I fv az f-nek primitív fv-e az (a,b) nyílt intervallumon.

Biz: $a < x < b$
$$\frac{I(x+h)-I(x)}{h} = \frac{1}{h}\cdot\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \Rightarrow \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_h)$$
integrál középérték tétel

$h \to 0 \Rightarrow x+h \to x$ De $x \leq c_h \leq x+h \Rightarrow c_h \to x$. Ebből x folytonossága miatt következik, hogy
$\lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x) \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{I(x+h)-I(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$

12/12

Improprius integrálok:

Def: Az egyváltozós valós f fv legyen értelmezve az $J=[a,\infty)$ ill. $J=(-\infty,b]$ ill. $J=(-\infty,\infty)$ intervallumon.

Ha f minden véges $[a,b]$ intervallumon integrálható, és a

$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ ill. $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ ill. $\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)dx$ határérték létezik, akkor

ezt a határértéket a f fv. végtelenbe nyúló J intervallumon vett improprius integrál-jának nevezzük, és ~~jelöl~~

Zárt intervallumok végpontjának környezetében nem korlátos fv-re:

Def: Az egyváltozós valós, f fv legyen értelmezve az $J=(a,b]$ ill. $J=[a,b)$ ill. $J=(a,b)$ intervallumon. Ha f nem korlátos az J-hez tartozó határpontok környezetében, de integrálható minden: $[t,b]$ $(a<t)$ ill. $[a,u]$ $(u<b)$ ill. $[t,u]$ $(a<t<u<b)$ intervallumon továbbá a $\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx$ ill. $\lim_{u\to b-0}\int_a^u f(x)dx$ ill. $\lim_{\substack{t\to a+0\\ u\to b-0}}\int_t^u f(x)dx$

határérték létezik, akkor ezt a határértéket az $[a,b]$ intervallum végpontjánál nem korlátos f fv $[a,b]$ intervallumon vett improprius integráljának nevezzük.

Def: Belső ponton nem korlátos fv. esetén:

f fv értelmezve van $(a,u)\cup(u,a)$ + f nem korlátos u környezetében, de az f fv-nek az $[a,u]$ és $[u,b]$ intervallumokon vett improprius integrálja létezik. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^u f(x)dx + \int_u^b f(x)dx$$

Kiszámítás: Primitív fv segítségével
- Newton-Leibniz-tétellel. $\Big\}\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

- J integrál közelítő összeg segítségével: Ha talál s_n és S_n sorozatot amely ugyanahhoz a számhoz konvergál $\Rightarrow$ integrál is oda fog.

$$s_n=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i = S_n$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max|\Delta x_i|\to 0}}\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i = \underline{J} \qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ \max|\Delta x_i|\to 0}}\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i = \overline{J}$$

Ha f integrálható $[a,b]$-n akkor $\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max|\Delta x_i|\to 0}}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

Alkalmazás:

- Területszámítás:

Az egyváltozós f függvény és az (a,b) intervallum által meghatározott görbevonalú trapéz területén az $\int_a^b |f(x)|dx$ integrált értjük, feltéve hogy ez az integrál létezik. Továbbá, ha egy síkidom véges számú, közös belső pont nélküli görbevonalú trapézra bontható, akkor a síkidom területén az összetevő görbevonalú trapézok területének összegét értjük, feltéve, hogy minden összetevőnek ~~külön~~-külön van területe.

- térfogatszámítás
- ívhosszúság kiszámítása
- gyorsulás $\longrightarrow$ sebesség $\longrightarrow$ út

Kiszámításuk: közelítő módszerek => tudni kell mennyire pontos!

1, Téglalap módszer

2, Trapéz módszer

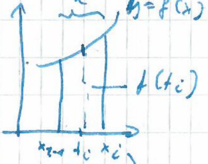
3, Parabola módszer.

1,

- Legyen f az $[a,b]$ i.v-on értelmezett és integrálható valós fv.
- osszuk fel az i.v-ot $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ pontokkal n egyenlő részre =>

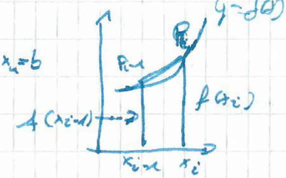
=> minden részintervallum: $h = \frac{b-a}{n}$ hosszúságú

felezőpontja: $t_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$



- A téglalapok előjeles területeinek összegét tekintjük az f fv $[a,b]$ i.v-on vett integráljának közelítő értékének: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(t_1)+f(t_2)+\dots f(t_n)\right)$

2,



$[a,b]$ intv-ot n egyenlő részre osztjuk. $a = x_0 < \dots < x_n = b$

$P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ $P_i(x_i, f(x_i))$

$P_{i-1} - P_i$ pontpárt egy-egy egyenes szakasszal összekötjük trapézokat kapunk.

közös magasság: $h = \frac{b-a}{n}$

$$T_i = \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot h$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[\left(f(x_0)+f(x_1)\right)+\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+\dots+\left(f(x_{n-1})+f(x_n)\right)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+\dots f(x_{n-1})\right)$$

De téglalap módszer pontosabb.

3,

Páros számú egyenlő részre osztjuk az $[a,b]$ intervallumot $a = x_0 < \dots < x_{2n} = b$ az egyes részintervallumok hossza: $\frac{b-a}{2n}$

Az f fv grafikonját helyettesítő az: x_0, x_1, x_2 … $x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}$ abszcisszájú ponthármasokon átmenő parabolaívekkel illetve szakaszokkal. A kiszámítandó integrál közelítő összegeként a parabolaívek és egyenes szakaszok által meghatározott görbevonalú trapézok területének összegét tekintjük.

Simpson formula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[\left(f(a)+f(b)\right)+2\left(f(x_2)+f(x_4)+\dots+f(x_{2n-2})\right)+4\left(f(x_1)+f(x_3)+\dots f(x_{2n-1})\right)\right]$$

Eszerint az $[a,b]$ i.v. végpontjait 1x-esen, a többi páros indexű osztáspontot 2x-esen, a páratlan indexűeket pedig 4x-esen vesszük tekintetbe.

13/1   13. A primitív fv. fogalma. Keresésének néhány módszere: parciális integrálás, a helyettesítés módszere, Newton-Leibniz tétel

Def: Ha az F fv differenciálható egy intervallumon és deriváltja f, akkor az F függvényt f primitív fv-nek nevezzük az intervallumon. A primitív fv-ek halmazát határozatlan integrálnak nevezzük és az $\int f(x)dx = F(x)+c$ szimbólummal jelöljük.

Tétel: Ha f egy primitív fv-e egy intervallumon F, akkor f összes primitív fv-e az intervallumon F+c alakú, ahol c tetszőleges valós szám.

Biz. Ha $F'=f$, akkor $(F+c)'=f$

Ha F és G primitív fv-ei f-nek egy adott intervallumon, akkor $F(x)-G(x)=c$ (a,b)-n.

mert $\left.\begin{matrix} F'(x)=f(x) \\ G'(x)=f(x)\end{matrix}\right\} \Rightarrow F'(x)-G'(x)=\left[F(x)-G(x)\right]'=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x)-G(x)=c$

$\int f(x)\ \frac{1}{x}$ $\left.\begin{matrix} F(x)=\ln x, \text{ ha } x>0 \\ G(x)=\ln(-x), \text{ ha } x<0 \end{matrix}\right\}$ nem c-vel térnek el egymástól, DE nem azonos intervallumon vannak értelmezve

Alapintegrálok:

$\int x^n dx =$ (a) Ha $n\neq -1 \to \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$; (b) Ha $n=-1 \to$ $\ln x + c$ ha $x>0$, $\ln -x + c$ ha $x<0$

$\int \cos x\, dx = \sin x + c$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

$\int e^x dx = e^x + c$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + c$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg\, x + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$, $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\, x + c$ $\int ch\, x\, dx = sh\, x + c$

$\int sh\, x\, dx = ch\, x + c$ $\int \frac{1}{ch^2 x} dx = th\, x + c$ $\int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cth\, x + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = arsh\, x + c$ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = arch\, x + c$ $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} arth\, x + c, & \text{ha } |x|<1 \\ arcth\, x + c, & \text{ha } |x|>1 \end{cases}$

Integrálás általános szabályai:

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

$\int (k\cdot f(x))dx = k\cdot \int f(x)dx$ $k\in\mathbb{R}$

$\int f^{\nu}(x) f'(x) dx = \frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + c$, ha $\nu \neq -1$ $\Rightarrow$ Pl: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$, ha $f(x)>0$ $\int \cos x \sin x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c$

Ha $\int f(x)dx = F(x)+c$, akkor bármely $k\neq 0$ esetén: $\int f(kx)dx = \frac{1}{k}F(kx)+c$

Biz: Láncszabály: $\left(\frac{1}{k}F(kx)+c\right)' = \frac{1}{k}f(kx)\cdot(kx)' = \frac{1}{k}f(kx)\cdot k = f(kx)$

Ha $\int f(u)du = F(u)+c$, akkor bármely diff.ható g belső fv-nel:

$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(x))+c$

Parciális integrálás:

A módszer a szorzat deriválási szabályának megfordítása

c konstans ebben benne van.

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \Rightarrow \int \underset{v'}{f'(x)}\underset{u}{g(x)}dx = \underset{u}{f(x)}\underset{v}{g(x)} - \int \underset{v}{f(x)}\underset{u'}{g'(x)}dx$$

Akkor érdemes alkalmazni, ha $f(x)g'(x)$ primitív függvényét egyszerűbb meghatározni

4 fv típusnál célszerű használni:

1 típus:

$p(x) \cdot t(ax+b)$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

p: polinom függvény t: sin, cos, sh, ch, e alapú exponenciális fv.

úgy alkalmazzuk: $f'(x) = t(ax+b)$ és $g(x) = p(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = a^{-1} t_1(ax+b)$ és $g'(x) = p_1(x)$

t_1 szintén az 5 fv. valamelyike, p_1 pedig a p-nél eggyel alacsonyabb fokú polinomfv.

Véges számú ismétlése után a polinom fv konstanssá válik, és az integrálás könnyen befejezhető.

2 típus:

Az $x^{\nu} \ln^n x$ alakú fv-eket, ahol n pozitív egész szám ν pedig a (−1)-től különböző, de egyébként tetszőleges valós szám.

$f'(x) = x^{\nu}$ és $g(x) = \ln^n x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$ és $g'(x) = \frac{n}{x}\ln^{n-1}x \Rightarrow f(x)g'(x) = \frac{n}{\nu+1}x^{\nu}\ln^{n-1}x$

Tehát a még ~~integrálandó~~ integrálandó fv ugyanolyan típusú, mint az eredeti, de benne a logaritmusos tényező fokszáma eggyel kisebb. ⇒ n-szer alkalmazva a logaritmusos tényező eltűnik, és az integrálás befejezhető.

3 típus:

$t_1(ax+b) \cdot t_2(cx+d)$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq, c \neq 0)$

t: sin, cos, ch, sh, e alapú exponenciális fv.

Két parciális integrálás után egyenletet írhatunk fel a kiszámítandó határozatlan integrálra, és ebből az egyenletből az integrál egyszerűen kiszámítható

4 típus:

$p(x) \cdot a(x)$ p: polinom fv a: arkusz v. area függvény

A polinom fv-t választjuk f'-nek ⇒ A parciális integrálás után racionális törtfv-t vagy négyzetgyökös fv-t kell még integrálni. ⇒ Befejezés többnyire helyettesítéssel.

Helyettesítés módszere:

Az összetett fv. deriválási szabályán alapszik

$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$, ahol a f fv primitív fv-ének megkeresése érdekében helyettesítjük az x független változót egy jól megválasztott g(t) differenciálható és invertálható ~~fv~~-nyel, meghatározzuk a primitív fv-t t-vel kifejezve, majd t helyébe visszaírva $g^{-1}(x)$-et kapjuk a keresett primitív fv-t

Példa: $\int \sqrt{1-x^2}dx = ?$

13/2 | $x = \sin t$ $\quad \frac{dx}{dt} = \cos t$ $\quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$ $\quad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int 1+\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}2\sin t\cos t + c = \boxed{\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1-x^2}+c}$$

1. $R(\sin x, \cos x)$ típus

Ilyen típusú fv integrálása a $tg\frac{x}{2} = t$ helyettesítéssel racionális törtfv integrálására vezethető vissza. $(x = 2\,arctg\, t) \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

2. $R(e^x)$ típus

Az e^x racionális fv-einek integrálásakor $e^x = t$ helyettesítést alkalmazunk.

$x = \ln t \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

→ Integrálást racionális tört függvények integrálására vezetjük vissza.

3. $R(x, \sqrt{1-x^2})$ és $R(x, \sqrt{x^2 \pm 1})$ típus

		dx/dt	
$R(x, \sqrt{1-x^2})$	$x = \sin t$	$\cos t$	$\sqrt{1-x^2} = \cos t$
$R(x, \sqrt{x^2+1})$	$x = sh\, t$	$ch\, t$	$\sqrt{x^2+1} = ch\, t$
$R(x, \sqrt{x^2-1})$ és $x \geq 0$	$x = ch\, t$	$sh\, t$	$\sqrt{x^2-1} = sh\, t$
$R(x, \sqrt{x^2-1})$ és $x \leq 0$	$x = -ch\, t$	$-sh\, t$	$\sqrt{x^2-1} = sh\, t$

<u>Racionális tört fv-ek integrálása:</u> $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (f, g polinomfv-ek)

Valódi tört: Ha a nevező fokszáma nagyobb mint a számlálóé

Áltört: Ha nem

↳ Maradékos osztást végzünk. $f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$ $\quad (r^* < g^*)$

$$R(x) = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

2 tagú összegként integráljuk. valódi tört, polinomfv

Elemi törtfv-ek: $\frac{a}{(x-b)^n}$ (1) $\qquad \frac{ax+b}{(x^2+bx+c)^n}$ (2)

Minden olyan valós racionális törtfv, amelyben a nevező fokszáma nagyobb a számlálóénál, előállítható elemi törtfv-ek összegeként, mégpedig egyértelműen

Racionális törtfv. integrálása visszavezethető tehát polinomfv és elemi törtfv integrálására

(1)-es hatványfv ill. logaritmusfv differenciálási szabályára visszagondolva:

$$\int\frac{dx}{(x-b)^n} = \begin{cases} -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-b)^{n-1}}+c, & \text{ha } n \neq 1 \\ \ln|x-b|+c, & \text{ha } n = 1 \end{cases}$$

(2)-es típus: Együttható összehasonlítás módszere

<u>Newton-Leibniz tétel:</u>

Ha f integrálható az $[a,b]$ intervallumon és létezik F primitív fv-e is ott, akkor

$$\int f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Bizonyítás:

Legyen f folytonos az [a,b] int.-on

Ekkor: $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $(x \in [a,b])$ Ez az f egyik primitív fv-e az [a,b] int-on.

