1A. Elméleti alapok

Mátrixalgebra

Mátrix és mérete, (m sor, n oszlop, m n). Speciális mátrixok: téglány ($m \neq n$)–, négyzetes (kvadratikus, $m=n$)–, diagonális (átlós, $diag(A)$)–, egység (**I**, idem)–, null (**0**) mátrixok, oszlopvektor (m 1), sorvektor (1 n), skalár (1 1) . Transzponált mátrix, transzponált vektor, A^T, x^T. Algebrai műveletek mátrixokkal: összeadás, kivonás, *szorzás*. Szorzás skalárral. Mátrix rangja: $rang(A)$. Kvadratikus mátrix adjungáltja: $adj(A)$. Az inverz mátrix: $A^{-1}=inv(A)=adj(A)/det(A)$. Kvadratikus mátrix determinánsa: $det(A)$, nyoma: $trace(A)$, karakterisztikus egyenlete: $(\lambda I-A)=0$, karakterisztikus polinomja: $K(\lambda)$, sajátértékei: λ_i, sajátvektorai: m_i. Szinguláris és reguláris mátrix. Az $y=Ax$ lineáris egyenletrendszer megoldása. A lineáris egyenletrendszer változóinak szétcsatolása transzformációval. Mátrixfüggvények, mátrix differenciálása és integrálása.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix} \rightarrow A+B=? \quad A-B=? \quad AB=? \quad BA=? \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \alpha=?\ \beta=?\ \gamma=?\ \delta=?$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \quad A^T=? \quad \det(A)=? \quad trace(A)=? \quad K(\lambda)=\det[\lambda I-A]=? \quad A^{-1}=inv(A)=?$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_{T1} \\ y_{T2} \\ y_{T3}\end{bmatrix}=\mathbf{MAM}^{-1}\begin{bmatrix} x_{T1} \\ x_{T2} \\ x_{T3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{T1} \\ x_{T2} \\ x_{T3}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_{T1} \\ y_{T2} \\ y_{T3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 x_{T1} \\ \lambda_2 x_{T2} \\ \lambda_3 x_{T3}\end{bmatrix}$$

$$At=? \quad \exp(At)=? \quad dAt/dt=? \quad de^{at}/dt=? \quad de^{At}/dt=?$$

Komplex függvénytan

Az imaginárius egység: $j=\sqrt{-1}$. A z komplex szám különféle alakjai. Algebrai műveletek komplex számokkal: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, logaritmizálás. Komplex szám abszolút értéke (modulusa) és szöge (argumentuma).

$$j=\sqrt{-1}, \quad jj=?, \quad j^3=?, \quad z=x+jy=re^{j\varphi}=r(\cos\varphi+j\sin\varphi), \quad z_1=a+jb, \quad z_2=c+jd, \quad z=z_1\pm z_2=?$$

$$z=z_1z_2=? \quad z=\frac{z_1}{z_2}=? \quad j^n=?, \quad z=z_1^3=? \quad abs(z_1)=? \quad arg(z_1)=? \quad z=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=? \quad z=\ln z_1=? \quad e^z=?$$

Komplex változós függvények. Határérték, folytonosság, differenciálhányados. Analitikus függvény. A $w=f(z)$ leképzés értelmezése. Konformis leképzés és ennek szögtartósága. Lineáris törtfüggvény által létesített körtartó leképzés. Hová képzik le a z–sík egységsugarú körét és az imaginárius tengelyét az alábbi lineáris törtfüggvények (a,b,c,d pozitív valós)?

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \quad w=f(z)=\frac{b}{cz+d} \quad w=f(z)=\frac{az}{cz+d} \quad w=f(z)=\frac{az+b}{cz} \quad w=f(z)=\frac{b}{cz}$$

Analitikus függvények *Taylor* és *Laurent* sora. Kis változás esetén a 2., 3.. rendű tagok elhanyagolhatók

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k+\cdots, \qquad és \quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^k=\cdots+c_{-k}(z-a)^{-k}+\cdots+c_{-2}(z-a)^{-2}+c_{-1}(z-a)^{-1}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_k(z-a)^k+\cdots,$$

$$és\ most \rightarrow \quad c_k=\frac{1}{2\pi j}\oint_C (z-a)^{-(k+1)}f(z)dz$$

ez biztos $(z-a)^{-(k+1)}$ és nem $(z-a)^{-(k-1)}$?

ez nem $f(a)$-ban?

Ha a *Laurent* sorban a (z–a) negatív kitevővel rendelkező hatványú komponensek nincsenek (azaz $k<0$ esetben $c_k=0$), akkor a *Laurent* sor *Taylor* sorrá válik. Ekkor az $f(z)$ függvény vagy analitikus magában a $z=a$ pontban (ha $f(a)=c_0$), vagy pedig a $z=a$ pont

$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$

$\underset{(p_i)}{rez}\, F(s)\cdot e^{st} = \lim_{s\to p_i} \frac{1}{(k_i-1)!} \cdot \frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}}\left[(s-p_i)^{k_i} \cdot \frac{G(s)}{H(s)} e^{st}\right]$

k_i = multiplicitása az adott pólusnak

többszörös gyökök esetén így kell kiszámolni

megszüntethető szinguláris pontja $f(z)$–nek. Ha a *Laurent* sorban a $(z-a)$ negatív kitevővel rendelkező hatványú komponensek száma $m \geq 1$, de egyébként véges, akkor a $z=a$ pont *m–edrendű* pólusa az $f(z)$–nek. Ha $m=\infty$, akkor a $z=a$ pont lényeges szingularitás. A *Laurent* sor c_{-1} együtthatója a $f(z)$ függvény $z=a$ helyhez tartozó $r=rezf(z)|_{z=a}$ **reziduuma.**

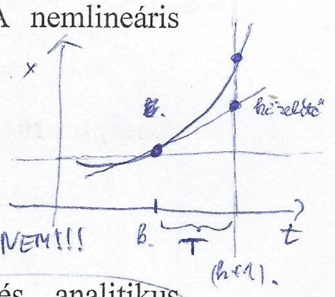
Komplex függvény szingularitásai. Komplex függvény zárt görbe menti integráljának kiszámítása. A reziduum tétel:

$$\oint_C f(z)dz = \begin{cases} 0 \\ 2\pi j \sum_{i=1}^{n} rezf(z_i) = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} r_i \end{cases}$$

ahol z_i a z komplex sík C zárt görbéjének belsejében lévő szinguláris hely, r_i az ezen a helyen lévő reziduum értéke. Ha C–ben nincs a $f(z)$–nek szingularitása, akkor a zárt görbe menti integrál értéke zérus.

