1. $\cos n \le 1$, (**2p**) így

$$a_n \overset{\mathbf{2p}}{\le} \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}} \overset{\mathbf{2p}}{\le} \sqrt[n]{\frac{2n^2+3n^2}{4n^2}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \sqrt[n]{\frac{5}{4}} \overset{\mathbf{2p}}{\le} \frac{5}{4}.$$

(Vagy a fentiekhez hasonló becslésekkel belátható, hogy $\sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}} \to 1$, tehát korlátos, és két korlátos sorozat szorzata is korlátos.)

$$\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n \overset{\mathbf{2p}}{\to} \sqrt{e},$$

vagyis elég nagy n esetén

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \overset{\mathbf{2p}}{\ge} \sqrt{e}-\varepsilon \overset{\mathbf{1p}}{>} 1$$

$$b_n \overset{\mathbf{1p}}{=} \left(\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n\right)^n \overset{\mathbf{1p}}{\ge} (\sqrt{e}-\varepsilon)^n \overset{\mathbf{1p}}{\to} \infty,$$

így a sorozat nem korlátos felülről (**2p**).

2. i. A logaritmus tulajdonságai miatt

$$(n+3)(\ln(n+5)-\ln(n+1)) \overset{\mathbf{3p}}{=} \ln\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{n+3} \overset{\mathbf{3p}}{=} \ln\left(\frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^3\right).$$

Itt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^3 \overset{\mathbf{2p}}{=} e^4,$$

így a logaritmus folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty}[(n+3)(\ln(n+5)-\ln(n+1)) = \ln e^4 \overset{\mathbf{2p}}{=} 4.$$

ii.

$$\frac{1}{n-\sqrt{n^2+3n+5}} \overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{n+\sqrt{n^2+3n+5}}{n^2-(n^2+3n+5)} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{n+\sqrt{n^2+3n+5}}{-3n-5} \overset{\mathbf{3p}}{=} \frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}}{-3-\frac{5}{n^2}},$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n^2+3n+5}} \overset{\mathbf{2p}}{=} -\frac{2}{3}.$$

3. A rekurzió $a_{n+1} \overset{\mathbf{2p}}{=} 2\alpha - \frac{2\alpha^2}{a_n+\alpha}$ alakba írható. Ha (a_n) konvergens, akkor A határértéke kielégíti az

$$A = \frac{2\alpha A}{A+\alpha} \Longleftrightarrow A^2 - A\alpha = 0$$

egyenletet, vagyis $A = 0$ vagy $A = \alpha$ (**2p**).

$$a_2 = \frac{2\alpha}{\alpha+1} > 1 = a_1 \Longleftrightarrow 2\alpha > \alpha + 1 \Longleftrightarrow \alpha > 1. \qquad \textbf{(2p)}$$

Ekkor

$$a_n < a_{n+1} \Longrightarrow a_n + \alpha < a_{n+1} + \alpha \Longrightarrow \frac{1}{a_n+\alpha} > \frac{1}{a_{n+1}+\alpha} \Longrightarrow \frac{-2\alpha^2}{a_n+\alpha} < \frac{-2\alpha^2}{a_{n+1}+\alpha}$$
$$\Longrightarrow a_{n+1} = 2\alpha - \frac{2\alpha^2}{a_n+\alpha} < 2\alpha - \frac{2\alpha^2}{a_{n+1}+\alpha} = a_{n+2}. \qquad \textbf{(3p)}$$

Ugyanígy

$$a_2 = \frac{2\alpha}{\alpha+1} < 1 = a_1 \Longleftrightarrow 2\alpha < \alpha + 1 \Longleftrightarrow \alpha < 1. \qquad \textbf{(1p)}$$