14. Elsőrendű szétválasztható változójú és lineáris differenciálegyenletek megoldása

Differenciálegyenleten olyan egyenletet értünk, amelyben a meghatározandó ismeretlen egy fv., és az egyenletben az ismeretlen fv különböző rendű deriváltjai, valamint (egy v. többváltozós) adott fv-ek szerepelnek.

Megj: - ismeretlen fv maga is szerepelhet, mint saját 0-adrendű deriváltja.
- konstansok is szerepelhetnek
- megoldáskor alkalmazott módszert döntő módon meghatározza az, hogy a megoldandó differenciálegyenlet milyen típusú.

Ha meghatározandó fv többváltozós, akkor az egyenletben a fv parciális deriváltjai szerepelnek

Ha a meghatározandó fv egyváltozós, akkor közönséges deriváltak szerepelnek

⇓

Def: Közönséges differenciálegyenlet: → ismeretlen fv egyváltozós
- Parciális differenciálegyenlet → ismeretlen fv többváltozós.

Def: Diff. egyenletet n-edrendűnek nevezzük, ha a benne szereplő legmagasabb rendű derivált n-edrendű

Ha a közönséges diffegyenlet olyan alakú, hogy egyik oldalán csak az egyenletben előforduló legmagasabb rendű derivált áll, a másik oldalon viszont ez a derivált nem lép fel, akkor a diff. egyenletet explicitnek minden más esetben implicitnek nevezzük.

$F(x,y,y')=0$ ↳ többnyire 0-ra redukált alakban írjuk fel.

$y'=f(x,y)$ → explicit első rendű fv.

Szétválasztható változójú differenciál egyenlet:

Általános alakja: $y'=f(x)g(y)$, ahol f és g ismertek

Tétel: Ha az egyváltozós valós f fv az $[a,b]$ zárt intervallumon, az egyváltozós valós g fv pedig a $[c,d]$ zárt intervallumon folytonos, akkor a $D:=\{(x,y);\ x\in(a,b), y\in(c,d)\}$ nyílt téglalap minden pontján áthalad az $y'=f(x)g(y)$ differenciálegyenletnek legalább egy integrálgörbéje.

Ha az is teljesül, hogy a g fv a $[c,d]$ intervallumban sehol sem veszi fel a 0 értéket, akkor a differenciálegyenletnek a D minden pontján át egyetlen integrálgörbéje halad.

Megj: Ha y_0 olyan valós szám, hogy $g(y_0)=0$, akkor az $y\equiv y_0$ képlettel definiált konstans függvény ~~triviális~~ megoldás.

I. Megoldás: formális $y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \to \frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \to \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$ /Ha $g(y)\neq 0$/

II. Ha $g(y)\neq 0 \Rightarrow \int\frac{y'}{g(y)}dx=\int f(x)dx$
↳ összetett fv. deriválási szabálya alapján átírva: $\int\frac{1}{g(y)}dy$

→ Primitív fv-eket meghatározva megoldottuk az diff. egyenletet.

Ha $g(y)=0$, akkor az $y=y_0$ konstans fv is megoldás

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek:

$y' = p(x)y + q(x)$ – általános alak.

Homogén lineáris, ha $q(x) \equiv 0$, inhomogén lineáris ha nem

Tétel: (Megoldhatóság) Ha az egyváltozós valós p és q fv-ek az $[a,b]$ zárt i.v-on folytonosak, akkor a
$T := \{(x,y);\ x \in (a,b),\ y \in (-\infty,\infty)\}$ ponthalmaz minden pontján át az $y' = p(x)y + q(x)$ differenciálegyenletnek egyetlen integrálgörbéje halad.

Homogén: → szétválasztható változójú (részhalmaza)

$y' = p(x)y \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad y \neq 0$ (→ triviális megoldás $y \equiv 0$)

$\frac{dy}{y} = p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx \quad P$ – p valamelyik primitív fv-e.

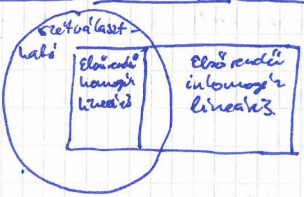
$\ln|y| = P(x) + \ln c \quad c > 0 \quad c \in \mathbb{R}$

$\frac{|y|}{c} = e^{P(x)} \to y = \pm c e^{P(x)}$

Ha c negatív számokat is megengedjük: $\boxed{y = c e^{P(x)}}$ ⇒ Minden ilyen fv a differenciálegyenlet megoldása ⇒ általános megoldás

Egy partikuláris megoldás kiválasztása gyakran oly módon történik, hogy elő van írva a keresett megoldás fv. értéke egy adott pontban (kezdeti feltétel) és ennek felhasználásával határozzuk meg a paraméter (c) értékét.

Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek.



Ezek között vannak szétválasztható változójúak

pl: $y' = xy + x \to y' = x(1+y) \Rightarrow \frac{y'}{1+y} = x$

DE többnyire nem ez a helyzet.

Általános alak: $y' = p(x)y + q(x)$ (1)

$p(x), q(x)$ – ismert fv. y – ismeretlen fv

Ha $q(x) \equiv 0$ → homogén d.e.

Ha $q(x) \not\equiv 0$ → inhomogén d.e.

Tétel: Ha az $p(x)$ és a $q(x)$ fv folytonos egy $[a,b]$ i.v-on akkor bármely $x_0 \in [a,b]$ és $y_0 \in \mathbb{R}$ számpárhoz tartozik egy és csak egy $y(x)$ megoldása a differenciálegyenletnek, amely eleget tesz az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételnek.

Megoldás:

inhomogén általános megoldás: $y_{i\,\acute{a}lt} = y_{h\,\acute{a}lt} + y_{i\,part.}$

1. Keres homogén megoldást
2. meghatároz 1 inhomogén partikuláris megoldást

1, $Y' = p(x)Y$ → inhomogén lin. diff. egyenlethez tartozó homogén diff. egyenlet.

Ha p és q az i.v-on folytonos a homogén ált megoldás: $y_{h.\acute{a}lt} = ce^{P(x)}$ $[c \in \mathbb{R},\ P'(x) = p(x)]$

2, Keresünk megoldást (2) $\boxed{y_{ip} = c(x)e^{P(x)}}$ alakban → a konstans variálása. / y_{ip} /

2-est behelyettesít (1)-esbe: $y' = c'(x)e^{P(x)} + c(x)p(x)e^{P(x)}$

↳ homogén megoldás paraméterét egy ismeretlen fv-nyel helyettesítjük

$c'(x)e^{P(x)} + \cancel{c(x)p(x)e^{P(x)}} = \cancel{p(x)c(x)e^{P(x)}} + q(x) \to c'(x)e^{P(x)} = q(x) \Rightarrow c(x) = \int \frac{q(x)}{e^{P(x)}} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y_{ip} = e^{P(x)} \cdot \int \frac{q(x)}{e^{P(x)}} dx} \Rightarrow \boxed{y_{i\,\acute{a}lt} = y_{h.\acute{a}lt} + y_{ip}}$

15. Másodrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet megoldása

Általános alakja: $y'' + ay' + by = f(x)$, ahol a és b valós számok
f pedig ismert fv (zavaró fv)
Minden lineáris diff. egyenlet esetében az általános megoldás előáll a homogén általános megoldásának és az inhomogén egy partikuláris megoldásának összegeként.

I. A homogén diff. egyenlet általános megoldása:
$y'' + ay' + by = 0$ megoldása két független megoldása lineáris kombinációjaként állítható elő. Az y_h homogén megoldást $y_h = e^{\lambda x}$ alakban keressük.
$\Rightarrow$ Behelyettesítjük d. e.-be $\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda a e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$ $/ : e^{\lambda x}$ $\Rightarrow$ Ez soha nem 0.

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \Rightarrow \text{karakterisztikus egyenlet}$$

$D = a^2 - 4b \Rightarrow$ diszkrimináns.

3 eset: 1. $D > 0 \Rightarrow$ másodfokú egyenletnek 2 különböző valós gyöke van λ_1 és λ_2.
Ekkor: $\boxed{y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$

2. $D = 0$, $\Rightarrow$ a másodfokú egyenlet 2 gyöke megegyezik. $\Rightarrow \lambda$
Egy homogén megoldás: $e^{\lambda x}$, egy ettől független megoldás: $x e^{\lambda x}$
Ekkor: $\boxed{y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}}$

3. $D < 0 \Rightarrow$ A másodfokú egyenletnek 2 komplex gyöke van, amelyek egymás konjugáltjai. $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$
Két független homogén megoldása a homogén egyenletnek: e^{a+ib} $\wedge$ e^{a-ib}
Ezek tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás $\Rightarrow$ két valós megoldás is kapható feltéve számtani közepe az egyik, különbségük fele a másik.

$y_1 = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ $\quad y_2 = e^{(a-ib)x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$
$(z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{i\varphi})$

$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax}\cos bx$, $y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{ax}\sin bx$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx}$

II. Inhomogén partikuláris megoldás keresése:
1. Kísérletezős módszer:
használható zavaró függvény: polinom, $\sin x$, $\cos x$, exponenciális fv
vagy ilyen típusú fv-ek szorzatainak összege.
$\Rightarrow$ partikuláris megoldást keres hasonló alakban
Ez akkor használható ha nincs rezonancia (külső)
belső rezonancia: $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ egy gyök van.
külső rezonancia: ha zavaró fv megoldása az homogén egyenletnek $f(x) = y_H$

2. Ha van ~~belső~~ külső rezonancia $\Rightarrow$ Megoldás az állandók variálásával.
$y'' + ay' + by = f(x)$ $\quad c_1 y_1 + c_2 y_2 = y_H$ $\quad y_{ip} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$
\+ behelyettesítés:

$y_{ip} = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad y'_{ip} = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + \overbrace{c'_1 y_1 + c'_2 y_2}^{=0}$

$y''_{ip} = c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + c_1 y''_1 + c_2 y''_2$

Behelyettesítés:

$b c_1(x) y_1 + b c_2(x) y_2 + \overbrace{(c'_1(x) y_1 + c'_2(x) y_2)}^{=0} a + (c_1(x) y'_1 + c_2(x) y'_2) a +$

$+ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + c_1 y''_1 + c_2 y''_2 = f(x)$

$c_1 (\underbrace{y''_1 + a y'_1 + b y_1}_{y_{H1} \Rightarrow =0}) + c_2 (\underbrace{y''_2 + a y'_2 + b y_2}_{y_{H2} \Rightarrow =0}) + c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f(x)$

$c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f(x)$ / Ha kikötöttük: $c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0$ /

↳ Egyenlet rendszer

Ha $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\exists!$ m.o. c'_1 és c'_2-re

Ezután meg c'_1, és c'_2-t integrálni kell.

Példák:

1, $y'' + 3y' + 2y = \sin x \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$ $\quad y_H = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

$y_{ip} = a \sin x + b \cos x$, $y'_{ip} = a\cos x - b \sin x$ $\quad y''_{ip} = -a \sin x - b\cos x$

sinx-es tagok: $2a - 3b - a = 1$

cosx-es tagok: $2b + 3a - b = 0$ $\Rightarrow a = \frac{1}{10}$ $\quad b = -\frac{3}{10}$ $\quad y_{ip} = \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x \Rightarrow y_{iált} = y_H + y_{ip}$

2, $y'' - 6y' + 8y = x \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$ $\quad y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$

$y_{ip} = kx + l$ $\quad y'_{ip} = k$ $\quad y''_{ip} = 0 \Rightarrow -6k + 8kx + 8l = x \Rightarrow k = \frac{1}{8}$ $\quad l = \frac{3}{32} \Rightarrow y_{ip} = \frac{1}{8}x + \frac{3}{32}$

3, $y'' + 5y' + 6y = 3 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -3$ $\quad y_H = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

$y_{ip} = k \Rightarrow 6k = 3$ $\quad k = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{ip} = \frac{1}{2}$ $\quad (y'_{ip} = y''_{ip} = 0)$

4, $y'' + 3y' = e^x \Rightarrow \lambda + 3\lambda^2 = 0$ $\quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 - 3$ $\quad y_H = c_1 + c_2 e^{-3x}$

$y_{ip} = ke^x$, $y'_{ip} = ke^x$, $y''_{ip} = ke^x \Rightarrow 3ke^x + ke^x = e^x \Rightarrow k = \frac{1}{4}$ $\quad y_{ip} = \frac{1}{4}e^x$

$y'' = kx$

$y' = \frac{kx^2}{2} + c$

$y = \frac{kx^3}{6} + cx + d$

5, $y'' - 2y' + y = 6e^{2x} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\quad y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$y_{ip} = ke^{2x}$ $\quad y'_{ip} = 2ke^{2x}$, $y''_{ip} = 4ke^{2x} \Rightarrow 4ke^{2x} - 4ke^{2x} + ke^{2x} = 6e^{2x} \Rightarrow k = 6 \Rightarrow y_{ip} = 6 \cdot e^{2x}$

6, Rezonancia eset:

$y'' - 2y' + y = 6e^x \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\quad y_H = c_1 \underbrace{e^x}_{y_1} + c_2 \underbrace{x e^x}_{y_2}$ → Belső rezonancia

⇒ Állandók variálása

$c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0 \Rightarrow c'_1 e^x + c'_2 x e^x = 0$ (ω) } 1−2

$c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = 2e^x \Rightarrow c'_1 e^x + c'_2 (e^x + xe^x) = 2e^x$

$- c'_2 e^x = -2e^x$

$c'_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 2x\ (+c)$

(ω) $c'_1 e^x + 2x e^x = 0$ $\quad c'_1 = -2x \Rightarrow c_1 = -x^2 + (d)$

$y_{ip} = c_1 e^x + c_2 x e^x = -x^2 e^x + 2x^2 e^x = x^2 e^x$

$\boxed{y_{iált} = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 e^x}$

16. Többváltozós fv. parciális deriváltja, differenciálhatósága, deriváltja. Kétváltozós fv. parciális deriváltjainak, háromváltozós fv. gradienseinek tulajdonságai

Def: n-változós valós fv-en olyan fv-t értünk, amelynek értelmezési tartománya valós szám-n-esekből, értékkészlete valós számokból áll. •

Határérték:
A 3 változós f fv-ről akkor mondjuk, hogy az $\overbrace{(x_0, y_0, z_0)}^{\underline{r}_0}$ pontban van határértéke, és az a határérték h, ha bármely pozitív ε-hoz megadható olyan pozitív δ szám, hogy a $0<|x-x_0|<\delta$, $0<|y-y_0|<\delta$, $0<|z-z_0|<\delta$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő (x,y,z) értékpármasokra f értelmezve van $\Rightarrow |f(x,y,z)-h|<\varepsilon$

$\left[\lim_{\underline{r}\to\underline{r}_0} f(\underline{r}) = h \quad \forall\varepsilon>0\text{-hoz } \exists\delta(\varepsilon) \quad |f(\underline{r})-h|<\varepsilon \text{ ha } 0<|\underline{r}-\underline{r}_0|<\delta(\varepsilon)\right]$ $\to r_0$ pontban f fv. nem feltétlenül van értelmezve

Folytonosság: Többváltozós f fv-t akkor nevezzük folytonosnak vmely pontban, ha ott értelmezve is van, határértéke is van, és ez a határérték az illető pontbeli fvértékkel egyenlő $\left[\, f(\underline{r}_0) = \lim_{\underline{r}\to\underline{r}_0} f(\underline{r})\right.$

Tétel:
I. Összefüggő korlátos halmazon folytonos fv-re igaz: $f(\underline{r}_1)$ és $f(\underline{r}_2)$ között ∀ értéket felveszi a fv a halmazon (mégpedig)

II. Korlátos és zárt halmazon folytonos fv. korlátos és ∃ min. és max (létezik)

* Két változós valós f fv-t felfoghatjuk olyan utasításként, amely a térbeli derékszögű koordináta-rendszer xy síkjának bizonyos (x_0, y_0) pontjaihoz egy-egy meghatározott $z_0 = f(x_0, y_0)$ valós számot rendel.

skalár-vektor fv: olyan fv. melynek értelmezési tartománya vektorokból, értékkészlete számokból áll.