A dinamikus rendszer differenciálegyenletének megoldása

A $dx(t)/dt=f[x(t),u(t)]$ **nemlineáris** differenciálegyenletnek általában csak numerikus megoldása van. Ezek legegyszerűbbike az *Euler* módszer. Legyen $x(t)$: állapotvektor $(n\times 1)$, $u(t)$: gerjesztés vektor $(j\times 1)$, f: nemlineáris függvény $(n\times 1)$. A nemlineáris állapotegyenlet és numerikus megoldó képlete:



$$\begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = f[x(t),u(t)] \\ x(0),\quad u(t),\quad f\quad adott \\ ************** \\ x(t) = ? \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{x[(k+1)T]-x(kT)}{T} = f[x(kT),u(kT)] \\ x[(k+1)T] = x(kT) + \underbrace{f[x(kT),u(kT)]T}_{meredekség \times lépésköz} \\ T:\ a\ számítás\ lépésköze \end{array}$$

hiányzik egy derivált ??? NEM!!!

A $dx(t)/dt=Ax(t)+Bu(t)$ **lineáris** differenciálegyenletnek numerikus és analitikus megoldása is van. Legyen $x(t)$: állapotvektor $(n\times 1)$, $u(t)$: gerjesztés vektor $(j\times 1)$, A: állapotmátrix $(n\times n)$, B: bemeneti mátrix $(n\times j)$.

A numerikus megoldás egy változata (*Euler* módszer):

ha T túl nagy, akkor „numerikus instabilitása" van a számításnak

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{x[(k+1)T]-x(kT)}{T} \quad T: a\ számítás\ lépésköze$$

$$\frac{x[(k+1)T]-x(kT)}{T} \cong Ax(kT)+Bu(kT) \rightarrow x[(k+1)T] = x(kT) + \underbrace{[Ax(kT)+Bu(kT)]T}_{meredekség \times lépésköz} =$$
$$= (I+AT)x(kT) + BTu(kT)$$

A **lineáris** differenciálegyenlet analitikus megoldó képlete:

$$\begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)] \\ x(0),\quad u(t),\quad A,B\quad adott \\ ************** \\ x(t) = ? \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x(t) = e^{At}x(0) + \int_{\tau=0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad !!! \\ x_s(t) = e^{At}x(0): sajátmozgás; \\ x_g(t) = \int_{\tau=0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau : gerjesztett\ mozgás \end{array}$$

A megoldó képletben láthatóan mátrixfüggvények [pl. $e^{At}x(0)$] szerepelnek, ami az n rendszám magas értéke esetében (pl. n=5 mellett A (5 5) méretű mátrix) a „kézi" számításokat gyakorlatilag lehetetlenné teszi. A legegyszerűbb alapeset ezzel szemben az elsőrendű (n=1, j=1) SISO dinamikus rendszer, amikor is a megoldó képlet egyszerű.

ezt a képletet kell tudni vizsgán!!!

$$\begin{cases} x(t) = e^{\underline{\underline{A}}t} \cdot x(0) + \int_{\tau=0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)} \cdot Bu(\tau)\,d\tau \\ y(t) = C\left[e^{\underline{\underline{A}}t} x(0) + \int_{\tau=0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)} \cdot Bu(\tau)\,d\tau\right] + Du(t) \end{cases}$$

Példák

Elsőrendű SISO rendszer

$n=1,\ j=1$

$\dfrac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t)$

$x(0),\ u(t) = 1(t),\quad a, b\quad adott$

$$\longrightarrow \quad x(t) = e^{at}x(0) + \int_{\tau=0}^{t} e^{a(t-\tau)} bu(\tau)d\tau e^{at} = e^{at}x(0) + e^{at}\int_{\tau=0}^{t} e^{-a\tau} 1 d\tau b = e^{at}x(0) + e^{at}\left[\frac{1}{-a}e^{-a\tau}\right]_{\tau=0}^{t} b =$$

$$= e^{at}x(0) + e^{at}\left(\frac{b}{-a}\right)\left(e^{-at}-1\right) = e^{at}x(0) + \frac{b}{a}e^{at}\left(1-e^{-at}\right) = e^{at}x(0) + \frac{b}{a}\left(e^{at}-1\right)$$

$x_s(t) = e^{at}x(0) : sajátmozgás;\quad x_g(t) = \dfrac{b}{a}\left(e^{at}-1\right):\ gerjesztett\ mozgás$

****

Másodrendű SISO rendszer

$n=2,\ j=1$

$\dfrac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t)$

$\dfrac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t)$

$x_1(0), x_2(0), u(t),\quad A, B\quad adott$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{dx(t)/dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_{\tau=0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix} t}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_{\tau=0}^{t} e^{\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}(t-\tau)}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(\tau)d\tau$$

Az $n \geq 2$ rendszám nagy értéke (pl. $n \geq 5$) esetében számítógépes szolgáltatások (pl. MATLAB) igénybevétele szükséges, a megoldó képlet ekkor mátrixfüggvényeket tartalmaz.

Állapottrajektória: Az $x(t)$ állapotvektor végpontjának a t időben paraméterezett n dimenziós térgörbéje az állapotváltozók által kifeszített **állapottérben**, miközben a dinamikus rendszer mozgásban van. A rendszám $n=2$ esetében **állapotsíkról** van szó.

Stabilitás: stabilis az állapotegyenletével leírt n rendszámú dinamikus rendszer, ha az egyensúlyi pontjában közelítő lineáris modelljének (és ebben az A állapotmátrixának) mindegyik λ_i sajátértéke negatív valós résszel rendelkezik ($real(\lambda_i)<0$, *Ljapunov* stabilitási kritériuma). A λ_i sajátértékek a közelítő lineáris modell állapotmátrixához rendelt $K(\lambda)=det[\lambda \acute{I}-A]$ karakterisztikus polinom λ_i gyökei (i:1,2,…,n). A sajátértékek száma, illetve a $K(\lambda)$ polinom fokszáma azonos a rendszer n rendszámával.

