ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2009. jan. 14.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Adja meg az

$$y''' - 10y'' + 29y' = 10\,e^{-x}$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

$$(H):\quad \lambda^3 - 10\lambda^2 + 29\lambda = \lambda(\underbrace{\lambda^2 - 10\lambda + 29}) = 0$$

$$\lambda_1 = 0\ ; \qquad \lambda_{2,3} = \frac{10 \pm \sqrt{100-116}}{2} = 5 \pm j2$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{5x}\cos 2x + C_3 e^{5x}\sin 2x \qquad (6)$$

$$y_{ip} = A e^{-x}$$

$$\begin{array}{r|l} 29\cdot & y_{ip}' = -A e^{-x} \\ -10\cdot & y_{ip}'' = A e^{-x} \\ 1\cdot & y_{ip}''' = -A e^{-x} \end{array}$$

$$e^{-x}(-29A - 10A - A) = 10 e^{-x}$$

$$-40A = 10 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$y_{ip} = -\frac{1}{4} e^{-x} \qquad (4)$$

$$y_{id} = y_H + y_{ip} = \ldots \qquad (2)$$

2. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi függvények megadott x_0 bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

$$f(x) = \mathrm{sh}\,(3x^2)\,, \quad x_0 = 0\,; \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{3+x}\,, \quad x_0 = 1$$

$$\mathrm{sh}\,u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots \qquad u \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \mathrm{sh}\,3x^2 = 3x^2 + \frac{3^3 x^6}{3!} + \frac{3^5 x^{10}}{5!} + \ldots \quad (4) \qquad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{4k+2} \right)$$

$$x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$g(x) = \frac{1}{4+(x-1)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1 - \frac{-(x-1)}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-(x-1)}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}}(x-1)^k \quad (4)$$

$$\left| -\frac{(x-1)}{4} \right| = \frac{|x-1|}{4} < 1 \Rightarrow |x-1| < 4 \ :\ x \in \underbrace{(-3,5)}_{K.T.} \quad (2)$$

an2v090114/1.

3. feladat (10 pont)

A tanult módon vezesse le az arctg x függvény Taylor sorát!
Mi a sor konvergencia tartománya? (Indoklással)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad 3$$

$$|-x^2| = |x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 = R \quad 1$$

$$\int_0^x f'(x)\,dx = \text{arctg}\,x = \dots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad 3$$

$R = 1$ (változatlan) 1

$[0, x] \subset (-1, 1)$: szabad tagonként integrálni

$x = 1$: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ konv. (Leibniz sor)

$x = -1$ $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots$ konv. (Leibniz sor) } 2

K. T. : $[-1, 1]$

4. feladat (14 pont)

a) Adja meg $f'_y(x_0, y_0)$ definícióját!
b) Definiálja egy kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli totális deriválhatóságát!
c) Mi a kapcsolat a totális deriválhatóság és a függvény folytonossága között? Állítását bizonyítsa be!

a.) $\boxed{3}$ $$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

b.) $\boxed{4}$ $f: D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$; $\underline{a} = (x_0, y_0) \in \text{int}D$, $\underline{h} = (h, k)$ és $\underline{a} + \underline{h} \in D$

f totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban, ha Δf előállítható az alábbi alakban:

$$\Delta f = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = A \cdot h + Bk + \varepsilon_1 \cdot h + \varepsilon_2 k,$$

ahol A, B független h-tól, k-tól és $\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \varepsilon_i = 0$; $i = 1, 2$

($\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{A} \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon} \cdot \underline{h}$, ahol $\underline{A}$ független $\underline{h}$-tól és $\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \underline{\varepsilon} = \underline{0}$)

an2v090114/2.

c.) T Ha f $\underline{a}$-ban totálisan deriválható $\Rightarrow f$ $\underline{a}$-ban folytonos 2

$\boxed{7}$

B A definició miatt:

$$f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}\cdot\underline{h}$$

Mindkét oldal limeszét vesszük:

$$\underbrace{\lim_{\underline{h}\to 0} f(\underline{a}+\underline{h})}_{\lim_{\underline{x}\to \underline{a}} f(\underline{x})} = \lim_{\underline{h}\to 0}\left(\underset{\downarrow\; f(\underline{a})}{f(\underline{a})} + \underset{\downarrow\; \underline{0}}{\underline{A}}\cdot\underset{\downarrow\; \underline{0}}{\underline{h}} + \underline{\varepsilon}\cdot\underset{\downarrow\; \underline{0}}{\underline{h}}\right) = f(\underline{a})$$

