

# ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK

*Van még egy félretett cikkem a fény elektromágneses elméletéről, amit míg az ellenkezőjéről meg nem győződtem, addig hatalmas fegyvernek tartok.*

J. C. MAXWELL: C. H. Cay-hoz írt levelében 1865. január 5.

*Nem szabadulhatunk attól az érzéstől, hogy a Maxwell egyenleteknek önálló létük, s intelligenciájuk van, bölcsőbbek mint mi vagyunk, bölcsőbbek, még alkotóiknál is és sokkal több olvasható ki belőlük mint amire eredetileg szánták őket.*

HEINRICH HERTZ

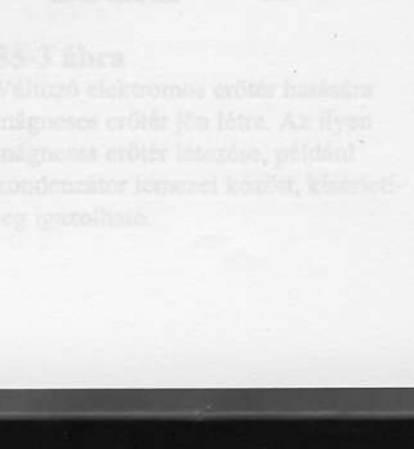
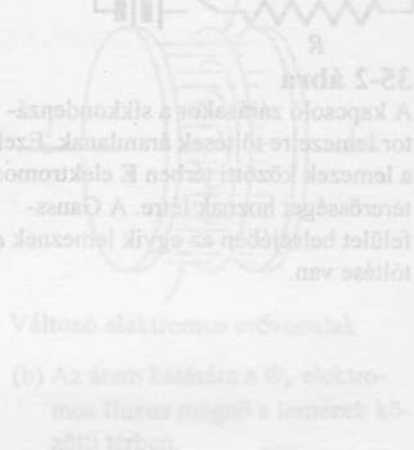
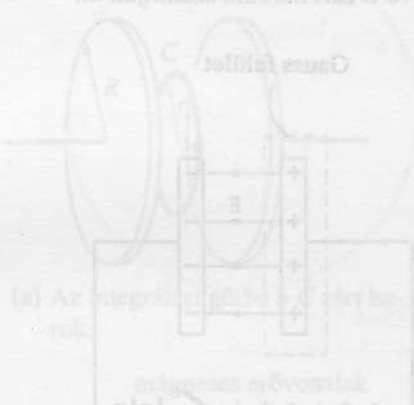
## 35.1 Bevezetés

A 18. fejezetben tárgyalt mechanikai hullámjelenségek terjedéséhez közre van szükség, például a hanghullámok, vízhullámok vagy a kifeszített zsinoren végigfutó hullám esetében a mechanikai mozgás, a hullám okozta zavar tovaterjedése anyagi közegben megy végbe. Ebben a fejezetben elektromágneses hullámokat tárgyalunk, amelyek vákuumban, a „tökéletesen üres” térben is terjednek.

1864-ben James Clerk Maxwell megalkotta az *elektromágnesesség* elméletét,<sup>1</sup> amellyel egyesítette az elektromosság és a mágnesesség törvényeit, elméletét. Nagy lépés volt ez a fizika fejlődésében, hatalmas intellektuális teljesítmény. A mágnesesség és elektromágnesesség elméletének egyesítése Newton mechanikájához és Einsein relativitáselméletéhez hasonlítható. Maxwell elmélete nagy hatást gyakorolt a fizika filozófiai megalapozására is: a fizika törvényei hirtelen egységesnek kezdtek feltűnni – a fizika különböző területei közötti egységesítési törekvések akkor kezdődtek el, és azóta is tartanak. Maxwell munkássága vezetett az elektromágneses spektrum fogalmának megalkotásához, majd a rádióhullámok létezésének igazolásához

<sup>1</sup> Az elektromágneses Maxwell-elmélet legalább annyira elegáns és széleskörűen alkalmazható, mint Newton mechanikai törvényei. Maxwell négy tömör egyenlete mindent tartalmaz, amit az elektromosságról, mágnesességről és az elektromágneses hullámokról (a fényről, rádióhullámokról, stb.) tudunk. Persze, atomi léptékben alkalmazva kvantummechanikai és relativisztikus effektusokat is figyelembe kell venni. Az ezek figyelembevételével megalkotott modern elméletek kis sebességek és makroszkopikus méretek esetén természetesen visszaadják Maxwell és Newton törvényeit.

Maxwell híres könyvét (*Treatise on Electricity and Magnetism*) R. A. Millikan, az 1921-es fizikai Nobel-díj kitüntetettje, Newton Principiájával azonos fontosságúnak értékelte: „e kettő az, amely a modern mechanikai és elektromos ismeretrendszerünket kialakította”.

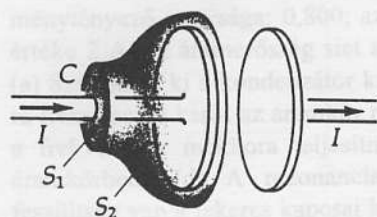


(Heinrich Hertz, 1890), majd ezek távközlési célokra való alkalmazásához. A Maxwell-elmélet szerint az optikai jelenségek is elektromágneses eredetűek; Einstein relativitáselméletének egyik alapját is Maxwell egyenletei képezik.

## 35.2 Az eltolási áram és a Maxwell-egyenletek

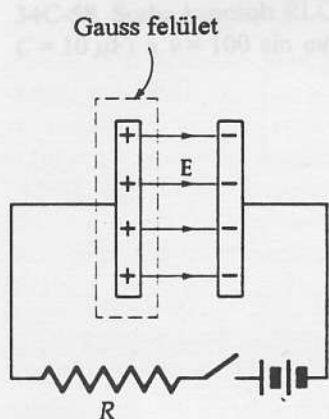
A Maxwell-egyenletek tárgyalását azzal kezdjük, hogy összefoglaljuk az elektromosság és mágnesség törvényeit aszerint, ahogyan azok 1870-ben ismeretesek voltak (35-1. táblázat). Ezután azt mutatjuk meg, hogy az egyik egyenletet hogyan kellett Maxwellnek egy további taggal kiegészítenie, hogy Coulomb, Faraday, Orsted, Ampère és mások nagyszerű felfedezései beleillesszkeljenek az egységes elektromágneses elméletbe.

A következőkben leírt esetet vizsgálva Maxwell felismerte, hogy az  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$  alakban felírt Ampère törvény nem teljes. Tétélezzük fel, hogy párhuzamos lemezű kondenzátort  $I$  árammal töltünk (35-1 ábra). Alkalmazzuk az Ampère-törvényt olyan kör alakú görbére ( $C$ ), amely a kondenzátor egyik lemezéhez vezető huzalt körülveszi; legyen a  $C$  görbe által körbevett felület  $S_1$ . Ezen a felületen áram halad át és az Ampère-törvény értelmében mágneses teret hoz létre. A lemezek közötti térben lévő  $S_2$  felületet viszont áramvezető nem metszi, az Ampère-törvény szerint a  $C$  görbe mentén mágneses tér nincs. Ennek az ellentmondásnak a feloldására Maxwell az Ampère-törvényt az alábbi módon egészítette ki:



35-1 ábra

Az  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  integrált a huzalt körbevett  $C$  zárt hurokra számítjuk ki.



35-2 ábra

A kapcsoló zárásakor a síkkondenzátor lemezeire töltések áramlanak. Ezek a lemezek közötti térben  $\mathbf{E}$  elektromos térerősséget hoznak létre. A Gauss-felület belsejében az egyik lemeznek  $q$  töltése van.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad (35-1)$$

ahol  $\Phi_E$  a  $C$  görbe által bezárt felületen az elektromos tér fluxusa.

Az  $\epsilon_0(d\Phi_E/dt)$  tagot a 35-2 ábrán vázolt áramkör elemzésével kaphatjuk meg: a kapcsoló zárásakor a vezetőkben töltések áramlanak, feltöltik a kondenzátor lemezeit és  $\mathbf{E}$  térerősségű elektromos erőteret hoznak létre közöttük. Az egyik lemez köré szerkesztett Gauss-felület belsejében lévő  $q$  töltés és a  $\Phi_E$  elektromos fluxus között a Gauss-törvény értelmében bármely időpontban a

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \Phi_E$$

35-1. táblázat

Törvény	Jelenség, a törvény tárgya	Képlet
Coulomb-törvény	Töltések között ható elektrosztatikus erő	$F = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$
Gauss-törvény	A távolság négyzetével való fordított arányosságot kifejező Coulomb-törvény matematikai következménye	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$
Lorentz-erőtörvény	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="font-size: 2em; margin-right: 10px;">{</div> <div> <p>Mozgó töltésre ható mágneses erő (a mágneses indukcióvektor definíciója)</p> <p>Nyugvó töltésre ható elektromos erő (az elektromos térerősség definíciója)</p> </div> </div>	$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
Biot-Savart-törvény	Áramvezető mágneses erőtere	$d\mathbf{B} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Id\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2}$
Ampère-törvény eredeti alakja	A Biot-Savart-törvény matematikai következménye	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$
Faraday-törvény	Változó mágneses fluxus által keltett elektromos erőter	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

összefüggés áll fenn. Innen  $q$ -t kifejezve és a huzalban folyó  $I = dq/dt$  áramerősséget kiszámítva:

$$I = \frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (35-2)$$

Ezt az eredményt a 35-1 ábrán vázoltak alapján a következőképpen értelmezhetjük: minthogy  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  értékének ugyanakkorának kell lennie az  $S_1$  és  $S_2$  felületekre (vagyis nem függhet attól, hogy a Gauss-felület belsejében van vagy sem), az Ampère-törvényt az alábbi módon kell kiegészíteni

AMPÈRE TÖRVÉNYÉNEK MAXWELL ÁLTAL KIEGÉSZÍTETT ALAKJA:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left( I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad (35-3)$$

A zárójelben lévő  $I$ , illetve  $\varepsilon_0(d\Phi_E/dt)$  tag zérus, ha az  $S_2$ , illetve az  $S_1$  felület kerülete mentén végezzük el az integrálást. Az  $\varepsilon_0(d\Phi_E/dt)$  áramerősség dimenziójú tagot *eltolódási áramnak*<sup>2</sup> nevezzük.

AZ  $I_d$  ELTOLÓDÁSI ÁRAM:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (35-4)$$

A feltöltődő kondenzátor lemezei közötti mágneses erőter mágneses indukcióvektorát a Biot-Savart-törvénnyel is kiszámíthatnánk, ha a törvényt a lemezekhez vezető huzalokban folyó áramok mágneses erőterére alkalmazzuk<sup>3</sup>. Célszerűbb azonban ezt a számítást az általánosított Ampère-törvény segítségével elvégezni (35-3 képlet). Válasszuk integrálási útnak a kör alakú lemezek közötti térbe eső  $C$  kör alakú görbét, melynek belsejében áram nem folyik, tehát

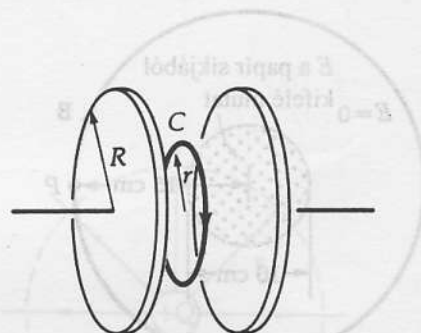
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (35-5)$$

Legyen az  $r < R$  sugarú  $C$  kör a rendszer szimmetriájához illeszkedően, a kondenzátor tengelyével koncentrikus (35-3 ábra). Az integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

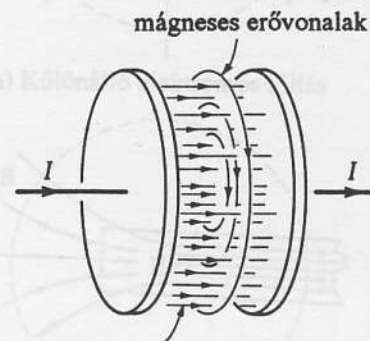
$$B(2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

Az  $(r/R)^2$  tényező azt fejezi ki, hogy a  $d\Phi_E/dt$  fluxusváltozásnak mekkora hányada esik a hurok belsejébe. A  $B$ -t kifejezve:

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2\pi} \frac{d\Phi_E}{dt} \left( \frac{r}{R^2} \right) \quad (r \leq R) \quad (35-6)$$



(a) Az integrálási görbe a  $C$  zárt hurok.



Változó elektromos erővonalak

(b) Az áram hatására a  $\Phi_E$  elektromos fluxus megnő a lemezek közötti térben.

### 35-3 ábra

Változó elektromos erőter hatására mágneses erőter jön létre. Az ilyen mágneses erőter létezése, például kondenzátor lemezei között, kísérletileg igazolható.

<sup>2</sup> Az eltolódási áram kifejezés onnan származik, hogy az  $\varepsilon E$  mennyiséget elektromos eltolódásnak nevezik. Az utóbbi név eredete pedig arra vezethető vissza, hogy (az azóta túlhaladott álláspont szerint) a vákuumot elektromosan polarizálható éter tölti ki, amelynek viselkedése hasonló a dielektrikumokéhoz, tehát a polarizáció elektromos töltések szétválása, *eltolódása* által következik be. Tudománytörténeti érdekesség, hogy az eltolódási áram bevezetését Maxwell legnevesebb fizikus kortársai értetlenséggel fogadták.

<sup>3</sup> E lehetőség felett az eltolódási áram tárgyalása során gyakran átsiklanak.

Látható, hogy  $B$  mindaddig arányos  $r$ -rel, amíg  $r < R$ . Ha  $r \geq R$ :

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2\pi} \frac{d\Phi_E}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (r \geq R) \quad (35-7)$$

A (35-2) képlet szerint  $\epsilon_0(d\Phi_E/dt)$  egyenlő a kondenzátorba befolyó  $I$  áram erősségével, így  $B$  kifejezésére az  $r \geq R$  tartományban

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \quad (r \geq R) \quad (35-8)$$

adódik. Ekkora tehát  $B$  nagysága egy kondenzátorhoz vezető huzal körül (vö. a (31-2) képlettel). Következésképpen a kondenzátoron kívül ( $r > R$ ) a mágneses erőter ugyanakkora, mint a hozzá vezető huzaltól ugyanakkora távolságban.

A kiegészített Ampère-törvény lehetővé teszi, hogy a mágneses erőter nagyságát ott is kiszámítsuk, ahol elektromos áram nincs, hanem csak változó elektromos erőter van jelen. Ilyen esetet tárgyalunk a következő példában.

### 35-1 PÉLDA

A 35-4 ábrán vázoltak szerint egy 10 cm átmérőjű kör alakú tartományban az elektromos térerősség nagysága 300 V/m, iránya az ábra síkjából kifelé mutat. Mekkora, és milyen irányú a mágneses indukcióvektor a kör középpontjától 15 cm-re lévő  $P$  pontban, ha a térerősség másodpercenként 20 V/m-rel nő?

