2. zárthelyi

A3 2010 ősz

Munkaidő: 90'

(2010.11.16.)

1. Amennyiben léteznek, határozza meg a $z_n = (1 + i^n) \cdot (1 + \frac{i^n}{n})$ sorozat határértékét ill. sűrűsödési értékeit! (i a képzetes egység.)

2. (a) $\lim\limits_{z \longrightarrow 0} \frac{z}{\overline{z}} = ?$ (b) $\lim\limits_{z \longrightarrow 0} \frac{z^2}{\overline{z}} = ?$

3. Hol deriválható az $f(x + iy) = |y| + i|x|$ komplex függvény ?

4. $\ln(\mathrm{sh}\,(i\frac{\pi}{2})) = ?$

$sh(i\frac{\pi}{2}) = \frac{2i}{2} = i$

5. Legyen K az origóközéppontú $R = 1$ sugarú zárt pozitívan irányított körvonal, BK pedig K-nak a bal félsíkba eső (K irányítását megtartó) félköre. Számítsa ki az alábbi integrálok értékét!

(a) $\int_{BK} |z|^{100} dz$ (b) $\int_{BK} z^{100} dz$ (c) $\int_K \frac{e^{z^{100}} - 1}{z^{100}} dz$ (d) $\int_K \frac{e^z}{z^{100}} dz$

6. Legyen f tetszőleges komplex függvény és z_0 tetszőleges pont a komplex síkon. Melyik igaz, melyik nem?

(1) Ha f a z_0 pont minden környezetében deriválható, akkor f reguláris z_0-ban
(2) Ha f reguláris z_0-ban, akkor f a z_0 pont minden környezetében deriválható
(3) Ha f a z_0 pont minden környezetében deriválható, akkor f mindenütt deriválható
(4) Ha z_0-nak van olyan környezete, melyben f reguláris, akkor z_0-ban f deriválható
(5) Ha f deriválható z_0-ban, akkor van z_0-nak olyan környezete, melyben f reguláris
(6) Ha f reguláris z_0-ban, akkor van z_0-nak olyan környezete, melyben f reguláris
(7) Ha f reguláris z_0-ban, akkor van z_0-nak olyan környezete, melyben f deriválható
(8) Ha f deriválható z_0-ban, akkor van z_0-nak olyan környezete, melyben f deriválható.

2. zárthelyi megoldásokkal A3 2010 ősz Munkaidő: 90'

1. Amennyiben léteznek, határozza meg a $z_n = (1 + i^n) \cdot (1 + \frac{i^n}{n})$ sorozat határértékét ill. sűrűsödési értékeit! (i a képzetes egység.)

MO. $\left|\frac{i^n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \rightsquigarrow 1 + \frac{i^n}{n} \longrightarrow 1,$ 2p

$\operatorname{arc} i^n = n \cdot \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow i^n$ sűrűsödési értékei: $\{1, i, -1, -i\} \rightsquigarrow$ 5p

$\rightsquigarrow (z_n)$ sűrűsödési értékei : $\{2, 1+i, 0, 1-i\}$, 2p

határérték tehát nincs. 1p

10p

2. (a) $\lim\limits_{z \longrightarrow 0} \frac{z}{\overline{z}} = ?$ (b) $\lim\limits_{z \longrightarrow 0} \frac{z^2}{\overline{z}} = ?$

MO. (a) $\lim\limits_{z \longrightarrow 0} \frac{z}{\overline{z}}$ nem létezik mert pl. az x tengely mentén ($y = 0$-val) $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{x}{\overline{x}} = 1$ és az y tengely mentén ($x = 0$-val) $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{iy}{\overline{iy}} = \frac{iy}{-iy} = -1$. 5p

(b) $\lim\limits_{z \longrightarrow 0} \frac{z^2}{\overline{z}} = 0$, mert $f(z) = \frac{z^2}{\overline{z}} = z \cdot \frac{z}{\overline{z}}$ és $\left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = 1$, így $|f(z)| = |z| \longrightarrow 0$. 5p

10p

3. Hol deriválható az $f(x+iy) = |y| + i|x|$ komplex függvény?

MO. A második és negyedik síknegyed belsejében, azaz pontosan azon $z = x + iy$ komplex számokra, melyekre $x \cdot y < 0$, mert itt az $u(x,y) = |y|$ és a $v(x,y) = |x|$ deriválhatóak, 5p

továbbá pl. $x > 0,\ y < 0 \rightsquigarrow f(x+iy) = |y| + i|x| = -y + ix \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow u_x = 0 = v_y,\ u_y = -1 = -v_x$ és a többi eset analóg, így

itt és csak itt állnak fenn a Cauchy–Riemann-diff. egyenletek. 5p

10p

4. $\ln(\operatorname{sh}(i\frac{\pi}{2})) = ?$

MO. $\operatorname{sh}(i\frac{\pi}{2}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{1}{2}((i - (-i)) = i$ 5p

és $\ln i = \ln|i| + i \operatorname{arc} i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow$ 5p

$\rightsquigarrow \ln(\operatorname{sh}(i\frac{\pi}{2})) = i\frac{\pi}{2}$

10p

5. Legyen K az origóközéppontú $R = 1$ sugarú zárt pozitívan irányított körvonal, BK pedig K-nak a bal félsíkba eső (K irányítását megtartó) félköre. Számítsa ki az alábbi integrálok értékét!

(a) $\int_{BK} |z|^{100} dz$ (b) $\int_{BK} z^{100} dz$ (c) $\int_K \frac{e^{z^{100}} - 1}{z^{100}} dz$ (d) $\int_K \frac{e^z}{z^{100}} dz$

MO.

(a) BK egyenlete: $z(t) = e^{it},\ t \in (\pi/2, -\pi/2),\ f(z) = |z|^{100} \rightsquigarrow \int_{BK} f(z)\,dz = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)\,dt \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \int_{BK} |z|^{100} dz = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} |e^{it}|^{100} ie^{it}\,dt = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} ie^{it}\,dt = \frac{ie^{it}}{i}\Big|_{\pi/2}^{-\pi/2} = -i - i = -2i$$ 3p

(b) z^{100} reguláris, Newon–Leibnitz-el: $\int_{BK} z^{100} dz = \frac{z^{101}}{101}\Big|_{i}^{-i} =$

$$= \frac{1}{101}((-i)^{101}) - i^{101}) = \frac{1}{101}(-i - i) = -\frac{2i}{101}$$ 2p

(c) Az integrandus az origó kivételével reguláris és az origóval kiszúrt körlapon korlátos ($\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^{z^{100}} - 1}{z^{100}} = 1$, azaz megszüntethető szakadása van az origóban), így az integrál 0. 3p

(d) Cauchy-integrálformulával: $\int_K \frac{e^z}{z^{100}} dz = \frac{2\pi i}{99!} (e^z)^{(99)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{99!}$ 2p

6. feladat: I, H, I, I, H, I, I *(a mo. 2. lapját a gyakvezem elfelejtette behozni, csak lediktálta ezeket)*