Parciális deriváltak:
$f(x,y,z)$ x szerinti parciális differenciálhányadosa (x_0, y_0, z_0) helyen

$$f'_x\big|_{P_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$ y-t és z-t akkor konstansként kezeljük

Differenciálhatóság:
Az f skalár-vektorfv az r_0 helyen differenciálhatónak mondjuk, ha megadható olyan g vektor és r_0-nak olyan K teljes környezete, hogy ha $\underline{r}\in K$, akkor $f(\underline{r})$ értelmezve van és: $f(\underline{r}) - f(\underline{r}_0) = \underline{g}(\underline{r}-\underline{r}_0) + \underline{\varepsilon}(\underline{r})(\underline{r}-\underline{r}_0)$ $\quad \lim_{\underline{r}\to\underline{r}_0} \varepsilon(\underline{r}) = 0 \Rightarrow$ magasabb rendben tart nullához mint a $\Delta\underline{r}$

↳ hibatag

↳ diff.hányados az r_0 pontban (egyetlen ilyen g van) (gradiens)

$\underline{g} = \text{grad}\, f(\underline{r}_0) \Rightarrow$ f gradiens fv-én azt a vektor-vektor fv-t értjük, amely azokra az $\underline{r}_0$ helyvektorokra van értelmezve, amelyekre grad $f(\underline{r}_0)$ létezik és minden ilyen helyen a grad $f(\underline{r}_0)$ értéket veszi fel.

Tétel: Ha egy skalár-vektorfv vmely helyen differenciálható, akkor ott folytonos.

Def: $\underline{v}(\underline{r}) = \text{grad}\, u(\underline{r})$, akkor u fv a v potenciálfv-e, v pedig potenciálos vektor-vektor fv.

Szabályok: $\text{grad}(f+g)(\underline{r}_0) = \text{grad}\, f(\underline{r}_0) + \text{grad}\, g(\underline{r}_0)$

$\text{grad}(f\cdot g)(\underline{r}_0) = f(\underline{r}_0)\,\text{grad}\, g(\underline{r}_0) + g(\underline{r}_0)\cdot\text{grad}\, f(\underline{r}_0)$

$\operatorname{grad} k \cdot f(r_0) = k \operatorname{grad} f(r_0) \quad (k \in \mathbb{R})$ *[2]

Gradiens és parc. diff. hányados kapcsolata:

$\Delta \underline{r} = \Delta x \cdot \underline{i}$

$f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = \underline{g}\,\Delta x \cdot \underline{i} + \underline{\varepsilon}(\Delta x) \quad /:\Delta x \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{|\Delta x|} = 0$

$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = \underline{g}\,\underline{i} + \frac{\underline{\varepsilon}(\Delta x)}{\Delta x}$

$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}}_{x \text{ szerinti parciális derivált}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\underline{g}\,\underline{i} + \frac{\varepsilon}{\Delta x}\right] \qquad \underline{g} = g_1 \underline{i} + g_2 \underline{j} + g_3 \underline{k}$

$f'_x|_{P_0} = g_1 \quad f'_y|_{P_0} = g_2 \quad f'_z|_{P_0} = g_3 \quad \Rightarrow \boxed{\underline{g} = f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j} + f'_z \underline{k}}$

Tétel: Ha a parciális deriváltak léteznek r_0-ban abból nem következik a gradiens létezése stb.

Ha a parciális deriváltak folytonosak r_0-ban, akkor létezik a gradiens

↳ Ha gradiens létezik akkor a parc. deriváltak is

*[2] Láncszabály: (összetett fv. deriválása) $\frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = \operatorname{grad} f(x,y)\Big|_{\substack{x=g(t)\\ y=h(t)}} \cdot \left[g'(t)\,\underline{i} + h'(t)\,\underline{j}\right]$

Irány menti differenciálhányados:

Def: Legyen $\underline{e}$ az n-dimenziós valós vektortér valamely egységvektora. Az n-változós f. fv P_0 pontbeli, e iránymenti diff. hányadosa: $\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\underline{e}\,\overrightarrow{P_0P}}$ határérték (1)
($\overrightarrow{P_0P} \wedge \underline{e}$ egyező állású) jelölés: $f'_e(P_0)$

Ha a fv diffható a P_0 pontban, akkor ebben a pontban bármely iránymenti diff hányadosa létezik és kifejezhető a gradienssel.

Tétel: Ha a többváltozós valós f fv differenciálható a P_0 pontban, akkor ebben a pontban bármely e iránymenti diff hányadosa létezik $\Rightarrow f'_e(P_0) = \underline{e} \operatorname{grad} f(P_0)$

Biz: $f(P) - f(P_0) = \overrightarrow{P_0P} \operatorname{grad} f(P_0) + \overrightarrow{P_0P}\,\varepsilon(P) \qquad \lim_{P \to P_0} \varepsilon(P) = 0$

Válasszuk úgy P pontot, hogy $\overrightarrow{P_0P}$ vektor mindig e-vel egyező állású legyen.

Ekkor $\overrightarrow{P_0P}$ $\underline{e}$ irányába eső merőleges vetülete önmaga $\Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = (\underline{e} \cdot \overrightarrow{P_0P})\,\underline{e} \Rightarrow$

$\frac{f(P) - f(P_0)}{\underline{e} \cdot \overrightarrow{PP_0}} = \underline{e} \operatorname{grad} f(P_0) + \underline{e}\,\underline{\varepsilon}(P) \Rightarrow P \to P_0$ határátmenettel (1)-et adják.

Következmény: Legfeljebb 3 változós f fv: $\underline{e} \operatorname{grad} f(P_0) = \underbrace{|\underline{e}|}_{=1} |\operatorname{grad} f(P_0)| \cos\gamma = |\operatorname{grad} f(P_0)| \cos\gamma$ ← közbezárt szögük

$\Rightarrow$ max. ha $\gamma = 0 \Rightarrow$ A P_0 pontbeli iránymenti diff hányadosok közül az a maximális, amelyik a P_0 pontbeli gradiens irányához tartozik.

Alkalmazás:

$z = f(x,y)$ Ha f folytonos akkor felületet jelent.

$f'_x \to z = f(x,c)$

$\underline{e}_2 = \underline{i} + f'_x \underline{k}$

$f'_y \to z = f(d,y)$ érintő egyenesek egyenletei $\Rightarrow \underline{n} = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2$ (érintő sík normálisa) $\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x \underline{i} - f'_y \underline{j} + \underline{k}$

$\underline{e}_1 = \underline{j} + f'_y \underline{k}$

$\boxed{= \underline{n} = f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j} - \underline{k}}$

Magasabb rendű deriváltak:

Young tétel: Ha f kétszer differenciálható, akkor a parciális deriválások sorrendje felcserélhető

Lokális szélsőérték:

Szükséges feltétel: f diff.ható $\underline{r}_0$ helyen + $\text{grad} f\big|_{\underline{r}_0} = \underline{0}$

Elégséges feltétel: Ha $f'_{x|x_0y_0} = f'_{y|x_0y_0} = 0$ + második parciális deriváltak folytonosak +
(2 változós)

$$+ \quad D = \begin{vmatrix} f''_{xx|x_0y_0} & f''_{xy|x_0y_0} \\ f''_{yx|x_0y_0} & f''_{yy|x_0y_0} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$$

Ha $f''_{xx} > 0$ lok. min.
Ha $f''_{xx} < 0$ lok. max

Ha $D < 0$, akkor $\emptyset$ sz.é.

Ha $D = 0$, akkor nem tudni

Elégséges feltétel n változós fv. esetén: $\underline{r} = [x_1, x_2 \dots x_n]$

$\text{grad} f|_{\underline{r}_0} = \underline{0}$, a második parc. deriváltak folytonosak +

$$+ \quad D = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \dots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & \dots & & \\ f''_{x_nx_1} & \dots & \dots & f''_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

Ha a sarokdeterminánsok sorozat minden eleme $> 0 \Rightarrow$ minimuma van.

Ha váltakozó előjelűek és $f''_{x_1x_1} < 0 \Rightarrow$ lok. max. van

Tartományi szélsőérték:

$f(\underline{r})$ diff.ható a T zárt tartomány belsejében és folytonos a határon

Keres grad $f = \underline{0}$ + vizsgálat a határon

17. Kettős- és hármasintegrál fogalma, létezésének elégséges feltétele, kiszámítása, alkalmazása

Többváltozós fv. integrálján az egyváltozós valós fv. határozott integráljának megfelelő fogalmat értjük.

Def: Legyen V síkbeli v. térbeli tartomány (korlátos, zárt területtel ill. térfogattal rendelkező ponthalmaz). Ha a $V_1, V_2 \dots V_n$ tartományok a V-nek páronként közös belső pont nélküli résztartományai, és egyesítettjük V-vel egyenlő, akkor $V_1 \dots V_n$ a V-nek egy **beosztását** alkotják. Beosztás δ **finomságú**, ha a beosztásokhoz tartozó résztartományok mindegyike legfeljebb δ átmérőjű.

$[P_1, P_2 \dots P_n]$ véges pontsorozat a B beosztás ($B: V = V_1 \cup V_2 \cup \dots V_n$) **reprezentáns-rendszere**, ha $P_i \in V_i$

Def: Legyen V síkbeli v. térbeli tartomány, és legyen f a V tartományon legfeljebb véges számú 0 területű (ill. térfogatú) részhalmaz kivételével mindenütt értelmezett korlátos valós fv. Δv_i jelölje a V_i résztartomány területét ill. térfogatát.

Az f fv-hez, a B beosztáshoz és annak $[P_1 \dots P_n]$ reprezentánsrendszeréhez tartozó integrálközelítő összegen a: $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i$ összeget értjük.

(Beosztás minden határon túl finomodónak nevezzük ha $\delta \to 0$)

Def: Legyen f a V tartományon legfeljebb véges számú 0 területű (ill. térfogatú) részhalmaz kivételével mindenütt értelmezett korlátos valós fv. Ha B_n ($\delta \to 0$) beosztásokhoz és azok tetszőleges reprezentánsrendszereihez tartozó integrálközelítő összegek sorozata konvergens, akkor f függvény a V tartományon **integrálható**.

Tétel: Ha az f fv V tartományon integrálható, akkor a V beosztásainak bármely minden határon túl finomodó $[B_n]$ sorozatát véve, az f fv-hez, a B_n beosztásokhoz és azok tetszőleges reprezentánsrendszereihez tartozó integrálközelítő összegek sorozata ugyanahhoz a számhoz konvergál.

Def: Az integrálközelítő összegek sorozatainak közös határértékét az f fv V tartományon vett **integráljának** nevezzük.

Kettős integrál: $\iint_T f(x,y)\,dx\,dy$

$\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i m_i = s_i$ infimum alsó közelítő összeg.

$\sum_{i=1}^{n} t_i M_i = S_i$ supremum, felső közelítő összeg.

Ha $\left.\begin{matrix} \max d_i \to 0 \\ n \to \infty \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} s_i \to \underline{I} \\ S_i \to \overline{I} \end{matrix}\right\}$ Ha $\underline{I} = \overline{I}$, akkor f integrálható

Hármas integrál: $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$

(határpontok közötti legnagyobb távolság kis átmérő)

Kettős és hármas integrál tulajdonságai:

1. Ha az f fv a V tartományon integrálható és c tetszőleges valós szám, akkor integrálható a V tartományon az f fv. c-szerese is $\Rightarrow \boxed{\int_V c f(P)\,dv = c \cdot \int_V f(P)\,dv}$

2. Ha az f és g fv-ek integrálhatók a V tartományon, akkor integrálható a V tartományon az összeg fv-ük is $\Rightarrow \boxed{\int_V (f(P) + g(P))\,dv = \int_V f(P)\,dv + \int_V g(P)\,dv}$

3. Ha az f fv integrálható valamely tartományon, akkor integrálható annak minden résztartományain is.

4. Ha az f fv integrálható a V tartományon, V_1 és V_2 pedig a V-nek két közös belső pont nélküli résztartománya, akkor $\int_{V_1} f(P)dv + \int_{V_2} f(P)dv = \int_{V_1 \cup V_2} f(P)dV$

5. Ha az f függvénynek a V tartományon alsó korlátja m felső korlátja az M szám és a fv a V tartományon integrálható akkor $m \cdot \Delta V \leq \int_V f(P)dv \leq M \Delta V$

6. Ha az f fv folytonos a V tartományon, akkor integrálható és a V-n, és van V-nek olyan P_0 pontja, hogy $\frac{1}{\Delta V}\int f(P)dv = f(P_0)$ /integrál középérték tétel/

7. $f(x,y) \leq g(x,y) \Rightarrow \iint f \leq \iint g$

Kiszámítása: I. Kettős integrál

Ia, Integrálás téglalapon:

$a \leq x \leq b \quad c \leq y \leq d$ f a V tartományon folyamatos fv.

$$\iint_V f(x,y)\,dv = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

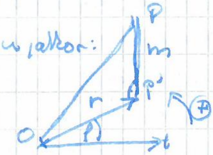
Folytonos kétváltozós fv-nek a koordinátatengelyekkel ||-os oldalú téglalaptartományon vett kettős integrálját kiszámíthatjuk úgy, hogy először az egyik változója szerint mint egyváltozós fv-t integráljuk a megfelelő határok között, majd az így kapott – már csak a másik változótól függő – egyváltozós fv-t a másik változó szerint integráljuk az annak megfelelő határok között. A két integrálás sorrendje tetszőleges.