### MEGOLDÁS

Ampère-törvényének kiegészített alakját alkalmazzuk (35-3 képlet). Minthogy mozgó töltések nincsenek jelen,  $I = 0$ , és

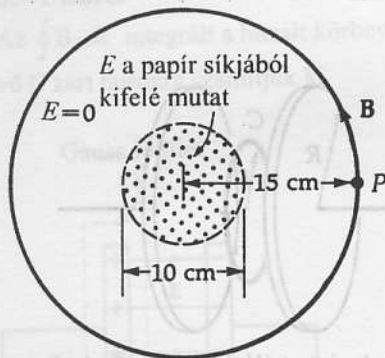
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (35-9)$$

Az integrál kiszámítására felhasználjuk a rendszer *kör-szimmetriáját*: a középpontból kifelé mutató bármely irány a többivel egyenértékű. A 35-3 ábrán illusztrált kísérlet eredményéből tudjuk, hogy a mágneses erővonalak a tengelyre merőleges síkban koncentrikus körök; tehát egy ilyen kör mentén végighaladva a mágneses fluxussűrűség nagysága mindenütt ugyanakkora. Ha  $\mathbf{B}$  irányáról ideiglenesen megfeledkezünk, és végrehajtjuk a  $\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}$  integrálást az  $R = 0,15$  m sugarú kör mentén, ennek eredménye  $2\pi RB$ . A  $\Phi_E = AE$  összefüggést az idő szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) \frac{dE}{dt}$$

A (35-9) formula így az alábbi alakot ölti:

$$2\pi RB = \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) \frac{dE}{dt}$$



35-4 ábra  
A 35-1 példához

A  $B$ -t kifejezve:

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2\pi R} \left( \frac{\pi d^2}{4} \right) \frac{dE}{dt}$$

A konkrét számértékeket behelyettesítve:

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(\pi)(0,1 \text{ m})^2 (20 \text{ V/m} \cdot \text{s})}{(2\pi)(0,15 \text{ m})(4)}$$

$$= 1,85 \times 10^{-18} \text{ T}$$

A (35-2) összefüggés megadja a mágneses indukcióvektor irányát is, minthogy a növekvő elektromos fluxus olyan irányú mágneses erőteret hoz létre, mint az  $I$  áram. A 35-4 ábrán az elektromos térerősség növekménye az ábra síkjából kifelé mutat; a jobbkezeszabály értelmében  $B$  iránya az óramutató járásával ellentétes. Hangsúlyozzuk, hogy az elektromos erőter irányja lényegtelen, mert a mágneses erőter irányát és nagyságát  $E$  változási sebessége határozza meg

A 35-1 táblázat hiányos: nem tartalmazza azt, hogy ismereteink szerint mágneses töltések (monopólusok) nem léteznek. A mágneses monopólus fogalma a mágneses és elektromos dipólusok közötti analógiából származik. Minthogy az elektromos dipólusok két különálló,  $-q$  és  $+q$  elektromos töltésből épülnek fel, csábító a gondolat, hogy a mágneses dipólust is különálló mágneses „töltésekből”, *monopólusokból* felépítettnek tekintjük. A mágnes északi pólusa a  $+p$  monopólus (amelyből a mágneses erővonalak kiindulnak), míg a déli pólus a  $-q$  monopólus (ahová az erővonalak összegyűlnek) lenne. Természetesen, ez a gondolkodásmód éles ellentétben áll azzal, hogy a mágneses dipólust körárammal modellezzük. A köráram-modell kizárja a különálló monopólus létezését; a köráram szükségképpen mindkét pólust egyszerre generálja, így az alapvető mágneses struktúra a dipólus. Ha hosszú rúd-mágneset kettétörünk, akkor két dipólust hozunk létre, nem pedig monopólusokat; elméletileg a mágnes darabolása mindaddig folytatható, amíg a mágneset önálló atomokká nem vágjuk szét. Minthogy az atomokban is folynak köráramok, az elektronoknak spinjük van, tehát ezek is mágneses dipólusok. Érdeemes megemlíteni, hogy egyes modern elméletek szerint léteznek mágneses monopólusok. Az észlelésükre elvégzett számtalan kísérlet azonban mindeddig sikertelen volt. Ha mágneses monopólusok valóban léteznének a természetben, akkor bizonyos elektromágneses egyenleteket meg kellene változtatni.

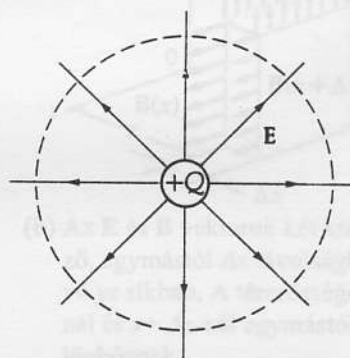
Annak ellenére, hogy a monopólusok létét nem ismerjük el, mégis foglalkozunk velük egy kicsit. A 35-5 ábrával a töltések és a mágneses pólusok közötti különbséget szemléltetjük. A 35-5a ábra az elektromos töltésekre vonatkozó Gauss-törvényt illusztrálja, miszerint

AZ ELEKTROMOS ERŐTÉRRE VONATKOZÓ GAUSS-TÖRVÉNY

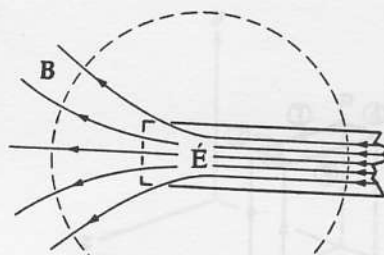
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (35-10)$$

ahol a Gauss-felületen áthaladó teljes elektromos fluxus nem zérus. A 35-5b ábrán hosszú rúd-mágnes északi pólusát körülvevő Gauss-felületet láthatunk.

Minthogy mágneses monopólusok nem léteznek, a mágnes északi pólusához szükségképpen hozzátartozik egy déli pólus is. Vagyis zárt felületen ugyanannyi mágneses erővonal megy az északi pólusból kiindulva kifelé, mint a déliből befelé. Ezt a következő egyenlettel lehet kvantitatív módon megfogalmazni:



(a) Különálló elektromos töltés



(b) Mágneses dipólus egyik vége

### 35-5 ábra

Az (a) esetben, a zárt Gauss-felületen az elektromos fluxus nem zérus, ha a felület belsejében a töltések összege zérustól különböző. A (b) esetben a zárt Gauss-felületen a mágneses fluxus zérus, ugyanis monopólusok nem léteznek.

A MÁGNESES TÉRRE  
VONATKOZÓ  
GAUSS-TÖRVÉNY

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (35-11)$$

A 35-2 táblázat a 28-1 táblázat tömörített változata. A Coulomb-törvényt és a Biot-Savart-törvényt kihagytuk, ugyanis azokat (más alakban) az elektromos erőterre vonatkozó Gauss-törvény és Ampère-törvény tartalmazza. A Lorentz-erőtörvényt szintén kihagytuk. Az Ampère-törvényt kiegészítettük azzal a taggal, amely megadja a változó elektromos erőter hatására kialakuló mágneses erőteret. A táblázatban szerepel továbbá a mágneses erőterre vonatkozó Gauss-törvény is. A 35-2 táblázatban szereplő négy alapvető egyenletet Maxwell tiszteletére a négy **Maxwell-egyenletnek** nevezzük<sup>4</sup>.

A fizikusok számára a Maxwell-egyenletrendszer a tömörség, általánoság és matematikai elegancia csúcsa. Tömörségük ellenére minden elektromos és mágneses jelenséget leírnak; alkalmazásukkal villanymotorok, generátorok, rádió, televízió, részecskegyorsító, száloptikás távközlési rendszerek és mágneses lebegtetésű járművek tervezhetők. A Maxwell-egyenletrendszer ugyanolyan hatalmas szellemi teljesítmény, mint annak idején a Newton-törvények voltak<sup>5</sup>. Az egyenletrendszer váratlan szépsége az is, hogy relativisztikusan kovariánsak: míg a Newton törvényeket a fényét megközelítő sebességeken lényegesen módosítani kell, a Maxwell egyenletek változatlanul érvényben maradnak. (Ez a tény Maxwellt valószínűleg örömmel töltötte volna el, ha megéri a relativitáselmélet megszületését.)

### 35.3 Az elektromágneses hullámok

Mint azt megmutattuk, Maxwell az elektromosságtan és a mágnesesség egyenleteit azáltal egyesítette, hogy az Ampère-törvényt kiegészítette egy taggal. E műveletnek másik meglepő következménye az, hogy az egyenletrendszernek a megoldása *hullámfüggvény*, és ezzel mintegy megjósolta az

35-2. táblázat A Maxwell-egyenletek (vákumban)

Az elektromos erőterre vonatkozó Gauss-törvény	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$	(35-12)
--	---	---------

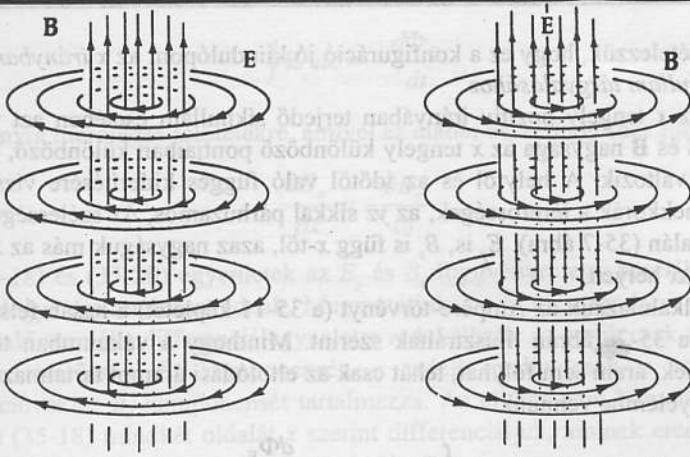
A mágneses erőterre vonatkozó Gauss-törvény	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	(35-13)
---	--	---------

Az Ampère-törvény (Maxwell kiegészítésével)	$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	(35-14)
---	---	---------

A Faraday-törvény	$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	(35-15)
-------------------	--	---------

<sup>4</sup> A Maxwell-egyenleteket gyakran differenciális alakban adják meg; azonban a differenciális alakok használata olyan matematikai műveletek ismeretét kívánja meg, amelyet célszerű a későbbi elektrodinamika kurzusokra halasztani. A Maxwell-egyenletekben a dielektrikumok jelenlétét úgy vehetjük figyelembe, hogy a vákuum  $\epsilon_0$  permittivitását egyszerűen  $\epsilon$ -ra, az illető dielektrikum permittivitására cseréljük. Hasonlóképpen, a mágneses anyagok esetében, a vákuum  $\mu_0$  permeabilitása helyére az egyenletekben az illető mágneses anyag  $\mu$  permeabilitása kerül.

<sup>5</sup> Ludwig Boltzmann Goethe egy sorát idézte, amikor ezeket kommentálta: „Csak nem egy isten írta fel ezeket a sorokat?” – J. R. Pierce Az elektronok és a hullámok c. könyvében az egyik fejezetnek ezt a címet adta: „Maxwell csodálatos egyenletei” és ezt mondta: Bárki számára, akit valami is érdekel a szűk prakticismuson túl, érdemes megérteni Maxwell egyenleteit, egyszerűen csak a saját lelki üdvé érdekében!



Faraday-törvény

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

(a) Ha  $\Phi_B$  egyenletesen növekszik, állandó  $\mathbf{E}$  térerősségű elektromos erőter jár létre.

Az Ampere-törvény (Maxwell kiegészítésével)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

(b) Ha  $\Phi_E$  egyenletesen növekszik, állandó  $\mathbf{B}$  mágneses indukciójú mágneses erőter jön létre.

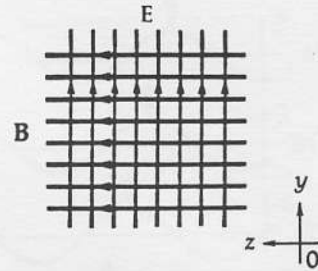
35-6 ábra

$\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  szimmetriája, ha nincsenek mozgó töltések. Vegyük észre, hogy a szimmetria nem tökéletes, ugyanis azok az erőterek, amelyeknek az erővonalai koncentrikus körök, ellentétes körüljárási irányúak (az egyik egyenletben ugyanis egy negatív előjel van).

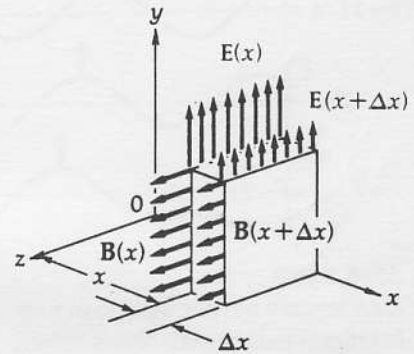
elektromágneses hullámok létezését, akár tökéletes vákuumban is. Maxwell továbbá azt is megmutatta, hogy ezeknek a hullámoknak sebessége ugyanakkora, mint a  $c$  fénysebesség. Ez volt az első határozott jelzés arra, hogy a fény elektromágneses hullámjelenség.

Az elektromágneses hullámok megértését a hullámformákat szemlélető ábrák nagy mértékben segítik. A 35-6 ábra az  $\mathbf{E}$  térerősségű elektromos erőter és a  $\mathbf{B}$  mágneses indukciójú mágneses erőter közötti szimmetriát illusztrálja, azt, hogy változó  $\mathbf{E}$  térerősségű elektromos erőter mágneses erőteret hoz létre és megfordítva, a változó mágneses erőter körül elektromos erőter keletkezik.

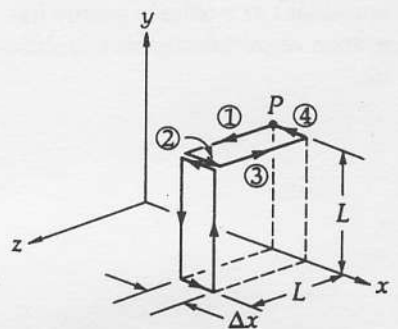
Ahhoz, hogy Maxwell egyenleteiből az elektromágneses hullámok létét levezessük, viszonylag bolyolult matematikai műveleteket kell elvégezni, ezért itt most nem a teljes, részletes levezetést adjuk meg. Ehelyett  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  egy egyszerű kombinációjából indulunk ki; megmutatjuk, hogy ilyen kombináció következménye az elektromágneses hullám, és hogy a hullámot leíró egyenlet összhangban van a Maxwell-egyenletekkel. A kiindulópont vákuumbeli, egymásra merőleges  $\mathbf{E}$  térerősségű elektromos erőter és  $\mathbf{B}$  mágneses indukciójú mágneses erőter. (35-7 ábra)<sup>6</sup>. Leegyszerűsített példában feltételezzük, hogy az erőterek az  $yz$  síkban homogének, azaz a térerősségek mindkét irányban  $+\infty$  és  $-\infty$  között azonos nagyságúak (az ábrán a térerősségstruktúrának csak kicsiny részletét ábrázoltuk). Amint azt egy későbbi fejezetben megmutatjuk, kísérletileg könnyű igazolni, hogy haladó hullámban az  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  vektorok mindegyike a haladás irányára merőleges. Így



(a) Az  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  terek egymásra merőlegesek. (A vektorterek ugyanígy folytathatók a teljes  $yz$  síkban.)



(b) Az  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  vektorok két különböző, egymástól  $\Delta x$  távolságban lévő  $yz$  síkban. A térerősségek  $x$ -nél és  $x + \Delta x$ -nél egymástól különböznek.



(c) A (b) ábrán vázolt hasáb felső lapjának csúcspontjain áthaladó integrálási út.

35-7 ábra

Az  $x$  tengely pozitív irányában haladó elektromágneses síkhullámban az  $\mathbf{E}$  térerősségű és  $\mathbf{B}$  mágneses indukciójú erőterek egymásra merőlegesek.

<sup>6</sup> A Maxwell-egyenletek megkövetelik azt, hogy  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  vektorok egymásra merőlegesek legyenek, de ezeknek nem kell homogén erőtereknek lenniük. A jelen tárgyalásban szereplő merőleges erőterek az eltolódási áramok által keltett erőterek legegyszerűbb esetét jelentik. Ha például megvizsgáljuk a töltődő kondenzátor környezetében kialakuló erőtereket (35-3 ábra), azt találjuk, hogy  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  mindenütt merőleges egymásra.

hát feltételezzük, hogy ez a konfiguráció jó kiindulópont az  $x$  irányban terjedő síkhullám tárgyalásához.

Az  $x$  tengely pozitív irányában terjedő síkhullám esetében azt várjuk, hogy  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  nagysága az  $x$  tengely különböző pontjaiban különböző, és időben is változik. A helytől és az időtől való függés kiderítésére vizsgáljuk meg, mekkorák a térerősségek, az  $yz$  síkkal párhuzamos,  $\Delta x$  szélességű réteg két oldalán (35-7 ábra).  $E_y$  is,  $B_z$  is függ  $x$ -től, azaz nagyságuk más az  $x$ , mint az  $x + \Delta x$  helyen.