Tehát határérték = helyettesítési érték 5

$\Rightarrow f$ folytonos $\underline{a}$-ban

5. feladat (12 pont)

$$f(x,y) = \frac{(y+1)\ \cos(2x)}{y-3}$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$

b) $\underline{e} \parallel -3\,\underline{i} + 4\,\underline{j}\,,\qquad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},2\right)} = ?$

c) $\max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},2\right)} = ?\qquad$ Mely irányban kapjuk ezt az értékét!

a.) $y \neq 3$

$\boxed{4}$

$$f'_x = \frac{y+1}{y-3}\,(-\sin 2x)\cdot 2 \qquad 2$$

$$f'_y = \cos 2x\ \frac{1\cdot(y-3)-(y+1)\cdot 1}{(y-3)^2} = \cos 2x\ \frac{-4}{(y-3)^2} \qquad 2$$

b.) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot\underline{e} \qquad P_0\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

$\boxed{5}$

$|\underline{v}| = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \underline{e} = -\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}$

$\operatorname{grad} f(P_0) = 0\,\underline{i} + (-1)\frac{-4}{1}\,\underline{j} = 4\underline{j}$

$$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = (4\underline{j})\left(-\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}\right) = 0\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\cdot\frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$

c.) $\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = 4$

$\boxed{3}$

$$\underline{e} = \frac{\operatorname{grad} f(P_0)}{|\operatorname{grad} f(P_0)|} = \underline{j}$$

an2v090114/B.

6. feladat (5+6+6=17 pont)*

a) Írja le hengerkoordináták segítségével az alábbi térrészt!

$$z \geq 0\,, \qquad z \leq 9 - x^2 - y^2\,, \qquad x^2 + y^2 \leq 4$$

b) Írja fel és számítsa ki a hengerkoordinátás transzformáció Jacobi determinánsát!

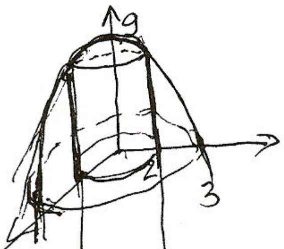
c)

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}V = ? \qquad V: \text{ az a) feladatban leírt térrész}$$

a.) $x = r\cos\varphi$ $\qquad 0 \le r \le 2$

$y = r\sin\varphi$ $\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$z = z$ $\qquad 0 \le z \le 9 - r^2$



b.) $$J = \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

c.) $$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{z=0}^{9-r^2} \underbrace{\sqrt{r^2}}_{=r^2} \cdot r \, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{r^2 \cdot z \Big|_{z=0}^{9-r^2}}_{r^2(9-r^2-0)} d\varphi\, dr =$$

$$= (2\pi - 0) \int_0^2 (9r^2 - r^4)\,dr = 2\pi \left(\frac{9r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_{r=0}^{2} = 2\pi \left(3 \cdot 2^3 - \frac{2^5}{5} \right)$$

7. feladat (10 pont)*

Tudjuk, hogy az

$$u(x,y) = \cos 2x \ \operatorname{ch} 2y + 3y - 5x + 3$$

egy reguláris f függvény valós része.
Keresse meg az u harmonikus társát! $\quad (f(z) = ?)$

$\left.\begin{aligned} u'_x &= v'_y \\ u'_y &= -v'_x \end{aligned}\right\}$ 2 $\qquad u'_x = -2\sin 2x \operatorname{ch} 2y - 5$

$\qquad u'_y = 2\cos 2x \operatorname{sh} 2y + 3$

$\left.\begin{aligned} v'_y &= -2\sin 2x \operatorname{ch} 2y - 5 \quad (1) \\ v'_x &= -2\cos 2x \operatorname{sh} 2y - 3 \quad (2) \end{aligned}\right\}$ 2

(1)-ből: $v(x,y) = \int (-2\sin 2x \operatorname{ch} 2y - 5)\,dy = -\sin 2x \operatorname{sh} 2y - 5y + C(x)$

$\Rightarrow v'_x = -2\cos 2x \operatorname{sh} 2y + C'(x) \underset{(2)}{=} -2\cos 2x \operatorname{sh} 2y - 3 \Rightarrow C'(x) = -3$

$\Rightarrow C(x) = -3x + K \Rightarrow v(x,y) = -\sin 2x \operatorname{sh} 2y - 5y - 3x + K$ 6 $K \in \mathbb{R}$

an2υ090114/4.

