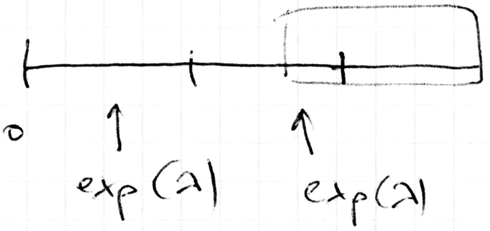
II. gyakorlat

2010. XI. 03.

I. gyakorlatsorból

Ha veszünk függ. ~~eloszlású~~ exp. eloszlásúakat



← veszünk bárhol egy h hosszú intervallumot, akkor a ebbe eső pontok száma Poisson-eloszlású.

függ.-en veszünk fel a szakaszokat

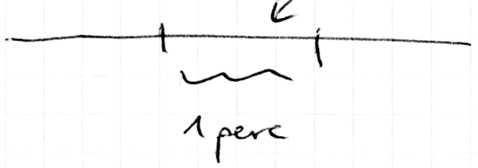
$Poi(\lambda \cdot h)$ eloszlású darab pont esik.

Ezt a pontfolyamatot úgy hívják, hogy Poisson-pontfolyamat

(16.)

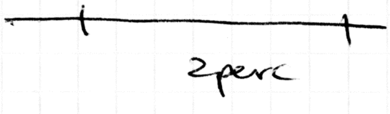
$\lambda = 5$ (percenként 5 paraméterrel)

A hosszat percekben mérjük.



az ide eső igények száma $Poi(\lambda = 5)$

Ha 2 perces időintervallumot tekintünk, akkor



$Poi(\lambda = 10)$ ←

2 perc alatti igények száma Poisson $\lambda = 10$ paraméterrel

(~~...~~ úgy is lehet, mint két függ. 5 paraméterű Poissont veszünk)

P(legalább 8 kérést kell kiszolgálni egy 2 perces periódusban) =

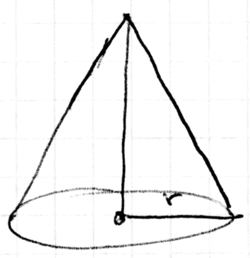
$$= \sum_{k=8}^{\infty} P(k \text{ db igény van 2 perc alatt}) =$$

$$= \sum_{k=8}^{\infty} e^{-10} \cdot \frac{10^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{7} e^{-10} \cdot \frac{10^k}{k!}$$

A Poisson-folyamatot exp. változókból származtattuk.

(18.) Centrális határeloszlás tétele

(19.)



V egyenletes eloszlású 8 és $10\,m^3$-en

$$V = \frac{1}{3} r^3 \pi \to r^3 = \frac{3V}{\pi}$$

$$A = r^2 \pi \qquad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$$

így $A = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \pi = \pi^{\frac{1}{3}} \cdot (3V)^{\frac{2}{3}}$

Az a várható értéket kell számolni

$\downarrow$ megadni a térfogat sűrűségfgv-ét.

így $A = f(V)$ alapján

$\downarrow$

$$EA = E(f(V)) = \int_{8}^{10} f(V) \cdot g(V)\, dV, \text{ ahol}$$

$g(V)$ a V sűrűségfüggvénye. ← egyenletes eloszlás

$$g(V) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } 8 < V < 10 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Végül:

$$EA = \int_8^{10} \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \, dV =$$

$$=$$

---

2. feladatsor

Beadható HF: 1, 4, 13

Ha van egy X valószínűségi változó, akkor a generátorfüggvénye (diszkrét valószínűségi változó esetén):

$$g(z) = E(z^X)$$

$$g'(z) = E(z^X)' = E(X \cdot z^{X-1})$$

$$g'(1) = E(X)$$

$$g''(z) = E\left(X(X-1) z^{X-2}\right)$$

$$g''(1) = E(X(X-1))$$

$$\downarrow$$

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + EX$$, mert a várható érték lineáris

$$= g''(1) + g'(1)$$

így $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$

(2.) 60 percet kell tekinteni, hogy óránkénti átlagot tudjuk tekinteni $\to \lambda = 120$.

Vagyis az összes beérkező járművek eloszlása $Poi(\lambda = 120)$

$\frac{1}{2}$ motor $\to$ önmagukban is Poisson-folyamatot alkotnak, csak kisebb a paraméter:

$Poi(\lambda = 60)$

$\frac{1}{3}$ személyautó $\to Poi(\lambda = 40)$

$\frac{1}{6}$ teherautó $\to Poi(\lambda = 20)$

A Poisson-folyamatok függetlenek is.