Ib. Integrálás normál tartományon:

Def: Legyen $c(x)$ és $d(x)$ az $[a,b]$ intervallumban folytonos, továbbá $a \leq x \leq b$ esetén $c(x) \leq d(x)$. Ekkor az $N_x = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x)\}$ alakú halmazokat x-re vett normáltartománynak nevezzük.

Tétel: Ha f folytonos az N_x normáltartományon, akkor:

$$\iint_{N_x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$



Ic. Polár transzformációval:

Hengerkoordináta-rendszer:

Ha közben P befutja a tér összes pontját: $r \geq 0 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad m \in (-\infty, \infty)$

Speciális eset: Vegyük fel a hengerkoordináta rendszer alapelemeit egy térbeli derékszögű koordináta rendszerben:

úgy a hengerkoordináta-rendszer pólusa essen egybe az origóval, polártengelye ~~pedig~~ az x tengellyel, alapsíkja pedig az xy síkkal. Ekkor:

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = m$

kettős integrál transzformációs képlete:

Fejezzük ki x és y változókat u és v változókkal: $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$.

⇒ Behelyettesítjük az integrálandó f fvbe ⇒ u-tól és v-től függő F fv-t kapunk.

$F(u,v) = f(g(u,v); h(u,v))$

Jelöljük V-vel az xy síknak azt a tartományát, amelyben f-et integrálni kell, W-vel pedig azoknak az (u,v) számpároknak a halmazát, amelyeket fel kell használnunk.

$W = \{(u,v);\ (g(u,v), h(u,v)) \in V\}$

A helyettesítés csak akkor alkalmas a kettős integrál transzformálására, ha a W különböző belső pontjaihoz a V különböző pontjait rendeli.

Ha az x és y az u-nak és a v-nek a W halmazon folytonos parciális deriváltakkal rendelkező fv-ei, akkor az f fv V tartományon vett kettős integrálja kifejezhető:

$$\iint_V f(x,y)\,dx\,dy = \iint_W f(g(u,v), h(u,v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

abszolút érték!!

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}$$ Függvénydetermináns v. Jacobi-determináns.

Transzformálás síkbeli polárkoordináta-rendszerre (előadásból)

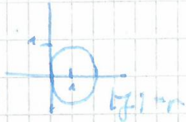
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\quad (r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \Rightarrow$ így téglalapot kapunk

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \underline{\underline{r}}$$

Használat: - Ha T_{xy} nem normál tartomány, de normállá tehető
- Ha egyszerűbbé teszi a képletet.

Eltolt polár transzformáció: pl: $T(x,y)$ $\quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1$

$x - 1 = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



$|J| = r$

II. Hármas integrál:

a. "Téglatest" módszer $\quad g(x,y,z) \to$ értelmezett + korlátos az adott tartományon (esetleg folytonos is)

$a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $e \leq z \leq f$

$$\iiint_V g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f g(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

b. Integrálás normál tartományon

Feltétel: Az adott tartomány xy síkra vetített vetülete normál tartomány az x-re vagy az y-ra. $\to$ Amelyikre normál az 2 konstans között mozog

$\to$ Másik 2 egyváltozós fv. között mozog

- z 2 változós fv. között mozog.

Pl: $k(x,y) \leq z \leq h(x,y)$

$$\left.\begin{matrix} c(x) \leq y \leq d(x) \\ a \leq x \leq b \end{matrix}\right\} N_x \qquad \left.\begin{matrix} a(y) \leq x \leq b(y) \\ c \leq y \leq d \end{matrix}\right\} N_y$$

$\Downarrow$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dv = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} \left(\int_{k(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

c, Transzformálás henger koordináta rendszerre:

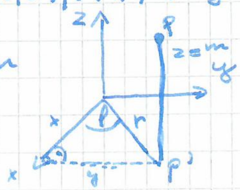
$x = g(u,v,w)$

$y = h(u,v,w)$

$z = \hat{z}(u,v,w)$

$$J = \begin{vmatrix} g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \\ \hat{z}'_u & \hat{z}'_v & \hat{z}'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V f(g(u,v,w), h(u,v,w), \hat{z}(u,v,w))\,|J|\,du\,dv\,dw$$



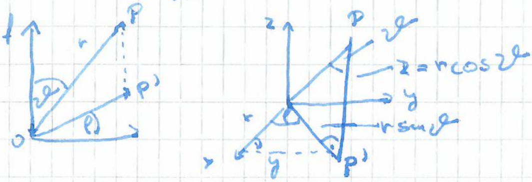
Henger esetén: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\quad z = m$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

d, <u>Transzformáció térbeli polár-koordináta rendszerbe:</u>

- $r = d(O,P)$ távolságot
- P' pont φ polárszögét az alapsíkbeli polárkoordináta rendszerben
- $\overrightarrow{OP}$ és az z féltengely által bezárt ϑ szöget

} megadásukkal bármely P pont megadható



P befutja tér minden pontját azalatt: $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$

$$J = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix} = -r^2\sin\vartheta \Rightarrow |J| = r^2\sin\vartheta$$

<u>Alkalmazás:</u>

- Területszámítás
- Térfogatszámítás
- Homogén tömegeloszlású test tömegének, nyomatékainak, súlypontjának meghatározása
- Elektrosztatikus potenciál meghatározása homogén töltéseloszlású test esetén.

18. Egy és kétparaméteres vektor-skalár fv. fogalma, differenciálhatósága
Térgörbe ívhossza, felület érintősíkja fogalma

Def: Az olyan fv-t, amelynek értelmezési tartománya valós számokból, értékkészlete vektorokból áll, Vektor-skalár fv-nek nevezzük.

Pl: egyenes paraméteres vektoregyenlete $\underline{p} = \underline{p}_0 + \underline{v}t$ $(t \in (-\infty, \infty))$
$\underline{p}_0$ és $\underline{v}$ konstans vektorok, t számértékű változó. A $\underline{p}$ vektor a t függvénye.

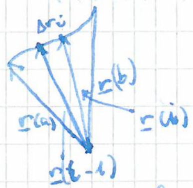
Határérték: $\lim_{t \to t_0} \underline{p}(t) = \underline{h}$ $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta(\varepsilon)$ $|\underline{p}(t) - \underline{h}| < \varepsilon$ ha
$0 < |t - t_0| < \delta(\varepsilon)$

Folytonosság: Az $\underline{r}$ vektor-skalár fv folytonos a t_0 helyen, ha $\underline{r}(t_0)$ fv.értéke ill. $\lim_{t \to t_0} \underline{r}(t)$ fv.határértéke létezik és ez a kettő egyenlő.

Derivált vektor: Az $\underline{r}$ vektor-skalár fv t_0 pontbeli deriváltvektorán az
$\dot{\underline{r}}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\underline{r}(t_0+h) - \underline{r}(t_0)}{h}$ határértéket értjük, feltéve hogy az létezik.
Azt a vektor-skalár fv-t pedig, amelynek értelmezési tartománya azokból a számokból áll, amelyekre $\dot{\underline{r}}(t_0)$ létezik, és minden ilyen t_0 helyen éppen az $\dot{\underline{r}}(t_0)$ értéket veszi fel, az $\underline{r}$ vektor-skalár fv deriváltjának nevezzük.
$\underline{r}(t) = \underline{i}x(t) + \underline{j}y(t) + \underline{k}z(t)$ fv-eket az $\underline{r}$ vektor-skalár fv koordináta fv-einek nevezzük.

Tétel: Vektor-skalár fv. deriváltjának koordináta fv-ei megegyeznek az eredeti fv. koordináta függvényeinek deriváltjaival. (feltéve, hogy léteznek)
Ha $\underline{r}(t) = \underline{i}x(t) + \underline{j}y(t) + \underline{k}z(t)$ és az $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ deriváltak léteznek $\Rightarrow \dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}\dot{x}(t) + \underline{j}\dot{y}(t) + \underline{k}\dot{z}(t)$

Térgörbe ívhossza:
Minden térgörbe egy vektor-skalár fv grafikonjának tekinthető.



$\underline{r}(t)$ $t \in [a, b]$
részekre oszt ívet $\Rightarrow$ Egyenesekkel közelít $\Rightarrow$ ezt tud számolni
n-részre oszt.

$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max|\Delta \underline{r}_i| \to 0}} \sum_{i=1}^{n} |\Delta \underline{r}_i|$ → Ha ez a határérték létezik, akkor ez az ívhossz
$= \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max|\Delta \underline{r}_i| \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta \underline{r}_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i$

$\frac{\Delta x}{\Delta t}\underline{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\underline{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\underline{k} = \dot{x}(t_1)\underline{i} + \dot{y}(t_2)\underline{j} + \dot{z}(t_3)\underline{k}$ t_1, t_2, t_3 nem feltétlenül azonos.
Lagrange középértéktétel alkalmazása   de a különbség akkor minimális, ha a deriváltak folytonosak $\Rightarrow$ akkor használható a Riemann-integrál.

Tétel: Ha az $\underline{r}$ vektorskalár fv-nek a $[t_1, t_2]$ zárt intervallumon folytonos deriváltja van, akkor az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ egyenletű térgörbe $t_1 \leq t \leq t_2$ ívének a hosszúsága az
$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)| \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \, dt$ képlettel számítható ki.

Ha egy térgörbe vektor egyenletében paraméterként az ívhossz szerepel, akkor azt mondjuk, hogy a térgörbét ívhossz paraméterrel adtuk meg.

Def: Az $\underline{r} = \underline{r}(t)$ egyenlettel jellemzett térgörbének a t_0 paraméterértékű ponthoz tartozó érintővektorán az $\dot{\underline{r}}(t_0)$ deriváltvektort értjük, feltéve, hogy létezik és nem $\underline{0}$.

Tétel: Ívhossz paraméterrel megadott térgörbének bármely paraméterértékhez tartozó érintővektora egységvektor:

$\underline{v}'(s) = \underline{r}'(t(s)) = \dot{\underline{r}}(t(s))\cdot t'(s) = \dot{\underline{r}}(t(s))\cdot \frac{1}{\dot{s}(t(s))} = \dot{\underline{r}}(t(s))\cdot\frac{1}{|\dot{\underline{r}}(t(s))|} = \underline{1}$

érintő egységvektor

Tétel: Ha az ívhosszparaméteres $\underline{r}=\underline{r}(s)$ egyenlettel megadott térgörbe s_0 paraméterű pontjában az $r''(s_0)$ második deriváltvektor létezik, akkor $\underline{r}'(s_0)$ és $\underline{r}''(s_0)$ egymásra merőleges.

Biz: Ha $\underline{r}'$ létezik $\Rightarrow (\underline{r}'(s))^2 = 1$ | mindkét oldalt s szerint differenciálva.

$2\underline{r}'(s)\,\underline{r}''(s) = 0 \Rightarrow$ vagyis $\perp$-es.

Def: Ha az $\underline{r}$ vektor-skalár fv-nek az s_0 helyen van második deriváltvektora és az nem $\underline{0}$, akkor az $\underline{r}=\underline{r}(s)$ ívhosszparaméteres vektoregyenletű térgörbe s_0 paraméterű P_0 pontjához tartozó

érintő egységvektor: $\underline{t}(s_0) := \underline{r}'(s_0)$

főnormális egységvektor: $\underline{n}(s_0) := \frac{\underline{r}''(s_0)}{|\underline{r}''(s_0)|}$

binormális egységvektor: $\underline{b}(s_0) := \underline{t}(s_0)\times\underline{n}(s_0)$

} kísérő triéder

simulósík: t és n síkja

normálsík: n és b síkja

rektifikáló sík: b és t síkja

Ha a térgörbét meghatározó $\underline{r}=\underline{r}(t)$ vektoregyenlet jobb oldalán álló $\underline{r}$ vektor-skalár fv a t_0 elég kis környezetében legalább 2x differenciálható $\wedge$ $\dot{\underline{r}}(t_0)\times\ddot{\underline{r}} \neq \underline{0}$

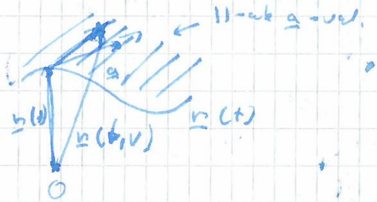
akkor: $\underline{t}(t_0) = \frac{\dot{\underline{r}}(t_0)}{|\dot{\underline{r}}(t_0)|}$ $\quad \underline{b}(t_0) = \frac{\dot{\underline{r}}(t_0)\times\ddot{\underline{r}}(t_0)}{|\dot{\underline{r}}(t_0)\times\ddot{\underline{r}}(t_0)|}$ $\quad \underline{n}(t_0)=\underline{b}(t_0)\times\underline{t}(t_0)$

Hengert meghatározó fv:

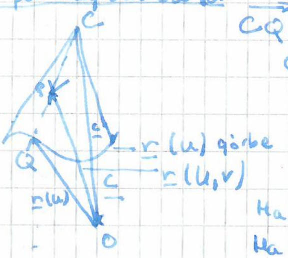
vezérgörbe megadása: $\underline{r}(t)$ alkotó vektor: $\underline{a}$

$\underline{r}(t,v) \to$ azon megadni hengert

$\underline{r}(t,v) = \underline{r}t + v\cdot\underline{a}$



Kúpot meghatározó fv:



$\vec{CQ} = \vec{OQ} - \vec{OC}$

$\vec{CQ} = \underline{r}(u) - \underline{c}$ $\quad \vec{OP} = \underline{r}(u,v)$

$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP}$ $\quad \vec{CP} = v\cdot\vec{CQ} = v(\underline{r}(u) - \underline{c})$

$\boxed{\underline{r}(u,v) = \underline{c} + (\underline{r}(u) - \underline{c})v}$

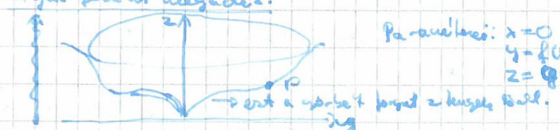
Ha $v=0 \Rightarrow$ csúcs helyvektorát kap

Ha $v=1 \Rightarrow$ Q pontot kap meg.

