ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. máj. 26.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

Írja fel az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

$$y'' - 8y' + 20y = -2x + 1$$

$$y^{(5)} - 8y^{(4)} + 20y^{(3)} = 0$$

$y'' - 8y' + 20y = -2x+1$

(5) $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-80}}{2} = 4 \pm 2j$

$y_H = C_1 e^{4x}\cos 2x + C_2 e^{4x} \sin 2x \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$20\cdot \quad y_{ip} = Ax + B$

$-8\cdot \quad y'_{ip} = A$

$y''_{ip} = 0$

(4) $(20\cdot A)x + (20B - 8A) = -2x + 1 \Rightarrow 20A = -2 \; : A = -\frac{1}{10}$

$20B - 8A = 1 \; : \; B = \frac{1}{100}$

$y_{ip} = -\frac{1}{10}x + \frac{1}{100}$

(2) $y_{ia} = y_H + y_{ip} = \ldots$

$y^{(5)} - 8y^{(4)} + 20y^{(3)} = 0$

(4) $\lambda^5 - 8\lambda^4 + 20\lambda^3 = \lambda^3(\lambda^2 - 8\lambda + 20) = 0$

$\lambda_{1,2,3} = 0 \qquad \lambda_{4,5} = 4 \pm 2j$

$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{4x}\cos 2x + C_5 e^{4x} \sin 2x \qquad C_i \in \mathbb{R}$

2. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = e^{5x^2}$, $\quad x_0 = 0$ $\qquad$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x+5}$, $\quad x_0 = 2$

a) $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \; ; \; u \in \mathbb{R}$

$\boxed{5}$ $f(x) = e^{5x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^{2n}$ (3)

K.T.: $(-\infty, \infty)$ (2)

an20110526/1.

b.) $g(x)=\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{(x-2)+7}=\dfrac{1}{7}\,\dfrac{1}{1-\frac{-(x-2)}{7}}=$

$$=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(x-2)}{7}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}(x-2)^n \qquad 4$$

$$|q|=\left|-\frac{x-2}{7}\right|=\frac{|x-2|}{7}<1 \Rightarrow |x-2|<7$$

K.T.: $(-5,9)$ 2

3. feladat (16 pont)

a) Hogyan definiáljuk egy f függvény x_0 körüli Taylor sorát?

b) Milyen elégséges tételt tanultunk arra, hogy f megegyezzék Taylor sorával?

c) Vezesse le az $f(x)=\cos x$ függvény Taylor sorát $x_0=0$ esetén, és igazolja, hogy $f(x)$ megegyezik a Taylor sorával!

a.) f akárhányszor deriválható x_0-ban:

$\boxed{3}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \;(= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots$$

b.) Ha f ~~akárhányszor~~ differenciálható $(-R,R)$-en és

$\boxed{4}$ $f, f', f'', \dots f^{(n)}, \dots$ derivált függvények egyenletesen korlátosak itt (van hozzájuk közös korlát), akkor

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad x\in(-R,R)\text{-en}$$

(Tehát a Taylor sor a függvényt állítja itt elő)

c.) $T(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$

$\boxed{9}$

$f(x)=\cos x$; $f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x$; $f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x$; $f''(0)=-1$

$f'''(x)=\sin x$; $f'''(0)=0$

$f^{IV}(x)=\cos x$; $f^{IV}(0)=1$

A deriváltak $(-\infty,\infty)$-en egyenletesen korlátosak ($|f^{(k)}(x)|\le 1$), ezért $f(x)=T(x)$ $\forall\, x$-re.

Innen periodikusan ismétlődik.

$$T(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

4. feladat (7+8=15 pont)

a) Mi a kapcsolat a többváltozós függvények totális deriválhatósága és a függvény folytonossága között? Állítását bizonyítsa be!

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2y^2}{2x^2+5y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

Totálisan deriválható-e f a $(0,0)$ pontban?

a.) A tanult tétel:

$\boxed{7}$ (T) Ha f az $\underline{a}$-ban totálisan deriválható, akkor f az $\underline{a}$-ban folytonos. (2)

(B) A szükséges és elégséges tétel miatt

$$f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{független } \underline{h}\text{-tól}}}{\underline{A}} \cdot \underline{h} + \underset{\substack{\underline{h}\to\underline{0} \\ \downarrow \\ 0}}{\underline{\varepsilon}(\underline{h})} \cdot \underline{h}$$

Ebből

$$f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}$$

Mindkét oldalnak vesszük a határértékét $\underline{h}\to\underline{0}$-ra:

$$\underbrace{\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} f(\underline{a}+\underline{h})} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \Big(\underset{\substack{\downarrow \\ f(\underline{a})}}{f(\underline{a})} + \underset{\substack{\downarrow \\ \underline{0}}}{\underline{A}\cdot\underline{h}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\underline{\varepsilon}(\underline{h})} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \underline{0}}}{\underline{h}}$$

$$= \lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})$$

Tehát $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$, tehát a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel, így f folytonos $\underline{a}$-ban. (5)

b.) $\boxed{8}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} \frac{x^2-2y^2}{2x^2+5y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \\ &\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} \frac{x^2-2y^2}{2x^2+5y^2} = \lim_{y\to0} \frac{-2y^2}{5y^2} = -\frac{2}{5} \end{aligned}\right\} \neq \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$$

(6)

Mivel $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists \Rightarrow f$ nem folytonos $(0,0)$-ban

$\Rightarrow f$ nem deriválható $(0,0)$-ban. (2)

an2o110526/3.