Ekkor

$$a_n > a_{n+1} \Longrightarrow a_n + \alpha > a_{n+1} + \alpha \Longrightarrow \frac{1}{a_n+\alpha} < \frac{1}{a_{n+1}+\alpha} \Longrightarrow \frac{-2\alpha^2}{a_n+\alpha} > \frac{-2\alpha^2}{a_{n+1}+\alpha}$$
$$\Longrightarrow a_{n+1} = 2\alpha - \frac{2\alpha^2}{a_n+\alpha} > 2\alpha - \frac{2\alpha^2}{a_{n+1}+\alpha} = a_{n+2}, \qquad \textbf{(2p)}$$

vagyis $\alpha > 1$ esetén a sorozat monoton növő, $\alpha < 1$ esetén monoton fogyó, $\alpha = 1$ esetén $a_n = 1$. Ha $\alpha > 1$, akkor $a_1 \leq \alpha$, és

$$a_n \leq \alpha \Longrightarrow a_n + \alpha \leq 2\alpha \Longrightarrow \frac{1}{a_n+\alpha} \geq \frac{1}{2\alpha} \Longrightarrow \frac{-2\alpha^2}{a_n+\alpha} \leq \frac{-2\alpha^2}{2\alpha} = -\alpha$$
$$\Longrightarrow a_{n+1} = 2\alpha - \frac{2\alpha^2}{a_n+\alpha} \leq 2\alpha - \alpha = \alpha. \qquad \textbf{(3p)}$$

Ha $\alpha < 1$, akkor $a_1 \geq \alpha$, és

$$a_n \geq \alpha \Longrightarrow a_n + \alpha \geq 2\alpha \Longrightarrow \frac{1}{a_n+\alpha} \leq \frac{1}{2\alpha} \Longrightarrow \frac{-2\alpha^2}{a_n+\alpha} \geq \frac{-2\alpha^2}{2\alpha} = -\alpha$$
$$\Longrightarrow a_{n+1} = 2\alpha - \frac{2\alpha^2}{a_n+\alpha} \geq 2\alpha - \alpha = \alpha. \qquad \textbf{(2p)}$$

Így $\alpha > 1$ esetén (a_n) monoton csökkenő és α alsó korlátja, $\alpha < 1$ esetén (a_n) monoton növő és α felső korlátja (**2p**). Mindkét esetben $a_n \to \alpha$. (**1p**)

4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \frac{1}{1+x^2}}{\sin^2 x + x^3} \overset{\textbf{6p}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1 + \frac{x^2}{1+x^2}}{\sin^2 x + x^3} \overset{\textbf{4p}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 x + \frac{x^2}{1+x^2}}{\sin^2 x + x^3} \overset{\textbf{6p}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2 + \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{1 + x \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}} \overset{\textbf{4p}}{=} \frac{-2+1}{1+0} = -1$$

5. f csak a nevezők zérushelyeiben, vagyis a $0, 1, -1$ pontokban nincs értelmezve. (**3p**)

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{2\pi}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} + \frac{1}{3^0} + \frac{3}{|1|} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{2\pi}{3} + 4,$$

tehát a szingularitás megszüntethető. (**1p**)

$$\lim_{x\to 1+} f(x) \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{\sin(2\pi)}{3} + \frac{1}{3^{\lim_{x\to 1+}\frac{x}{x-1}}} + \frac{3+3}{|1+1|} \overset{\mathbf{2p}}{=} 3,$$

és

$$\lim_{x\to 1-} f(x) \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{\sin(2\pi)}{3} + \frac{1}{3^{\lim_{x\to 1-}\frac{x}{x-1}}} + \frac{3+3}{|1+1|} \overset{\mathbf{2p}}{=} \infty,$$

tehát a szingularitás másodfajú. (**1p**)

$$\lim_{x\to -1\pm} f(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{-\sin(2\pi)}{3} + \frac{1}{3^{\frac{-1}{-2}}} + 3\lim_{x\to -1\pm}\frac{x+1}{|x+1|} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \pm 3,$$

tehát a -1 pontban véges ugrása van a függvénynek. (**1p**)