Alkalmazzuk az Ampère-törvényt (a 35-11 képletet) a hasáb felső felületére, a 35-7c ábrán illusztráltak szerint. Minthogy a vákuumban töltések nincsenek, áram sem folyhat, tehát csak az eltolódási áramot tartalmazó tagot kell figyelembe vennünk:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (35-16)$$

A hasáb méretei: az  $y$  és  $z$  irányban  $L$ , az  $x$  irányban  $\Delta x$ . Számítsuk ki a hasáb egy lapja körül a számokkal jelölt élek mentén az  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  integrált, a  $P$ -vel jelölt sarokból indulva. A négy él mentén az integrál értéke:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \underbrace{B_z(x)L + 0}_{\text{①}} - \underbrace{B_z(x + \Delta x)L + 0}_{\text{②}} + 0 \quad \text{③} \quad \text{④}$$

A ② és ④ élek mentén az integrál zérus, ugyanis  $\mathbf{B}$  és  $d\mathbf{l}$  egymásra merőlegesek.

Az (35-16) összefüggés jobb oldala átírható úgy is, hogy  $\mathbf{E}$ -t tartalmazza, ugyanis  $\Phi_E = AE_y$ , és így  $d\Phi_E/dt = AdE_y/dt$ . Az integrálási görbe által határolt terület  $A = L\Delta x$ . Pontosabban: minthogy  $E_y$  térben és időben is változik és mialatt a deriválást elvégezzük, az összes többi változó értékét konstansnak tartjuk, ezért a parciális deriválás jelét<sup>7</sup> használjuk. Így a (35-16) jobb oldala:

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 L \Delta x \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

A két utóbbi képletet egybevetve azt kapjuk, hogy:

$$B_z(x)L - B_z(x + \Delta x)L = \mu_0 \epsilon_0 L \Delta x \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Mindkét oldalt  $L$ -l elosztva, és a hasáb vastagságát zérushoz közelítve:

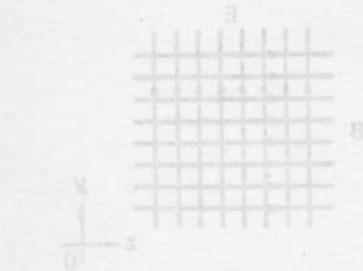
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_z(x + \Delta x) - B_z(x)}{\Delta x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (35-17)$$

Az egyenlet bal oldala éppen a  $dB_z/dx$  deriváltat definiálja, tehát

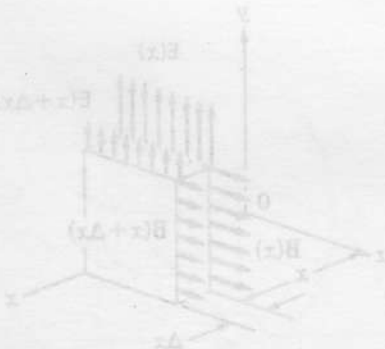
$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (35-18)$$

(Ismét a parciális deriválás jelét használjuk, mivel  $B_z$  időben is változik.) Az előzőkhöz hasonlóan alkalmazzuk a Faraday-törvényt:

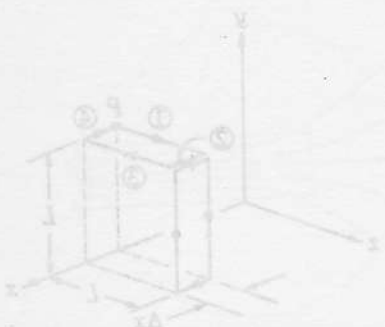
<sup>7</sup> A parciális deriválásra vonatkozó megjegyzés a G-V. függelékben olvasható.



(a) Az  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  terek egymásra merőlegesek. (A vektorok nagysága a távolságtól a teljes  $yz$  síkban.)



(b) Az  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  vektorok két különböző  $\Delta x$  egymástól  $\Delta x$  távolságban lévő  $yz$  síkban. A térerősségek  $x$ -nél és  $x + \Delta x$ -nél egymástól különböznek.



(c) A (b) ábrán vértett hasáb felső lapjának csúcspontjainál a hasáb integrálási úti.

35-7 ábra  
Az  $x$  tengely pozitív irányában terjedő elektromágneses síkhullámra az  $\mathbf{E}$  teret és az  $\mathbf{B}$  teret egymásra merőlegesek.



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (35-19)$$

a z irányra merőleges felületekre, amivel az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (35-20)$$

A (35-18) és (35-20) egyenletek az  $E_y$  és  $B_z$  függvényre egy parciális differenciálegyenlet-rendszert adnak. Megmutatjuk, hogy ez a rendszer két másodrendű parciális differenciálegyenletre redukálható: az egyik csak az elektromos térerősség  $E_y$  komponensét, a másik pedig csak a mágneses indukcióvektor  $B_z$  komponensét tartalmazza. Az eljárás nem bonyolult: először a (35-18) mindkét oldalát  $x$  szerint differenciáljuk, aminek eredményeként azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} \quad (35-21)$$

Ezután a (35-20) mindkét oldalát differenciáljuk  $t$  szerint, aminek eredményeként azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \quad (35-22)$$

A  $\partial^2 B_z / \partial x \partial t$  vegyes parciális derivált értékét a (35-21)-be helyettesítve olyan összefüggést kapunk, amelyben csak  $B_z$  szerepel:

$$\text{A HULLÁMEGYENLET } B_z\text{-RE} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \quad (35-23)$$

Hasonló eljárással a (35-18) és a (35-20) egyenletek úgy is kombinálhatók, hogy csak az  $E_y$  komponenst tartalmazó egyenlethez jussunk:

$$\text{A HULLÁMEGYENLET } E_y\text{-RA} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (35-24)$$

E két utóbbi egyenlet éppen olyan, mint amit a kifeszített kötélen végighaladó transzverzális hullám esetére a 18. fejezetben levezettünk (lásd a (18-8) hullámeqyenletet). A hullámeqyenlet megoldása az alábbi alakú:

$$A = A_0 \sin(kx - \omega t) \quad (\text{az } x \text{ tengely pozitív irányában haladó hullám}) \quad (35-25)$$

ahol  $A_0$  a hullám *amplitúdója*

$k = 2\pi/\lambda$  a  $\lambda$  *hullámhosszúságú* hullám *hullámszáma*,

$\omega = 2\pi/T$  a *körfrekvencia*,

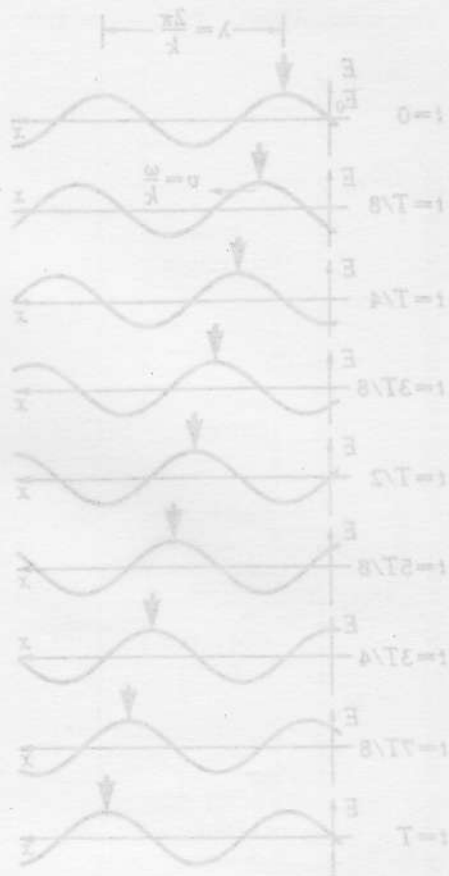
$T = 1/f$  az  $f$  *frekvenciájú* hullám *periódusideje*,

$v = \omega/k$  a hullám *terjedési sebessége*,

$v = \lambda f$  (vákumban  $v = c$ )

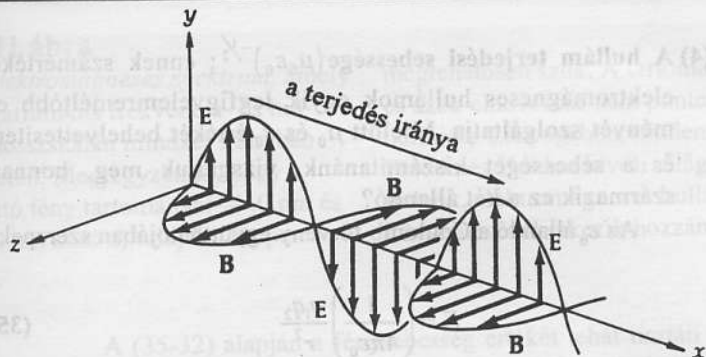
Az elektromos térerősség  $E_y$  komponense időben és térben tehát az alábbiak szerint változik:

$$\text{AZ ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉGNEK (az } x \text{ tengely irányában) SÍKHULLÁMKÉNT TERJEDŐ } E_y \text{ KOMPONENSE} \quad E_y = E_{y0} \sin(kx - \omega t) \quad (35-26)$$



35-8 ábra

Az  $x$  tengely pozitív irányában  $v$  sebességű haladó elektromos térerősség  $E_y$  és a változó  $B_z$  mágneses indukcióvektor  $B_z$  egy sorozatával jellemezhető, az  $E_y$  és  $B_z$  vektorok egymás közt  $90^\circ$  időeltolással „váltakoznak” ( $T = 2\pi/\omega$ ). A vastag vonallal jelölt nyíl az  $E_y$  vektorok irányát mutatja, a vékony vonallal jelölt nyíl az  $B_z$  vektorok irányát mutatja. Az  $x$  tengely pozitív irányában végzett mozgásai szemléltetik.



(a) Az  $x$  tengely pozitív irányában haladó elektromágneses síkhullám térbeli változásáról készített „pillanatfelvétel”. A vektorok hossza a térerősség, illetve a mágneses indukcióvektor nagyságának felel meg. A szinuszos hullám az  $x$  tengely pozitív irányában  $c$  sebességgel mozog.



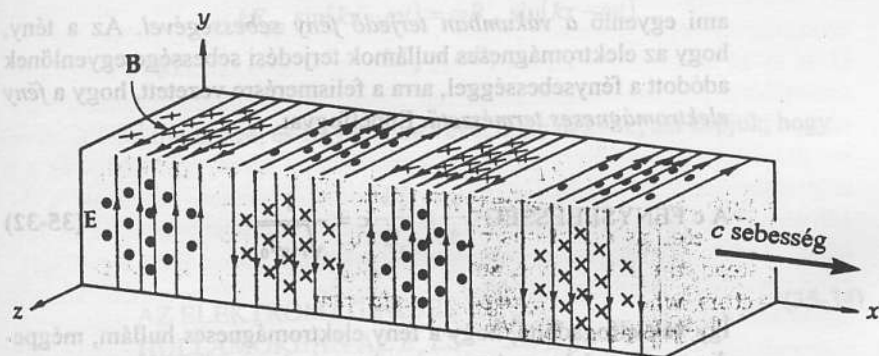
(b) Szinuszos hullámmal való ábrázolás. A térerősségvektorok helyett gyakran csak a burkológörbéjüket ábrázoljuk.



(c) Erővonalas reprezentáció: Az ábrán illusztráltak szerint az erővonalak ott sűrűbbek, ahol a térerősség nagyobb és ott ritkábbak, ahol a térerősség kisebb. Minthogy síkhullám esetében a térerősség az egész  $yz$  sík mentén állandó, az erővonalakat gondolatban az  $y$  koordináta irányában végtelenig meg kell hosszabbítanunk, továbbá az ábra síkjával párhuzamosan (az ábra mögött is, előtt is) végtelen ilyen erővonal-sereget kell elképzelnünk, amelyek az  $\pm z$  irányban kitöltik a teret. A hullámfrontok az  $yz$  síkkal párhuzamos síkok; ezek az  $x$  tengely pozitív irányában  $c$  sebességgel mozognak. (A hullám fázisa a hullámfront minden pontjában azonos.)

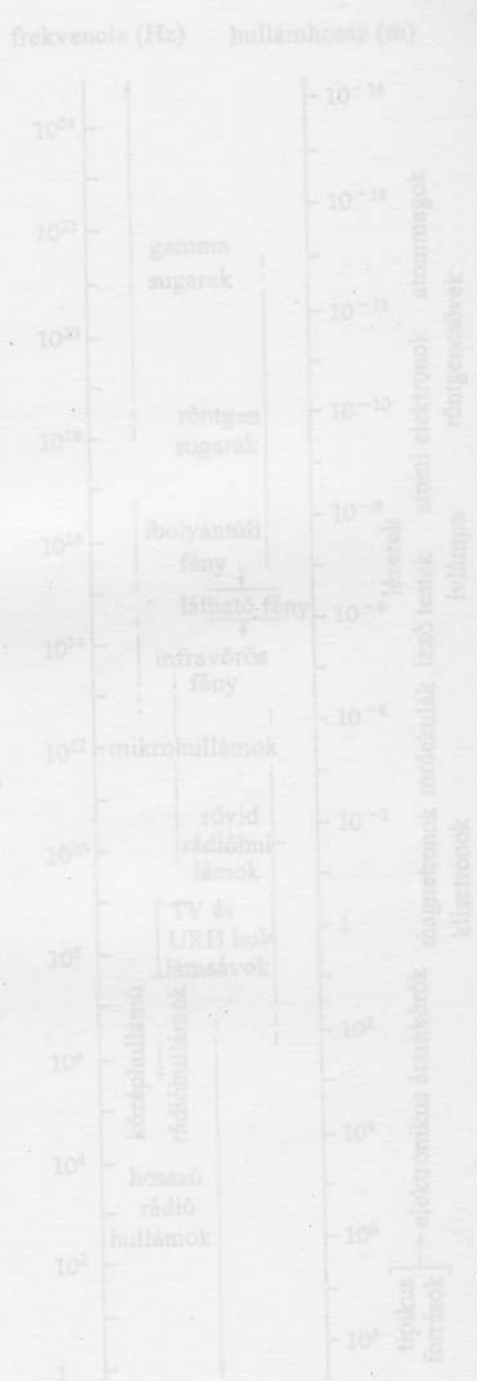
**35-9 ábra**

Az elektromágneses síkhullám különböző ábrázolási módjai



**35-10 ábra**

Az  $x$  tengely pozitív irányában haladó elektromágneses síkhullám egy részletéről, az  $E$  és  $B$  vektorok térbeli változásáról készített „pillanatfelvétel”. (Hasonlítsuk össze a 35-9 ábrával)



- (4) A hullám terjedési sebessége  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ ; ennek számértéke az elektromágneses hullámok egyik legfigyelemreméltóbb eredményét szolgáltatja. Mielőtt  $\mu_0$  és  $\epsilon_0$  értékét behelyettesítenénk és a sebességet kiszámítanánk, vizsgáljuk meg, honnan is származik ez a két állandó?

