Javítási példány

Nagypélda

Egy FI rendszer állapotváltozós leírásában szereplő mennyiségek közül ismert: $\underline{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$,

$\underline{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}$ és D = 4, ismert továbbá a rendszermátrix két sajátértéke: $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = -4$, valamint a λ_1 -hez tartozó Lagrange mátrixa: $\underline{\underline{L}}_1 = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ -1,5 & 1,5 \end{bmatrix}$.

a) Mit állíthat a rendszer stabilitásáról? Válaszát indokolja ! (4 pont)

b) Adja meg a rendszermátrix λ_2-höz tartozó $\underline{\underline{L}}_2$ Lagrange mátrixát! (2 pont)

c) Adja meg a rendszer impulzusválaszát! (6 pont)

d) Adja meg a rendszer válaszjelét az $u(t) = \varepsilon(t)\, e^{2t}$ gerjesztő jelre! (6 pont)

e) Adja meg a rendszer válaszjelét a nem belépő $u(t) = 5\, e^{2t}$ gerjesztő jelre! (2 pont)

---

a) $\mathrm{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$, $\Rightarrow$ a rendszer aszimptotikusan stabilis, 2 pont

$\Rightarrow$ GV stabilis 2 pont, összesen 4 pont

b) Egyik megoldás: $\underline{\underline{L}}_2 = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{L}}_1 = \begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 \\ 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}$ 2 pont

Másik megoldás: $\underline{\underline{A}} = (\lambda_1 - \lambda_2)\,\underline{\underline{L}}_1 + \lambda_2\,\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad \underline{\underline{L}}_2 = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_1\,\underline{\underline{E}}\right)$

$\underline{\underline{L}}_2 = \begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 \\ 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}$ 2 pont

Csak egyik megoldás értékelhető, a b) kérdésre maximum 2 pont

c) $h(t) = D\,\delta(t) + \varepsilon(t)\,\underline{C}^T\left(\underline{\underline{L}}_1 e^{\lambda_1 t} + \underline{\underline{L}}_2 e^{\lambda_2 t}\right)\underline{B}$

$$\underline{C}^T\,\underline{\underline{L}}_1\,\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ -1,5 & 1,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,5 & 7,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = -30$$

$$\underline{C}^T\,\underline{\underline{L}}_2\,\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 \\ 1,5 & -0,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,5 & -2,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 20$$

$h(t) = 4\,\delta(t) + \varepsilon(t)\left(-30\,e^{-2t} + 20\,e^{-4t}\right)$ 6 pont

d) $y(t) = \varepsilon(t)\displaystyle\int_{-0}^{t} e^{2(t-\tau)}\left(4\delta(\tau) + 20\,e^{-4\tau} - 30\,e^{-2\tau}\right)d\tau =$ 3 pont

$$= \varepsilon(t)\left[4e^{2t} + 20e^{2t}\int_0^t e^{-6\tau}\,d\tau - 30e^{2t}\int_0^t e^{-4\tau}\,d\tau\right] =$$

$$= \varepsilon(t)\left[4e^{2t} + \frac{20}{-6}e^{2t}\left(e^{-6t} - 1\right) - \frac{30}{-4}e^{2t}\left(e^{-4t} - 1\right)\right] =$$

$= \varepsilon(t)\,(-\,0{,}1667\,e^{2t} - 3{,}3333\,e^{-4t} + 7{,}5\,e^{-2t})$ 3 pont,

összesen 6 pont

e) Egyik megoldás. A rendszer linearitása és az előző pont eredménye alapján:
$y(t) = -\,0{,}8333\,e^{2t}$ 2 pont

Másik megoldás: $y(t) = \int\limits_{-0}^{\infty} 5\,e^{2(t-\tau)}\left(4\,\delta(\tau) + 20\,e^{-4\tau} - 30\,e^{-2\tau}\right)d\tau = 20\,e^{2t} +$

$+\,100\,e^{2t}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-6\tau}\,d\tau \;-\; 150\,e^{2t}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-4\tau}\,d\tau = 20\,e^{2t} + \frac{100}{6}\,e^{2t} - \frac{150}{4}\,e^{2t} = -\,0{,}8333\,e^{2t}$

2 pont

Csak egyik megoldás értékelhető, az e) kérdésre maximum 2 pont

---

<u>Kispéldák</u>

1. Egy DI rendszer gerjesztő jele $u[k] = \delta[k+1]$, válaszjele $k = -\,2$-re $y[-\,2] = 1$. Kauzális-e ez a DI rendszer? Válaszát indokolja!

Nem, a -2 ütembeli válasz -1-beli gerjesztő jel értékhez tartozik 2 pont

2. Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = 25\,\varepsilon[k]\,0{,}2^k$, gerjesztő jele $u[k] = 8\,\varepsilon[k]$. Számítsa ki a válaszjel értékét $k = 2$-re! (2 pont)

$y[k] = 248$

3 A lineáris, invariáns DI rendszer válaszjele az $u[k]$ gerjesztő jelre $y[k]$. Ennek felhasználásával adja meg az $y_1[k]$ válaszjel kifejezését, ha a gerjesztő jel $u_1[k] = 5\,u[k-1]$!)

$y_1[k] = 5\,y[k-1]$ 2 pont

4. Egy DI rendszer impulzusválaszának kifejezése $h[k] = \varepsilon[k]\,A\,\alpha^k$. Adja meg a valós $A \neq 0$ és az α paraméterre a rendszer GV stabilitásának feltételét!

$|\alpha| < 1$, A tetszőleges 2 pont

5. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása az alábbi:
$x[k+1] = -\,0{,}5\,x[k] - 2\,u[k]$, $y[k] = 2\,x[k] + u[k]$
Adja meg a rendszer ugrásválaszának (az $\varepsilon[k]$ gerjesztő jelre adott válaszának) állandó összetevőjét! (2 pont)

$y_g[k] = -\,\frac{5}{3} \approx -\,1{,}6667$ 2 pont