ANALIZIS(2) II.ZÁRTHELYI pótlása 2007. május 4.

Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 60 perc

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (20 pont).

Írja fel az

$$f(x) = e^x\,, \qquad g(x) = \frac{1}{1-x}$$

függvények origó körüli, valamint az $x_0 = -2$ körüli Taylor sorait és azok konvergenciasugarait!

2) Feladat (17 pont).

a) Határozza meg az alábbi függvény origó körüli Taylor sorát és konvergenciasugarát!

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x^4}}$$

Írja fel elemi műveletekkel a sor első három nem nulla tagját!

b) $f^{(12)}(0) = ?$

3) Feladat (13 pont).

Írja fel az $f(x) = \mathrm{sh}(x^4)$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, adja meg a konvergencia tartományát! Ennek segítségével határozza meg az alábbi integrál közelítő értékét az integrandus 12-edrendű Taylor polinomja felhasználásával!

$$\int_0^{1/100} \mathrm{sh}(x^4)\ dx$$

Hibabecslést most nem kérünk.

4) Feladat (50 pont).

$$f(x,y) = e^{(-x^3y^4)}\,, \qquad P = P(-1,1)$$

a) Hol differenciálható totálisan az f függvény?

b) $\mathrm{grad} f(P) = ?$ $\quad df\big((-1,1),(dx,dy)\big) = ?$

c) Írja fel a P-hez tartozó érintősík egyenletét!

d) Számolja ki az f függvénynek a $P(-1,1)$ pontbeli, $\underline{v} = (-5,-1)$ irányú iránymenti deriváltját!

e)

$$f''_{yy} = ? \qquad f''_{xy} = ? \qquad f''_{yx} = ?$$

ANALIZIS(2) II.ZÁRTHELYI pótlása 2007. május 4.

Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 60 perc

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (20 pont).
Írja fel az

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = \frac{1}{1-x}$$

függvények origó körüli, valamint az $x_0 = -2$ körüli Taylor sorait és azok konvergenciasugarait!

1,

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad ; \ R = \infty \qquad 4$$

$$f(x) = e^{(x+2)-2} = e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+2)^k \quad ; \ R = \infty \qquad 6$$

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad ; \ R = 1 \qquad 4$$

$$g(x) = \frac{1}{3-(x+2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+2}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} (x+2)^k \quad ; \ R = 3 \qquad 6$$

2) Feladat (17 pont).
a) Határozza meg az alábbi függvény origó körüli Taylor sorát és konvergenciasugarát!

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x^4}}$$

Írja fel elemi műveletekkel a sor első három nem nulla tagját!
b) $f^{(12)}(0) = ?$

a,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x^4}} = (1+3x^4)^{-1/3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/3}{k} \cdot (3x^4)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{k} \cdot 3^k \cdot x^{4k} \quad 5 \ ; \qquad |3x^4| < 1 \ ; \ |x| < \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

$$R = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \quad 2$$

$$\binom{-\frac{1}{3}}{0} = 1 \ ; \ \binom{-\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3} \ ; \ \binom{-1/3}{2} = \frac{(-1/3)(-4/3)}{2!} = \frac{2}{9}$$

$$T_8(x) = 1 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^4 + \frac{2}{9} \cdot 3^2 \cdot x^8 = 1 - x^4 + 2x^8 \qquad 5$$

b, $k = 3$ -hoz tartozó együttható: 5

$$a_{12} = \binom{-1/3}{3} \cdot 3^3 = \frac{(-1/3)(-4/3)(-7/3)}{3 \cdot 2} \cdot 3^3 = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$$

$$f^{(12)}(0) = 12! \cdot a_{12} = 12! \cdot \binom{-1/3}{3} 3^3 = -\frac{14}{3} \cdot 12!$$

3) Feladat (13 pont).

Írja fel az $f(x) = \mathrm{sh}(x^4)$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, adja meg a konvergencia tartományát! Ennek segítségével határozza meg az alábbi integrál közelítő értékét az integrandus 12-edrendű Taylor polinomja felhasználásával!

$$\int_0^{1/100} \mathrm{sh}(x^4)\ dx$$

Hibabecslést most nem kérünk.

$$\mathrm{sh}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad ; K.T. = \mathbb{R} \qquad 3$$

$$f(x) = \mathrm{sh}(x^4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot x^{8k+4} \quad ; K.T. = \mathbb{R}. \qquad 3$$

$$T_{12}(x) = x^4 + \frac{1}{3!} x^8 + \frac{1}{5!} x^{12} \qquad 3$$

$$\int_0^{1/100} \mathrm{sh}(x^4)\, dx \approx \int_0^{1/100} \left(x^4 + \frac{1}{3!} x^8 + \frac{1}{5!} x^{12} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{1}{3!}\frac{x^9}{9} + \frac{1}{5!}\frac{x^{13}}{13} \right]_0^{10^{-2}} = \frac{1}{5} \cdot 10^{-10} + \frac{1}{3! \cdot 9} \cdot 10^{-18} + \frac{1}{5! \cdot 13} \cdot 10^{-26} \qquad 4$$

4) Feladat (50 pont).

$$f(x,y) = e^{(-x^3y^4)}, \qquad P = P(-1,1)$$

a) Hol differenciálható totálisan az f függvény?

b) $\mathrm{grad} f(P) = \ ?$ $\quad df((-1,1),(dx,dy)) = ?$

c) Írja fel a P-hez tartozó érintősík egyenletét!

d) Számolja ki az f függvénynek a $P(-1,1)$ pontbeli, $\underline{v} = (-5,-1)$ irányú iránymenti deriváltját!

e)

$$f''_{yy} = ? \qquad f''_{xy} = ? \qquad f''_{yx} = ?$$

a, 10

$$\left. \begin{aligned} f'_x(x,y) &= -3x^2y^4 e^{(-x^3y^4)} \\ f'_y(x,y) &= -4x^3y^3 e^{(-x^3y^4)} \end{aligned} \right\}$$

mindenütt ($\mathbb{R}^2$-en) folytonosak $\Rightarrow$ $f(x,y)$ mindenütt ($\mathbb{R}^2$-en) totálisan diff.-ható.

b, 10

$$\left. \begin{aligned} f'_x(-1,1) &= -3 \cdot e \\ f'_y(-1,1) &= 4 \cdot e \end{aligned} \right\} \quad \mathrm{grad} f(P) = \begin{bmatrix} -3e \\ 4e \end{bmatrix} = -3e\underline{i} + 4e\underline{j}$$

$$df((-1,1),(dx,dy)) = -3e\,dx + 4e\,dy$$

c, $f(-1,1) = e$; $z - f(P) = (x-x_0) f'_x(P) + (y-y_0) f'_y(P)$

10

$$z - e = (x+1)(-3e) + (y-1)(4e)$$

$$z = -3ex + 4ey + 6e$$

d, 10

$|\underline{v}| = \sqrt{26}$; $\dfrac{df}{d\underline{u}} = \underline{u} \cdot \mathrm{grad} f(P) = \dfrac{-5}{\sqrt{26}} \cdot (-3e) + \dfrac{-1}{\sqrt{26}} \cdot 4e = \dfrac{11e}{\sqrt{26}}$

$\underline{u} := \dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$

e, 10

$$f''_{yy}(x,y) = -12x^3y^2 e^{-x^3y^4} + (4x^3y^3)^2 e^{-x^3y^4}.$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = -12x^2y^3 e^{-x^3y^4} + 12x^5y^7 e^{-x^3y^4}$$