Az  $\epsilon_0$  állandó a Coulomb-törvény együtthatójában szerepel:

$$F = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (35-30)$$

Modern definíciója szerint, a  $q$  töltés egységét az amperből származtatjuk: az 1 amper ( $= 1 \text{ Cb/s}$ ) egységet egymástól  $d$  távolságra lévő párhuzamos áramvezetők  $l$  hosszúságú szakaszai között ható erő nagyságával definiáljuk az alábbi képlet alapján:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \quad (35-31)$$

Ebben a képletben  $\mu_0$  önkényesen választott szám, amely a (35-31) összefüggésben  $F/l$  értékét pontosan  $2\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$  nagyságúra állítja be, feltéve, hogy  $I = 1$  amper és  $d = 1 \text{ m}$ .  $\epsilon_0$  kísérletileg meghatározott értéke:

$$\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \quad (\text{Ezt korábban tapasztalati úton határozták meg. Ld. a 8. l. ábrát})$$

Definíció szerint

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{C}^2}$$

Ezeket a számértékeket a terjedési sebesség kifejezésébe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} &= \left[ \left( 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{C}^2} \right) \left( 8,8542 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right) \right]^{-1/2} \\ &= 2,9979 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

ami egyenlő a vákumban terjedő fény sebességével. Az a tény, hogy az elektromágneses hullámok terjedési sebessége egyenlőnek adódott a fénysebességgel, arra a felismerésre vezetett, hogy a fény elektromágneses természetű. Ennélfogva:

$$\text{A c FÉNYSEBESSÉG} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (35-32)$$

Így vált elfogadottá, hogy a fény elektromágneses hullám, mégpedig a teljes elektromágneses spektrumnak – mely a fényen kívül a rádióhullámokat, mikrohullámokat, infravörös sugarakat, röntgen-sugarakat és gamma-sugarakat tartalmazza – csak kis része. A Maxwell-egyenletekkel mindezek leírhatók.

**35-11 ábra**

Az elektromágneses spektrum, amely a logaritmikus frekvencia- és hullámhosszkálán mindkét irányban végtelen. Megjegyzendő, hogy a látható fény tartománya (~440 nm és ~670 nm között) tulajdonképpen

meglehetősen szűk. A tartományok és azok elnevezése nem pontosan definiált. Lényegében minden, amit a Földön és Holdon kívüli világról tudunk, elektromágneses hullámok közvetítésével érkezik hozzánk.

A (35-32) alapján a fénysebesség értékét tehát tisztán elektromos mérésekkel (és nem direkt sebességméréssel) határozhatjuk meg. Például tekintsünk egy síkkondenzátort, amelyet teleppel töltünk. A kondenzátorhoz vezető huzalok közötti, valamint a kondenzátor lemezei között ható erő mérésével  $c$  értéke meghatározható. 1906-ban E. B. Rosa és N. E. Dorsey az amerikai szabványügyi hivatalban (National Bureau of Standards) csodálatosan pontos kísérletet végzett el, amelynek során elektromos mérésekkel határozták meg a fénysebesség értékét. Ez volt abban a korban  $c$  legpontosabb értéke:  $299784 \pm 15$  km/s.

Az elektromos mértékegységek történetében 1983. október 20. fontos dátum: ekkor fogadták el hivatalosan a fénysebesség (akkori legpontosabb) értékét elsődleges SI-szabványnak, mely szerint

A  $c$  FÉNYSEBESSÉG (szabványként definiálva)  $c \equiv (2,99792458) \times 10^8 \frac{m}{s}$  (35-33)

A legtöbb gyakorlati alkalmazás során azonban a  $3,00 \times 10^8$  m/s elegendően pontos érték.

(5) Az  $E$  és a  $B$  vektorok nagysága egymással összefügg. A hullámegyenletek megoldásai a (35-26) és a (35-28) összefüggések szerint:

$$E_y = E_{y0} \sin(kx - \omega t) \text{ és } B_z = B_{z0} \sin(kx - \omega t)$$

E függvényeknek ki kell elégíteniök a hullámegyenlet levezetése során kapott (35-20) egyenletet is:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

A deriváltakat kiszámítva azt kapjuk, hogy:

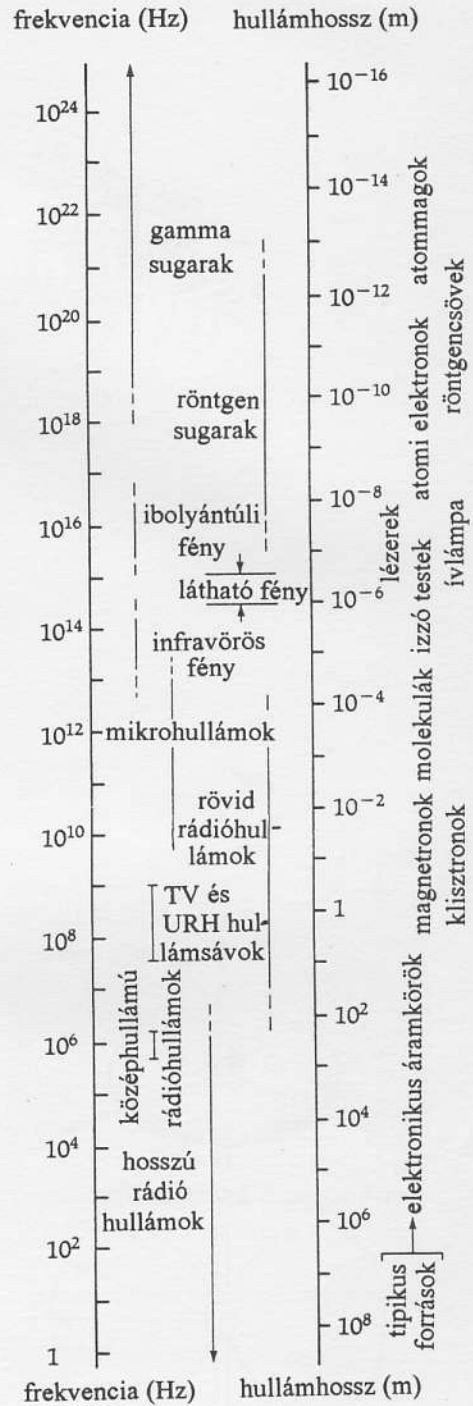
$$kE_{y0} \sin(kx - \omega t) = \omega B_{z0} \sin(kx - \omega t)$$

vagy  $kE_y = \omega B_z$

Átrendezve, és figyelembe véve, hogy  $\omega/k = c$ , azt kapjuk, hogy

$$\frac{E_y}{B_z} = \frac{\omega}{k} = c$$

**AZ ELEKTROMÁG-NESES HULLÁMOKBAN AZ  $E_y$  ÉS  $B_z$  KOMPONENSEK KÖZÖTTI KAPCSOLAT:**

$$\frac{E_y}{B_z} = c \quad (35-34)$$


## 35-2 PÉLDA

Egy elektromágneses hullámban az elektromos térerősséget a következő függvény adja meg:

$$E_y = 100 \sin(10^7 x - \omega t) \quad (\text{SI egységekben})$$

Számítsuk ki (a) a mágneses hullám amplitudóját és (b) a  $\lambda$  hullámhosszt és (c) az  $f$  frekvenciát.

## MEGOLDÁS

(a) A (35-34) szerint

$$B_z = \frac{E_y}{c} = \frac{\left(100 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right)}{\left(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)} = 3,33 \times 10^{-7} \text{ T}$$

(b) A  $\lambda$  hullámhossz és az  $f$  frekvencia kiszámításához vegyük figyelembe, hogy az adott térerősség egyenlete  $E_y = E_{y0} \sin(kx - \omega t)$ . A (35-25) összefüggés alapján

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{(10^7 \text{ m}^{-1})} = 6,28 \times 10^{-7} \text{ m} \left( \frac{10^9 \text{ nm}}{1 \text{ m}} \right) = 628 \text{ nm}$$

(átszámítási tényező)

Ez a hullámhossz piros színű fénynek felel meg.

(c) A frekvencia a következő módon számítható ki:

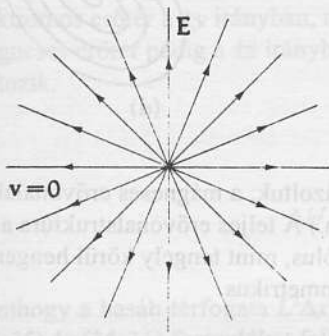
$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{\left(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(6,28 \times 10^{-9} \text{ m})} = 4,78 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

## 35.4 Az elektromágneses hullámok keltése

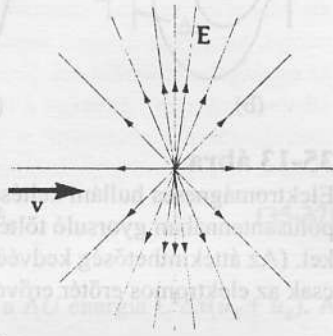
Az elektromágneses hullámok keltésének számos módja van. Mindegyik azon alapul, hogy *gyorsuló töltések elektromágneses sugárzást bocsátanak* ki. A 35-12 ábra szemlélteti e sugárzás eredetét. A 35-12a ábrán, a töltés eredetileg az  $O$  pontban nyugalomban van, az erővonalstruktúra gömbszimmetrikus. A  $t = 0$  időpontban rövid  $\Delta t$  ideig gyorsul és az  $O'$  pontba érve  $v = 0,2c$  sebességet ér el, majd attól fogva állandó sebességgel halad és a  $t$  időpontban eléri a  $P$  pontot. Ekkor az erővonalak „összenyomódnak” (35-12b ábra). Van tehát egy belső, „összenyomódott” térerősségstruktúra, és egy külső, eredeti, gömbszimmetrikus térerősségeloszlás, ahová még a gyorsuló, majd egyenletes sebességű mozgás hatása nem ért el. E két tartomány közötti törésvonal  $c$  sebességgel mozog kifelé, ez az a tartomány, amely a gyorsulásra vonatkozó információt őrzi. Tehát,  $O$  körül  $ct$ -nél nagyobb távolságokra, a gyorsulásra vonatkozó információ még nem érkezett meg, és a térerősségvonalak  $O$  felé, mint centrum felé mutatnak.  $O'$ -től  $ct$ -nél kisebb távolságokban az erővonalak a töltés pillanatnyi  $P$  helye felé mutatnak (35-12b ábra). A két tartományt elválasztó törésvonalnak (rétegnek) fontos tulajdonsá-

ga, hogy ott az elektromos térerősségnek *transzverzális* komponense van. Ez a szétterjedő hullámban megjelenő transzverzális **E** térerősségű elektromos erőtér eredete.

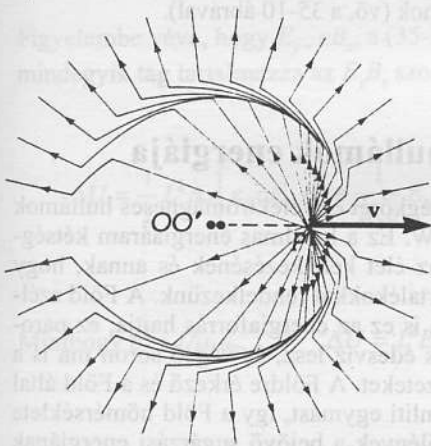
Elektromágneses hullámok keltésére szolgál a 35-13 és 35-14 ábrákon vázolt *dipólusantenna*. Két huzalból áll, amelyek váltakozó feszültségű feszültségforráshoz csatlakoznak. Az elektronok ide-oda gyorsulnak a huzalpárban, így a dipólusvégek felváltva pozitívak, illetve negatívak. Az oszcillációk hatására a térben szétterjedő térerősségszerkezet alakul ki (35-13a ábra). A potenciálkülönség előjelváltásának pillanataiban a töltés a



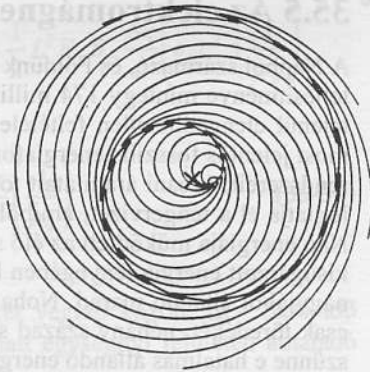
(a) Nyugalomban lévő pozitív ponttöltés erővonalai.



(b) Állandó sebességgel mozgó ponttöltés erővonalai. Nyugvó koordinátarendszerben az erővonalstruktúra a mozgás irányában összenyomottnak látszik; vagyis a mozgás irányában az erővonalak ritkábbak, arra merőlegesen sűrűbbek.



(c) Pozitív töltés erővonalai. A töltés nyugalmi helyzetből, az *O* pontból indulva az *O'* pontig hirtelen gyorsul, onnan egyenletes sebességgel áthalad a *P* ponton. Az erővonalstruktúrában megfigyelhető törésvonal az *OO'* pontok tartományából kifelé *c* sebességgel halad.



(d) Az óramutató járásával meg egyező irányban, az  $\times$  pont körül  $v = 0,9 c$  sebességgel körpályán mozgó pozitív töltés erővonalai. A törésvonal *c* sebességgel spirálszerűen kifelé mozog.

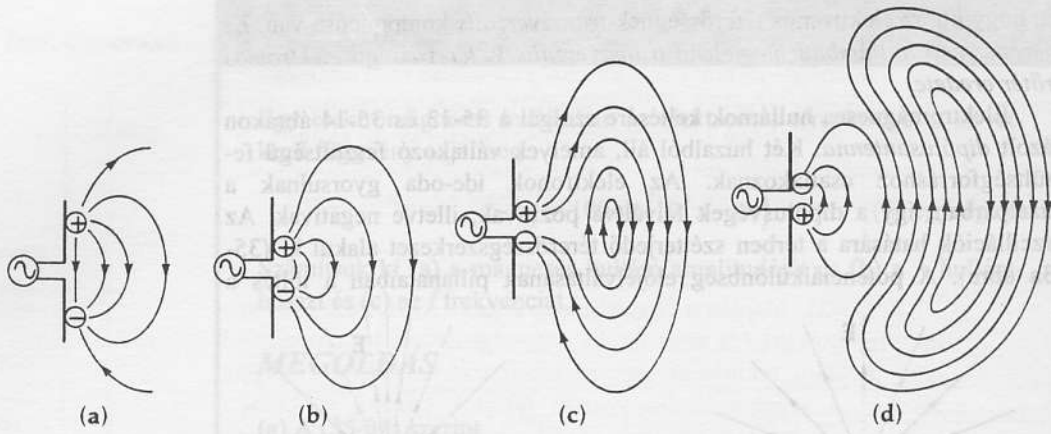
**35-12 ábra**

Ha ponttöltés gyorsul, akkor az erővonalstruktúrában törés keletkezik, amely *c* sebességgel a gyorsuló töltéstől kifelé halad. A (c) és (d) ábrán látható törésvonalon **E**-nek a

mozgás irányára merőleges komponense van; ez a kifelé mozgó **E** komponens a gyorsuló töltéstől származó elektromágneses sugárzás



35-14 ábra  
A dipólusugárzásnak az intenzitás eloszlása három dimenzióban (a) dipólus (b) A sugáris intenzitáselosztás  
35-13 ábra  
A dipólusugárzás keltésének forrását szemléltető ábrák. (a) A dipólus két huzalából álló egyenes dipólus. A huzalok közötti feszültség váltakozó. A huzalokban az elektronok ide-oda gyorsulnak. A gyorsuló töltések térerősséget hoznak létre. A térerősség a térben szétterjed. (b) A sugáris intenzitás eloszlása. A sugáris intenzitás a dipólus tengelyére merőlegesen a legnagyobb, a dipólus tengelyében a legkisebb.

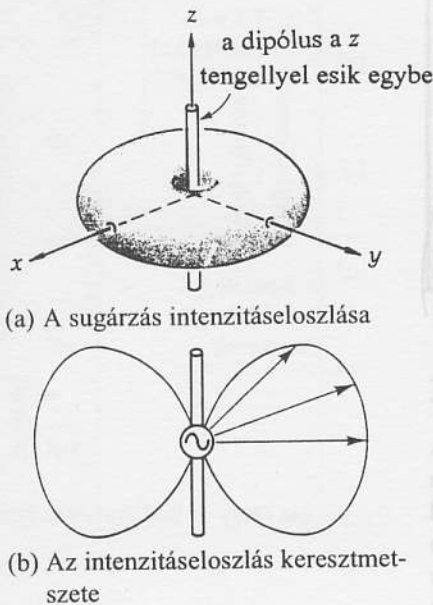


**35-13 ábra**

Elektromágneses hullám keltése dipólusantennában gyorsuló töltésekkel. (Az áttekinthetőség kedvéért csak az elektromos erőter erővonalait

ábrázoltuk; a mágneses erővonalakat nem.) A teljes erővonalstruktúra a dipólus, mint tengely körül henger-szimmetrikus.

dipólusvégeken zérus, ott erővonalak tehát nem záródnak. E pillanatokban az elektromos erővonalak a dipólusról „leszakadó” zárt hurkokat alkotnak, melyek az antennától  $c$  sebességgel távolodnak. A tér bármely pontjában az elektromos térerősség időben változik, tehát a Maxwell-egyenletekkel összhangban (az ábrán nem jelölt) változó mágneses tér is keletkezik: az antennától nagy távolságban a hullámok közelítőleg síkhullámok (vö. a 35-10 ábrával).