4. feladat (7+8=15 pont)

a) Mi a kapcsolat a többváltozós függvények totális deriválhatósága és a függvény folytonossága között? Állítását bizonyítsa be!

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{2x^2 + 5y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

Totálisan deriválható-e f a $(0,0)$ pontban?

a.) A tanult tétel:

$\boxed{7}$ (T) Ha f az $\underline{a}$-ban totálisan deriválható, akkor f az $\underline{a}$-ban folytonos. (2)

(B) A szükséges és elégséges tétel miatt

$$f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{független } \underline{h}\text{-tól}}}{\underline{A}} \cdot \underline{h} + \underset{\substack{\underline{h}\to\underline{0} \\ \downarrow \\ 0}}{\underline{\varepsilon}(\underline{h})} \cdot \underline{h}$$

Ebből

$$f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}$$

Mindkét oldalnak vesszük a határértékét $\underline{h}\to\underline{0}$-ra:

$$\underbrace{\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} f(\underline{a}+\underline{h})}_{=\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \Big(\underset{\substack{\downarrow \\ f(\underline{a})}}{f(\underline{a})} + \underline{A}\cdot\underset{\substack{\downarrow \\ \underline{0}}}{\underline{h}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\underline{\varepsilon}(\underline{h})}\cdot\underset{\substack{\downarrow \\ \underline{0}}}{\underline{h}}$$

Tehát $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$, tehát a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel, így f folytonos $\underline{a}$-ban. (5)

b.) $\boxed{8}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2-2y^2}{2x^2+5y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \\ &\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2y^2}{2x^2+5y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-2y^2}{5y^2} = -\frac{2}{5} \end{aligned}\right\} \neq \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$$

(6)

Mivel $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists \implies f$ nem folytonos $(0,0)$-ban

$\implies f$ nem deriválható $(0,0)$-ban. (2)

an2u110526/3.

5. feladat (14 pont)*

$$f(x,y) = 2x + y + \frac{4}{xy}$$

a) Határozza meg az összes első- és másodrendű parciális deriváltat!
$df\,((1,-2),(h,k)) \;=?$

b) Van-e lokális szélsőértéke az f függvénynek a $P_1\,(1,2)$ illetve a $P_2\,(1,-2)$ pontokban?

a.) $f'_x = 2+\frac{4}{y}\,\frac{-1}{x^2} = 2-\frac{4}{yx^2}$ (1)

$\boxed{9}$

$f'_y = 1+\frac{4}{x}\,\frac{-1}{y^2} = 1-\frac{4}{xy^2}$ (1)

$f''_{xx} = \frac{4}{y}\,\frac{2}{x^3} = \frac{8}{yx^3}$ (1)

$f''_{xy} = f''_{yx} = -\frac{1}{x^2}\,\frac{-4}{y^2} = \frac{4}{x^2y^2}$ (2)

$f''_{yy} = \frac{4}{x}\,\frac{2}{y^3} = \frac{8}{xy^3}$ (1)

$df\,((1,-2),(h,k)) = f'_x(1,-2)\cdot h + f'_y(1,-2)\cdot k = 4\cdot h + 0\cdot k$ (3)

b.) $f'_x(P_1)=0$ és $f'_y(P_1)=0 \Rightarrow$ lehet lok. szé.

$\boxed{5}$ $D(P_1) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{P_1} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3>0$: van lok. szé.

$f''_{xx}(P_1)>0 \Rightarrow$ lok. min. (3)

$f'_x(P_2)=4\neq 0 \Rightarrow P_2$-ben nincs lok. szé, mert nem teljesül a szükséges feltétel. (2)

6. feladat (10 pont)*

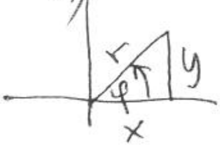
a) Írja le polárkoordinátákkal a T tartományt!

$$T = \{(x,y): \quad 1 \le x^2+y^2 \le 9\,; \quad x \le 0\,; \quad y \ge 0\}$$

b)

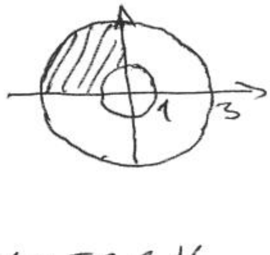
$$\iint\limits_T \sqrt{2x^2+2y^2+5}\;\,dT \;=?$$

a)



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
(2)

$1 \le r \le 3$
$\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$
(2)



an20110526/14.