A *Laplace* transzformáció

A *Laplace* transzformáció a $f(t)$ belépő időfüggvényhez az $F(s)$ operátorfüggvényt rendelő funkcionál. Jelölése $L\{f(t)\}=F(s)$. Definíciós egyenlete:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Kezdeti és végértéktétel:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = f(0) = \lim_{s\to\infty} s f(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot f(s)$$

ha Re $p_i<0$
vagyis stabil
létezik végérték

pl.

$$L\{\delta(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1$$

$$L\{1(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} 1e^{-st}dt = \frac{1}{-s}\left[e^{-st}\right]_{t=0}^{\infty} = -\frac{1}{s}[0-1] = \frac{1}{s}$$

$$L\{e^{at}\} = \int_{t=0}^{\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{(a-s)t}dt \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_{t=0}^{\infty} = -\frac{1}{s-a}[0-1] = \frac{1}{s-a}$$

A transzformáció néhány fontosabb tulajdonsága:

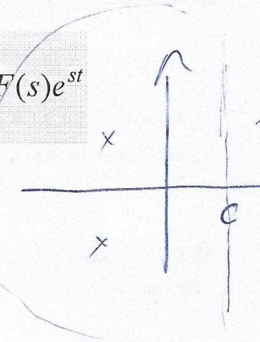
Linearitás: $\rightarrow$ $L[ax(t)+bu(t)]=ax(s)+bu(s)$

Differenciálási szabály: $\rightarrow$ $L[dx(t)/dt]=sx(s)-x(0)$

Eltolási tétel: → $L[x(t-T_h)]=L\{x(t)\}exp(-sT_h)= x(s)exp(-sT_h)$
Kezdeti és végérték tételek: → $f(0)=sF(s)|_{s=\infty}$; $f(\infty)=sF(s)|_{s=0}$
A konvolució tétele: → ha $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, és $L^{-1}\{G(s)\}=g(t)$ akkor: $L^{-1}\{ F(s)G(s)\}=\int f(\tau)g(t-\tau)d\tau\}$

Inverz transzformáció: $F(s)$ operátor függvény ismeretében a $f(t)$ időfüggvény meghatározása. Jelölése $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$. Definíciós egyenlete:

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi j}\oint_C F(s)e^{st}ds=\sum_1^n \underbrace{rez}_{p_i}F(s)e^{st}$$



C-t úgy kell meghatározni, hogy minden [illegible] tőle balra legyen.

$$ha \quad F(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{g_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}, \quad és \quad H(s) \quad gyöke\ p_i$$

$$akkor \quad f(t)=\sum_{i=1}^n \frac{G(p_i)}{[dH(s)/ds]_{s=p_i}}e^{p_i t}$$

Ez utóbbi formula akkor érvényes, ha a $H(s)$ polinom minden p_i gyöke egymástól különböző. A $G(s)$ polinom z_i gyökei $F(s)$ zérusai $[F(s)|_{s=zi}=0]$, a $H(s)$ polinom p_i gyökei $F(s)$ pólusai, szinguláris helyei $[F(s)|_{s=pi}=\infty]$. Ha a p_i gyökök egymástól különbözőek, akkor $F(s)$ részlettörtekre bontható, tehát

$$ha \quad F(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{g_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{r_n}{s-p_n}=\sum_{i=1}^n\frac{r_i}{s-p_i}$$

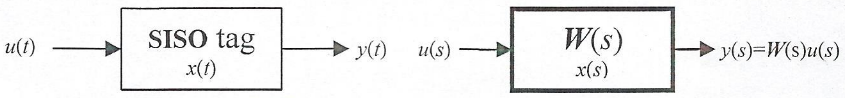
$$akkor \quad f(t)=L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n\frac{r_i}{s-p_i}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{r_n}{s-p_n}\right\}=r_1e^{p_1t}+r_2e^{p_2t}+\cdots+r_ne^{p_nt}=\sum_{i=1}^n r_ie^{p_it}$$

Most az r_i értékek az $F(s)$ reziduumai a p_i szinguláris helyeken.

A lineáris differenciálegyenlet megoldása *Laplace* transzformációval

9.)

A **SISO** tag *hatásvázlata*, *n–ed* rendű *rendszeregyenlete*, $W(s)$ **átviteli** függvénye és állapotegyenlete



A rendszeregyenlet n rendszámú lenáris differenciálegyenlet $(n \geq m)$:

$$a_0\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_0\frac{d^mu(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_{m-1}\frac{du(t)}{dt}+b_mu(t)$$

n!

A rendszeregyenlet Laplace transzformáltja zérus kezdeti feltételek mellett $[L\{y^{(i)}(t)\}=s^iy(s)]$:

$$a_0s^ny(s)+a_1s^{n-1}y(s)+\cdots+a_{n-1}sy(s)+a_ny(s)=b_0s^mu(s)+b_1s^{m-1}u(s)+\cdots+b_{m-1}su(s)+b_mu(s)$$

$$(a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)y(s)=(b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m)u(s)$$

innen $y(s)$ *explicit kifejezése egyenletrendezéssel*:

$$y(s)=\underbrace{\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}}_{W(s)}u(s)=W(s)u(s) \quad ahol \quad W(s)=\frac{y(s)}{u(s)} \quad az\ átviteli\ függvény$$

A lineáris **SISO** tag $W(s)$ átviteli függvénye a szabályozástechnika meghatározó, valószínűsíthetően a legfontosabb fogalma. $y(s)=W(s)u(s)$ kifejezés szerint algebrai függvénykapcsolatot definiál a bemenőjel és a kimenőjel *Laplace* transzformáltjai között. **Egy lehetséges definíciója: a $W(s)$ átviteli függvény a kimenőjel és a bemenőjel *Laplace* transzformáltjainak $y(s)/u(s)$ hányadosa zérus kezdeti feltételek mellett.**

A $W(s)$ átviteli függvény különféle alakjai:

$$W(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\dots+b_{n-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n}=\underbrace{\frac{g_0s^m+g_1s^{m-1}+\dots+g_{n-1}s+g_m}{s^n+h_1s^{n-1}+\dots+h_{n-1}s+h_n}}_{polinom\ alak}=$$

$$=\underbrace{\frac{g_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}}_{pólus-zérus\ alak}=\underbrace{\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_1}{s-p_2}+\dots+\frac{r_1}{s-p_n}}_{részlettörtes\ alak}$$

$z_i: G(s)$ *gyöke,* $p_i: H(s)$ *gyöke,* $r_i: W(s)$ *reziduuma a* p_i *póIushelyeken*

Az kimenő jel $y(t)$ *függvénye* $y(s)=W(s)u(s)$ *alapján:*

$$y(t)=L^{-1}\{W(s)u(s)\}$$

Az *n–edrendű* lineáris *rendszeregyenlet* és az *átviteli függvény* egymásnak kölcsönösen megfelelő fogalmak. Az átviteli függvény ismerete alapján a rendszeregyenlet–, vagy a rendszeregyenlet ismerete alapján az átviteli függvény **közvetlenül** felírható.