**35-14 ábra**

A dipólussugárzásának az intenzitás-eloszlása három dimenzióban (a dipólustól távol). A sugárzás intenzitása arányos a dipólus középpontjából a vizsgált irányba húzott vektor hosszával. A sugárzás intenzitása a dipólusra merőlegesen a legnagyobb, a dipólus tengelyének irányában a kisugárzott teljesítmény zérus.

### 35.5 Az elektromágneses hullámok energiája

A Naptól származó, és Földünk felső légkörét érő elektromágneses hullámok teljesítménye mintegy 174 milliárd MW. Ez a hatalmas energiaáram kétségtelenül elengedhetetlen feltétele volt az élet keletkezésének és annak, hogy most jelentős fosszilis energiaforrás-tartalékokkal rendelkezünk. A Föld szélrendszereit, óceáni áramlatait továbbra is ez az energiaforrás hajtja, ez párologtatja el a tengervizet, amiből eső és édesvíz lesz, és végső soron ma is a Nap energiája működteti az élő szervezeteket. A Földre érkező és a Föld által kisugárzott energia lényegében kiegyenlíti egymást, így a Föld hőmérséklete nagyjából állandó marad. Noha az élőlények a bejövő sugárzási energiának csak töredékét, néhány század százalékát hasznosítják, az élet gyorsan megszűnne e hatalmas állandó energiaáram nélkül.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy az elektromágneses hullámok hogyan szállítanak energiát. Miként azt az előző fejezetekben megmutattuk ((27-16) és (32-33) formulák), az elektromos és mágneses erőterekben az egységnyi térfogatra eső energia, az  $u$  *energiásűrűség*:

AZ ELEKTROMÁGNESES TEREK PILLANATNYI ENERGIASŰRŰSÉGE:

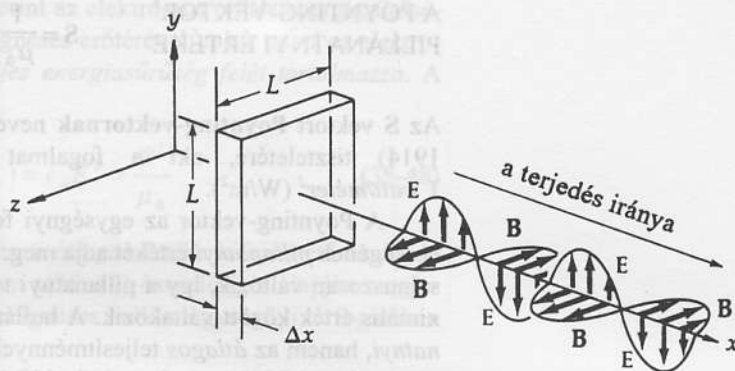
Elektromos	$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$	(35-35)
------------	------------------------------------	---------

Mágneses	$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$	(35-36)
----------	------------------------------	---------

Ahhoz, hogy megértsük, hogy a hullámok miként szállítanak energiát, alkalmazzuk ezeket a képleteket a 35-15 ábrán vázolt keskeny térfogatelemre (hasábra). Adott pillanatban a térfogatelem teljes  $\Delta U$  energiája az elektromos erőter  $\Delta U_E$  és a mágneses erőter  $\Delta U_B$  energiájának összege:

## 35-15 ábra

Síkhullám, amely a keskeny hasábon keresztül  $c$  sebességgel elektromágneses energiát szállít. Az elektromos erőtér a  $\pm y$  irányban, a mágneses erőtér pedig a  $\pm z$  irányban változik.



$$\Delta U = \Delta U_E + \Delta U_B \quad (35-37)$$

Mint hogy a hasáb térfogata  $L^2\Delta x$ , a hasámban a  $\Delta U$  energia  $L^2\Delta x(u_E + u_B)$ . A (35-35) és (35-36) formulákat felhasználva:

$$\Delta U = \frac{1}{2} L^2 \Delta x \left( \epsilon_0 E_y^2 + \frac{1}{\mu_0} B_z^2 \right) \quad (35-38)$$

Figyelembe véve, hogy  $E_y = cB_z$ , a (35-38) összefüggés átírható úgy, hogy mindegyik tag tartalmazza az  $E_y B_z$  szorzatot:

$$\Delta U = \frac{1}{2} L^2 \Delta x \left( \epsilon_0 c E_y B_z + \frac{1}{\mu_0 c} E_y B_z \right) = \frac{1}{2} L^2 E_y B_z \frac{\Delta x}{c} \left( \epsilon_0 c^2 + \frac{1}{\mu_0} \right)$$

Mint hogy  $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$ , 
$$\Delta U = L^2 E_y B_z \frac{\Delta x}{c} \left( \frac{1}{\mu_0} \right) \quad (35-39)$$

Ahhoz, hogy a  $\Delta U$  energia áthaladjon a két véglap között,  $\Delta t = \Delta x/c$  idő szükséges.  $S$ -sel jelölve az egységnyi idő alatt egységnyi felületen áthaladó energia nagyságát,

$$S = \frac{(\text{Energia})}{(\text{Terület})(\text{Idő})} = \frac{\Delta U}{L^2 \Delta t}$$

melybe az előző kifejezést behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$S = \frac{1}{\mu_0} E_y B_z \quad (35-40)$$

Mint hogy  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  a hullám terjedési irányára merőleges vektorok (35-15 ábra), vektoriális szorzatuk, az  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  a terjedés irányába mutat. Tehát, az előző képletet átírhatjuk a következő alakúra:



$$\text{A POYNTING-VEKTOR}^* \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (35-41)$$

PILLANATNYI ÉRTÉKE

Az  $\mathbf{S}$  vektort **Poynting-vektornak** nevezzük, John Henry Poynting (1852–1914) tiszteletére, aki a fogalmat bevezette. SI-mértékegysége az 1 watt/méter<sup>2</sup> (W/m<sup>2</sup>).

A Poynting-vektor az egységnyi felületen áthaladó energiaáramlás sebességének pillanatnyi értékét adja meg. A vizsgált hullámok esetében  $E$  és  $B$  szinuszosan változik, így a pillanatnyi teljesítmény zérus és valamilyen maximális érték között váltakozik. A hullám intenzitását általában nem a pillanatnyi, hanem az átlagos teljesítménnyel adjuk meg; gyakorlati szempontból az egységnyi felületen sok periodusidő átlagából adódóan egységnyi idő alatt áthaladó energia nagysága a lényeges mennyiség; melyet az alábbiak szerint igen egyszerű kiszámítani: A Poynting-vektort definiáló (35-41) képletbe  $E_y$  és  $B_z$  szinuszos kifejezését behelyettesítve

$$S = \frac{1}{\mu_0} E_{y0} B_{z0} \sin^2(kx - \omega t) \quad (35-42)$$

Adott ponton áthaladó energia tehát a szinusz függvény négyzete szerint változik időben, maximumát a hullám periódusideje alatt kétszer éri el. Az átlagos energiaáramsűrűséget az alábbi kifejezés adja meg:

$$S_{\text{átl}} = \frac{E_{y0} B_{z0}}{\mu_0} \left[ \frac{1}{(T/2)} \int_0^{T/2} \sin^2(kx - \omega t) dt \right] \quad (35-43)$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezés számértéke 1/2, így

$$\text{A POYNTING-VEKTOR} \quad S_{\text{átl}} = \frac{1}{2\mu_0} E_{y0} B_{z0} \quad (35-44)$$

ÁTLAGOS NAGYSÁGA  
SZINUSZOS HULLÁM ESETÉN:

Így a hullám terjedésére merőleges  $A$  felületen áthaladó átlagos energiaáram (W egységekben)

$$\int_A S_{\text{átl}} \cdot dA = (S_{\text{átl}})(A) = \left( \frac{dU}{dt} \right)_{\text{átl}} = \left[ \begin{array}{l} \text{A hullám terjedési} \\ \text{irányára merőleges} \\ \text{A felületen áthaladó} \\ \text{energiaáram} \end{array} \right] \quad (35-45)$$

### Az energiasűrűség

Miként azt korábban megmutattuk, elektromos és mágneses erőter energiasűrűsége

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{és} \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (35-46)$$

Elektromágneses hullámok esetén az  $E$  és  $B$  mennyiségeket az  $E = cB$  reláció kapcsolja össze, és  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . Ezek figyelembevételével az

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 B^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = u_B \quad (35-47)$$

\* Miként azt a 33. fejezetben megtárgyaltuk, vákuumban a  $\mathbf{H}$  mágneses térerősség és a  $\mathbf{B}$  mágneses indukcióvektor közötti kapcsolatot a  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  összefüggés fejezi ki. Így a (35-41) képletet néha az  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  alakban írják fel.



35-16 ábra

A világ legnagyobb naperőműve Kaliforniában, a Los Angeles közelében lévő Mojave sivatagban található. Mintegy 400 hektár területen fekszik és a világ napenergia-eredetű villamosenergia-termelésének 95%-át adja. A 650 ezer parabolatükör a Nap mozgását követve annak fényét a fókuszban lévő csövekre vetíti. Az ezekben keringő szintetikus olaj 400 C°-ra hevül; ami hőcserélőkben túlhevített gőzt fejleszt, ez utóbbi gőzturbinákat, ill. generátorokat forgat. A naperőmű elektromos teljesítménye 196 MW. Bár az itt előállított elektromos energia magas önköltsége miatt a naperőmű a hagyományos erőművekkel nem versenyképes, a konstruktőrök értékes üzemi tapasztalatot gyűjtnek a technológia továbbfejlesztéséhez.

összefüggésekhez jutunk, melyek szerint az elektromos erőtér energiasűrűsége minden pillanatban egyenlő a mágneses erőtérével, tehát mind az elektromos, mind a mágneses erőtér a teljes energiasűrűség felét tartalmazza. A teljes energiasűrűség:

$$u = (u_E + u_B) = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \quad (35-48)$$

A szinuszosan változó erőkerek esetén  $u$  átlagos értéke kifejezhető az  $E_{y0}$  és  $B_{z0}$  amplitúdók segítségével, amelyben a (35-43) összefüggés alapján megjelenik egy  $1/2$  tényező. Így az elektromágneses hullám egységnyi térfogatában az átlagos  $u_{\text{atl}}$  energia:

AZ ELEKTROMÁGNES HULLÁM ÁTLAGOS ENERGIASŰRŰSÉGE:

$$u_{\text{atl}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{y0}^2 \quad \text{vagy} \quad u_{\text{atl}} = \frac{1}{2\mu_0} B_{z0}^2 \quad (35-49)$$

melyet  $J/m^3$  egységben adunk meg. Ezt összehasonlítva a (35-44) egyenlettel és figyelembevéve, hogy  $E = cB$ , azt vehetjük észre, hogy

A HULLÁM INTENZITÁSA: 
$$S_{\text{atl}} = u_{\text{atl}} c \quad (35-50)$$

A hullám intenzitása ( $W/m^2$  egységben) egyenlő a  $J/m^3$  egységben kifejezett átlagos energiasűrűség és a ( $m/s$  egységben megadott) fénysebesség szorzatával.

### 35-3 PÉLDA

Tekintsünk egy 100 W-os (nagyjából monokromatikus) zöld fényű izzólámpát, amely fényét a tér minden irányában egyenletesen bocsátja ki. Mekkora a lámpától 10 m-re a fény elektromos erőtérének amplitúdója, ha az izzólámpa 3%-os hatásfokkal alakítja át az elektromos energiát fényenergiává?

### MEGOLDÁS

Mínt hogy a lámpa hatásfoka 3%, a kibocsátott elektromágneses hullámok energiája 3 W, ami egy 10 m sugarú gömb felületén egyenletesen oszlik el. A gömb felületén tehát az egységnyi felületre jutó átlagos energia

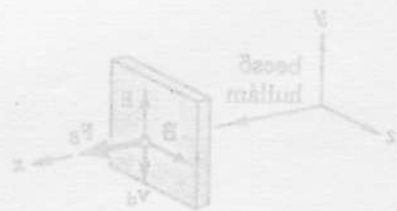
$$S_{\text{atl}} = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{3,0 \text{ W}}{4\pi (10 \text{ m})^2} = \frac{0,030}{4\pi} \left( \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right)$$

Ha a fény monokromatikusnak tekinthető, akkor egyetlen  $\lambda$  hullámhosszal jellemezhető elektromágneses hullám, és akkor a (35-49) és a (35-50) összefüggések szerint

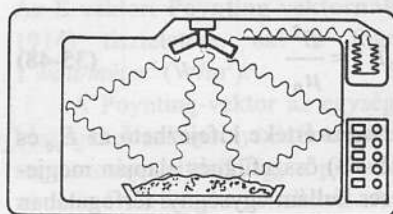
$$S_{\text{atl}} = u_{\text{atl}} c = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{y0}^2$$

Az  $E_{y0}$  amplitúdót kifejezve:

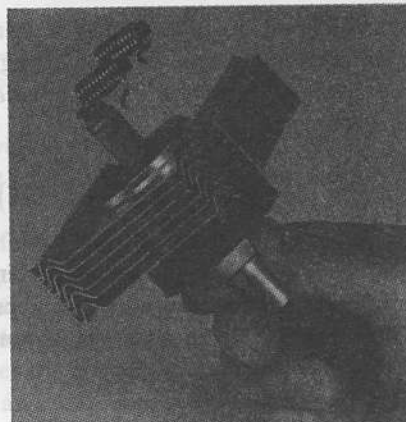
$$E_{y0} = \sqrt{\frac{2S_{\text{atl}}}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{(2) \left( \frac{0,030 \text{ W}}{\text{m}^2} \right)}{\left( 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right) \left( 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (4\pi)}} = 1,34 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$



35-18 ábra  
Az elektromágneses hullám a vektoros lap elektronjainak erőt gyakorol. Az átlagos erőd  $F_{\text{e}}$  erő irányát megadja a hullám terjedési irányával.



mikrohullámú sütő



## 35-17 ábra

A II. világháború óta folyó radar-fejlesztések eredményeként manapság számos helyen alkalmazzák a nagyteljesítményű mikrohullámokat előállító kompakt magnetroncsöveket. Például magnetronokat alkalmaznak a mikrohullámú sütőkben. A sütőben a mikrohullámok állóhullámokat alkotnak. Az egyenletes melegítés érdekében a hullámok intenzitáseloszlását vagy fém lapátú ventilátorok homogenizálják, vagy pedig a melegítendő ételt helyezik forgó tányérra (így az étel különböző részei felváltva haladnak át a hullámtér csomópontjain). A magnetron 2,45 GHz frekvenciájú mikrohullámokat bocsát ki. Ez a frekvencia

közel van a vízmolekulák egyik rotációs-vibrációs energiaátmenetére jellemző frekvenciához; a mikrohullámokat a vízmolekulák tehát igen erősen abszorbeálják: ez a melegítés és főzés mechanizmusának alapja.

A magnetron alumínium hűtőbordái a túlhevülést meggátolandó a többlet hőt a környezetnek adják le. A tápfeszültséget bevezető huzalokkal egy-egy kis induktivitású tekercset sorba kapcsolnak, ezzel lehet meggátolni azt, hogy a huzalok mikrohullámú energiát vezessenek vissza a tápegységbe. A mikrohullámok a magnetron másik végén lévő üreges hullámvezetőn távoznak.