Fizetni kell: motoros $\to 1$

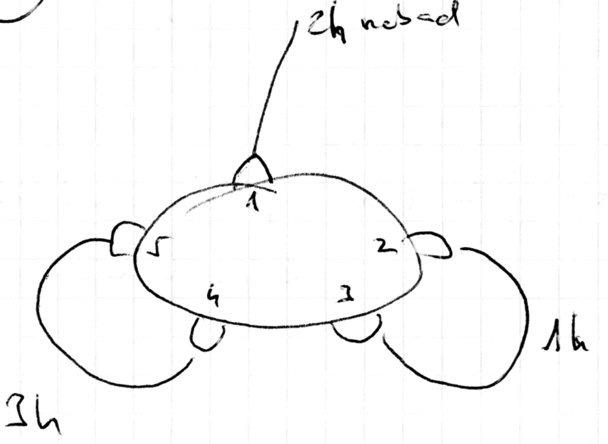
szem. autó $\to 2$

teherautó $\to 5$

$$E(\text{bevétel}) = E(\text{motoros}) + E(\text{szem. autó}) + E(\text{teherautó})$$

$$= 1 \cdot 60 + 2 \cdot 40 + 5 \cdot 20 = 240$$

(5.)



Véletlenszerűen választ az ajtók között

Teljes eseményrendszert alkot, hogy

X: a kiszabaduláshoz szükséges idő (ez egy véletlen szám)

Ennek a generátorfgv-ére tudunk majd mondani valamit

$$g(z) = E(z^X)$$

$$E(z^X) = \sum_{k=1}^{5} E(z^X \mid \text{a } k\text{-adik kijáraton indult el}) \cdot \frac{1}{5}$$

a teljes várható érték tétele alapján

egyenlő valószínűséggel indul el mindegyikre (mert egyenletes eloszlású).

Ha az 1. kijáratot választotta, akkor $X = 2$.

$$\underbrace{E(z^2 \mid \text{az 1. kijáraton indult})}_{z^2} \cdot \frac{1}{5} + \underbrace{E(z^X \mid \text{a 2. kijáratot választotta}) \cdot \frac{1}{5}}_{\frac{1}{5} \cdot E(z^{1+X'})}, \text{ ahol}$$

A feltételünk mellett $X = 2$.
A valószínűségi fgv-ének várható értékét nézzük ki.

X' ugyanolyan eloszlású, mint X.

$$E(z^{1+x'})\cdot\frac{1}{5} = E(z\cdot z^{x'})$$

$$E(z^{x'}) = E(z^{x}) \text{, így}$$

$$E(z^{1+x'}) = z\cdot g(z)$$

Ha a 3. kéziratot választja, akkor is ugyanez.

Ha a 4. vagy az 5. kéziratot választotta:

$$\underbrace{E(z^{x}\mid 4.\text{ kéziratot választotta})\cdot\frac{1}{5}}$$

ezt is ugyanúgy kell z-vel emelni.

Ilyenkor $\underbrace{E(z^{3+x''})}\cdot\frac{1}{5}$, ahol x'' is ugyanolyan eloszlású, mint X.

$$z^{3}\cdot E(z^{x''}) = z^{3}\cdot g(z)$$

vagyis:

$$E(z^{x}) = \frac{1}{5}z^{2} + \frac{2}{5}z\cdot g(z) + \frac{2}{5}z^{3}g(z) = g(z)$$

Ebből $g(z)$-t már ki lehet fejezni.

$$g(z)\left(1-\frac{2}{5}z-\frac{2}{5}z^{3}\right) = \frac{1}{5}z^{2}$$

így $$g(z) = \frac{\frac{1}{5}z^{2}}{1-\frac{2}{5}z-\frac{2}{5}z^{3}}$$

ez a kijutási idő generátor-függvénye.

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) \cdot z^k$$

Ehhez $g(z)$-t Taylor-sorba kell fejteni.

(5.) $E(z^X) = G(z)$

$Y = X+1$ generátorfgv-ét:

$$G_Y(z) = E(z^Y) = E(z^{X+1}) = z \cdot E(z^X) = z \cdot G(z)$$

$$E(z^Z) = E(z^{2X}) =$$

$$= E\left((z^2)^X\right) = G(z^2)$$

(6.) $X_1, X_2, \dots, X_n$ fgtlen., eloszlásfgv-e:

$$F(x) = P(X_i < x) = P(X_1 < x)$$

egyforma eloszlásúak, így kicserélhetők.

$$Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$H(x) = P(Y < x)$$

$$P(Y < x) = P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} < x) =$$

akkor igaz, ha mind külön-külön $< x$

$$= P(X_1 < x, X_2 < x, \dots X_n < x) \overset{\text{függetlenség}}{=} P(X_1 < x) \cdot P(X_2 < x) \dots P(X_n < x) =$$

$$= \left(P(X_1 < x)\right)^n = F(x)^n \quad ✓$$

(7.) $X_1, X_2, \dots, X_n$ fgtln. és azonos eloszlású valószínűségi változók, eloszlásfgv-ük $F(x) = P(X_i < x)$