b.) $I = \int\limits_{r=1}^{3} \int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{2r^2+5}\; r\, d\varphi\, dr = \underbrace{\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)}_{1} \frac{1}{4}\int\limits_{r=1}^{3} \underbrace{4r}_{f'}\, \underbrace{(2r^2+5)^{\frac{1}{2}}}_{f^{1/2}}\, dr =$ 2

$= \frac{\pi}{8}\, \frac{(2r^2+5)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{\pi}{12}\left(23^{3/2} - 7^{3/2}\right)$ 3

7. feladat (19 pont)*

a) Számolja ki az alábbi mennyiségek valós és képzetes részét!

$$a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right), \qquad b = (-3j)^j$$

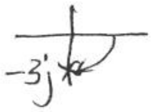
b) Határozza meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!

$$I_1 = \oint\limits_{|z-1-j|=\frac{1}{2}} \frac{\ln z}{z-1-j}\, dz, \qquad I_2 = \oint\limits_{|z-1-j|=\frac{1}{2}} \frac{z^4}{(z-1-j)^3}\, dz$$

a.) $a = \sin\frac{\pi}{2}\cos j\pi + \cos\frac{\pi}{2}\sin j\pi = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\operatorname{ch}\pi + j\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\operatorname{sh}\pi = \operatorname{ch}\pi$

$\boxed{7}$ $\operatorname{Re} a = \operatorname{ch}\pi$; $\operatorname{Im} a = 0$ 3

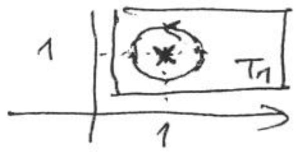
$b = (-3j)^j = e^{j\ln(-3j)} = e^{j(\ln 3 + j(-\frac{\pi}{2}))} = e^{\frac{\pi}{2} + j\ln 3} =$



$= \underbrace{e^{\frac{\pi}{2}}\cos\ln 3}_{\operatorname{Re} b} + j\underbrace{e^{\frac{\pi}{2}}\sin\ln 3}_{\operatorname{Im} b}$ 4

b.)

$\boxed{12}$ $I_1 = \int\limits_{|z-(1+j)|=\frac{1}{2}} \frac{\ln z}{z-(1+j)}\, dz = 2\pi j \ln(1+j) =$ reg T_1-en (Cauchy-féle int. formula)



$= 2\pi j\left(\ln\sqrt{2} + j\frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{-\frac{\pi^2}{2}}_{\operatorname{Re} I_1} + j\underbrace{2\pi\ln\sqrt{2}}_{\operatorname{Im} I_1}$ 5

$I_2 = \int\limits_{|z-(1+j)|=\frac{1}{2}} \frac{z^4}{(z-(1+j))^3}\, dz$; z^4 reguláris mindenütt: az általánosított Cauchy-féle integrálformula alkalmazható

$n+1 = 3$

$n = 2$

$z_0 = 1+j$

$\Rightarrow I_2 = \frac{2\pi j}{2!}\left(z^4\right)''\Big|_{z=1+j} = \pi j\; 12\underbrace{(1+j)^2}_{j2} = -24\pi$

$\operatorname{Re} I_2 = -24\pi$, $\operatorname{Im} I_2 = 0$ 7

A *-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni!

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{(y+2)^3}{3+x^2}$$

$y \equiv -2$ megoldás 2

$y \neq -2$: $\displaystyle \int \underbrace{\frac{1}{(y+2)^3}}_{(y+2)^{-3}} dy = \int \underbrace{\frac{1}{3+x^2}}_{\frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} dx$ 2

$$\frac{(y+2)^{-2}}{-2} = \frac{1}{3}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C$$

2 3 1

9. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = \frac{e^{4x+y^2}}{3-y}\,, \qquad P_0(0,2)$$

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?\,,$ ha $\underline{e} \parallel 3\,\underline{i} - 4\,\underline{j}$

$$f(x,y) = e^{4x}\,\frac{e^{y^2}}{3-y}$$

$f_x' = 4e^{4x}\,\dfrac{e^{y^2}}{3-y}$ 2 $\qquad f_y' = e^{4x}\,\dfrac{e^{y^2}\cdot 2y(3-y) - e^{y^2}(-1)}{(3-y)^2}$ 2

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot \underline{e}$ 2

$\operatorname{grad} f(P_0) = 4e^4\,\underline{i} + 5e^4\,\underline{j}$ 1

$v = 3\underline{i} - 4\underline{j}$; $|\underline{v}| = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \underline{e} = \dfrac{v}{|\underline{v}|} = \dfrac{3}{5}\underline{i} - \dfrac{4}{5}\underline{j}$ 1

$\dfrac{df}{d\underline{e}} = (4e^4\underline{i} + 5e^4\underline{j})\left(\dfrac{3}{5}\underline{i} - \dfrac{4}{5}\underline{j}\right) = 4e^4\cdot\dfrac{3}{5} + 5e^4\left(-\dfrac{4}{5}\right) \left(= -\dfrac{8}{5}\right.$

2

an2v 110526/6.