

1. feladat (10 pont)

Határozza meg az alábbi függvénysor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \cdot 3^{2n}} \cdot (x-2)^n$$

2. feladat (29 pont = 3p+4p+8p+7p+7p)

Határozza meg az alább megadott függvények adott x_0 pont körüli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát!

- | | | |
|----|----------------------------------|-------------|
| a) | $f(x) = \sin(3x^2),$ | $x_0 = 0;$ |
| b) | $g(x) = \operatorname{ch}(x+2),$ | $x_0 = -2;$ |
| c) | $g(x) = \operatorname{ch}(x+2),$ | $x_0 = 0;$ |
| d) | $h(x) = \frac{1}{2+3x},$ | $x_0 = 0;$ |
| e) | $h(x) = \frac{1}{2+3x},$ | $x_0 = 1.$ |

3. feladat (14 pont=8p +6p)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{2+7x^3}}$$

a) Határozza meg az $f(x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát valamint a sor konvergenciasugarát!

b) Elemi műveletekkel adja meg a következő deriváltakat:

$$f^{(9)}(0) = ? \qquad f^{(10)}(0) = ?$$

4. feladat (13 pont=6p +7p)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2y^3 + xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

a) Létezik-e f határértéke a $(0, 0)$ pontban? Ha igen, adja meg értékét, ha nem, indokolja meg, hogy miért nem!

b) Az origóban határozza meg a függvény mindkét parciális deriváltját valamint gradiensét! (Ha valamelyik nem létezik, indokolja állítását!)

5. feladat (22 pont = 8p + 6p + 4p + 4p)

$$f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2}, \quad P = (2, 1)$$

- a) Hol létezik, és mennyi a függvény gradiense? (Minden állítását indokolja meg!)
- b) Írja fel a függvény grafikonját a $P = (2, 1)$ pontban érintő sík egyenletét!
- c) Legyen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, és legyen \mathbf{e} a \mathbf{v} -vel párhuzamos, azonos állású egységvektor. Határozza meg f -nek a $P = (2, 1)$ pontban az \mathbf{e} irányú iránymenti deriváltját!
- d) Milyen irányban maximális f -nek a $P = (2, 1)$ pontban vett iránymenti deriváltja? Mennyi ez a maximum?

6. feladat (12 pont)

Legyen g kétszer folytonosan deriválható egyváltozós valós függvény, és

$$f(x, y) = g(e^{3x} + 2y^2).$$

$$f'_x = ?, \quad f'_y = ?, \quad f''_{xx} = ?, \quad f''_{xy} = ?$$

Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (10 pont = 3p + 7p)

- a) Adja meg az f függvény x_0 pont körüli Taylor-sorának definícióját!
- b) Határozza meg az alábbi f függvény adott x_0 középpontú, másodrendű Taylor-polinomját!

$$f(x) = \operatorname{tg}(2x), \quad x_0 = \frac{\pi}{8}, \quad T_2(x) = ?$$

8. feladat (10 pont)

$$f(x, y) = \left(3x - \frac{1}{y}\right)^2$$

$$f'_x(2, 1) = ?, \quad f'_y(2, 1) = ?, \quad df((2, 1), (h, k)) = ?$$