ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2007. jan. 4.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (20 pont)

Keresse meg a következő sorozatok határértékét!

$$a_n = \left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^{4n}, \qquad b_n = \frac{3^n}{2^{2n} + 2^{n+1}}$$

Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor?

A felhasznált, sorokra vonatkozó tételeket írja le!

6 $$a_n = \left(\left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^{2n}\right)^2 = \left(\frac{\left(1+\frac{-3}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n}}\right)^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} \left(\frac{e^{-3}}{e^{5}}\right)^2 = e^{-16}$$

3 $$b_n = \frac{3^n}{4^n + 2\cdot 2^n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{0}{1+0} = 0$$

2 $\sum^{\infty} a_n$ divergens, mert $a_n \not\to 0$, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele

2 Ⓣ $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right) \Longrightarrow \left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0\right)$

(Tehát a konvergencia szükséges feltétele: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$)

5 $\sum^{\infty} b_n$:

$0 < b_n < \frac{3^n}{4^n}$ és $\sum^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergens geometriai sor $\left(0 < q = \frac{3}{4} < 1\right) \xRightarrow{\text{maj. kr.}} \sum^{\infty} b_n$ konv.

Majoráns kritérium:

2 Ⓣ $\boxed{\text{Ha } 0 < a_n \le c_n \ \forall n\text{-re és } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergens} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}}$

2. feladat (19 pont)

$$g(x) = \arcsin \frac{1}{2+x^2}\,, \qquad h(x) = \frac{\operatorname{arctg}(-2x)}{\operatorname{arctg}(3x)} \qquad (x \neq 0)$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,, & \text{ha } x \geq 0 \\ h(x)\,, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

a) $g'(x) = ?\,, \qquad h'(x) = ?$

$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = ?$

b) Folytonos-e f az $x = 0$ pontban? $\quad (f(+0) = ?\,, \quad f(-0) = ?)$

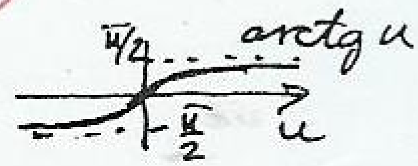
---

a.)

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2+x^2}\right)^2}}\,(-1)\,\frac{1}{(2+x^2)^2}\cdot 2x \quad 3 \qquad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{1+4x^2}\,(-2)\cdot \operatorname{arctg} 3x \; - \; \operatorname{arctg}(-2x)\,\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3}{(\operatorname{arctg} 3x)^2} \quad 3 \qquad , \quad x \neq 0$$

$(\operatorname{arctg}(-2x) = -\operatorname{arctg} 2x)$



$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-2x)}{\operatorname{arctg} 3x} = \frac{-\pi/2}{\pi/2} = -1 \quad 3$$

b.)

$$f(+0) = \lim_{x\to+0} g(x) = g(0) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \;(= f(0)) \quad 3$$

(g folytonos $x=0$-ban; f jobbról folyt. $x=0$-ban)

$$f(-0) = \lim_{x\to-0} \underbrace{\frac{\operatorname{arctg}(-2x)}{\operatorname{arctg} 3x}}_{\frac{0}{0}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to-0} \frac{\frac{1}{1+4x^2}\,(-2)}{\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3} = -\frac{2}{3} \quad 5$$

$f(+0) \neq f(-0) \Rightarrow f$ nem folytonos $x=0$-ban. 2

3. feladat (12 pont)

a) Írja le a derivált definicióját az értelmezési tartomány belső pontjára!

b) Írja le és bizonyítsa be az értelmezési tartomány belső pontjára a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltételét kimondó tételt!

a) (D) Legyen $K_{x_0,\delta} \subset D_f$

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2

b) (T) Ha f a c helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$. $(K_{c,\delta} \subset D_f)$

2

(B) Pl. lokális maximumra:

8

$$\lim_{h \to -0} \underbrace{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\stackrel{-}{+}} = \underbrace{f'_-(c) = f'(c)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \geq 0$$ 5

$$\lim_{h \to +0} \underbrace{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\stackrel{-}{+}} = f'_+(c) = f'(c) \leq 0$$ 2