$f(z) = \cos 2x \operatorname{ch} 2y + 3y - 5x + 3 + j(-\sin 2x \operatorname{sh} 2y - 5y - 3x + k)$

8. feladat (13 pont)*

Írja fel az alábbi komplex számok valós és képzetes részét, ha azok léteznek!

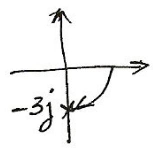
$$w_1 = \sin\left(\pi + j\frac{\pi}{2}\right) , \qquad w_2 = \mathrm{Ln}\,(-3j) , \qquad w_3 = \ln 0 ,$$

$$w_4 = \mathrm{sh}\, 5j , \qquad w_5 = \mathrm{e}^{1-j\,2}$$

3 $w_1 = \underbrace{\sin\pi}_{=0} \cos j\frac{\pi}{2} + \underbrace{\cos\pi}_{-1} \sin j\frac{\pi}{2} = j(-1)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = j(-1)$

$\mathrm{Re}\, w_1 = 0, \quad \mathrm{Im}\, w_1 = -1$

3 $w_2 = \ln|-3j| + j\left(\mathrm{arc}(-3j) + 2k\pi\right) = \ln 3 + j\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$



$\mathrm{Re}\, w_2 = \ln 3 \qquad \mathrm{Im}\, w_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2 $w_3 = \ln 0$ nem értelmezett

2 $w_4 = j \sin 5 \qquad \mathrm{Re}\, w_4 = 0 \;;\; \mathrm{Im}\, w_4 = \sin 5$

3 $w_5 = e^1\left(\underbrace{\cos(-2)}_{\cos 2} + j\underbrace{\sin(-2)}_{-\sin 2}\right) \qquad \mathrm{Re}\, w_5 = e\cos 2 \;;\; \mathrm{Im}\, w_5 = -e\sin 2$

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

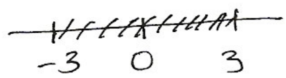
9. feladat (10 pont)

Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{3^{2n}\; n^2} \quad x^n$$

$x_0 = 0 \qquad a_n = \frac{(-3)^n \cdot 9}{9^n \cdot n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\ \sqrt[n]{9}}{9\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \frac{3\cdot 1}{9\cdot 1^2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 3$ 5 1



3
$x = -3: \ \sum_1^{\infty} \frac{9}{n^2}\frac{(-3)^n}{9^n}(-3)^n = 9\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konv. $(\alpha = 2 > 1)$

$x = 3: \ \sum_1^{\infty} \frac{9}{n^2}\frac{(-3)^n}{9^n}(3)^n = 9\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ konv. (Leibniz sor, ill. absz. konv.)

K.T.: $[-3, 3]$ 1

an2o090114/5.

10. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{(y^2-4)\,x}{x+5}, \qquad x \neq -5$$

$y \equiv 2$ ill. $y \equiv -2$ megoldás (2)

$$\int \frac{1}{y^2-4}\,dy = \int \frac{x}{x+5}\,dx \qquad (2)$$

$$\frac{1}{y^2-4} = \frac{1}{(y-2)(y+2)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2}$$

$$1 = A(y+2) + B(y-2) \qquad y=-2: \quad 1 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$y = 2: \quad 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{y^2-4}\,dy = \int\left(\frac{1}{4}\,\frac{1}{y-2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{y+2}\right)dy = \frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| + C_1 \qquad (3)$$

$$\int \frac{x}{x+5}\,dx = \int \frac{x+5-5}{x+5}\,dx = \int\left(1 - 5\,\frac{1}{x+5}\right)dx = x - 5\ln|x+5| + C_2 \qquad (2)$$

A de. megoldása:

$$\frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| = x - 5\ln|x+5| + C \qquad (1)$$

an2o-090114/6.