Ha teljes kúpot akar $v \to (0,\infty)$

Ha kettős kúpot akar $v \to (-\infty,\infty)$

Forgási felület megadása:



Paraméterei: $x=0$, $y=f(u)$, $z=g(u)$ } $\Rightarrow$ forgatásnál $0\le v<2\pi$

$x=f(u)\cos v$
$y=f(u)\sin v$
$z=g(u)$

u-t az eredeti görbe határozza meg

Felület érintősíkja:

Def: Az ∂ felületre és annak P pontjára illeszkedő görbék között legyen található legalább egy olyan g_1, g_2 pár, hogy g_1-nek és g_2-nek is van érintője P-ben, és ez a két érintő különböző állású. A g_1 és a g_2 görbe P pontbeli érintője által meghatározott síkot az ϑ felület P pontbeli <u>érintősíkjának</u> nevezzük, ha a P-re és ϑ-re illeszkedő minden görbe P-beli érintője benne van ebben a síkban. Az érintősíkra a P pontban állított merőleges egyenest az ϑ felület P-beli <u>felületi normálisának</u>, a vele egyállású normális vektorát P-beli felületi <u>normálvektorának</u> nevezzük.

<u>Tétel:</u> ~~Az~~ ϑ felület legyen megadva az $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ $((u,v) \in D)$ paraméteres vektoregyenlettel. Ha az $(u_0, v_0) \in D$ pont valamely teljes környezetében az $\underline{r}$ fv invertálható és mindkét változója szerint parciálisan diff.ható, továbbá ezek a parciális deriváltak a tekintett teljes környezetben folytonosak, és az (u_0, v_0) pontban különböző állásúak, akkor az $\underline{r}(u_0, v_0)$ helyvektor végpontjában a felületnek van érintősíkja, és ennek normálvektora az $\underline{n}(u_0, v_0) = \underline{r}'_u(u_0, v_0) \times \underline{r}'_v(u_0, v_0)$

<u>Felületdarab felszíne:</u>

Legyen D az uv paramétersík korlátos zárt részhalmaza, $\underline{r}$ pedig a D-n értelmezett vektorértékű fv. Ha a D halmazon $\underline{r}$ invertálható és mindkét változója szerint parciálisan differenciálható, továbbá $\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v$ a D egyetlen pontjában sem $\underline{0}$, akkor a paramétersík D tartományához tartozó ϑ felületdarab felszínén az:

$A(\vartheta) := \iint_D |\underline{r}'_u(u,v) \times \underline{r}'_v(u,v)| \, du \, dv$ kettős integrált értjük, feltéve, hogy ez létezik.

$|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v| = \sqrt{\underline{r}'^2_u \underline{r}'^2_v - (\underline{r}'_u \underline{r}'_v)^2}$

18. Vektor-vektor fv. fogalma, deriváltja, divergenciája, rotációja

Def: olyan fv-ek, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete is a 3 dimenziós ($\mathbb{R}^3$) vektortér valamely részhalmaza.

Általános alakja: $\underline{v}: \underline{r}(x,y,z) \mapsto \underline{i}\, v_1(x,y,z) + \underline{j}\, v_2(x,y,z) + \underline{k}\, v_3(x,y,z)$

v_1, v_2, v_3 fv-ek a $\underline{v}$ vektor-vektor fv koordináta függvényei

$\underline{v}(\underline{r}) = p(\underline{r})\underline{i} + q(\underline{r})\underline{j} + s(\underline{r})\underline{k}$ $\quad \underline{v}(\underline{r})$ folytonos, ha mind 3 eleme folytonos

Alkalmazás: vmilyen erőtér megadására

Derivált: $\underline{v}(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - \underline{v}(\underline{r}) = \underline{\underline{D}}\,\Delta\underline{r} + \underline{\varepsilon}$ $\quad$ ha $\lim\limits_{\Delta\underline{r}\to 0} \frac{\underline{\varepsilon}}{|\Delta\underline{r}|} = \underline{0}$ $\Rightarrow$ gyorsabban tart 0-hoz mint $\Delta\underline{r}$

speciális vektor-vektor fv /lineáris operátor/

Homogén lineáris módon rendel Sr-hez vektort

rögzít: $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázist $\Rightarrow$ keres $\underline{\underline{D}}$ mátrixot (→ alkalmaz $\underline{\underline{D}}$-t $\underline{i}$ operátorra ⇒ megkap első oszlopot) ⇒ többit szintén is

$\Delta\underline{r} = \Delta x\,\underline{i}$ $\quad \underline{v}(\underline{r}+\Delta x\,\underline{i}) - \underline{v}(\underline{r}) = \underline{\underline{D}}\,\Delta x\,\underline{i} + \underline{\varepsilon}$

koordinátás alakban: $[p(\underline{r}+\Delta x\,\underline{i}) - p(\underline{r})]\underline{i} + [q(\underline{r}+\Delta x\,\underline{i}) - q(\underline{r})]\underline{j} + [s(\underline{r}+\Delta x\,\underline{i}) - s(\underline{r})]\underline{k} = \Delta x\,\underline{\underline{D}}\,\underline{i} + \underline{\varepsilon}$

/ $p(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - p(\underline{r}) = \operatorname{grad} p \cdot \Delta\underline{r} + \varepsilon_1$ / $\quad$ → p deriváltja

$\Delta x\, p'_x\,\underline{i} + \Delta x\, q'_x\,\underline{j} + \Delta x\, s'_x\,\underline{k} + \underline{\varepsilon} = \Delta x\,\underline{\underline{D}}\,\underline{i} + \underline{\varepsilon}$ $\quad$ ($\underline{\varepsilon} = \varepsilon_1\underline{i} + \varepsilon_2\underline{j} + \varepsilon_3\underline{k}$)

→ p x szerinti parciális deriváltja

Ugyanezt végigcsinál másik 2 oszlopra is.

$$\underline{\underline{D}}_{i,j,k} = \begin{pmatrix} p'_x & p'_y & p'_z \\ q'_x & q'_y & q'_z \\ s'_x & s'_y & s'_z \end{pmatrix}$$

Derivált tenzor mátrixa $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban.

Ezt kaptuk meg most meg.

Divergencia:

$\underline{v}(\underline{r}) = p(\underline{r})\underline{i} + q(\underline{r})\underline{j} + s(\underline{r})\underline{k} \Rightarrow \operatorname{div}\underline{v} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} = p'_x + q'_y + s'_z$

skalár-vektor fv. feltéve, hogy a parciális deriváltak léteznek.

Ha az értelmezési tartományon $\operatorname{div}\underline{v} \equiv 0$, akkor $\underline{v}$ vektor-vektor fv által létesített vektormezőt forrásmentesnek mondjuk.

Rotáció:

$\underline{v}(x,y,z) := \underline{i}\, p(x,y,z) + \underline{j}\, q(x,y,z) + \underline{k}\, s(x,y,z)$

$$\underline{\operatorname{rot}}\ \underline{v} := \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & s \end{vmatrix} = (s'_y - q'_z)\underline{i} - (s'_x - p'_z)\underline{j} + (q'_x - p'_y)\underline{k}$$

vektor-vektor fv)

$\underline{\operatorname{rot}}\ \underline{v}$ akkor és csak akkor van értelmezve, ha valamennyi parciális derivált létezik. Ha az értelmezési tartományon $\operatorname{rot}\underline{v} \equiv \underline{0}$, akkor a $\underline{v}$ vektor-vektor fv által létesített vektormezőt örvénymentesnek mondjuk.

Differenciáloperátorok:

Nabla operátor /vektor jellegű/: $\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$

Laplace operátor /skalár jellegű/: $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\nabla u(\underline{r}) = \frac{\partial u}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\underline{k} = \operatorname{grad} u$

$\nabla \cdot \underline{v}(\underline{r}) = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} = \operatorname{div} \underline{v}$

$\nabla \times \underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \underline{v}$

$\nabla(u \cdot \underline{v}) = \underline{v}\,\nabla u + u \nabla \underline{v}$

$\operatorname{div}(u \cdot \underline{v}) = \underline{v} \cdot \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \underline{v}$

$\nabla \times (u \cdot \underline{v}) = \underline{v} \times \operatorname{grad} u + u \operatorname{rot} \underline{v} = \operatorname{rot}(u \cdot \underline{v})$

Tétel: $\operatorname{div}(\underline{v} \times \underline{w}) = \underline{w} \operatorname{rot} \underline{v} - \underline{v} \operatorname{rot} \underline{w}$

Tétel: Bármely háromváltozós valós u fv-re: $-\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$ (1)

$-\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \underline{0}$ (2)

és bármely $\underline{v}$ vektor-vektor fv-re, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is a háromdimenziós valós vektortér vmely részhalmaza: $-\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{v} = 0$ (3)

$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{v} - \Delta \underline{v}$ (4)

feltéve, hogy az összes parciális derivált létezik + folytonos a vizsgált pont vmely teljes környezetében.

Biz: (1) $\operatorname{div}(\cancel{\tfrac{\partial u}{\partial x}}\, u'_x, u'_y, u'_z) = \Delta u$

(2)

p_i összessége ⇒ beosztáshoz tartozó reprezentánsrendszer.

$\Delta F_i \Rightarrow F_i$ felületdarab felszíne ⇒ $\Delta \underline{F}_i = \underline{n}_i \Delta F_i$

Képezzük $S_n = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}(\underline{p}_i)\Delta \underline{F}_i$ összeget ⇒ $\underline{v}$ fv-hez, adott beosztáshoz és reprezentánsrendszerhez tartozó skalárértékű integrálközelítő összeget.

$\delta \to 0$ beosztás minden határon túl finomodó.

Def: Legyen F olyan felület, amelynek van felszíne és legyen $\underline{v}$ az F felületen értelmezett korlátos vvfv. Képezzük a F beosztásaihoz minden határon túl finomodó sorozatát és a hozzájuk, ill. a $\underline{v}$ fv-hez tartozó integrálközelítő összegek (S_n) sorozatát. Ha S_n a beosztássorozat és a reprezentánsrendszer választásától függetlenül konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\underline{v}$ fv az F felületen skalárértékűen integrálható.

↳ Ezek egy számhoz konvergálnak ⇒ Ez a határérték az F felületmenti skalárértékű integrál.

$$\iint_F \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{F} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{vagy } \delta\to 0}} \underline{v}(\underline{p}_i)\underbrace{\underline{n}_i\Delta F_i}_{\Delta \underline{F}_i}$$

Ha felület paraméteresen van megadva: $F: \underline{r} = \underline{r}(u,v)$ ❦

Kiszámítás: Ha $\underline{r}_u' \times \underline{r}_v'$ folytonos $T_{u,v}$ tartományon.

$$\boxed{\iint_F \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{F} = \iint_{T_{u,v}} \underline{v}(\underline{r}(u,v))(\underline{r}_u' \times \underline{r}_v')\,du\,dv}$$

- Integrál előjelet vált, ha normálvektor irányítását megfordítjuk

- ~~Additivitás~~: $\iint_{F_1}$

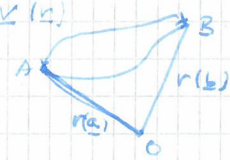
Potenciál fv:

Ha a $\underline{v}$ vvfv-hez található olyan u skalár-vektor-fv, hogy a $\underline{v}$ értelmezési tartományába eső minden $\underline{r}$ vektorra $\underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{grad} u(\underline{r})$, akkor u fv-t $\underline{v}$ potenciálfüggvényének nevezzük.

Tétel: Legyen $\underline{v}(\underline{r})$ folyamatos D-ben.

$\int_{C_{AB}} \underline{v}\,d\underline{r}$ független az úttól ⟺ $\operatorname{grad} u(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r})$

$$\int_{C_{AB}} \underline{v}\,d\underline{r} = u(\underline{r}_B) - u(\underline{r}_A)$$



Biz:

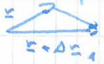
a, $\underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{grad} u(\underline{r})$ $\quad C: \underline{r}(t) \quad a \le t \le b$

$$\int_C \underline{v}\,d\underline{r} = \int_a^b \underline{v}(\underline{r}(t))\cdot\dot{\underline{r}}(t)\,dt = \underline{\int_a^b \operatorname{grad} u(\underline{r}(t))\cdot\dot{\underline{r}}(t)\,dt}$$

külön határozatlant számolható

$u(\underline{r}(t))$ összetett fv deriváltja ⇒ integrálásával $u(\underline{r}(t))$ fv-t kap ⇒ b és a pontbeli érték

b, $u(\underline{r}) = \int_{\underline{a}}^{\underline{r}} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r}$



$\underline{r}(t) = \underline{r} + \Delta\underline{r}\,t \quad 0 \le t \le 1 \quad \dot{\underline{r}}(t) = \Delta\underline{r}$

$\lim_{\Delta\underline{r}\to 0} \underline{\varepsilon} = \underline{0}$

$$u(\underline{r}+\Delta\underline{r}) - u(\underline{r}) = \int_{\underline{r}}^{\underline{r}+\Delta\underline{r}} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_0^1 \underline{v}(\underline{r}+\Delta\underline{r}t)\Delta\underline{r}\,dt = \underline{v}(\underline{r}+\Delta\underline{r}\tau)\Delta\underline{r} = \underline{v}(\underline{r})\Delta\underline{r} + \underline{\varepsilon}\Delta\underline{r}$$

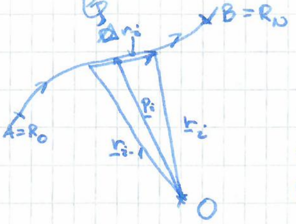
Középértéktétel miatt létezik olyan hely ahol a fv értékét szorozva a vizsgált szakasz hosszával az integrált kapjuk. $(0 \le \tau \le 1)$

Ha létezik olyan $u(\underline{r})$, hogy $\underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{grad} u(\underline{r}) \Rightarrow \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = \underline{0}$

Zárt görbe menti integrál 0 !

20. Vektor-vektor fv. görbementi és felületmenti integrálja és ezek fizikai alkalmazása. Potenciálfüggvény

vvf görbe menti skalár értékű integrálja:



Legyen $\mathcal{G}$ rektifikálható görbeív és legyen $\underline{v}$ ezen az íven értelmezett és korlátos vektor-vektor fv.
Haladási irány $A \to B$
Osszuk fel $\widehat{AB}$ ívet: $A = R_0 \dots R_n = B$ részívekre
$\widehat{R_{i-1} R_i}$ részívek összességét az $\widehat{AB}$ ív beosztásának nevezzük. A beosztás δ finomságú, ha részívek max δ hosszúságúak,
Minden részíven válasszunk 1-1 P_i pontot $\Rightarrow$ beosztás reprezentánsrendszerét alkotják.
$p_i = \overrightarrow{OP_i}$ és $r_i = \overrightarrow{OR_i}$ vektorokkal képezzük: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}(\underline{p}_i) \underbrace{(\underline{r}_i - \underline{r}_{i-1})}_{\Delta r_i}$ összeget.