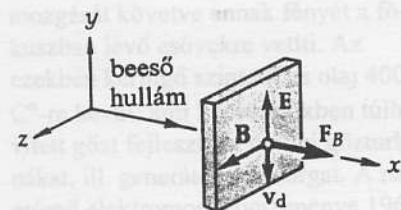
## 35.6 Az elektromágneses hullámok impulzusa

Mint megmutattuk, az elektromágneses hullámban energia terjed. Most azt mutatjuk meg, hogy a hullámnak impulzusa is van. Először azt mutatjuk be, hogy az elektromágneses hullám töltött részecskére a hullám terjedésének irányába eső erőt gyakorol, annak ellenére, hogy mind az  $E$  elektromos térerősség, mint pedig a  $B$  mágneses indukció *transzverzális* (azaz a terjedés irányára merőleges). Tehát, ha elektromágneses hullám lép kölcsönhatásba valamely (elektronokat tartalmazó) anyaggal, akkor annak (hullámterjedés irányú) impulzust ad át. A kölcsönhatás részletei nagyon érdekesek.

Tekintsünk egy, az  $x$  tengely pozitív irányában haladó elektromágneses hullámot (35-18 ábra) amely véges vezetőképességű anyagból készült lemezen szabadon mozgó elektronra hat. Tétélezzük fel, hogy a lemezen az elektromos tér a  $\pm y$ , a mágneses tér pedig a  $\pm z$  irányban oszcillál, vagyis

$$E = (E_0 \sin \omega t) \hat{y} \quad \text{és} \quad B = (B_0 \sin \omega t) \hat{z} \quad (35-51)$$

Az elektromos erőter hatására a  $-e$  töltésű elektron függőlegesen mozog az anyagban. Jelen céljainknak megfelel, ha az elektron mozgását a  $v_d$  driftsebességgel jellemezzük, vagyis mintha viszkózus közegben mozogna. Így



## 35-18 ábra

Az elektromágneses hullám a vezető lap elektronjaira erőt gyakorol. Az átlagos eredő  $F_B$  erő iránya megegyezik a hullám terjedési irányával.

$\mathbf{F}_E = b\mathbf{v}_d$ , ahol  $b$  egy állandó és  $\mathbf{F}_E$  az elektromos tér által kifejtett erő:  $\mathbf{F}_E = (-eE_0 \sin \omega t) \hat{y}$ . Ezen képletek kombinációjával a következő kifejezéshez jutunk:

$$\mathbf{v}_d = -\left(\frac{eE_0}{b} \sin \omega t\right) \hat{y} \quad (35-52)$$

Vegyük észre, hogy az elektron sebessége és az elektromos térerősség mindig pontosan ellentétes fázisúak. A mozgó elektronra mágneses erő is hat:

$$\mathbf{F}_B = -e(\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) \quad (35-53)$$

A  $\mathbf{v}_d$  és a  $\mathbf{B}$  fenti kifejezését ebbe a képletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{F}_B = -e\left(\frac{-eE_0}{b} \sin \omega t\right) \hat{y} \times (B_0 \sin \omega t) \hat{z} = \left(\frac{e^2 E_0 B_0}{b} \sin^2 \omega t\right) \hat{x} \quad (35-54)$$

Mint hogy a  $\sin^2 \omega t$  tényező mindig pozitív, az elektronra mindig  $+x$  irányú – tehát a hullám terjedésével azonos irányú – erő hat. A vezető anyagból készült lemezre ható erő az elektronokra ható erők eredője.

Annak során hogy az elektromágneses hullámok az elektronokat a véges vezetőképességű anyagban mozgatják, az elektronok a súrlódási munkának megfelelő energiát vesznek fel (abszorbeálnak) a hullámból. Az energiaátadás sebessége

$$\frac{dU}{dt} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{v}_d$$

ahol  $U$  az elektron által felvett energia.  $\mathbf{F}_E$  és  $\mathbf{v}_d$  fenti kifejezését behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{dU}{dt} = (-eE_0 \sin \omega t) \hat{y} \cdot \left(\frac{-eE_0}{b} \sin \omega t\right) \hat{y} = \frac{e^2 E_0^2}{b} \sin^2 \omega t \quad (35-55)$$

Mint hogy  $E = cB$ , az energiafelvétel sebessége másként

$$\frac{dU}{dt} = c \left(\frac{e^2 E_0 B_0}{b} \sin^2 \omega t\right). \quad (35-56)$$

Ezt a képletet a (35-54) formulával összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{dU}{dt} = cF_B = c \frac{dp}{dt}, \quad (35-57)$$

ahol  $F_B = dp/dt$ , az elektronok impulzusváltozásának sebessége (a változás  $+x$  irányú). Az egyenlet szerint az energiaabszorpció  $dU/dt$  sebessége egyenlő az impulzusváltozás és a fénysebesség szorzatával. Mint hogy mind az abszorbeált energia, mind az elektron által felvett impulzus az elektromágneses hullámtól származik, ha az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás elvét alkalmazzuk, és a (35-57) képletet idő szerint integráljuk, azt kapjuk, hogy:

$$\int_0^U \frac{dU}{dt} = c \int_0^p \frac{dp}{dt}$$



(a) A Crookes-számbójó



(b) A lapátok környezetében kicsi levegőtömegek felülnézésként

35-19. ábra

A Crookes-számbójó lapátjainak fény hatására forgásba jön. A forgást előidéző forgatónyomatékok nem a fény sugárnyomása hozza létre.

AZ  $U$  ENERGIÁJÚ HULLÁM ÁLTAL SZÁLLÍTOTT  $p$  IMPULZUS  $U = cp$  (35-58)

Mint hogy az  $U$  energiájú elektromágneses hullám impulzusa  $p$ , ha az elektromágneses hullám merőlegesen esik egy felületre, akkor arra  $F = dp/dt$  erőt gyakorol. A (35-57) összefüggés alapján, ezen erő nagysága:

AZ ABSZORBEÁLÓDÓ SUGÁRZÁS ÁLTAL KIFEJTETT ERŐ  $F = \frac{1}{c} \frac{dU}{dt}$  (35-59)

Ha a sugárzás teljesen elnyelődik, az egységnyi felületre ható erő az ugyanakkora felületnek átadott energia  $1/c$ -szerese. Az egységnyi felületre ható erőt **sugárnyomásnak** vagy **fénynyomásnak**<sup>9</sup> nevezzük. Mint hogy a Poynting-vektor nagysága az egységnyi felületen egységnyi idő alatt áthaladó energiával egyenlő, a sugárnyomást az alábbiakkal is kifejezhetjük:

A SUGÁRNYOMÁS Nyomás =  $\frac{S_{\text{átl}}}{c}$  (teljes abszorpció) (35-60)

(merőlegesen beeső hullám esetén) Nyomás =  $\frac{2S_{\text{átl}}}{c}$  (teljes reflexió) (35-61)

A második egyenletben szereplő „2” azt jelenti, hogy teljes reflexió esetén az impulzusváltozás kétszer akkora, mint teljes abszorpció esetén.

#### 35-4 PÉLDA

A  $6 \text{ W/m}^2$  teljesítménysűrűségű elektromágneses síkhullám  $40 \text{ cm}^2$  területű, a terjedési irányra merőlegesen elhelyezett zsebtükörre esik. (a) Másodpercenként mekkora impulzust ad át a hullám a tükörnek? (b) Mekkora erő hat a tükörre?

#### MEGOLDÁS

(a) A (35-45) összefüggés szerint

$$\frac{dU}{dt} = (S_{\text{átl}})(\text{terület}) = \left(6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)(40 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 2,40 \times 10^{-2} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

A hullám egy másodperc alatt  $U = 2,40 \times 10^{-2} \text{ J}$  energiát szállít a tükörhöz. A (35-58) képlet szerint a teljes visszaverődés esetén a tükörnek másodpercenként átadott  $p$  impulzus nagysága:

$$p = \frac{2U}{c} = \frac{2(2,40 \times 10^{-2} \text{ J})}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})} = 1,60 \times 10^{-10} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \quad (\text{minden másodpercben})$$

$$(b) \quad F = \frac{dp}{dt} = \frac{1,60 \times 10^{-10} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{1 \text{ s}} = 1,60 \times 10^{-10} \text{ N}$$



35-18 ábra

Az elektromágneses hullám a vezető lap elektromágneses tere gyakorol. Az átlagos erőd  $F_x$  erő iránya megegyezik a hullám terjedési irányával.

<sup>9</sup> A nyomásnak, impulzusnak és teljesítménynek egyaránt  $p$  vagy  $P$  a jele. E fejezetben mindhárom mennyiség szerepel; ne tévesszük őket össze.

## Megjegyzések a sugárnyomásról

Sokan ismerik a Crookes-radiométernek nevezett játékszert (35-19a ábra). A szerkezet forgórésze tücsapágyon könnyen mozgó lapátkerék: a függőleges fémlapok egyik oldala fekete, a másik fényes. A szerkezet légüres térben, üvegbúrában helyezkedik el. A búrában a vákuum nem tökéletes, mert a leszívás során valamennyi levegő mindig marad benne. Fény (vagy akár egy vasaló infravörös sugárzása) hatására, a kerék pörögni kezd, mégpedig a fényes felületek irányában. A jelenséget elhamarkodottan a sugárnyomásnak tulajdoníthatnánk; ám ez a következtetés a következő három ok miatt téves:

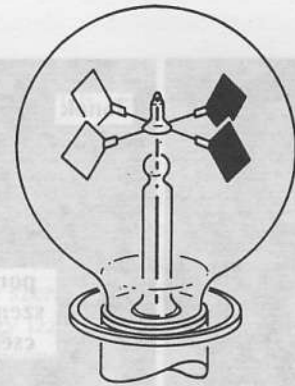
- (1) Ha a lapátokra ható forgatónyomaték a sugárnyomásból eredne, a lapátok éppen ellentétes irányban forognának. (Megmutattuk, hogy a reflektáló fényes felületre kétszer akkora sugárnyomás hat, mint az abszorbeáló fekete felületre, ezért a kerék a fényes lapoknak háttal forogna.)
- (2) Hirtelen megvilágítás hatására a lapátkerék szöggyorsulása viszonylag nagy. Az elektromágneses hullám által a lapátokra kifejlesztett erő sokkal kisebb annál, mint ami ekkora szöggyorsulást képes előidézni. (A 35-4 példa eredményével megbecsülhető, mekkora erő hatna a lapátkerékre izzólámpa közelében.)
- (3) Ha a búrát nagyon kis nyomásra leszívjuk, a kerék megszűnik forogni. (A sugárnyomásból származó forgatónyomaték túl kicsi ahhoz, hogy legyőzze a kerék csapágyazásának súrlódását.)<sup>10</sup>

A Crookes-radiométer lapátkerékének forgására először Maxwell adott magyarázatot 1879-ben. A magyarázat azon alapul, hogy az egyenlőtlen hőmérsékletű felületek mentén a levegő a magasabb hőmérsékletű tartomány felé áramlik<sup>11</sup>. A lapátkerék esetében a levegő a lapátok éleit megkerülve a melegebb fekete oldal felé áramlik. Ennek hatására a fekete oldalak mentén megnövekvő légnyomás forgatja a kereket. Tipikus Crookes-radiométerben ez a hatás mintegy 10 000-szer nagyobb, mint a sugárnyomás hatása.

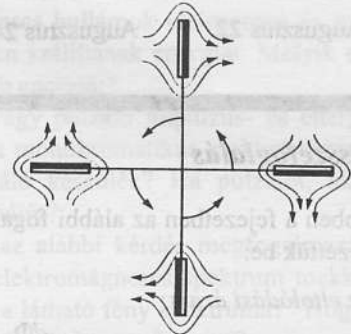
A sugárnyomásnak viszonylagos kicsisége ellenére bizonyos esetekben lényeges hatása lehet. Például a Nap Földre gyakorolt sugárnyomása kb.  $6 \times 10^8$  N erőt fejt ki. A korai ballon-műholdak (mint pl. a 60-as évek elején felbocsátott *Echo* távközlési műholdak) pályája észrevehetően módosult a napfény sugárnyomása következtében. Az űrhajók nagyméretű napelemtábláira ható sugárnyomás következtében az űrhajókra tömegközéppontjuk körüli forgatónyomaték hat.

Egyes üstökösöknek két csóvájuk van, az egyik ionizált atomokból és molekulákból áll, a másik pedig porszemcsékből (35-20 ábra). Az üstökös magjáról úgy gondoljuk, hogy jég, kövek és porszemcsék keveréke. Amint az üstökös megközelíti a Napot, a hősugarak hatására az üstökös mag felszínéről kb. méternyi vastag réteg elpárolog. A sugárnyomás hatására a porrészecskék a görbült, diffúz csóvában gyűlnek össze. Az elpárolgott atomok és molekulák viszont nagyobb sebességekre (egészen 100 km/s értékűre) gyorsulnak a napszél (a Naptól többé-kevésbé egyenletesen kibocsátott töltések, főleg protonok és elektronok árama) hatására.

Becslések azt mutatják, hogy kellően nagy „vitorlával” felszerelt űrjárművek a sugárnyomással a Naprendszerből „kifelé” gyorsíthatók. Persze ez a módszer a fényforrástól túl messze, pl. csillagközi utazásokhoz nem alkalmas.



(a) A Crookes-radiométer.



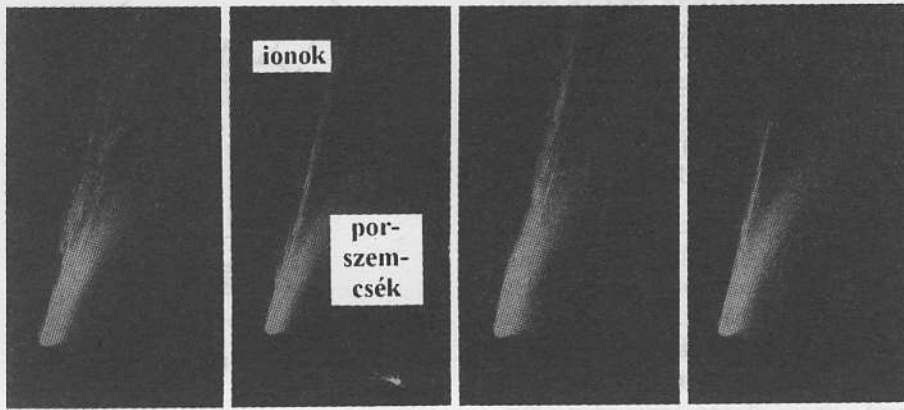
(b) A lapátok környezetében kialakuló légáramlatok felülnézetből.

### 35-19 ábra

A Crookes-radiométer lapátkeréke fény hatására forgásba jön. A forgást előidéző forgatónyomatékot **nem** a fény sugárnyomása hozza létre.

<sup>10</sup> Ha a lapátkeréket vékony kvarcszálra függesztik, és a búrában a nyomás nagyon alacsony, akkor a sugárnyomás hatása tényleg jelentkezik. Csak az egyik lapátot megvilágítva a torziós szálon függő kerék kissé elfordul.

<sup>11</sup> A radiométer mozgásának magyarázata megtalálható például E. H. Kemard *Kinetic Theory of Gases* McGraw-Hill, 1938. c. művében. (Magyar nyelvű irodalom erre vonatkozóan: Fizikai Kísérletek Gyűjteménye, Tankönyvkiadó 1992. (a fordító megj.))



Augusztus 22.      Augusztus 24.      Augusztus 26.      Augusztus 27.

**35-20 ábra**

A Mrkos-üstökös az 1957-ben készült fényképeken jobbról balra mozog. Az üstökös görbült, diffúz, a haladási irányra majdnem merőleges, porszemcsékből álló csóváját a Nap sugárnyomása „fújta el”. A másik, egyenes csóva ionizált atomokból és molekulákból áll, melyet a Naptól kibocsátott ionok és elektronok árama: a *napszél* taszít messzebbre.