ν egészértékű fgtl. valószínűségi változó, generátorfgv-e $G(z)$

$Y_{max} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_\nu\}$

$$H(x) = P(Y < x) = P(\max\{X_1, X_2, \dots X_\nu\} < x) =$$

Teljes eseményrendszert alkotó és teljes valószínűség tételével

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\max\{X_1, \dots, X_\nu\} < x \mid \nu = k\right) \cdot P(\nu = k) =$$

Ha $\nu = k$, akkor determinisztikus, így átírva

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P\left(\max\{X_1, \dots, X_k\} \mid \nu = k\right)}_{= F(x)^k} \cdot P(\nu = k) =$$

$= F(x)^k$, a $\nu = k$ feltételnek ettől az fgtln, az nem lényeges.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (F(x))^k \cdot P(\nu = k)$$

összehasonlítva látjuk, hogy ez és egy generátorfgv az $F(x)$ helyen: $G(F(x))$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\nu = k) \cdot z^k$$

(8.) A tagnám generátorfgv-e:

G(z) : dobások számának generátorfgv-e.

$$G(z) = \frac{1}{3}\cdot z^9 + \frac{1}{3}\cdot z^{12} + \frac{1}{3} z^{15}$$

$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot z^9}_{3\text{fős}}$ $\underbrace{\frac{1}{3}\cdot z^{12}}_{4\text{fős}}$ $\underbrace{\frac{1}{3} z^{15}}_{5\text{fős}}$ csapat

9 3fős

$$\sum_k P(\nu = k)\cdot z^k$$

mert ugyanannyi 3, 4 és 5 fős csapat van

A dobások sűrűségfgv-e:

$$f(x) = \frac{50}{3x^2} \qquad 10 < x < 25$$

eloszlásfgv:
$$\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_{10}^{x} \frac{50}{3y^2}\,dy =$$

$$= \frac{50}{3}\left[-y^{-1}\right]_{10}^{x} = \frac{50}{3}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{x}\right)$$

$$H(x) = G(F(x)) = \frac{1}{3}\left(\frac{50}{3}\right)^9\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{x}\right)^9 +$$

$$+ \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{50}{3}\right)^{12}\cdot\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{x}\right)^{12} + \frac{1}{3}\left(\frac{50}{3}\right)^{15}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{x}\right)^{15}$$

(9)

a) X = az első 6-osig szükséges dobások száma

Ez geometriai eloszlás, $\frac{1}{6}$ paraméterrel.

$P(\text{első dobás } 6) = \frac{1}{6}$

Az első dobásra: $g(z) = E(z^X) = E(z^X \mid \text{első dobás } 6) \cdot \frac{1}{6} +$

$+ E(z^X \mid \text{első dobás nem } 6) \cdot \frac{5}{6} =$

$$= \underbrace{E(z^X \mid X=1)}_{z} \cdot \frac{1}{6} + E(z^{1+X'} \mid \text{első dobás nem } 6) \cdot \frac{5}{6}$$

X' is olyan eloszlású, mint X.

A geometriai örökifjúság: így $= z \cdot E(z^{X'}) = z \cdot g(z)$

$E(z^{X'}) = g(z)$ és egyez.

így

Vagyis $g(z) = \frac{1}{6} \cdot z + \frac{5}{6} z \cdot g(z)$ $\qquad p = \frac{1}{6}$ itt.

$$g(z) \text{ ki.} = \frac{\frac{1}{6} z}{1 - \frac{5}{6} z} \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \cdot \underbrace{p(1-p)^{k-1}}_{\text{a } k\text{-adikra jön ki a 6-os}}$$

kész és ki lehet számolni.

(11.) $X_1, X_2, \dots, X_{30}$ a Söder Kft. bevétele az egyes hónapokban.

független eloszlású: $P(X_1=1)=0{,}7$
$P(X_1=0)=0{,}3$

$$S_{30} = X_1 + X_2 + \dots + X_{30}$$

↑ ez egy nagy szám, így a centrális határeloszlás tétele működik.

a, $E(S_{30}) = 30 \cdot 0{,}7 = 21$

b, $P(S_{30} < 20) = ?$

↑ kb. normális eloszlású lesz a CET értelmében

$$P(S_{30} < 20) = P\left(\frac{S_{30} - E(S_{30})}{D(S_{30})}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_{30} - 21}{\sqrt{0{,}21 \cdot 30}} < \frac{20-21}{\sqrt{6{,}3}}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{6{,}3}}\right)$$

↑ CET miatt ez normális $N(0,1)$ standard normális

$E(X_1^2) = 0{,}7$

$D^2(X_1) = 0{,}7 - 0{,}7^2 = 0{,}21$

táblázatból

$$= \Phi(-0{,}398) = 1 - \Phi(0{,}398) =$$

c, $P(S_{30} < 15) = \phi\left(-\frac{6}{\sqrt{6,3}}\right) =$