Ez a beosztáshoz ill. reprezentánsrendszerhez tartozó skalárértékű integrálközelítő összeg
Minden határon túl finomodó beosztás $\Rightarrow \delta \to 0$

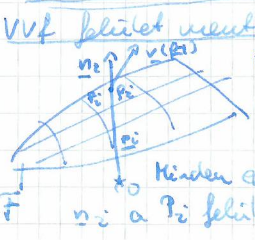
Def: Legyen $\underline{v}$ a $\mathcal{G}$ görbeíven értelmezett korlátos vvfv. Képezzük a $\mathcal{G}$ ív beosztásainak minden határon túl finomodó sorozatát, és a hozzájuk, valamint a $\underline{v}$ fv-hez tartozó integrálközelítő összegek sorozatát $[S_n]$. Ha $[S_n]$ sorozat a beosztássorozat és a reprezentánsrendszerek választásától függetlenül konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\underline{v}$ vvfv. skalárértékűen integrálható a $\mathcal{G}$ görbeíven.
Ha $\underline{v}$ fv integrálható $\Rightarrow$ ugyanahhoz a számhoz konvergál
E közös határértéket nevezzük a $\underline{v}$ fv $\mathcal{G}$ görbementi skalárértékű integráljának.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta r_i \to 0}} \sum_{i=1}^{i} \underline{v}(\underline{p}_i) \cdot \Delta \underline{r}_i = \int_{\mathcal{G}} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r}$$ $\to$ Alkalmazás: Munka számítás $W = \int \underline{F}\, d\underline{r}$

Ha felcserél irányítást $\to -1$ x-ese lesz $\to \left(\int_{C} = - \int^{C} \right)$
Ha $\mathcal{G}$ görbe két egymáshoz csatlakozó és a $\mathcal{G}$-vel egyezően irányított $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ ívekből áll, továbbá $\underline{v}$ integrálható $\mathcal{G}$-n, akkor $\underline{v}$ integrálható a $\mathcal{G}_1$-en és a $\mathcal{G}_2$-n és: $\int_{\mathcal{G}} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_{\mathcal{G}_1} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} + \int_{\mathcal{G}_2} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r}$

Ha $\mathcal{G}$ görbeív paraméteresen van megadva: $\mathcal{G}: \underline{r} = \underline{r}(t)$ $a \leq t \leq b$
$\wedge$ $\underline{\dot{r}}(t)$ folytonos $[a, b]$-n és $\underline{v}(\underline{r})$ folytonos $\mathcal{G}$-n akkor $\exists$ (létezik)
$\int_{\mathcal{G}} \underline{v}\, d\underline{r} = \int_{a}^{b} \underline{v}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{\dot{r}}(t)\, dt$

VVf felület menti integrálja:



Felbon F-et páronként közös belső pont nélküli $F_1 \dots F_n$ részekre úgy, hogy minden résznek legyen felszíne. $\Rightarrow$ F beosztása.
δ finomságú, ha a részek átmérője max. δ hosszúságú.
Minden egyes F_i felületdarabon válasszunk ki egy-egy P_i pontot helyvektora $\underline{p}_i$
$\underline{n}_i$ a P_i felületi normálissal egyező állású egységvektor.

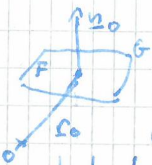
21. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Stokes tétel. Egzakt differenciálegyenlet

A divergencia és a rotáció integrállal is kifejezhető

Legyen $\underline{V}$ az $\underline{r}_0$ hely valamely teljes környezetében értelmezett vvfo. Vegyünk fel ebben a környezetben egy zárt F felületet úgy, hogy $\underline{r}_0$ végpontja a F által határolt testnek belső pontja legyen. Képezzük a $\underline{v}$ fv-nek F menti integrálját kifelé mutató felületi normálvektorral, és osszuk el ezt az integrált az F által határolt test térfogatával. Ezután az F felületet egyenletesen zsugorítsuk rá az $\underline{r}_0$ végpontjára. ⇒

$$\Rightarrow \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_F \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F} = \operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}_0) \quad (1)$$

feltétel: az egyenlőtlenség valamelyik oldala létezik (mert akkor másik is létezik)



Hasonlóan vegyünk fel olyan F felületdarabot, amely átmegy az $\underline{r}_0$ vektor végpontján. A felületdarab felszíne legyen ΔF, határoló görbéje pedig G. $\underline{n}_0$ a felületdarabnak az $\underline{r}_0$ végpontjához tartozó egységnyi hosszúságú normálvektora.

Zsugorítsuk a G görbét az F felületen egyenletesen az $\underline{r}_0$ végpontjára. ⇒

⇒ G görbén az integrálást az $\underline{n}_0$ szerinti pozitív forgásirányban végezve:

$$\Rightarrow \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_G \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \underline{n}_0 \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}_0) \quad (2)$$

feltétel: valamelyik oldal létezik.

Stokes tétel: Ha a zárt G görbével határolt F felületen a $\underline{v}$ vvfv rotációja létezik, akkor $\int_F \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F} = \oint_G \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r}$ feltéve, hogy a felületi integrál létezik.

Biz: F felület beosztása: $F_1 \dots F_n$

F_i felületdarab határoló görbéje: G_i, a felületdarab felszíne: ΔF_i

F_i felületdarab egy pontja P_i → Ennek helyvektora $\underline{r}_i$

$\underline{n}_i$ a felület P_i pontjához tartozó egységnyi hosszúságú normálvektor.

(2)-es miatt bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy ha a beosztás finomsága $< \delta$, akkor: $\left| \frac{1}{\Delta F_i} \oint_{G_i} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} - \underline{n}_i \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}_i) \right| < \frac{\varepsilon}{\Delta F}$

Összeg abszolút értéke legfeljebb akkora, mint az összeadandók abszolút értékének összege ⇒

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\oint_{G_i} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} - \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}_i)\, \underline{n}_i\, \Delta F_i \right) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \oint_{G_i} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} - \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}_i)\, \underline{n}_i\, \Delta F_i \right| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\Delta F} \Delta F_i = \frac{\varepsilon}{\Delta F} \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \varepsilon$$

$\Delta \underline{F}_i = \underline{n}_i \Delta F_i$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \oint_{G_i} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} - \sum_{i=1}^{n} \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}_i)\, \Delta \underline{F}_i \right| < \varepsilon \quad \text{ha a beosztás finomsága} < \delta$$

Az első szummában a $\underline{v}$ fv-nek a G-n belül haladó minden görbeív mentén vett integrálja 2× szerepel, mégpedig ellentétes haladási irány szerint képezve. Ez pedig azt jelenti, hogy a bal oldalon a belső ívekre vett integrálok összege zérus ⇒ $\sum_{i=1}^{n} \oint \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \oint \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r}$

Másrészt beosztás minden határon túli finomításakor a bal oldalon álló 2 szumma egyenlővé válik, miközben a második szumma az: $\int_F \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r})\, dF$-hez tart.

Gauss-Osztrogradszkij-tétel: Ha a zárt F felülettel határolt V térbeli tartományon $\underline{v}$ vektor-vektor fv divergenciája létezik, akkor

$\int_V \operatorname{div} \underline{v}(\underline{r})\,dV = \oint_F \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{F}$ feltétel: 2 integrál létezik + F felület normálvektora kifelé mutat.

Tétel: Legyen T a közönséges 3dimenziós térnek egy zárt felülettel határolt része, $\underline{v}$ pedig olyan, a T-n értelmezett vvfv, amelynek rotációja is létezik a T halmazon. A $\underline{v}$ akkor és csak akkor örvénymentes a T halmazon, ha integrálja a T-ben futó minden olyan zárt görbe mentén zérus, amelyen az az integrál létezik.

Következmény: $\underline{v}$ akkor és csak akkor örvénymentes, ha a T-ben futó bármely görbe mentén vett integráljának értéke csak a kezdő- és végponttól függ.

Tétel: Legyen T a közönséges 3dimenziós térnek egy zárt felülettel határolt része, $\underline{v}$ pedig olyan a T-n értelmezett vvfv, amelynek divergenciája is létezik a T halmazon. A $\underline{v}$ akkor és csak akkor forrásmentes a T ponthalmazon, ha integrálja a T-ben elhelyezkedő minden olyan zárt felületen zérus, amelyen az az integrál létezik.

Következmény: $\underline{v}$ akkor és csak akkor forrásmentes, ha a T-ben elhelyezkedő bármely felület mentén vett integráljának értéke csak a felület határológörbéjétől függ.

Egzakt differenciálegyenletek:

Az elsőrendű $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ (1) differenciálegyenletet egzaktnak nevezzük, ha megadható x-nek és y-nak olyan u függvénye, hogy $P=u'_x$ és $Q=u'_y$.

Tétel: Legyenek P és Q az xy sík valamely egyszeresen összefüggő D ponthalmazán folytonos fv-ek. a P'_y és Q'_x parciális deriváltak is léteznek, és legyenek folytonosak a D ponthalmazon. A felsorolt feltételek teljesülése esetén: $P(x,y)+Q(x,y)\cdot y'=0$ differenciálegyenlet akkor és csak akkor egzakt, ha $P'_y(x_0,y_0)=Q'_x(x_0,y_0)$ a D minden egyes (x_0,y_0) pontjában.

Cél: Egzakt diff. egyenlet megoldása aránylag könnyű ⇒ általános nem egzakt egzakttá alakítani

Diff egyenletet megszorozzuk x-nek és y-nak egy alkalmasan választott M fv-ével.

$M(x,y)P(x,y)+M(x,y)Q(x,y)y'=0$ M zérushelyeitől eltekintve azonos megoldások

$\Rightarrow u'_x=MP$ és $u'_y=MQ$. Léteznie kell olyan u fv-nek.

Def: A kétváltozós valós M fv-t az (1) diffegyenlet multiplikátorának (integráló tényezőjének) nevezzük, ha az (1) egyenletet az $M(x,y)$-nal megszorozva egzakt diff. egyenletet kapunk.

$\frac{\partial}{\partial y}$ fen. $\frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(M(x,y)Q(x,y))$ parciális diffegyenlet megoldásai adják M-et.

22. Lineáris operátor fogalma, mátrixa, sajátértékei, sajátvektorai

Def: Legyenek U és V azonos számtest feletti vektorterek. Azt a T leképezést, amely $\forall \underline{u} \in U$ vektorhoz hozzárendel egy $T\underline{u} \in V$ vektort, úgy hogy tetszőleges c skalár és $\underline{u}, \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ vektorokra:

$$T(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = T\underline{u}_1 + T\underline{u}_2 \rightarrow \text{linearitás (lineáris tul.)}$$

és $Tc\underline{u} = cT\underline{u} \Rightarrow$ homogenitás

lineáris operátornak (homogén lineáris leképezésnek - tenzornak - homogén lineáris transzformációnak vagy homogén lineáris vektor-vektor fo-nek) nevezzük.

U - tárgytér (értelmezési tartomány) $\underline{u} \in U \rightarrow$ tárgyvektor

V - képtér (értékkészlet) $\mathrm{Im}\, T$ $\quad T\underline{u} \in V \rightarrow$ képvektor

A T lineáris operátor nullvektorrá képzett tárgyvektorai a tárgytérnek alterét alkotják, amelyet az operátor magterének nevezünk. ($\mathrm{Ker}\, T$)

$$T\underline{x} = \underline{0}$$

T lineáris operátor akkor és csak akkor létesít kölcsönös egyértelmű leképezést az U tárgytér és a képtér között ha $\mathrm{Ker}\, T = \{\underline{0}\}$

Köv: Ha a T lineáris operátor magtere, $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$, akkor a tárgytér lineárisan független $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k$ vektorrendszerének $T\underline{v}_1 \dots T\underline{v}_k$ képvektorai is lineárisan függetlenek.

Biz: Állítsuk elő $T\underline{v}_1 \dots T\underline{v}_k$ lin. komb.-jaként a képtér nullvektorát:

$c_1 T\underline{v}_1 + c_2 T\underline{v}_2 + \dots + c_k T\underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow T(c_1\underline{v}_1 + \dots c_k\underline{v}_k) = \underline{0}$

De a magtérben csak a $\underline{0}$ van $\Rightarrow c_1\underline{v}_1 \dots c_k\underline{v}_k = \underline{0}$ ~~...~~ De ez csak $c_i = 0$ esetén van

Tétel: Dimenzió tétel:

$T: U \Rightarrow V$ és $\dim U$ véges, akkor $\dim U = \dim \mathrm{Im}\, T + \dim \mathrm{Ker}\, T$

Biz:

Legyen $\dim \mathrm{Im}\, T = r$, $\dim \mathrm{Ker}\, T = m$

$\mathrm{Im}\, T$ egy bázisa: $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_r$, $\underline{v}_i = T\underline{u}_i$ $(i = 1 \dots r)$

$\mathrm{Ker}\, T$ egy bázisa $\underline{w}_1 \dots \underline{w}_m$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{u}_1 \dots \underline{u}_r, \underline{w}_1 \dots \underline{w}_m$ vektorrendszer a tárgytér egy bázisát alkotja.