**Összefoglalás**

Ebben a fejezetben az alábbi fogalmakat és törvényeket vezetjük be:

Az eltolódási áram:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

A négy Maxwell-egyenlet (vákuum esetében):

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

A hullámeqyenlet (az x tengely pozitív irányában haladó síkhullám esetében):

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Szinuszos, az x tengely pozitív irányában haladó elektromágneses hullám esetében

$$E_y = E_{y0} \sin(kx - \omega t) \quad \text{és} \quad B_z = B_{z0} \sin(kx - \omega t)$$

ahol **E** és **B** egymásra merőlegesek, így **E**×**B** a hullám terjedési irányába mutat.

A fénysebesség vákuumban  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

Az elektromágneses hullámban **E** és **B** vektorok kapcsolata:

$$E_y = cB_z$$

Az elektromágneses hullám átlagos energiasűrűsége:

$$u_{\text{átl}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{y0}^2 \quad \text{vagy} \quad = \frac{1}{2\mu_0} B_{z0}^2$$

Elektromágneses hullámban az energiaáramsűrűség (W/m<sup>2</sup> egységben):

Pillanatnyi érték:  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$

Átlagos érték:  $S_{\text{átl}} = \frac{1}{2\mu_0} E_{y0} B_{z0}$

ahol **S** a Poynting-vektor (mértékegysége W/m<sup>2</sup>), amelynek iránya megegyezik az elektromágneses hullám terjedési irányával. Szokásos neve még: *hullámin-tenzitás*.

Hullámin-tenzitás:  $S_{\text{átl}} = u_{\text{átl}} c$

Az A felületen áthaladó átlagos (W-ban kifejezett) energiaáram:

$$(\text{Energiaáram})_{\text{átl}} = \int \mathbf{S}_{\text{átl}} \cdot d\mathbf{A}$$

Az elektromágneses hullám impulzusa: Ha U elektromágneses energia elnyelése során egy test p impulzust is átvesz, akkor p és U között az

$$U = cp$$

kapcsolat áll fenn

A sugárnyomás: Az S<sub>átl</sub> sugárzási energiafluxust elnyelő testre P nyomás hat.

$$P = \frac{S_{\text{átl}}}{c} \quad (\text{teljes elnyelődés esetén})$$

$$P = \frac{2S_{\text{átl}}}{c} \quad (\text{teljes visszaverődés esetén})$$

## Kérdések

1. Milyen egyszerű készülékkel lehetne azt bemutatni, hogy a változó mágneses erőter elektromos erőteret kelt? Hasonlóképpen, milyen egyszerű készülékkel lehetne megmutatni, hogy változó elektromos erőter hatására mágneses erőter jön létre?
2. Egyszer egy fizikus laboratóriumában függőlegesen felfelé mutató irányú, és időben növekvő mágneses erőteret hozott létre. Ekkor a függőlegesen felfelé irányuló (tehát  $\mathbf{B}$ -vel megegyező irányú) elektronnyaláb a mágneses erőterben eltért a függőlegestől. Vajon mi okozta az elhajlást? Milyen információt lehetett szerezni az elhajlás mértékéből a mágneses erőterre vonatkozóan?
3. Ellenállással sorba kötött síkkondenzátort teleppel töltünk. Hogyan függ az eltolódási áram a dielektrikum anyagi minőségétől?
4. Vajon következtethetünk-e változó mágneses erőter által indukált elektromos erőter nagyságából és irányából a mágneses erőter kezdeti irányára vagy nagyságára?
5. A mágneses dipólusok és kvadrupólusok tulajdonságai a Maxwell-egyenletekkel értelmezhetők. Lehetséges-e vajon a Maxwell-egyenletekkel összeférő tulajdonságú mágneses (pl. két északi és egy déli pólust tartalmazó) tripólust konstruálni?
6. A tér valamely pontjában, bizonyos időpontban az elektromágneses hullámban mind az elektromos térerősség, mind a mágneses indukcióvektor zérus. Hogyan terjedhet tovább ebből a pontból a hullám?
7. A rádiók huzal- vagy rúdantennáit úgy tervezik, hogy a rádióhullámok az elektromos térerősség változásait és ne a mágneses erőterváltozásait érzékeljék. Miért?
8. Tekercset irányérzékeny rádióantennaként használnak. Vajon egy ilyen antenna az elektromágneses hullám mágneses vagy elektromos erőterének változásait érzékeli? Milyen legyen a tekercs orientációja, ha a rádióadóantenna függőleges?
9. Tervezzünk olyan kísérleti berendezést, amellyel a fénysebesség – legalábbis elvileg – kizárólag időben változó erők mérésével lenne meghatározható.
10. Minthogy  $\epsilon_0$  és  $c$  mért értékei  $\mu_0$  definiált értékén keresztül függenek össze, hogyan kell a Maxwell-egyenleteket átrendezni, hogy azokban  $\epsilon_0$  és  $\mu_0$  explicit alakban ne szerepeljenek?
11. Mi a különbség egy izzólámpából és egy rádióadó-ból kilépő elektromágneses sugárzás között?
12. Miért nem igaz az alábbi állítás: Az elektromágneses hullám elektromos erőtere sokkal nagyobb a mágneses erőterénél, mert  $E = cB$ .
13. Az elektromágneses hullámok elektromos és mágneses erőterükben szállítanak energiát. Melyik erőter tartalmaz több energiát?
14. Vajon állandó vagy pulzáló impulzus- és energia-áramot érzékel a monokromatikus elektromágneses hullámot detektáló készülék? Ha pulzálót, akkor milyen frekvenciájút?
15. Mi a helytelen az alábbi kérdés megfogalmazásában? „A teljes elektromágneses spektrum mekkora hányadát jelenti a látható fény spektruma?” Hogyan kellene ezt a kérdést helyesen feltenni?
16. Milyen értelemben hasonlít az elektromágneses hullám egy részecskenyalábhhoz?
17. A Crookes-radiométer lapátkereke úgy forog, hogy a lapátok fényes felülete halad elől, a fekete pedig hátul. Ez éppen ellentétes azzal az iránnyal, amit a sugárnyomás idéz elő. Lehet-e és vajon miként lehet a kereket ellenkező irányban forogatni (persze a lapátkerék módosítása nélkül)?
18. Ideális telep kondenzátort  $V$  feszültségre tölt fel. Az áramkör összes vezetői szupravezetől készütek, így az áramkör ellenállása zérus. A telepet  $Q$  töltés hagyta el,  $V$  potenciálkülönbségen, így a telep  $QV$  energiát adott le. A kondenzátor  $1/2QV$  energiát vett fel. Hová lett a telep által leadott energia másik fele?

## Feladatok

### 35.2 Az eltolódási áram és a Maxwell-egyenletek

35A-1 Mekkora utat tesz meg a fény 1 ns alatt?

35B-2 Síkkondenzátor lemezei 10 cm átmérőjűek és 1 mm-es távolságban vannak egymástól. mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a kondenzátor szélénél, ha a kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség 1000 V/s sebességgel nő? (Az elektromos erőter inhomogenitását a lemezek szélénél el lehet hanyagolni.)

35B-3 Mutassuk meg, hogy az  $i_d = \epsilon_0 d\Phi_E/dt$  eltolódási áram valóban áramerősség-dimenziójú.

35B-4 Egy 0,5  $\mu\text{F}$ -os síkkondenzátort 100  $\Omega$ -os ellenálláson keresztül 9 V-os telepről töltünk. Számítsuk ki a kondenzátoron átfolyó eltolódási áramot a töltés megkezdése után 50  $\mu\text{s}$  eltelte után.

35B-5 Mutassuk meg, hogy a síkkondenzátor lemezei között folyó eltolódási áram az  $i_d = C dV/dt$  formulával adható meg, ahol  $C$  a kondenzátor kapacitása és  $dV/dt$  a kondenzátor feszültségének változási sebessége.

35B-6 Párhuzamos körlemezekből álló kondenzátort töltünk. Vázzuk fel a mágneses indukcióvektor nagy-



ságának a változását a kondenzátor tengelyétől vett távolság függvényében (a lemezek szélén túl is; e tartományban az elektromos erőtér inhomogenitásának hatását hanyagoljuk el).

**35B-7** Az  $R$  sugarú párhuzamos körlemezekből álló kondenzátor kapacitása  $C$ . A lemezek közötti potenciálkülönbség állandó  $dV/dt$  sebességgel változik. Feltételezve, hogy a lemezek szélénél az elektromos tér inhomogenitása elhanyagolható, mutassuk meg, hogy a mágneses indukcióvektor nagysága a kondenzátor tengelyétől vett távolság függvényében az alábbi függvények szerint változik: ha  $r < R$ :  $(2rC/R^2)dV/dt \times 10^{-7}$ ; ha  $r > R$ :  $(2C/r)dV/dt \times 10^{-7}$  (ahol az egyes mennyiségek SI egységekben adottak).

### 35.3 Elektromágneses hullámok

**35A-8** Elektromágneses hullám mágneses indukcióvektorának az amplitúdója vákuumban  $3 \times 10^{-8}$  T. (a) Számítsuk ki a megfelelő elektromos térerősség amplitúdóját. (b) Ha az elektromos térerősség  $-y$  irányú és a hullám a  $-x$  irányban terjed, milyen irányú vajon a mágneses indukcióvektor?

**35A-9** Mutassuk meg, hogy az  $E = cB$  képlet dimenzió szerint helyes.

**35A-10** Elektromágneses síkhullám elektromos térerősségének az amplitúdója  $25$  V/m. (a) Számítsuk ki a mágneses indukcióvektor amplitúdóját. (b) Mekkora a frekvencia, ha a hullámhossz  $2,80$  m? (c) Írjuk fel a hullám elektromos komponensét leíró,  $E = E_m \sin(kx - \omega t)$  alakú összefüggést konkrét SI mértékegységű számértékekkel.

**35B-11** A  $\mu_0 E/B$  hányados impedancia dimenziójú. A vákuumban terjedő elektromágneses hullám esetében ezt a hányadost a vákuum karakterisztikus impedanciájának nevezzük. Mutassuk meg, hogy SI mértékegysége ohm, és számítsuk ki számértékét.

### 35.5 Az elektromágneses hullámok energiája

**35B-12** A Föld mágneses terének tipikus fluxussűrűsége  $50 \mu\text{T}$ . Számítsuk ki, milyen intenzitású elektromágneses hullámban ekkora a mágneses indukcióvektor amplitúdója.

**35A-13** Az URH rádió által vett elektromágneses hullám elektromos térerősség-komponensének amplitúdója  $5 \times 10^{-5}$  V/m. (a) Mekkora az ehhez tartozó mágneses indukcióvektor amplitúdója? (b) Számítsuk ki a hullám intenzitását.

**35B-14** Egy  $2$  mm átmérőjű rézhuzal ellenállása méterenként  $5,2$  m $\Omega$ . Számítsuk ki a huzal felületén (a)  $E_0$ , (b)  $B_0$ , (c)  $S_{\text{átl}}$  értékét, ha a huzalon  $20$  A amplitúdójú váltakozó áram halad át. (Az áramsűrűséget a huzalban egyenletesnek tekinthetjük.)

**35B-15** Egy  $+x$  irányban terjedő elektromágneses síkhullám elektromos térerősség-komponensét SI egységekben az  $E = 6 \sin(kx - 10^{16}t) \hat{y}$  függvény írja le. (a) Írjuk fel a mágneses indukcióvektor jellemző képletét is. (b) Számítsuk ki a sugárzás hullámhosszát. (c) Számítsuk ki a sugárzás átlagos energiasűrűségét.

**35B-16** Felhasználva a 35B-14 feladatban kapott  $S_{\text{átl}}$  értékét, igazoljuk numerikusan a huzal  $1$  méteres szakaszára, hogy  $\oint S_{\text{átl}} \cdot dA = i^2 R$ .

**35B-17** Impulzuslézer  $4$  ns hosszúságú,  $2$  J energiájú fényimpulzusokat ad le. A fénynyaláb átmérője  $3$  mm. (a) Számítsuk ki a kibocsátott fénynyaláb hosszát. (b) Számítsuk ki a fénynyaláb energiasűrűségét ( $\text{J/m}^3$  egységben). (c) Mekkora a hullám  $E_0$  elektromos térerősség komponensének az amplitúdója?

**35B-18** Fényforrás  $100$  W elektromágneses teljesítménnyel monokromatikus fényt bocsát ki egyenletesen a tér minden irányában. (a) Számítsuk ki az elektromos erőtér átlagos energiasűrűségét a fényforrástól  $1$  m távolságban. (b) Számítsuk ki a mágneses erőtér átlagos energiasűrűségét a fényforrástól ugyanekkora távolságban (c) Számítsuk ki a hullám intenzitását ezen a helyen.

**35B-19** Mutassuk meg, hogy egy szinuszos elektromágneses hullám esetében a Poynting-vektor  $|S_{\text{átl}}|$  átlagos értékét az elektromos térerősség  $E_{\text{eff}}$  effektív értékével az  $E_{\text{eff}} = \sqrt{\mu_0 c S_{\text{átl}}}$  képlet kapcsolja össze.

**35B-20** Az  $1$  m-es élhosszúságú kocka élei a derékszögű koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamosak. A kockán egy  $+y$  irányban haladó szinuszos elektromágneses síkhullám halad át, melyben az elektromos térerősség csúcserő  $600$  V/m. A  $\lambda$  hullámhossz olyan nagy, hogy a kockában gyakorlatilag mindig, mindenütt ugyanakkora a térerősség. (a) Számítsuk ki a kockában az elektromos erőtér energiájának maximális értékét. (b) Mekkora, és milyen irányú a  $B$  vektor ha  $E = E_0 \hat{x}$ ? (c) Számítsuk ki a kocka egyes lapjain áthaladó átlagos teljesítményt a Poynting-vektor felhasználásával.

### 35.6 Az elektromágneses hullámok impulzusa

**35A-21** Egy  $50$  m átmérőjű műanyag (mylar) „léggömb”-műhold a földfelszín feletti  $1000$  km-es magasságú pályán kering. Mekkora, a napfény sugárnyomásából származó erő hat a műholdra? Tételezzük fel, hogy a teljes sugárzás elnyelődik.

**35A-22** Egy  $100$  mW-os lézernyaláb egy tükörről merőlegesen visszaverődik. Mekkora erő hat a tükörről?

**35A-23** Tiszta időben a Föld felszínén a napfény intenzitása  $840$  mW/m $^2$ . Ha egy, a napsugarakra merőleges felület tökéletesen reflektál, mekkora rajta a sugárnyomás?

**35B-24** (a) Vajon mekkora erővel hat a napfény sugárnyomása a Földre? (Tételezzük fel, hogy a Föld az ösz-

szes beeső napsugárzást elnyeli.) (b) Hasonlítsuk össze ezt az erőt a Nap gravitációs vonzóerejével.

**35B-25** Egy 15 mW teljesítményű hélium-neon lézer kör keresztmetszetű fénynyalábot bocsát ki. A nyaláb átmérője 2 mm, a fény hullámhossza 632,8 nm. (a) Mekkora a nyalábban az elektromos térerősség maximális értéke? (b) Mekkora energia van a nyaláb 1 méteres szakaszában? (c) Mekkora impulzusa van a nyaláb 1 méteres szakaszának?

**35B-26** Felületre merőlegesen  $50 \text{ W/m}^2$  intenzitású sugárzás esik. A sugárzás 10%-a elnyelődik, a többi visszaverődik. Számítsuk ki a sugárnyomást.

**Vegyes feladatok**

**35C-27** Vákuumban lévő kis fémgömbre a hozzá vezető huzalon keresztül felváltva pozitív, illetve negatív töltéseket juttatunk. A gömb töltése időben a  $q = (4 \text{ pC}) \sin \omega t$  függvény szerint változik, ahol  $\omega = 2\pi f$ . Számítsuk ki a gömböt körülvevő tér egy oktánsában az  $i_r(t)$  eltolódási áramot (a) ha  $f = 60 \text{ Hz}$ , illetve (b) ha  $f = 60 \text{ MHz}$ .