Példa

$$Ha\quad W(s)=\frac{10s^2+5s+2}{s^3+3s^2+2s+1}=\frac{y(s)}{u(s)}\quad akkor\quad (s^3+3s^2+2s+1)y(s)=(10s^2+5s+2)u(s)$$

$$s^3y(s)+3s^2y(s)+2sy(s)+1y(s)=10s^2u(s)+5su(s)+2u(s)\quad akkor:$$

****

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+3\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=10\frac{d^2u(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+2u(t)$$

A **SISO** tag *n–edrendű* ($a_0 \neq 0$) lineáris rendszeregyenlete átalakítható n számú elsőrendű lineáris differenciálegyenletet és egy algebrai egyenletet tartalmazó állapotteres alakra. A rendszeregyenletben a realizálhatóság feltétele miatt szükségszerűen $m \leq n$ lehet (a bemenőjel legmagasabb rendű deriváltja nem haladhatja meg a kimenőjel legmagasabb rendű deriváltjának n rendszámát **!!!**), de e feltétel mellett az $u(t)$ gerjesztés és deriváltjainak bármelyik b_i együtthatói zérus értékeket is felvehetnek. Általános esetben $m=n$, és rendszerint az $y^{(n)}(t)$ *n–*edik derivált vezető együtthatójára normalizált alakkal dolgozunk. Ekkor az eredeti és a normalizált rendszeregyenlet:

$$a_0\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_ny(t)=b_0\frac{d^nu(t)}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}}+\dots+b_{n-1}\frac{du(t)}{dt}+b_nu(t)$$

$$\frac{d^ny(t)}{dt^n}+h_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\dots+h_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+h_ny(t)=g_0\frac{d^nu(t)}{dt^n}+g_1\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}}+\dots+g_{n-1}\frac{du(t)}{dt}+g_nu(t)$$

$$és\quad h_1=a_i/a_0,\quad g_i=b_i/a_0$$

Ennek egyik lehetséges állapotteres modellre átírt kifejezése (az un. első *Frobenius* alak):

A normalizált rendszeregyenlet állapotegyenletének egy lehetséges változata:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_{n-1}(t)\\x_n(t)\end{bmatrix}}_{x(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&0&1\\-h_n&-h_{n-1}&-h_{n-2}&\cdots&-h_1\end{bmatrix}}_{A_F}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_{n-1}(t)\\x_n(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}}_{B_F}u(t)$$

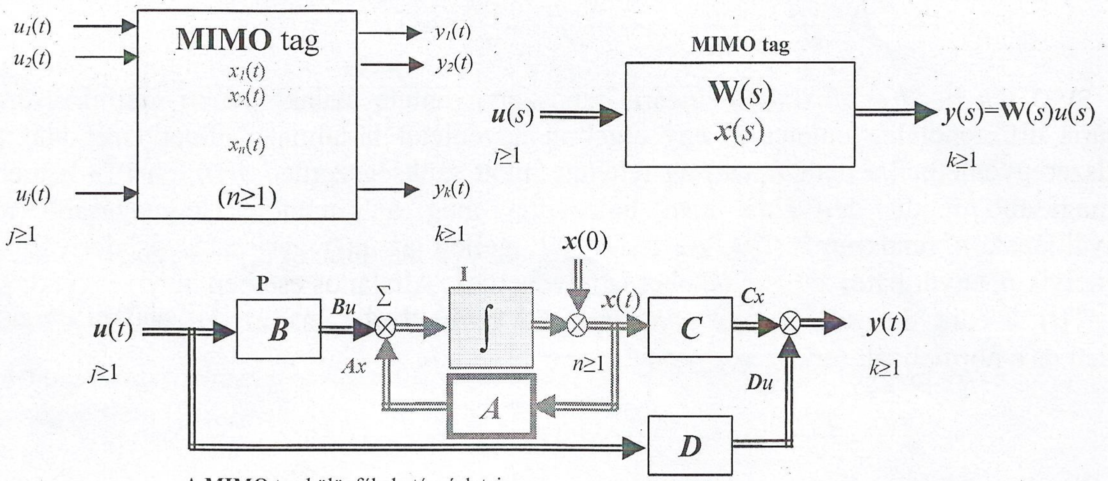
$$y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}g_n-g_0h_n & g_{n-1}-g_0h_{n-1} & \cdots & g_1-g_0h_1\end{bmatrix}}_{C_F}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_{n-1}(t)\\x_n(t)\end{bmatrix}+\underbrace{g_0}_{D_F}u(t)$$

Miután most **SISO** tagról van szó, figyeljünk fel az A_F állapotmátrix jellegzetes tulajdonságára (fázisváltozós alak), valamint a B_F, C_F, D_F paramétermátrixok speciális kifejezéseire (B oszlopvektor, C sorvektor, D skalár). Az $y(t)$ kimenőjel és az $u(t)$ bemenőjel közötti függvénykapcsolatot leíró rendszeregyenlet (vagy az ennek megfelelő $W(s)=y(s)/u(s)$ átviteli függvény) mindkét modell esetében természetesen *azonos*:

$$W(s)=C_F(sI-A_F)^{-1}B_F+D_F=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{g_0s^n+g_1s^{n-1}+\dots+g_n}{s^n+h_1s^{n-1}+\dots+h_n}=\frac{y(s)}{u(s)}$$