Állítsuk elő a tárgytér nullvektorát az $\underline{u}_1 \dots \underline{u}_r, \underline{w}_1 \dots \underline{w}_m$ vektorok lineáris kombinációjaként

$c_1\underline{u}_1 + \dots c_r\underline{u}_r + d_1\underline{w}_1 + \dots + d_m\underline{w}_m = \underline{0}$ Alkalmazzuk T operátort, figyelembe véve, hogy $\underline{w}_i \in \mathrm{Ker}\, T$ $(i = 1 \dots m)$ miatt $T\underline{w}_i = \underline{0} \Rightarrow Tc_1\underline{u}_1 + \dots Tc_r\underline{u}_r = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 T\underline{u}_1 + \dots c_r T\underline{u}_r = \underline{0}$ és mivel $\underline{v}_i = T\underline{u}_i$ a képtér egy bázisa $\Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_1\underline{w}_1 + \dots + d_m\underline{w}_m = \underline{0} \Rightarrow \underline{w}_1 \dots \underline{w}_m$ vektorok a magtér bázisát alkotják $\Rightarrow$

$\Rightarrow d_1 = d_2 = \dots = d_m = 0 \Rightarrow$ így (1)-es minden együtthatója nulla $\Rightarrow$ lineárisan független vektorok

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\underline{u} \in U$ előállítható (1)-es lineáris kombinációjaként

Tekintsük a $T\underline{u} \in \mathrm{Im}\, T$ vektort és állítsuk elő $\mathrm{Im}\, T$ bázisvektoraival: $T\underline{u} = a_1\underline{v}_1 + \dots + a_r\underline{v}_r$

$\underline{v}_i = T\underline{u}_i \Rightarrow T\underline{u} = T(a_1\underline{u}_1 + \dots a_r\underline{u}_r) \Rightarrow T(\underline{u} - a_1\underline{u}_1 - \dots a_r\underline{u}_r) = \underline{0}$

$\in \mathrm{Ker}\, T \Rightarrow$ tehát előállítható $\mathrm{Ker}\, T$ bázisával $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{u} - a_1\underline{u}_1 - \dots - a_r\underline{u}_r = b_1\underline{w}_1 + \dots + b_m\underline{w}_m \Rightarrow \underline{u} = a_1\underline{u}_1 + \dots + a_r\underline{u}_r + b_1\underline{w}_1 + \dots b_m\underline{w}_m$

Lineáris operátor mátrixa:

Ha $T: U \rightarrow V$ lineáris operátor, U egy bázisa $B_e: \underline{e}_1 \dots \underline{e}_n$ és V egy bázisa $(B_f: \underline{f}_1 \dots \underline{f}_r)$

akkor a rögzített bázispárban a T operátorhoz egyértelműen tartozik egy mátrix

$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ t_{r1} & t_{r2} & \dots & t_{rn} \end{pmatrix}$ amelynek oszlopaiban a $T\underline{e}_i$ $i=1 \dots n$ képvektorok B_f bázisbeli oszlopmátrixai állnak és tetszőleges $\underline{u} \in U$ $T\underline{u} \in V$ képvektorának B_f bázisbeli oszlopmátrixát megkapjuk, ha $\underline{\underline{T}}$-t megszorozzuk $\underline{u}$ B_e bázisbeli oszlopmátrixával: $\underline{\underline{T}} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$ ahol $\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \underline{e}_i$ és $T\underline{u} = \sum_{j=1}^{r} v_j \underline{f}_j$

rang $\underline{\underline{T}} = \dim \operatorname{Im} T$

→ hány lineárisan független tagja van oszlopai és sorai között.

Tétel: Ha T, T_1, T_2, T_3 lineáris operátorok és a T_1+T_2, $T_2 \cdot T_3$, T^{-1} műveletek elvégezhetők, akkor az összes szóban forgó vektorterekben egy-egy bázist rögzítve

$\underline{\underline{c \cdot T}} = c \cdot \underline{\underline{T}}$ (c skal.)

$\underline{\underline{T_1 + T_2}} = \underline{\underline{T_1}} + \underline{\underline{T_2}}$

$\underline{\underline{T_2 T_3}} = \underline{\underline{T_2}} \cdot \underline{\underline{T_3}}$

$\underline{\underline{T^{-1}}} = (\underline{\underline{T}})^{-1}$

Sajátérték, sajátvektor:

A $T: U \to U$ homogén lineáris transzformáció sajátértékének nevezzük a λ skalárt és hozzá tartozó sajátvektornak az $\underline{s} \neq \underline{0}$ vektort, ha $T\underline{s} = \lambda \underline{s}$

T önmagába képezi le a tárgyteret ⇒ A képtér a tárgytér altere lesz.

Pl: forgatás ⇒ vektor tere nem változik meg.

A tárgytér bázisa: B

$\underline{\underline{T}}_B \underline{\underline{s}}_B = \lambda \underline{\underline{s}}_B$

$\underline{\underline{T}}_B \cdot \underline{\underline{s}}_B - \lambda \underline{\underline{s}}_B = 0$

$\underline{\underline{T}}_B \cdot \underline{\underline{s}}_B - \underline{\underline{I}} \lambda \underline{\underline{s}}_B = 0$ $\quad \underline{\underline{I}}$ - identikus mátrix (egységmátrix)

$(\underline{\underline{T}}_B - \lambda \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{s}}_B = 0$ ⇒ Homogén lineáris egyenletrendszer

Nem triviális megoldás akkor van, ha a mátrix rangja kisebb mint a rendje.

Azaz akkor, ha determinánsa 0

$|\underline{\underline{T}}_B - \lambda \underline{\underline{I}}| = 0$ ⇒ karakterisztikus egyenlet $\underline{\underline{I}}$-t, $\underline{\underline{T}}_B$-t ismert λ ismeretlen!

⇒ Ahányad fokú egyenlet lesz amekkora a mátrix. Ennek gyökei a saját értékek

Ha a mátrix szimmetrikus. Páronként egymásra ⊥-ek a saját értékei ⇒ használható B bázisnak ⇒ $\lambda \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $|\underline{\underline{L}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

a, kifejt + megold ⇒ nehéz

b, végez sor műveleteket ⇒ egyszerűbb alakra hoz $\Big\}$ ⇒ megkap 3 sajátértéket.

A különböző sajátértékhez mindig lineárisan független sajátvektorok tartoznak

Ezután meg kell oldani minden λ-ra az egyenletet.

Sajátvektor bázis esetén:

$\underline{s}_1 \; ; \; \underline{s}_2 \; ; \; \underline{s}_3$ → sajátvektorok választás $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ ⇒ diagonális mátrixot kapunk.

$L\underline{s}_1 = \lambda_1 \underline{s}_1$; $L\underline{s}_2 = \lambda_2 \underline{s}_2$; $L\underline{s}_3 = \lambda_3 \underline{s}_3$ (Ha a lineáris operátornak van annyi lineárisan független saját értéke, mint ahány dimenziós az operátor)

Skalár invariáns: főátlóban lévő értékek összege mindig megegyezik a saját értékek összegével.

23. Numerikus sorok, határértékek

Def: $a_1, a_2 \dots a_n$ végtelen számsorozat segítségével felírhatjuk az
$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ végtelen sort

részletösszegek sorozata: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2 \dots$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Def: A végtelen sor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata konvergens.
A részletösszegek sorozatának határértékét hívjuk a végtelen sor összegének.
Ha a részletösszegek sorozata divergens, akkor a végtelen sort is divergensnek nevezzük

~~sor~~ végtelen sor jelölése: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

n-edik részletösszeg jelölése: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

/ Végtelen mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$.
ilyenkor: $S = \frac{a}{1-q} = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n$

Végtelen sorok tulajdonságai

Egy végtelen sor konvergenciáját nem befolyásolja, ha véges számú tagot elhagyunk belőle. ill., ha véges számú tagot megváltoztatunk a sorban.
⇒ Azok a sorok, amelyek csak az "elejükben" különböznek egymástól, egyszerre konvergensek ill. divergensek.

Hagyjuk el az $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ sorból az első m darab tagot:
(m rögzített szám) ⇒ $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} +$ maradéksor keletkezik

Állítás: a) Ha az eredeti sor konvergens, akkor a maradéksor is.
ill. b) Ha maradéksor konvergens, akkor az eredeti is

Biz:
a) $\underset{\text{maradéksor}}{S'_k} = \underset{\text{eredeti sor}}{S_{m+k}} - S_m$ $\quad \lim_{k \to \infty} S_{m+k} = S$ határérték létezik, ha eredeti sor konvergens

Ugyanakkor m végrögzített szám ⇒ S_m egy meghatározott véges szám
$\lim_{k \to \infty} S'_k = S - S_m$ véges határérték létezik ⇒ maradéksor konvergens

b) $S_n = \underset{\text{véges szám}}{S_m} + \underset{\text{konvergens}}{S'_{n-m}}$ $\quad (n > m) \Rightarrow S_n$ is konvergens.

Def: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor m-edik maradéktagjának a sor összegének és az m-edik részletösszegének a különbségét nevezzük: $r_m = S - S_m$ (Ha $\sum a_n$ sor konvergens)

Tétel: A konvergens sor m-edik maradéktagja $m \to \infty$ esetén 0-hoz tart. $\lim_{m \to \infty} r_m = 0$

Biz: $\lim_{m \to \infty} S_m = S$ $\sum a_n$ sor konvergenciája miatt.
$\lim_{m \to \infty} r_m = S - S = 0$

Következménye: egy konvergens sor összegét tetszőleges pontossággal ki lehet számítani alkalmasan nagy indexű részletösszege segítségével.

Tétel: Ha egy konvergens sor valamennyi tagját c számmal megszorozzuk, a sor konvergens marad és összege az eredeti c-szerese lesz. $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Tétel: Ha egy sor konvergens, akkor tagjainak sorozata nullsorozat $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Biz: a_n felírható két egymást követő részletösszeg különbségeként
$a_n = S_n - S_{n-1}$ A sor konvergenciája miatt: $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = S - S = 0$

Konvergencia kritériumok:

A részletösszegek többnyire nem írhatók fel zárt alakban
$\Rightarrow$ Szükség van konvergencia kritériumokra.

Különválasztjuk: pozitív tagú sorokat, váltakozó előjelű sorokat, általános típusú sorokat

Pozitív tagú sorok:

$\hookrightarrow$ valamennyi tagja pozitív szám $\Rightarrow$ Részletösszegei szig. mon. növő $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ E sorok konvergenciája a részletösszegek korlátosságán múlik.

Szükséges és elégséges feltétel:

Egy pozitív tagú sor akkor és csak is akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos. Ha nem korlátos $\Rightarrow +\infty$-hez divergál.

a, Összehasonlító kritériumok $\rightarrow$ majoráns kritérium, $\rightarrow$ minoráns kritérium
b, Gyökkritérium (Cauchy-féle)
c, Hányados kritérium (D'Alembert-féle)
d, Integrálkritérium

a) Vizsgált sort egy már ismert viselkedésű pozitív tagú sorral hasonlítjuk össze.

Majoráns kritérium: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens pozitív tagú sor.
Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor tagjai egy bizonyos N indextől kezdve minden $n>N$ esetén eleget tesznek az $a_n \le c_n$ egyenlőtlenségnek, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.

$\sum a_n$ sor n-edik részletösszege: A_n $\Big\} \Rightarrow A_n \le C_n$ — $\sum c_n$ konvergens $\Rightarrow$ részletösszegeinek
$\sum c_n$ sor — $\,''\,$ — C_n — sorozata korlátos $\Rightarrow A_n$ is korlátos

Majoráns sornak alkalmas: $-\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n \quad (a>0,\ 0<q<1)$
$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$
$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\text{ahol } \alpha>1)$

Minoráns kritérium: $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergens pozitív tagú sor.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor tagjai bizonyos N indextől kezdve: $a_n \ge d_n \quad (n>N)$
akkor a $\sum a_n$ sor is divergens
$\sum d_n$ sor részletösszegeinek sorozata nem korlátos $\Rightarrow \sum a_n$ sor részleteinek sorozata sem az

Minoráns sornak alkalmas: $-\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n \quad (a>0,\ q>1)$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Tétel: Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens és $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergens pozitív tagú sor.
Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor tagjai bizonyos N indextől kezdve: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{c_{n+1}}{c_n} \quad (n\ge N)$
akkor az $\sum a_n$ sor konvergens
Ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{d_{n+1}}{d_n} \quad (n\ge N) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

Biz: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{c_{n+1}}{c_n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{c_{n+1}} \le \frac{a_n}{c_n} \Rightarrow \frac{a_n}{c_n}$ sorozat monoton fogyó $\frac{a_n}{c_n} \le \frac{a_1}{c_1} \Rightarrow a_n \le \frac{a_1}{c_1} c_n$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort tehát az $\frac{a_1}{c_1}\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens sor majorálja $\Rightarrow \sum a_n$ konvergens
Viszont, ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{d_{n+1}}{d_n} \Rightarrow \frac{a_1}{d_1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergens sor minorálja $\sum a_n$-t $\Rightarrow \sum a_n$ divergens

b, Gyökkritérium:

Ha a $\sum a_n$ pozitív tagú sorban bizonyos N indextől kezdve minden $n>N$ esetén
$\sqrt[n]{a_n} \le q$, ahol $0<q<1$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens
Ha $\sqrt[n]{a_n} \ge 1 \quad (n>N)$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens.

Biz: $\sqrt[n]{a_n} \le q \Rightarrow a_n \le q^n$, ahol $0<q<1$, akkor az $\sum a_n$ sort a $\sum q^n$ konvergens geometriai sor majorálja

Ha $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1$, akkor a $\sum a_n$ sor az $\sum 1^n$ divergens sorral minoráltuk

↳ Nem kell minden n-re teljesülnie, elég ha végtelen sok n-re fennáll.

c, Hányados kritérium: Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sorban bizonyos N indextől kezdve

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \ (n \geq N)$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens

Ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ (n \geq N)$, akkor a sor divergens.

↳ $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow$ sorozat monoton növő $\Rightarrow$ nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele sem

d, Integrál kritérium: A vizsgált sort egy alkalmasan megválasztott fv. improprius integráljához hasonlítja.

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív, monoton csökkenő tagokból álló sor és $f(x)$ ugyancsak pozitív, monoton csökkenő fv ($x \geq 1$-re), amely minden n-re $f(n) = a_n$

(+ integrálható $[1, \infty]$ minden részintervallumon) értéket vesz fel.

$\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\int_1^{\infty} f(x)dx$ improprius integrál konvergens.

Biz: $f(x)$ monoton csökken $\Rightarrow k \leq x \leq k+1 \Rightarrow f(x) \leq a_k$

$k-1 \leq x < k \Rightarrow f(x) \geq a_k$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \Rightarrow$ összegezzük az egyenlőtlenségeket $k=2,3,\dots,n$-re

$$\int_2^{n+1} f(x)dx \leq a_2 + a_3 + \dots + a_n = s_n - a_1 \leq \int_1^{n} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n \leq \int_1^{n} f(x)dx + a_1 \quad , \quad s_n \geq \int_2^{n+1} f(x)dx + a_1$$

Ha $\int_1^{\infty} f(x)dx$-nek van véges határértéke, akkor $\int_1^{n} f(x)dx$ korlátos $\Rightarrow s_n$ sorozat is korlátos

$\Rightarrow \sum a_n$ sor konvergens

Ha az integrál divergens $\int_2^{n+1} f(x)dx > K \Rightarrow s_n \geq a_1 + K \Rightarrow \sum a_n$ divergens.

Változó előjelű (alternáló) sorok:

Tagok előjele felváltva pozitív ill. negatív:

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n$ ahol $a_n > 0$ alternáló sor.

