

1. Írja le a bináris keresőfa TÖRÖL eljárásának algoritmusát! Mennyi az eljárás lépésszáma? (A keresőfák esetleg felhasznált egyéb eljárásait nem kell részletezni, a lépésszámot nem kell indokolni.)
2. Írja le Floyd algoritmusát és magyarázza meg, miért adja ez meg helyesen a legrövidebb utak hosszát az összes pontpárra! Mennyi az algoritmus lépésszáma? (A lépésszámot nem kell indokolni.)
3. Írja le az NP-teljeség definícióját és indokolja meg, miért elegendő egy NP-teljes  $A$  problémát visszavezetni a  $B \in NP$  problémára annak igazolásához, hogy a  $B$  probléma NP-teljes! (A Karp-redukció fogalmát, tulajdonságait fel szabad használni.)

4. Egész számok  $a_i \cdot 2^{b_i}$  formában adottak, ahol minden  $i$ -re  $a_i$  egy pontosan  $k$  bit hosszú egész szám és  $0 \leq b_i \leq 100$  egész. Adjon algoritmust, amely  $n$  darab ilyen számot  $O(n \cdot k)$  lépésben nem csökkenő sorrendbe rendez!
5. Éllistájával adott egy irányított,  $G = (V, E)$  gráf, melyben nincs irányított kör. A gráf élei pozitív számokkal súlyozottak. Adott  $v \in V$  csúcsból indulva olyan utakat keresünk, melyekben az első él súlya tetszőleges, de utána minden él súlya legalább duplája az úton közvetlenül előtte levőének. Adjon  $O(|V| + |E|)$  lépésszámú algoritmust, amely meghatározza az összes olyan  $w$  csúcsot, ahova ilyen úttal  $v$ -ből eljuthatunk.
6. Egy súlyozott irányítatlan gráf éllistája a következő:

$$a: b(3), c(x), e(4); \quad b: a(3), c(2), d(y); \quad c: a(x), b(2), d(8), e(5); \\ d: b(y), c(8), e(10); \quad e: a(4), c(5), d(10)$$

Milyen valós értékeket vehet fel  $x$  és  $y$ , ha a minimális feszítőfát kereső Jarník-Prim-algoritmus az  $a$  csúcsból indulva egymás után az  $\{ab\}$ ,  $\{bc\}$ ,  $\{bd\}$ ,  $\{ae\}$  éleket választja ki?

7. Egy 11 méretű  $T$  hash-táblánál nyitott címzésnél az  $f(k) = k \pmod{M}$  hash-függvényt használtuk. Jelenleg a tömbben  $T[1]$ ,  $T[2]$ ,  $T[3]$ ,  $T[5]$ ,  $T[7]$ ,  $T[8]$  tárol elemet, a  $T[6]$ -ban volt korábban elem, de azt valamikor töröltük, más törölt bejegyzés nincs. Határozza meg az összes lehetséges  $k$  értéket, ami  $T[6]$ -ban lehetett, ha lineáris, illetve ha kvadratikusan próbáltuk az ütközések feloldására!
8. December 23-án jöttünk rá, hogy még  $A$  darab ajándékot kell beszereznünk. Szerencsére tudjuk, kinek mit akarunk venni, és azt is tudjuk a közelben elérhető  $B_1, B_2, \dots, B_n$  boltok mindegyikéről, hogy ott ezekből mi kapható. Mivel kevés az idő, az összes ajándékot szeretnénk minél kevesebb bolt meglátogatásával megvenni. Fogalmazza meg a probléma eldöntési változatát és igazolja, hogy ez NP-teljes!