Megjegyzés
A *Frobenius* alak paramétermátrixaiból láthatjuk, hogy az ezekben szereplő adatok a rendszeregyenlet h_i ($i=1,2,\dots,n$) és g_i ($i=0,1,2,\dots,n$) *valós* paramétereit tartalmazzák. Figyeljük meg, hogy az első *Frobenius* alak állapotmátrixának utolsó sorában a *rendszeregyenlet* $\lambda^n+\boldsymbol{h}_1\lambda^{n-1}+\dots+\boldsymbol{h}_{n-1}\lambda+\boldsymbol{h}_n$ karakterisztikus polinomjának *negatív* $\boldsymbol{h}_i$ együtthatói állnak (ennek a polinomnak az λ_i gyökei **azonosak** az A_F állapotmátrix λ_i sajátértékeivel, illetve $W(s)$ p_i pólusaival ($p_i=\lambda_i$). Ezek a pólusok, illetve az A_F állapotmátrix λ_i sajátértékei a rendszeregyenletével leírt dinamikus objektum tranziens viselkedését alapvetően befolyásolják. A rendszeregyenletből, illetve az ennek megfelelő átviteli függvényből származtatható első *Frobenius* alakot *irányíthatósági* kanonikus alaknak is nevezik. A *Frobenius* alak mellett a rendszeregyenlet állapotteres átírására egyéb állapotteres reprezentációk is konstruálhatók. A rendszeregyenletnek az állapotegyenletre történő átalakításának az ad értelmet, hogy az **elsőrendű** differenciálegyenletekből álló állapotegyenlet matematikai kezelése az egyetlen, de ***n*–*edrendű*** differenciálegyenlet kezeléséhez képest egyszerűbb.

A MIMO tag hatásvázlata, *állapotegyenlete* és W(s) **átviteli** mátrixa



A MIMO tag különféle hatásvázlatai

A **MIMO** tag állapotegyenlete ($x(t)$: állapotvektor, $dx(t)/dt$: állapotsebesség vektor, $u(t)$: gerjesztés vektor, $y(t)$ kimenőjel vektor, A állapotmátrix, B: bemeneti mátrix, C: kimeneti mátrix, D: direkt mátrix):

Leírás az idő tartományban

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t)\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}}_{x(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}}_{A(n\times n)}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}}_{x(t)}+\underbrace{\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1j}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2j}\\\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nj}\end{bmatrix}}_{B(n\times j)}\underbrace{\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\\vdots\\u_j(t)\end{bmatrix}}_{u(t)}$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t)\ \Rightarrow\ \underbrace{\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\\vdots\\y_k(t)\end{bmatrix}}_{y(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\c_{k1}&c_{k2}&\cdots&c_{kn}\end{bmatrix}}_{C(k\times n)}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}}_{x(t)}+\underbrace{\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}&\cdots&d_{1j}\\d_{21}&d_{22}&\cdots&d_{2j}\\\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\d_{k1}&d_{k2}&\cdots&d_{kj}\end{bmatrix}}_{D(k\times j)}\underbrace{\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\\vdots\\u_j(t)\end{bmatrix}}_{u(t)}$$

Az állapotegyenlet *Laplace* transzformáltja:

Leírás az operátor tartományban

$$sx(s)-x(0)=Ax(s)+Bu(s) \quad \Rightarrow s\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(s)\\ x_2(s)\\ \vdots\\ x_n(s)\end{bmatrix}}_{x(s)}-\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{bmatrix}}_{x(0)}=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{A(n\times n)}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(s)\\ x_2(s)\\ \vdots\\ x_n(s)\end{bmatrix}}_{x(s)}+\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj}\end{bmatrix}}_{B(n\times j)}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1(s)\\ u_2(s)\\ \vdots\\ u_j(s)\end{bmatrix}}_{u(t)}$$

$$y(s)=Cx(s)+Du(s) \quad \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(s)\\ y_2(s)\\ \vdots\\ y_k(s)\end{bmatrix}}_{y(s)}=\underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn}\end{bmatrix}}_{C(k\times n)}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(s)\\ x_2(s)\\ \vdots\\ x_n(s)\end{bmatrix}}_{x(s)}+\underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1j}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2j}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & d_{kj}\end{bmatrix}}_{D(k\times j)}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1(s)\\ u_2(s)\\ \vdots\\ u_j(s)\end{bmatrix}}_{u(s)}$$

Az $x(s)$ állapotváltozó **explicit** kifejezésére rendezve:

$$(sI-A)x(s)=x(0)+Bu(s)\Rightarrow \left(s\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}}_{I}-\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{A}\right)\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(s)\\ x_2(s)\\ \vdots\\ x_n(s)\end{bmatrix}}_{x(s)}=\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{bmatrix}}_{x(0)}+\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj}\end{bmatrix}}_{B(n\times j)}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1(s)\\ u_2(s)\\ \vdots\\ u_j(s)\end{bmatrix}}_{u(s)}$$

$$\underbrace{(sI-A)^{-1}(sI-A)}_{I}x(s)=x(s)=(sI-A)^{-1}[x(0)+Bu(s)]$$

$$x(s)=\underbrace{\left(s\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}}_{I}-\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{A}\right)^{-1}}_{(sI-A)^{-1}}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{bmatrix}}_{x(0)}+\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj}\end{bmatrix}}_{B(n\times j)}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1(s)\\ u_2(s)\\ \vdots\\ u_j(s)\end{bmatrix}}_{u(s)}\right)=$$

$$=\underbrace{\left(\underbrace{\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn}\end{bmatrix}}_{A}\right)^{-1}}_{(sI-A)^{-1}}\left(\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{bmatrix}}_{x(0)}+\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj}\end{bmatrix}}_{B(n\times j)}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1(s)\\ u_2(s)\\ \vdots\\ u_j(s)\end{bmatrix}}_{u(s)}}_{x(0)+Bu(s)}\right)$$

Az $y(t)$ kimenőjel vektor $y(s)=L\{y(t)\}$ *Laplace* transzformáltja mindezek alapján:

$$y(s)=Cx(s)+Du(s)=C\{(sI-A)^{-1}[x(0)+Bu(s)]\}+Du(s)=C(sI-A)^{-1}x(0)+[C(sI-A)^{-1}B+D]u(s)$$

$$ha\ x(0)=0,\ akkor:$$

$$y(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D]\,u(s)=\frac{Cadj(sI-A)B+D\det(A)}{\det(A)}u(s)=\mathbf{W}(s)u(s)\quad \textit{és}\quad \mathbf{W}(s):\ \textit{az átviteli mátrix}$$

A $\mathbf{W}(s)$ átviteli mátrix részletezése:

$$\mathbf{W}(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\frac{Cadj(sI-A)B+D\det(A)}{\det(A)}$$

Megjegyzés
Az $x(s)=(sI-A)^{-1}[x(0)+Bu(s)]$, $y(s)=C(sI-A)^{-1}[x(0)+Bu(s)]+Du(s)$, $\mathbf{W}(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ kifejezésekben megjelenített képletekben szereplő paramétermátrixok sorrendje nem cserélhető fel !!!