Konvergencia elégséges feltétele: Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékéből
/Leibnitz kritérium/ képzett sorozat monoton fogyó ($a_{n+1} < a_n$) és

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, akkor a sor konvergens.

Biz:

Páros indexűek: $s_{2k+2} = s_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq s_{2k}$ $\left.\begin{matrix} \\ a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ sorozat monoton nő

De felülről korlátos $\Rightarrow s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \dots - a_{2k} \leq a_1$, mert minden zárójel nem negatív szám

$\Rightarrow$ Páros indexűek tehát konvergensek. $\lim_{k \to \infty} s_{2k} = S$

Páratlan indexűek: $s_{2k-1} = s_{2k} + \underbrace{a_{2k}}_{\to 0} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} s_{2k-1} = \lim_{k \to \infty} s_{2k} = S$

~~Következtetés~~ Következmény: Hibabecslés: $|S - s_n| \leq a_{n+1}$

Általános típusú sorok konvergenciája: A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy valahányszor $n > N(\varepsilon)$ és $k \geq 1 \Rightarrow |s_{n+k} - s_n| < \varepsilon$

- A $\sum a_n$ sor abszolút konvergens ha $\sum |a_n|$ sor konvergens.
- Azokat a konvergens sorokat, amelyek nem ~~abszolút~~ abszolút konvergensek, feltételesen konvergens soroknak nevezzük.

Hatványsorok:

↳ x hatványait tartalmazó $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ függvénysor. Az a_n állandók a hatványsor együtthatói.

Általánosabb alakja: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$ (x_0 - középpontú h. s)

Tétel: Ha a hatványsor az $x = x_2$ helyen ($x_2 \neq 0$) konvergens, akkor minden olyan $x = x_1$ helyen, amelyre $|x_1| < |x_2|$, abszolút konvergens.

Tétel: Ha a hatványsor az $x = x_2$ helyen divergens, akkor minden olyan $x = x_1$ helyen, amelyre $|x_1| > |x_2|$, a sor szintén divergens.

Tétel: Ha a hatványsor az $x = 0$ helyen kívül még más pontban is konvergens - de nem konvergens minden x-re - akkor található olyan $R > 0$ szám, hogy a sor minden $|x| < R$ helyen konvergens és minden $|x| > R$ helyen pedig divergens.
R számot a sor konvergencia sugarának, a $(-R; R)$ számközt a sor konvergencia-intervallumának nevezzük.

Konvergens-e:?

- Speciális gyök kritérium:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x-x_0)^n|} < 1 \Rightarrow$ amelyik X-re teljesül, ott konvergens

↳ $\lim_{n\to\infty} \left[|x-x_0| \sqrt[n]{|a_n|} \right] < 1$ ha $x \neq x_0$ akkor $x - x_0 \neq 0 \Rightarrow$ ki lehet emelni:

$|x-x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens

$x_0 - \frac{1}{A}$ $\quad -R \quad$ x_0 $\quad +R \quad$ $x_0 + \frac{1}{A}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A \neq 0 \Rightarrow$ abszolút konvergens ha $|x-x_0| < \frac{1}{A}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \Rightarrow$ csak az $x = x_0$ helyen konvergens.

Hányados kritérium:

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n} \right| < 1 \Rightarrow |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$

Hatványsorok tulajdonságai:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = f(x)$ mindig folytonosak konvergencia tartományon!
↳ összeg fv.

b, A hatványsor a konvergencia intervallumon bármely belső részintervallumán tagonként integrálható és a tagonkénti integrálással nyert sor összege = az összegfüggvény ugyanezen intervallumon számított integráljával: $\sum_{n=0}^{\infty} \int_c^d a_n (x-x_0)^n \, dx = \int_c^d f(x)\, dx$ $[c, d] \subset$ konvergencia tartománynak

c, A hatványsor a konvergencia intervallum bármely $-R < x < R$ helyén tagonként differenciálható és az így nyert hatványsor összege egyenlő a sor összegfüggvényének, $f(x)$-nek, a differenciálhányadosával!

$\frac{d f(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n (x-x_0)^n \right]'$

24. Taylor sorok, Fourier sorok

$f(x)$ – „x_0" környezetében akárhányszor diff.ható

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n}_{T_n(x) \to \text{ n-ed rendű Taylor-sor}} + \ldots$$

Ha $x_0 = 0 \Rightarrow$ Maclaurin sor

Keres együtthatókat, amelyek x_0 ~~környékén~~ környezetében az egyenletet igazzá teszik

$\cancel{a_0 = f(x_0)}$ $f(x_0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + \ldots a_n \cdot 0 \Rightarrow f(x_0) = a_0$

Derivál $\Rightarrow f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + n a_n (x-x_0)^{n-1} + \ldots \Rightarrow f'(x_0) = a_1$

$f''(x) = 2a_2 + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} \Rightarrow \frac{f''(x_0)}{2} = a_2$

$f^{(n)}(x) = a_n \cdot n!(x-x_0)^0 + a_{n+1}(n+1)!(x-x_0) + \ldots \Rightarrow \boxed{\frac{f^{(n)}}{n!} = a_n}$

Meg kell vizsgálni, hogy egy $f(x)$ fv Taylor sora mikor állítja elő a fv-t.

$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ (r_n maradéktag) $\quad r_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ⇒ Lagrange-féle maradéktag

→ taylor polinom

$$|f(x) - T_n(x)| \le \max\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$$

⇒ Ha ennek megtalál maximumát az (x, x_0) intervallumban, akkor meg tud becsülni hibát

$x_0 \quad \xi \quad x$

Tulajdonságai:

A függvények hatványsorba fejtése egyértelmű

Tétel: Ha 2 hatványsor: $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = f(x)$ és $b_0 + b_1 x + \ldots b_n x^n + \ldots = g(x)$ összegfüggvénye az $x=0$ pont környezetében ugyanaz a fv, akkor a két sor azonos

$\Rightarrow a_0 = b_0 \quad a_1 = b_1 \ldots a_n = b_n$

Biz: $x = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$ a feltétel értelmében $\Rightarrow h(x) = f(x) - g(x) = 0$

$\Rightarrow h(x) \to c_n = 0 \quad h(x) = f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots (a_n - b_n)x^n + \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow a_0 = b_0 \ldots\ldots$

Tétel: Ha $f(x)$ páros fv, akkor az $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n + \ldots$ hatványsora x-nek csak páros hatványait tartalmazza $\Rightarrow a_1 = a_3 = a_{2n-1} = 0$ $(n = 1, 2 \ldots)$

Ha $f(x)$ páratlan fv, akkor hatványsora x-nek csak páratlan hatványait tartalmazza $\Rightarrow a_0 = a_2 = \ldots = a_{2n} = 0$ $(n = 1, 2 \ldots)$

Biz: hatványsor tagjai abszolút konvergencia miatt átrendezhetőek ⇒

$f(x) = (a_0 + a_2 x^2 \ldots + a_{2n} x^{2n} + \ldots) + (a_1 x + \ldots + a_{2n-1} x^{2n-1} \ldots)$

$f(x)$ hatványsora a $-x$ helyen: $f(-x) = (a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + \ldots) - (a_1 x + \ldots + a_{2n-1} x^{2n-1} + \ldots)$

a, Ha $f(x)$ páros fv $\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow (a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2n-1} x^{2n-1} + \ldots) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = a_3 = \ldots = a_{2n-1} = 0$

b, Ha $f(x)$ páratlan fv $\Rightarrow -f(x) = f(-x) \Rightarrow (a_0 + a_2 x^2 + \ldots a_{2n} x^{2n} + \ldots) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_0 = a_2 = \ldots = a_{2n} = 0$

Tétel: Ha $f(x)$ a $(-R, R)$ nyílt intervallumon előállítható $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(-R < x < R)$ hatványsorral és $f(x)$ az intervallum egyik végpontjában, $x = R$ pontban folytonos és ott a sor konvergens, akkor a fenti sorfejtés e pontban is előállítja a függvényt.

Fourier sorok: trigonometrikus sorok

A periodikus rezgések általában előállíthatók fiseta harmonikus rezgések eredőjeként.

Kérdés adott f egyváltozós valós fv előállítható-e: $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x \dots$ (1) alakban. Jobboldal 2π szerint periodikus $\Rightarrow$ f-nek is 2π szerint kell periodikusnak lennie.

Tegyük fel (1).es tagonként integrálható $\Rightarrow$ integrál $[0, 2\pi]$ intervallumon.

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx = \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{2\pi} = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sin \text{ és } \cos\text{-os tagok} = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} a_0\,dx = 2\pi a_0$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

Többi együttható kiszámításához szorozzuk meg az (1)-es mindkét oldalát $\cos kx$-szel ill. $\sin kx$-szel, majd ismét integráljuk $[0, 2\pi]$ intervallumon.

(2) $\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 \cos kx\,dx + \dots + \int_0^{2\pi} a_n \cos nx \cos kx\,dx + \int_0^{2\pi} b_n \sin nx \cos kx\,dx + \dots$

(3) $\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 \sin kx\,dx + \dots + \int_0^{2\pi} a_n \cos nx \sin kx\,dx + \int_0^{2\pi} b_n \sin nx \sin kx\,dx + \dots$

Felhasznált trigonometrikus azonosságok: $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ (4)

$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ (5)

$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ (6)

$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$ (7)

(5)-(4) $\Rightarrow$ $\sin u \sin v = \dfrac{\cos(u-v) - \cos(u+v)}{2}$, (4)+(5) $\Rightarrow$ $\cos u \cos v = \dfrac{\cos(u+v) + \cos(u-v)}{2}$

(6)+(7) $\sin u \cos v = \dfrac{\sin(u+v) + \sin(u-v)}{2}$

Tetszőleges m egész esetén: $\int_0^{2\pi} \sin mx\,dx = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos mx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq 0 \\ 2\pi, & \text{ha } m = 0\end{cases}$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin kx\,dx = \frac{\int_0^{2\pi}\cos(u+v)\,dx + \int_0^{2\pi}\cos(u-v)\,dx}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq k \\ \pi, & \text{ha } n = k\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos kx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq k \\ \pi, & \text{ha } n = k\end{cases} \qquad \int_0^{2\pi} \sin nx \cos kx\,dx = 0$$

Behelyettesítve (2)-be és (3)-ba $\Rightarrow$ $\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k \pi \Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx$

$\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_k \pi \Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$ ha $k \geq 1$

$\Downarrow$

2π szerint periodikus valós f fv Fourier együtthatói: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, $b_0 = 0$

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f Fourier-sora: $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Tetszőleges periódusú valós fv-ekre.

Def: $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos ncx + b_n \sin ncx)$ alakú fvsor $(c \neq 0)$ trigonometrikus sor.

egyváltozós valós fv (f) periódusa: $2p$ $\Rightarrow$ Ekkor trigonometrikus sor periódusának is $2p$-nek kell lennie $\Rightarrow$ c úgy kell megválasztani, hogy $\cos cx$ és $\sin cx$ is $2p$ szerint legyen periodikus $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2pc = \cos 0 = 1 \wedge \sin 2pc = \sin 0 = 0 \Rightarrow 2pc = 2\pi \Rightarrow c = \frac{\pi}{p}$

Def: $2p$ szerint periodikus egyváltozós valós f fv Fourier-együtthatói:

$a_0 = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)\,dx$, $b_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos\frac{k\pi x}{p}\,dx$, $b_k = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin\frac{k\pi x}{p}\,dx$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)$

$\Rightarrow$ f előállítható trigonometrikus sor összegfüggvényeként, akkor együtthatói egyszerűen kiszámíthatók.

Tétel: Ha a periódikus egyváltozós valós f fnek az x_0 helyen van bal és jobb oldali határértéke, és a fv Fourier-sora ebben a pontban konvergens, akkor a Fourier-sor x_0 pontbeli összege az f bal és jobb oldali határértékének számtani közepével egyenlő"

Speciálisan: Ha az x_0 helyen az f fv folytonos, Fourier-sora pedig konvergens, akkor ezen a helyen a Fourier-sor összege éppen $f(x_0)$

Tétel: Ha az egyváltozós valós f fv 2p szerint periódikus, akkor bármely valós a-ra $\int_a^{a+2p} f(x)dx = \int_0^{2p} f(x)dx$. ⇒ A Fourier-együtthatók kiszámításakor az integrálást tetszőleges 2p hosszúságú intervallumon végezhetjük.

Ha egy egyváltozós valós fv az egész számegyenesen értelmezve van, akkor felírható egy páros és egy páratlan fv összegeként

Tétel: Páros fv Fourier-sorában csak konstans és koszinuszos tagok szerepelnek, páratlan fv Fourier sorában pedig csak szinuszos tagok.

Biz:

Fourier együtthatókat a $[-p,p]$ intervallumban való integrálással határozzuk meg.

Ha f páros → $f(x)\cos\nu x$ páros $\wedge$ $f(x)\sin\nu x$ páratlan

Ha f páratlan → $f(x)\cos\nu x$ páratlan $\wedge$ $f(x)\sin\nu x$ páros minden pozitív ν-re

Legyen g tetszőleges páratlan és a $[-p,p]$ intervallumon integrálható valós fv,

$\int_{-p}^{p} g(x)dx = \int_{-p}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{p} g(x)dx$

↳ $x=-t$ helyettesítést végzünk $dx \Rightarrow (-1)dt$ és új alsó határ p lesz.

$\int_{-p}^{0} g(x)dx = \int_{p}^{0} g(-t)(-1)dt + \int_0^p g(x)dx \Rightarrow \int_{-p}^{p} g(x)dx = \int_0^p g(-t)dt + \int_0^p g(x)dt$

Mivel g páratlan ⇒ $g(-t) = -g(t)$ A t helyébe x-et írva ⇒

$\Rightarrow \int_{-p}^{p} g(x)dx = -\int_0^p g(x)dx + \int_0^p g(x)dx = 0$

⇒ Ha egy páratlan fv a $[-p,p]$ intervallumon integrálható, akkor az integrálja ezen az intervallumon 0.

Ha az egyváltozós valós g fv páros és a $[-p,p]$ intervallumon integrálható, akkor

$\int_{-p}^{p} g(x)dx = 2 \cdot \int_0^p g(x)dx$

⇒ Ennek alapján páros fv Fourier sorában az a_0 konstans tagnak és a koszinuszos tagok együtthatóinak számításakor az integrálást fél periódus hosszúságú intervallumon végezhetjük, és a kapott értékek kétszeresét kell vennünk.

Páratlan fv esetén ugyanez a szinuszos tagok együtthatóinak számításakor.