1. feladat (18 pont)
Adja meg az alábbi egyenlet azon megoldásait algebrai alakban, amelyeknek valós része pozitív, képzetes része negatív!

$$z^6 + 7z^3 - 8 = 0$$

Mo. $z^3 = -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$ vagy $z^3 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$ **(6p)** . Az első egyenlet megoldásai közül a $2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3}$ felel meg a feltételeknek **(7p)** , a második egyenlet megoldásai közül pedig egyik sem **(5p)** .

---

2. feladat (5+10=15 pont)
a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ definícióját!
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 3n}{n^2 + n + 2} = \infty$!

Mo. *a*) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ha minden $P > 0$ számhoz létezik $N(P) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(P)$ esetén $a_n > P$. **(5p)**

b) Legyen $P > 0$. Ekkor $\dfrac{n^3 - 3n}{n^2 + n + 2} > P$ teljesül, ha $n \geq 3$ és

$$\frac{n^3 - 3n}{n^2 + n + 2} > \frac{n^3 - \frac{n^3}{2}}{n^2 + n^2 + n^2} = \frac{n}{6} > P, \qquad \textbf{(5p)}$$

vagyis ha $n > 6P$ **(3p)** , így $N(P) = \max(3, 6P)$ **(2p)**

---

3. feladat (9+9+9=27 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n, \qquad b_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{n^2}, \qquad c_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{n^3}$$

Mo.

$$b_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{n^2} \overset{\textbf{(5p)}}{=} \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \overset{\textbf{(3p)}}{\to} \frac{e}{e^3} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{1}{e^2}.$$

$a_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \sqrt[n]{b_n}$, tehát mivel tetszőleges $\frac{1}{e^2} > \varepsilon > 0$ **(3p)** esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N$ esetén

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{e^2} - \varepsilon} < a_n < 1 \qquad \mathbf{(3p)}$$

így a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ **(1p)** .

$c_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} b_n^n$, tehát mivel tetszőleges $1 - \frac{1}{e^2} > \varepsilon > 0$ **(3p)** esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N$ esetén

$$0 < c_n < \left(\frac{1}{e^2} + \varepsilon\right)^n \to 0 \qquad \mathbf{(3p)}$$

így a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ **(1p)** .

---

4. feladat (20 pont)
Konvergens-e az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Mo. $a_2 = \sqrt{6} > a_1$, és ha $a_n < a_{n+1}$, akkor $3a_n < 3a_{n+1}$ tehát $a_{n+1} = \sqrt{3a_n} < \sqrt{3a_{n+1}} = a_{n+2}$, vagyis a sorozat monoton nő **(5p)** . Ha a sorozat korlátos, akkor konvergens, és határértéke a sorozat legkisebb felső korlátja **(2p)** . A lehetséges A határérték kielégíti az $A = \sqrt{3A}$ egyenletet **(2p)** , vagyis $A = 0$ vagy $A = 3$ **(2p)** . Mivel $a_n \geq 2$, így a határérték csak 3 lehet **(2p)** . Belátjuk, hogy $a_n < 3$ **(2p)** . $a_1 < 3$, és ha $a_n < 3$, akkor $3a_n < 9$, így $a_{n+1} = \sqrt{3a_n} = 3$ **(4p)** . A sorozat tehát monoton és korlátos, így konvergens, tehát határértéke 3. **(1p)**

---

5. feladat (20 pont)
Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \frac{n! + n^9}{9^n + (-n)^n}, \qquad\qquad b_n = \frac{9^n + (-n)^n}{n! + n^9}$$

Mo.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1 + \frac{n^9}{n!}}{\left(\frac{9}{n}\right)^n + 1} \to 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1 + \frac{n^9}{n!}}{\left(\frac{9}{n}\right)^n - 1} \to 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad \mathbf{(6p)}$$

A sorozat egyetlen torlódási pontja a 0 **(1p)** , vagyis $\limsup a_n = \liminf a_n = 0 = \lim a_n$ **(3p)** .

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{\left(\frac{9}{n}\right)^n + 1}{1 + \frac{n^9}{n!}} \to \infty, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{\left(\frac{9}{n}\right)^n - 1}{1 + \frac{n^9}{n!}} \to -\infty, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad \textbf{(6p)}$$

A sorozat torlódási pontjainak halmaza $\{-\infty, \infty\}$ **(1p)** , vagyis $\limsup b_n = \infty$, **(1p)** $\liminf b_n = -\infty$ **(1p)** , így a sorozat nem konvergens **(1p)** .

IMSC feladat (1+3+4=8 IMSC pont)
a) Írja föl a komplex számsíkon azt az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami a valós tengelyre tükröz!
b) Írja föl a komplex számsíkon azt a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami az $y = x$ egyenletű, 45°-os egyenesre tükröz!
c) Írja fel a legegyszerűbb alakban a fenti két transzformáció $g \circ f$ kompozícióját! Mi ennek a geometriai jelentése?

Mo. *a*) $f(z) = \overline{z}$, **(1p)**
b) $g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} \overline{e^{-i\frac{\pi}{4}} z} = i\overline{z}$, **(3p)**
c) $(g \circ f)(z) = iz$, origó körüli 90°-os forgatás. **(4p)**