$$\mathbf{W}(s)=\underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix}}_{C}\left[\underbrace{\left(\underbrace{\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn} \end{bmatrix}}_{sI-A}\right)^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}}_{B}}_{(sI-A)^{-1}B}\right]+\underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1j} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & c_{kj} \end{bmatrix}}_{D}=$$

$$=\frac{\underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix}}_{C}adj\underbrace{\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn} \end{bmatrix}}_{sI-A}\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}}_{B}+\underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1j} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & c_{kj} \end{bmatrix}}_{D}\det\underbrace{\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn} \end{bmatrix}}_{sI-A}}{\det\underbrace{\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn} \end{bmatrix}}_{sI-A}}$$

$$\mathbf{W}(s)=\begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1j}(s) \\ W_{21}(s) & W_{21}(s) & \cdots & W_{2j}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_{k1}(s) & W_{k2}(s) & \cdots & W_{kj}(s) \end{bmatrix}$$

Vagyis az y kimeneti vektor és az u bemeneti vektor között értelmezhető függvénykapcsolat az s komplex operátor tartományban $y(s)=\mathbf{W}(s)u(s)$. Részletesebben:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_k(s) \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1j}(s) \\ W_{21}(s) & W_{21}(s) & \cdots & W_{2j}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_{k1}(s) & W_{k2}(s) & \cdots & W_{kj}(s) \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}(s)}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_j(s) \end{bmatrix}$$

A kapott eredmény azt mutatja, hogy az $y(s)$ kimenőjel vektornak pl. az $y_5(s)$ komponense a bemenőjelek $y_5(s)=W_{51}(s)u_1(s)+W_{52}(s)u_2(s)+\ldots+W_{5j}(s)u_j(s)$ szerinti függvénye (a kimenőjel *valamelyike* a bemenőjelek *mindegyikének* a függvénye). Ebben a függvénykapcsolatban a $W_{52}(s)$ átviteli függvény azt szemlélteti, hogy az $y_5(s)$ miként függ az $u(s)$ bemenőjel vektor $u_2(s)$ komponensétől. Ha pl. $u_2(s)$ kivételével minden más bemenőjel zérus, akkor $y_1(s)=W_{12}(s)u_2(s)$, $y_2(s)=W_{22}(s)u_2(s)$, …, $y_k(s)=W_{k2}(s)u_2(s)$. Lényegében tehát a $\mathbf{W}(s)$ átviteli mátrix $W_{lq}(s)$ átviteli függvény elemei egy–egy rendszeregyenletet is definiálnak az $y_l(s)$ és az $u_q(s)$ jelek között. A $\mathbf{W}(s)$ átviteli mátrix mindegyik $W_{lq}(s)$ átviteli függvény komponensének a nevezője a $H(s)=det(sI–A)$ karakterisztikus polinom. Ennek gyökei az A állapotmátrix λ_i sajátértékei, így a **MIMO** tag tranziens folyamataira alapvető befolyást gyakorolnak. Az $y(t)$ kimenőjel vektort (az $u(t)$ bemenőjel vektorra adott választ) inverz transzformációval állíthatjuk elő:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_k(s) \end{bmatrix}\right\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} W_{11}(s)u_1(s)+W_{12}(s)u_2(s)+\cdots+W_{1j}(s)u_j(s) \\ W_{21}(s)u_1(s)+W_{22}(s)u_2(s)+\cdots+W_{2j}(s)u_j(s) \\ \vdots \\ W_{k1}(s)u_1(s)+W_{k2}(s)u_2(s)+\cdots+W_{kj}(s)u_j(s) \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} L^{-1}\{W_{11}(s)u_1(s)+W_{12}(s)u_2(s)+\cdots+W_{1j}(s)u_j(s)\} \\ L^{-1}\{W_{21}(s)u_1(s)+W_{22}(s)u_2(s)+\cdots+W_{2j}(s)u_j(s)\} \\ \vdots \\ L^{-1}\{W_{k1}(s)u_1(s)+W_{k2}(s)u_2(s)+\cdots+W_{kj}(s)u_j(s)\} \end{bmatrix}$$

Láthattuk azt is, hogy az $x(t)$ állapotváltozó vektor $x(s)$ transzformáltja

$$x(s)=(sI–A)^{-1}[x(0)+Bu(s)]$$

Ha az $x(t)$ időfüggvényre is szükségünk van, akkor ezt is inverz transzformációval állíthatjuk elő:

$$x(t)=L^{-1}\{x(s)\}=L^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}[x(0)+Bu(s)]\right\}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{bmatrix}=L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{adj\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn}\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn}\end{bmatrix}}}_{(sI-A)^{-1}}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{bmatrix}}_{x(0)}+\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj}\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1(s)\\ u_2(s)\\ \vdots\\ u_j(s)\end{bmatrix}}_{u(s)}\right\}\right\}$$

A eredményként kapott $x(t)$ és $y(t)$ kifejezésekből láthatjuk, hogy magasabb n rendszám, több bemenőjel és több kimenőjel mellett az $x(t)$ állapotvektor és a $y(t)$ kimenőjel vektor mindegyik komponensének a meghatározása komplikált eljárással lehetséges, ezért számítógépes szolgáltatások igénybevétele igencsak indokolt. A **MATLAB** program a **nemlineáris** állapotegyenlet numerikus megoldását a két–, és négylépéses *Runge–Kutta* módszerek alkalmazásával (`ode23`, `ode45`) támogatja. A ***A*, *B*, *C*, *D*** paramétermátrixaival definiált **lineáris** **MIMO** rendszer differenciálegyenletének megoldását, az A állapotmátrix $K(\lambda)$ karakterisztikus polinomjának és λ_i gyökeinek meghatározását, az A állapotmátrix λ_i sajátértékeinek és sajátvektorainak kiszámítását, a $\mathbf{W}(s)$ átviteli mátrix meghatározását támogató **MATLAB** függvények:

```
[y,x]=lsim(A,B,C,D,u,t,x0);      %az állapotegyenlet megoldása: y(t),x(t)
K=poly(A);                       %az A mátrix karakterisztikus polinomja: K(λ)
lambda=roots(K);                 %a karakterisztikus polinom gyökei: λi
[m,lambda]=eig(A);               %az A sajátvektorai és sajátértékei: mi, λi
[G,H]=ss2tf(A,B,C,D,ui);         %az átviteli mátrix: W(s)
```

