1. feladat (18 pont)
Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait algebrai alakban!

$$z^5 + 16z = 0$$

Mo. $z = 0$ **(2p)** , $z^4 = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$ **(4p)** . Az egyenlet megoldásai: $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_2 = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_3 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_4 = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ **(12p)** .

2. feladat (5+10=15 pont)
a) Adja meg a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját!
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 3n}{n^3 + n + 2} = 2$!

Mo. *a*) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. **(5p)**
b) Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\left|\frac{2n^3 - 3n}{n^3 + n + 2} - 2\right| = \frac{5n + 4}{n^3 + n + 2} \leq \frac{9n}{n^3} = \frac{9}{n^2} < \varepsilon, \qquad \textbf{(5p)}$$

ha $n > \sqrt{\dfrac{9}{\varepsilon}}$ **(3p)** , így $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\dfrac{9}{\varepsilon}}\right]$. **(2p)**

3. feladat (9+9+9=27 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 3}\right)^n, \qquad b_n = \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 3}\right)^{n^2}, \qquad c_n = \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 3}\right)^{n^3}$$

Mo.

$$b_n = \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 3}\right)^{n^2} \overset{\textbf{(5p)}}{=} \frac{\left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{n^2}\right)^{n^2}} \overset{\textbf{(3p)}}{\to} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{1}{e}.$$

$a_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \sqrt[n]{b_n}$, tehát mivel tetszőleges $\frac{1}{e} > \varepsilon > 0$ **(3p)** esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N$ esetén

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{e} - \varepsilon} < a_n < 1 \qquad (\mathbf{3p})$$

így a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ **(1p)** .

$c_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} b_n^n$, tehát mivel tetszőleges $1 - \frac{1}{e} > \varepsilon > 0$ **(3p)** esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N$ esetén

$$0 < c_n < \left(\frac{1}{e} + \varepsilon\right)^n \to 0 \qquad (\mathbf{3p})$$

így a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ **(1p)** .

---

4. feladat (20 pont)
Konvergens-e az $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Mo. $a_2 = \sqrt{15} > a_1$, és ha $a_n < a_{n+1}$, akkor $5a_n < 5a_{n+1}$ tehát $a_{n+1} = \sqrt{5a_n} < \sqrt{5a_{n+1}} = a_{n+2}$, vagyis a sorozat monoton nő **(5p)** . Ha a sorozat korlátos, akkor konvergens, és határértéke a sorozat legkisebb felső korlátja **(2p)** . A lehetséges A határérték kielégíti az $A = \sqrt{5A}$ egyenletet **(2p)** , vagyis $A = 0$ vagy $A = 5$ **(2p)** . Mivel $a_n \geq 3$, így a határérték csak 5 lehet **(2p)** . Belátjuk, hogy $a_n < 5$ **(2p)** . $a_1 < 5$, és ha $a_n < 5$, akkor $5a_n < 25$, így $a_{n+1} = \sqrt{5a_n} < 5$ **(4p)** . A sorozat tehát monoton növő és korlátos, így konvergens, tehát határértéke 5. **(1p)**

---

5. feladat (20 pont)
Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \frac{n! + n^7}{7^n + (-n)^n}, \qquad\qquad b_n = \frac{7^n + (-n)^n}{n! + n^7}$$

Mo.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1 + \frac{n^7}{n!}}{\left(\frac{7}{n}\right)^n + 1} \to 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1 + \frac{n^7}{n!}}{\left(\frac{7}{n}\right)^n - 1} \to 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad (\mathbf{6p})$$

A sorozat egyetlen torlódási pontja a 0 **(1p)** , vagyis $\limsup a_n = \liminf a_n = 0 = \lim a_n$ **(3p)** .

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{\left(\frac{7}{n}\right)^n + 1}{1 + \frac{n^7}{n!}} \to \infty, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{n^n}{n!} \cdot \dfrac{\left(\frac{7}{n}\right)^n - 1}{1 + \frac{n^7}{n!}} \to -\infty, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad \textbf{(6p)}$$

A sorozat torlódási pontjainak halmaza $\{-\infty, \infty\}$ **(1p)** , vagyis $\limsup b_n = \infty$, **(1p)** $\liminf b_n = -\infty$ **(1p)** , így a sorozat nem konvergens **(1p)** .