$\Longrightarrow \quad f'(c) = 0$ 1 (vízszintes érintő) ∎

4. feladat (10 pont)

$$f(x) = (5 + \cos 3x)^{2x^2}, \qquad f'(x) = ?$$

$$f(x) = e^{\ln (5+\cos 3x)^{2x^2}} = e^{2x^2 \ln(5+\cos 3x)} , \quad x \in \mathbb{R}$$ 2 1

$$f'(x) = e^{2x^2 \ln(5+\cos 3x)} \cdot \underbrace{\left(2x^2 \cdot \ln(5+\cos 3x)\right)'}_{\left(4x \cdot \ln(5+\cos 3x) + 2x^2 \frac{1}{5+\cos 3x}(-\sin 3x)\cdot 3\right)}$$ 3 4

$x \in \mathbb{R}$

5. feladat (10 pont)*

a) $\int \cos^2 x \; \mathrm{d}x = ?$ b) $\int \frac{1}{x^2+10x+30} \; \mathrm{d}x = ?$

a.) $\int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$ 2 2

b.) $\int \frac{1}{(x+5)^2+5}\, dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x+5}{\sqrt{5}}\right)^2}\, dx = \frac{1}{5} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x+5}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} + C$ 2 2 2

6. feladat (7 pont)*

$$\int (3x+2)\, \sin 5x \; \mathrm{d}x = ?$$

$\int (3x+2) \sin 5x \, dx = -\frac{3x+2}{5} \cos 5x + \frac{3}{5} \int \cos 5x \, dx =$ 4

$\left.\begin{array}{ll} u = 3x+2 & v' = \sin 5x \\ u' = 3 & v = -\frac{\cos 5x}{5} \end{array}\right\}$ 2

$= -\frac{3x+2}{5} \cos 5x + \frac{3}{5} \frac{\sin 5x}{5} + C$ 1

7. feladat (13 pont)*

$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+5\,\mathrm{e}^x+4} \; \mathrm{d}x = ?$ ($\mathrm{e}^x = t$ helyettesítéssel dolgozzon!)

$e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$ 2

$I: \int \frac{t}{t^2+5t+4} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2+5t+4} dt = \int \frac{1}{(t+1)(t+4)} dt$ 2 1

$\frac{1}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4} \Rightarrow 1 = A(t+4) + B(t+1)$ 2

$t=-1: \quad 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}; \quad t=-4: \quad 1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$ 3

$\frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+4}\right) dt = \frac{1}{3} \left(\ln|t+1| - \ln|t+4|\right) + C$ 2

$I = \frac{1}{3} \left(\ln(e^x+1) - \ln(e^x+4)\right) + C$ 1

8. feladat (9 pont)*

Legyen

$$f(t) = \begin{cases} 4t\,, & \text{ha } t \in [0,1] \\ 4\,, & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$

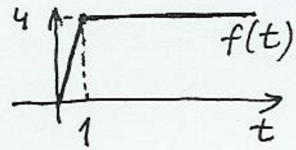
Határozza meg az

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \qquad x > 0$$

integrált!

Hol differenciálható az F függvény és mi a deriváltja?

Ha $0 < x \leq 1$: 1



$$F(x) = \int_0^x 4t\,dt = 2t^2\Big|_0^x = 2x^2 \quad 2$$

$x > 1$:

$$F(x) = \int_0^1 4t\,dt + \int_1^x 4\,dt = 2t^2\Big|_0^1 + 4t\Big|_1^x = 2-0+4x-4 = 4x-2 \quad 3$$

$$F(x) = \begin{cases} 2x^2\,, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 4x-2\,, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

f folytonos $(0,\infty)$-en $\xRightarrow[\text{II. alaptétele}]{\text{int. számítás}}$ F differenciálható 2

$x > 0$-ra és

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 4x\,, & \text{ha } x \in (0,1] \\ 4\,, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

1

Pótfeladat (csak az elégséges vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

$$f(x) = \ln(3 + 2x^2)$$

a) Hol monoton nő, illetve csökken a függvény? Van-e lokális szélsőértéke?

b) Hol konvex, illetve konkáv a függvény? Van-e inflexiója?

$$f'(x) = \frac{4x}{3+2x^2} \quad 1 \qquad , \quad x \in \mathbb{R}$$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$	
f'	$-$	0	$+$	1
f	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$	3

$$f''(x) = \frac{4(3+2x^2) - 4x \cdot 4x}{(3+2x^2)^2} \; 1 \; = \frac{12-8x^2}{(3+2x^2)^2} = \frac{4(3-2x^2)}{(3+2x^2)^2} \; 1$$

	$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	1
f	$\frown$	infl. p.	$\smile$	infl. p.	$\frown$	2.