Az analitikus megoldó képletből láthattuk, hogy a lineáris dinamikus rendszer sajátmozgásának időfüggvényei $exp(\lambda_i)$ szerint csillapodnak (ha $real(\lambda_i)<0$, stabilis rendszer), vagy exponenciálisan növekszenek (ha $real(\lambda_i)>0$, labilis rendszer). A λ_i gyökök kiszámításának pontossága ezért meghatározó jelentőségű. Miután egy n=10 rendszámú esetben az A mátrix $K(\lambda)$ karakterisztikus polinomjának fokszáma n=10, ennek gyökei általában csak numerikusan határozhatóak meg. Ilyen fokszám mellett a **MATLAB** `roots` gyökkereső programja még elfogadható pontossággal dolgozik, ami a gyakorlati megoldásokat is kielégíti. Például a

$$K(\lambda)=(\lambda+1)^{10}=\lambda^{10}+10\lambda^9+45\lambda^8+120\lambda^7+210\lambda^6+252\lambda^5+210\lambda^4+120\lambda^3+45\lambda^2+10\lambda+1$$

polinomnak a λ_1=–1.0000 tízszeres multiplicitású valós gyöke egy egzakt érték, amit a `roots` függvény az alábbi hibával számol:

```
>> lambda=roots([1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1]);
>> lambda
 -1.0591 + 0.0197i
 -1.0591 - 0.0197i
 -1.0351 + 0.0507i
 -1.0351 - 0.0507i
 -0.9983 + 0.0607i
 -0.9983 - 0.0607i
 -0.9638 + 0.0475i
 -0.9638 - 0.0475i
 -0.9436 + 0.0178i
 -0.9436 - 0.0178i
```

Feladatok

1.) Adott az alábbi kvadratikus mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$\cdot(-1)$

Adja meg a $K(\lambda)=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$ karakterisztikus polinom együtthatóit, az A sajátértékeit. Bizonyítsa be, hogy az a_3 együttható a sajátértékek szorzata, az ~~a_2~~ a_1 együttható pedig ezek összegének –1 –szerese! Határozza meg az $inv(A)$ mátrixot!

2.) Számítsa ki a $(z+1)/(2z+3)^2$ komplex tört valós és képzetes részét és a logaritmusát!

3.) Adja meg az e^z függvény z=0 ponthoz tartozó *Taylor* és *Laurent* sorát!

4.) Numerikusan oldja meg az alábbi lineáris differenciálegyenletet:

$$\frac{d(x(t)}{dt} = -tx(t)+u(t); \quad x(0)=0, \quad u(t)=1(t)$$

5.) Az analitikus megoldó képlet alapján írja fel a

SYNTAX ERROR

$$\frac{d(x(t)}{dt} = -2x(t)+3u(t); \quad x(0)=1, \quad u(t)=1(t)$$

differenciálegyenlet $x(t)$ megoldását!

6.) Számítsa ki az $f(t)$=**1**(t)–$exp(-t/10)$ belépő időfüggvény $F(s)$ *Laplace* transzformáltját!

7.) A *Laplace* transzformációval oldja meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$\frac{d(x(t)}{dt} = -2x(t)+3u(t); \quad x(0)=1, \quad u(t)=1(t)$$

8.) Mit jelent az átviteli függvény és az átviteli mátrix?

9.) Mi a *Ljapunov* stabilitási kritérium?

10.) A lineáris dinamikus rendszer tulajdonságainak szempontjából miért van kitüntetett szerepe a rendszer A állapotmátrixának?

Kérdések:

1.) ugye rossz az a 2? – sajátértékek szorzatának (-1)x-ese $= a_3$
– sajátértékek összegének (-1)x-ese $= a_1$

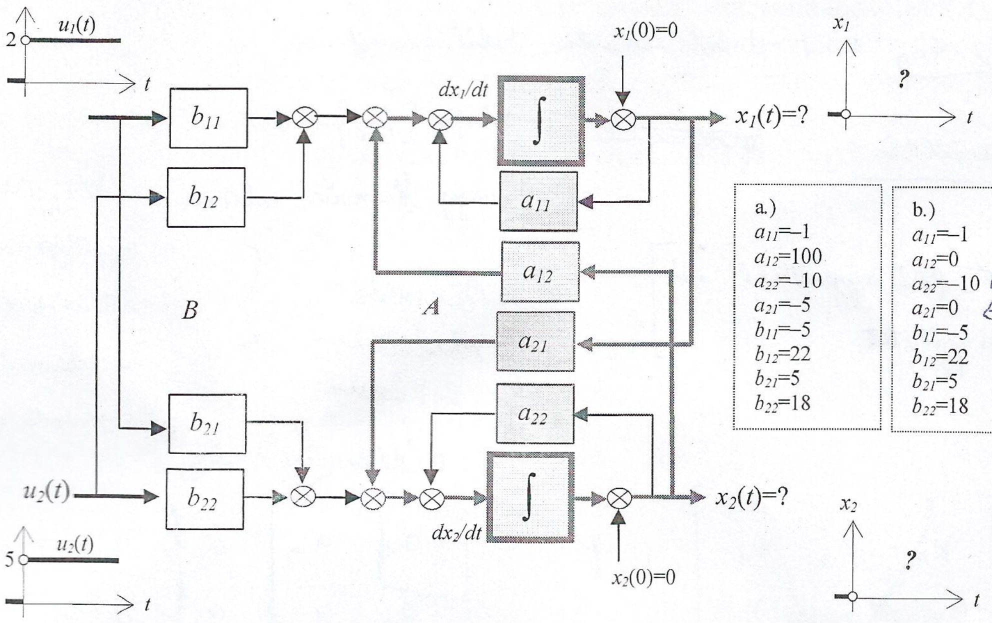
2.) $z = a+bi$ -vel kell számolni?

3.) ~~(A deriválás = A integrálás)~~ Mi a C görbe? e^z folytonos Z-n? Vagy van szinguláris helye?
Hogy kell ezt a feladatot megoldani?