**35C-28** Elektromágneses síkhullám az  $x$  tengely irányában terjed. A tengely adott pontjában és adott időpontban a hullám elektromos térerőssége  $7,5 \text{ V/m}$ , és  $2,8 \times 10^{16} \text{ V/ms}$  sebességgel változik. (a) Mutassuk meg, hogy a megadott értékek zöld színű ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ) fényt jellemezhetnek. (b) Számítsuk ki ugyanezen a helyen és időpontban  $\delta B_z / \delta t$  nagyságát.

**35C-29** Behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy az  $E = E_0 e^{k(x-ct)}$  függvény kielégíti a  $\delta^2 E / \delta x^2 = (1/c^2) \delta^2 E / \delta t^2$  hullámegyenletet. (Bármely,  $f(x \pm ct)$  alakú függvény kielégíti a hullámegyenletet!)

**35C-30** Az  $x$  tengely irányában  $500 \text{ nm}$  hullámhosszúságú,  $60 \mu\text{W/m}^2$  intenzitású monokromatikus fény terjed. Meghatározott időpontban a koordináta-rendszer origójában a Poynting-vektor nagysága zérus. Mekkora az elektromos térerősség és mágneses indukcióvektor nagysága ugyanebben az időpontban, az  $x$  tengely mentén,  $2/3$  hullámhossznyira az origótól?

**35C-31** Mutassuk meg, hogy az  $E = E_0 f(x \pm ct)$  függvény (ahol  $f(x \pm ct)$  tetszőleges alakú), kielégíti a  $\delta^2 E / \delta t^2 = c^2 \delta^2 E / \delta x^2$  hullámegyenletet.

**35C-32** Mikrohullámú adó parabolaantennája  $10^{-2}$  szteradian térszögben sugároz. Az adótól  $2 \text{ km}$ -es távolságban a mikrohullámú sugárzás elektromos térerőssége  $8 \text{ V/m}$ . Mekkora az adó teljesítménye?

**35C-33** Elektromágneses sugárzást kibocsátó forrás hosszú egyenes mentén sugároz (vonalforrás); teljesítménye méterenként  $20 \text{ W}$ . Mekkora az elektromos térerősség amplitúdója a vonalforrástól  $5 \text{ m}$ -re?

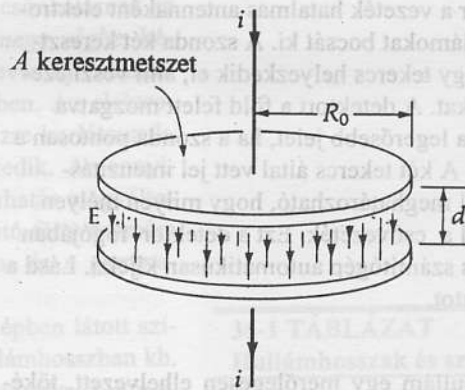
**35C-34** Mekkora az előző feladatban a vonalforrástól  $5 \text{ m}$ -re az elektromágneses hullám energiasűrűsége?

**35C-35** Egy úrbeli porszemcsére a Nap gravitációs vonzóereje és a sugárnyomás taszítóereje hat. Tételezzük fel, hogy a porszemcsé  $R$  sugarú,  $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$  sűrű-

ségű gömb, mely a rá eső sugárzást teljesen elnyeli. (a) Mekkora  $R$  esetén egyenlő a gravitációs és a sugárnyomás által kifejtett erő? (A számításhoz szükséges állandók a függelékben megtalálhatók.) (b) Miért nem lényeges a Naptól vett távolság?

**35C-36** Síkkondenzátor  $15 \text{ cm}$  sugarú, egymástól  $0,1 \text{ mm}$  távolságban lévő lemezekből áll. A kondenzátort  $5 \text{ M}\Omega$ -os ellenálláson keresztül  $120 \text{ V}$  feszültségű teleppel töltjük. Tekintsünk egy, a kondenzátor tengelyétől  $8 \text{ cm}$  távolságban lévő pontot. Mekkora ebben a pontban a töltés megkezdése után  $1 \text{ ms}$  elteltével (a) a mágneses indukcióvektor; (b) az elektromos térerősség és (c) a Poynting-vektor nagysága.

**35C-37** Síkkondenzátort  $i$  áramerősséggel töltünk (35-21 ábra). (a) Mutassuk meg, hogy mialatt az elektromos térerősség növekszik, az  $S$  Poynting-vektor a lemezek közötti térben mindenütt a kondenzátor tengelye felé mutat. (A lemezek szélénél a térerősséginhomogenitásait figyelmen kívül hagyhatjuk.) (b) Ha a Poynting-vektort a kondenzátort körbevevő hengerpalást mentén integráljuk, akkor a felület által bezárt térrészbe áramló energia nagyságát kapjuk meg. Mutassuk meg, hogy ez az energiaáram egyenlő a kondenzátor elektromos erőterében tárolt energia növekményével. (Ebben az értelemben, a kondenzátor energiája nem az áramvezető huzalokon keresztül, hanem a környező térből „érkezik”.)



**35-21 ábra**

A 35C-37 feladathoz

**35C-38** Az  $x$  irányban terjedő elektromágneses síkhullám frekvenciája  $90 \text{ MHz}$ . Az elektromos térerősség csúcserőssége  $2 \text{ mV/m}$ ;  $\pm y$  irányú. (a) Számítsuk ki a hullámhosszat, a periódusidőt és a mágneses indukcióvektor  $B_0$  amplitúdóját. (b) Hogyan változik az elektromos térerősség és a mágneses indukció térben és időben? Adjuk meg a megfelelő elektromos és mágneses erőteret leíró függvényeket a konkrét értékekkel. (c) Mekkora a hullám felületegységre jutó átlagos teljesítménye? (c) Számítsuk ki a hullámban az átlagos energiasűrűséget ( $J/m^3$  egységben). (e) Mekkora erőt gyakorolna az elekt-



### 35-22 ábra

Ez a hordozható szonda új módszert alkalmaz a földalatti gázvezetékek felderítésére. A csővezetékre a földből kiemelkedő egyik pontjában 80 kHz-es AC jelet adnak, s ekkor a vezeték hatalmas antennaként elektromágneses hullámokat bocsát ki. A szonda két keresztfejében egy-egy tekercs helyezkedik el, ami veszi ezeket a hullámokat. A detektort a föld felett mozgatva akkor kapjuk a legerősebb jelet, ha a szonda pontosan a cső felett van. A két tekercs által vett jel intenzitáskülönbségéből meghatározható, hogy milyen mélyen helyezkedik el a csővezeték. Ezt a detektor fogójában elhelyezett kis számítógép automatikusan kijelzi. Lásd a 35C-43 feladatot.

romágneses hullám egy merőlegesen elhelyezett, tökéletesen reflektáló felületre?

**35C-39** Egy  $a$  sugarú,  $\rho$  fajlagos ellenállású anyagból készült hosszú hengeres ellenálláson váltakozó áram folyik át. (a) Mutassuk meg, hogy az  $S$  Poynting-vektor minden időpontban az ellenállás felületén sugárirányú és befelé mutat. (b) Integráljuk  $S_{\text{all}}$  értékét az ellenállás  $l$  hosszúságú szakaszának felületére. Mutassuk meg, hogy az integrál egyenlő az ellenállás adott hosszúságú szakaszában disszipált  $I_{\text{eff}}^2 R$  hőteljesítménnyel. A számítást

leegyszerűsíti, hogy a henger felületén  $E$  párhuzamos a tengellyel. (E számítás azt sejteti, hogy az ellenálláson hővé alakuló energia nem az ellenálláson és az áramvezető huzalokon keresztül, hanem a környező térből „érkezik”.)

**35C-40** Űrhajók hajtására a napfény sugárnyomása is felhasználható; ehhez nagy méretű, teljesen reflektáló „napvitorlák” kellenek. Tekintsünk egy űrhajót, a Föld és a Mars között félúton lévő bolygópályán. (a) Az  $L$  függelék adatait felhasználva, számítsuk ki, mekkora a napsugárzás  $1 \text{ m}^2$  felületre eső teljesítménye. (b) Képzeljük el, hogy az űrhajóra, a Nap irányára merőlegesen beálló  $900 \text{ m} \times 1200 \text{ m}$  méretű, téglalap alakú, tökéletesen reflektáló lapos napvitorlát szerelnek. Mekkora az űrhajó gyorsulása, ha a teljes tömege (a napvitorlával együtt)  $2900 \text{ kg}$ ? (c) Ha a vitorla orientációját megváltoztatjuk úgy, hogy a felület normálisa a napsugarakkal  $28^\circ$ -os szöget zárjon be, akkor mekkora és milyen irányú lesz a gyorsulás? (Megjegyzés: ha a fény ferdén éri a felületet, a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel.)

**35C-41** Képzeljünk el egy űrhajóst, aki űrséta során az űrhajótól  $10 \text{ m}$  távolságban elveszíti a kapcsolatot az űrhajóval, és hogy oda visszajusson, lámpáját, mint „foton-rakétát” működteti, mindig az űrhajó felé hajtva magát. Az űrhajós kezdeti sebessége (az űrhajóhoz képest) zérus, felszereléssel együtt tömege  $110 \text{ kg}$ ; a lámpája  $100 \text{ W}$  teljesítményű fényforrás, amely egyenes fénynyalábot bocsát ki. (a) Mennyi idő alatt érne vissza így az űrhajóhoz? (b) A lámpa működtetése helyett az űrhajós a  $3 \text{ kg}$  tömegű lámpát inkább eldobja. A lámpa  $12 \text{ m/s}$  sebességgel távolodik tőle. Mennyi idő alatt ér vissza az űrhajós ekkor az űrhajóhoz?

**35C-42** (a) Vezessük le, milyen összefüggés van egy abszorbeáló felületre merőlegesen beeső sugárzás sugárnyomása és a sugárzás energiasűrűsége között. (b) Miért nem függ ez az összefüggés attól, hogy a felület reflektáló vagy abszorbeáló? (c) Vajon ugyanilyen összefüggést kapunk-e akkor is, ha a beeső sugárzás nem merőleges a felületre? Miért?

**35C-43** Tekintsük a 35-22 ábrán látható fémdetektort. A két vízszintes vevőtekercs egymástól  $50 \text{ cm}$  távolságban, az alsó a földtől  $10 \text{ cm}$  magasságban helyezkedik el. A szondát a képen látható férfi föld alatti egyenes gázcső felett tartja, amelyre az ábraalírásban részletezett módon AC feszültséget kapcsoltak. A felső illetve alsó tekercsben indukált AC feszültség effektív értéke  $0,052 \text{ mV}$ , illetve  $0,074 \text{ mV}$ . Milyen mélyen van a gázcső a föld alatt?

- 34C-43 A válasz adott.  
 34C-45 A válasz adott.  
 34C-47 2000 A/s  
 34C-49 A válasz adott.  
 34C-51 A válasz adott.  
 34C-53  $i = 40,8 \sin(\omega t + 25,6^\circ)$   
 34C-55 239 mH  
 34C-57 a) 100  $\mu\text{F}$  b) 632 rad/s c) 125 W  
 d) 39,5 V f) 150  $\mu\text{F}$  g) párhuzamosan  
 34C-59 A válasz adott.

### XXXV. Fejezet

- 35A-1 30,0 cm  
 35B-3 A válasz adott.  
 35B-7 ha  $r < R$ :  $(2rC/R^2)dV/dt \times 10^{-7}$ ;  
 ha  $r > R$ :  $(C/r)dV/dt \times 10^{-7}$   
 35A-9 A válasz adott.  
 35B-11 377  $\Omega$   
 35A-13 a)  $1,67 \times 10^{13}$  T b)  $3,32 \times 10^{12}$  W/m<sup>2</sup>  
 35B-15 a)  $(2 \times 10^{-8}) \sin(kx - 10^{16} t) \hat{z}$   
 b)  $1,88 \times 10^{-7}$  m c)  $1,59 \times 10^{-10}$  J/m<sup>3</sup>  
 35B-17 a) 1,20 m b)  $u = 2,36 \times 10^5$  J/m<sup>3</sup>  
 c)  $E_0 = 2,31 \times 10^8$  V/m  
 35B-19 A válasz adott.  
 35A-21  $8,97 \times 10^{-3}$  N  
 35A-23  $5,60 \times 10^{-6}$  N/m<sup>2</sup>  
 35B-25 a) 1900 V/m b)  $5,00 \times 10^{-11}$  J  
 c)  $1,67 \times 10^{-19}$  kg·m/s  
 35C-27 a)  $1,88 \times 10^{-10} \cos 377t$   
 b)  $1,00 \times 10^{-4} \cos[(3,77 \times 10^{-8})t]$   
 35C-29 A válasz adott.  
 35C-31 A válasz adott.  
 35C-33 21,9 V/m  
 35C-35 a) 292 nm  
 35C-37 A válasz adott.  
 35C-39 A válasz adott.  
 35C-41 a) 22,6 h b) 30,5 s

### XXXVI. Fejezet

- 36A-1 A válasz adott.  
 36B-3 A válasz adott.  
 36B-5 (30, -40), (-30, 40), (-30, -40), (cm-ben)  
 36A-7 a) 1,09 cm, a gömbön belül b) a kép  
 egyenesállású, virtuális,  $N = 0,273$   
 36A-9 a) 7,50 cm b)  $\infty$   
 36B-11 9,23 cm  
 36B-13 8,00 cm  
 36C-15 A válasz adott.  
 36C-17 40,0 cm  
 36C-19 A válasz adott.  
 36C-21 ha  $t = 228$  cm, a kép fordított állású, valódi és  
 $N = -0,123$

ha  $t = 21,9$  cm, a kép egyenes állású, virtuális  
 és  $N = 8,12$

- 36C-23 A válasz adott.  
 36C-25 a) 30,0 cm b) 1,67  
 36C-27 valódi, egyenes állású, a nagyítás egységnyi

### XXXVII. Fejezet

- 37A-1  $n = 1,52$   
 37B-3 A válasz adott.  
 37B-5 0,624 cm  
 37B-7 a)  $20,6^\circ$  b) 0,400 szteradián c)  $35,4^\circ$   
 37B-9 1,51  
 37B-11 2,14 szteradián  
 37B-13 17,0%  
 37A-15 R  
 37B-17 2,00  
 37A-19 3,57 mm kifelé  
 37A-21 26,7 cm  
 37B-23  $2f$   
 37A-25 a) 0,436 mm b) 0,0125  
 37B-27 a) 17,2 cm b) 51,7 cm c) -51,7 cm  
 d) -17,24 cm  
 37B-29 a) 42,0 cm b) 14,0 cm  
 37A-31 a)  $24,0$  b)  $48,1^\circ$   
 37B-33 a) +3,50 dioptria b) 28,6 cm  
 37B-35 18,2 cm-től 66,7 cm-ig  
 37C-37 A válasz adott.  
 37C-39 A válasz adott.  
 37C-41 A válasz adott.  
 37C-43 a) 20,8 km b) 113 millió c)  $2,63 \mu\text{s}$   
 37C-45 a gömbfelületről számítva: a)  $2,67R$  b)  $1,80R$   
 c)  $0,960R$   
 37C-47 A válasz adott.  
 37C-49  $(L^2 - 4fL)^{1/2}$   
 37C-51 A válasz adott.  
 37C-53 A válasz adott.  
 37C-55 a) 20 cm-re a lencse mögött, virtuális, fordított  
 állású kép  $N = -2$  b) a lencse tárgyoldalán  
 37C-57 valódi, fordított állású kép, 0,174 m-re a  
 gyújtólencsén túl,  $N = -0,42$   
 37C-59 A válasz adott.

### XXXVIII. Fejezet

- 38A-1 5,00 mm  
 38A-3 1,33 mm  
 38B-5 A válasz adott.  
 38B-7 a) 1034,4827 b)  $62,1^\circ$   
 38B-9 6  
 38B-11 sötét  
 38B-13 a)  $2,73E_0, 30^\circ$  b)  $2E_0, 60^\circ$   
 c) 0, definiálatlan  
 38A-15 a) 105 nm b) 1,30  
 38A-17 199 nm