Házi feladat

Egy lineáris, másodrendű **MIMO** rendszer állapotegyenlete és az ehhez rendelhető hatásvázlat:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t)$$



a.)	b.)
$a_{11}=-1$	$a_{11}=-1$
$a_{12}=100$	$a_{12}=0$
$a_{22}=-10$	$a_{22}=-10$?!
$a_{21}=-5$	$a_{21}=0$
$b_{11}=-5$	$b_{11}=-5$
$b_{12}=22$	$b_{12}=22$
$b_{21}=5$	$b_{21}=5$
$b_{22}=18$	$b_{22}=18$

Az $x(t)$ állapotvektor kezdeti értéke $x(0)=[x_1(0)\ x_2(0)]^T=[0\ \ 0]^T$, az $u(t)=[u_1(t)\ \ u_2(t)]^T$ gerjesztés vektor komponensei ugrásfüggvények: $u_1(t)=2*\mathbf{1}(t)$, $u_2(t)=5*\mathbf{1}(t)$. A rendszer A, B paramétermátrixainak elemeit az **a.)** illetve a **b.**) táblázatok tartalmazzák. 1.) Mindkét esetre az adjuk meg az A állapotmátrix $trace(A)$ nyomát, $det(\mathbf{A})$ determinánsát, $K(\lambda)$ karakterisztikus polinomját, és a λ_1, λ_2 sajátértékeit! 2.) Aduk meg az $x(t)$ állapotvektor kiszámításának analitikus megoldó képletét! 3.) A gerjesztő jelek bekapcsolását követő $t=+0$ időpontban mekkorák az integrátorok bemenőjelei? 4.) Az adott állandó gerjesztések hatására létre jön–e a rendszer egyensúlyi állapota, ha igen, akkor ebben az egyensúlyi állapotban mekkorák az állapotváltozók x_{10}, x_{20} állandósult értékei? 5.) Mekkora időnek kell eltelnie ahhoz, hogy az egyensúlyi állapot létrejöjjön? 6.) Számítsuk ki, és grafikonon ábrázoljuk az $x(t)$ állapotvektor mindkét komponensének $x_1(t)$ és $x_2(t)$ időfüggvényeit és a rendszer $x_2=f(x_1)$ állapottrajektóriáját! 7.) Számítsuk ki a **MIMO** rendszer $\mathbf{W}(s)$ átviteli mátrixát, ha $y_1(t)=x_1(t)$, $y_2(t)=x_2(t)$! 8.) Mely jelek közötti függvénykapcsolatot írja le a $W_{21}(s)$ átviteli függvény? 9.) Adjuk meg az átviteli mátrix $W_{21}(s)$ átviteli függvény komponenséhez értelmezhető rendszeregyenletet! 10.) Milyen hasonlóságok, és milyen különbözőségek vannak az **a.**) illetve a **b.**) paraméterekkel jellemzett rendszerek között? 11.) Van–e az $\boldsymbol{a_{21}}$ átviteli tényezőnek olyan értéke, amely mellett a dinamikus rendszer labilis lenne, és ha van, mekkora ez az érték?

e^{At} képlettel?

→ U paraméter?

11. a.) $\begin{bmatrix} -1 & 100 \\ a_{21} & -10 \end{bmatrix} \to \det(\underline{A}-\lambda\underline{1}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 100 \\ a_{21} & -10-\lambda \end{vmatrix} = \cancel{10(\lambda+1) - 100a_{21}}$

$(1+\lambda)(10+\lambda) - 100a_{21}$

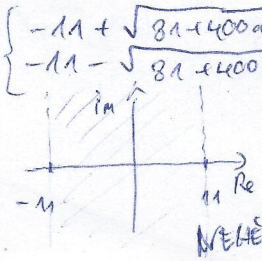
$= \cancel{10\lambda+10-100)} = 10+\lambda+10\lambda+\lambda^2-100a_{21}$

$= \lambda^2+11\lambda+10-100a_{21} = 0 \to \lambda_{12} = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121-4(10-100a_{21})}}{2} < 0$

$= \dfrac{-11 \pm \sqrt{121-40+400a_{21}}}{2} = \dfrac{-11 \pm \sqrt{81+400a_{21}}}{2} < 0$

$\to -11 \pm \sqrt{81+400a_{21}} < 0 \to \begin{cases} -11+\sqrt{81+400a_{21}} < 0 \to \sqrt{81+400a_{21}} < 11 \\ -11-\sqrt{81+400a_{21}} < 0 \to \sqrt{81+400a_{21}} > -11 \end{cases}$

b.) a_{21} minden értékére stabil marad a rendszer!



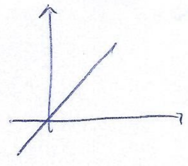
NEHÉZ!

ha $a_{21} \in \mathbb{R}$, akkor ↯↯↯

$a_{21} \in]-0{,}2025 ; 0{,}1[$

2015. 10. 27.

Átviteli karakterisztika:



DC-átvitel

$y(0) = C \cdot u(0)$

?

Átmeneti függvény: $y(s) = v(s) = W(s) \cdot u(s) = \frac{G(s)}{H(s)} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow v(t)$ vagy $g(t)$

egységugrás gerjesztésre adott válasz

Stabilis önbeálló tag: stabil bemenetre stabil kimenet.

Aszimptotikus stabilitás: $\cancel{\forall \lambda_i < 0}$ $\forall\, \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$

vagy Hurwitz-polinom: $\forall$ együttható > 0

[a Matlab 15. fokú egyenletnél már elhibázza a gyököket]

Hurwitz-stabilitás-kritérium:
- együtthatókból képzett mátrix determinánsa $(n \times n) > 0$
- a determináns minden főátlójára támaszkodó aldeterminánsa > 0

aldeterminánsok

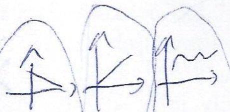
pl.: $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$

pl.: $\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

csak ez a stabilis szabályozásra alkalmas !

Önbeálló tag: $v(t \to \infty) =$ konstans $(\neq 0)$

Nem önbeálló tag: $v(t \to \infty) = 0$ vagy $\neq$ konstans



(0, ∞, lengő)

differenciáló, integrátor, oszcillátor

rendszerjellemző fv.: átmeneti fv., impulzusválasz, frekvenciafv., átviteli fv.
legfontosabb a diff. egyenlet

Duhamel-formula: $y(t) = u(0) \cdot v(t) + \int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \cdot v(t-\tau)\, d\tau$

differenciáló áramkör: a visszacsatolásban integráló tag van

exp. áramkör: 2 db integráló tag egymás mellett

lengő áramkör: 2 db integráló tag (−1)-gyel visszacsatolva

Jövő héten Matlab!