PZH 1

1) A városi tűzoltóságra ténylegesen tűz miatt beérkező bejelentések száma *Poisson*(1) (naponta). A cicát kell leszedni a fáról típusú bejelentések száma *Poisson*(12). Mi a valószínűsége, hogy

- a) 3 óra alatt több, mint 2 cicás bejelentést kapnak? (2p)
- b) két egymást követő cicás riasztás között több, mint 8 óra telik el? (2p)
- c) egy adott napon a 3. cicás riasztás hajnali 4 előtt lesz? (2p)
- d) ha azt tudjuk, hogy összesen 5 hívás futott be, akkor mi a valószínűsége, hogy köztük két cicás volt? (2p)

$X \sim Poisson(12)$

$P(X>2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

$P(X=0) = \frac{(12\cdot\frac{1}{8})^0}{0!} e^{-\frac{12}{8}}$

$P(X=1) = \frac{(\frac{3}{2})^1}{1!} e^{-\frac{3}{2}}$

$P(X=2) = \frac{(\frac{3}{2})^2}{2!} e^{-\frac{3}{2}}$

PZH 1

b.) $Y \sim EXP(12)$ $\lambda = 12$

$P(Y > \frac{8}{24}) = 1 - P(Y < \frac{1}{3}) = 1 - (1 - e^{-\frac{12}{3}}) = e^{-4}$

c.) $Z \sim Erlang(\lambda=12, n=3)$

$P(Z < \frac{4}{24}) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{(12\cdot\frac{1}{6})^k}{k!} e^{-\frac{12}{6}}$

d.) 5 hívás összesen 2 cicás

$= \frac{P(2 \text{ cicás}) \cdot P(3 \text{ tűzeset})}{P(5 \text{ db eset})} = \frac{\frac{12^2}{2!} \cancel{e^{-12}} \cdot \frac{1^3}{3!} \cancel{e^{-1}}}{\frac{13^5}{5!} \cancel{e^{-13}}} = \binom{5}{2} \left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^3$

BINOMIÁLIS

PZH 2

2) Egy bizonyos elektronikai eszköz élettartama exponenciális eloszlású 5 év várható értékkel. A gyártásába hiba csúszik és néhány eszköz várható élettartama lecsökken 3 évre (de még mindig exponenciális marad). Az ebben az évben kikerült termékek 70%-a volt jó és 30% ilyen csökkent élettartamú.

$X \sim EXP\left(\frac{1}{5}\right)$

- a) Ha kiválasztunk egy jó terméket, mi a valószínűsége, hogy az élettartama 2 és 3 év között lesz? (2p)
- b) Mi a valószínűsége, hogy egy jó termék él még pluszban 3 évet, ha már élt 1-et? (2p)
- c) Ha kiválasztok egy tetszőleges terméket, mi a valószínűsége, hogy tovább fog élni, mint 2 év? (2p)
- d) Ha egy terméket utánkövettünk és tovább élt, mint 2 év, mi a valószínűsége, hogy a hibás gyártásból származott? (2p)

$P(2<X<3) = P(X<3) - P(X<2) =$

$= 1-e^{-\frac{3}{5}} - \left(1-e^{-\frac{2}{5}}\right) =$

$e^{-\frac{2}{5}} - e^{-\frac{3}{5}}$

PZH 2

b.) $P(X>4 \mid X>1) \overset{\text{örökifjúság}}{=} P(X>3) = 1-\left(1-e^{-\frac{3}{5}}\right) = e^{-\frac{3}{5}}$

c.) $X \sim EXP\left(\frac{1}{5}\right)$ $\quad Y \sim EXP\left(\frac{1}{3}\right)$

$P(X>2) = e^{-\frac{2}{5}}$ $\quad P(Y>2) = e^{-\frac{2}{3}}$

TELJES VSZÉG TÉTELE

$0{,}7 \cdot e^{-\frac{2}{5}} + 0{,}3 e^{-\frac{2}{3}}$

d.) Bayes tétel

$$\boxed{\frac{0{,}3 \cdot e^{-\frac{2}{3}}}{0{,}7 \cdot e^{-\frac{2}{5}} + 0{,}3 \cdot e^{-\frac{2}{3}}}}$$

PZH 3

3) Legyen $X \sim Uni(0,1)$, $Y \sim Uni(0,2)$ (egyenletes eloszlásúak) függetlenek.

$f(x) = 1$ $\quad$ $f(y) = \frac{1}{2}$

- a) Mennyi az $X + Y$ sűrűségfüggvénye ($f_{X+Y}(s)$ konvolúciós függvény)?(6p)
- b) (extra) Ha két ember egyenletes eloszlással érkeznek, egyikük 11 és 12, másikuk 11 és 13 óra között, és legfeljebb fél órát várnak egymásra, mi a valószínűsége, hogy találkoznak? (+3p)

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, f(s-x)\, dx$$

$0 < s = x+Y < 3$

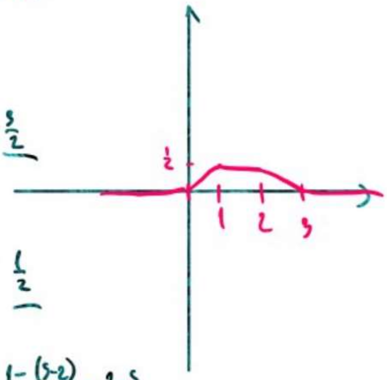
$0 < s-x < 2$

$s-2 < x < s$

$$\int_0^s \frac{1}{2}\, dx = \frac{s}{2}$$

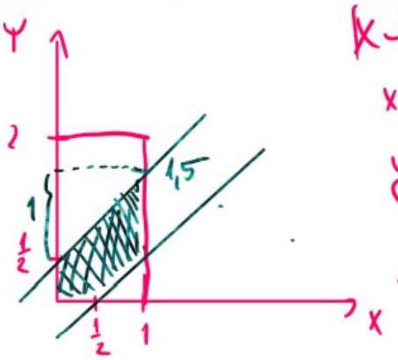
$$\int_0^1 \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_{s-2}^1 \frac{1}{2}\, dx \quad \frac{1-(s-2)}{2} = \frac{3-s}{2}$$



PZH 3

$X \sim Uni(0,1)$ $\quad$ $Y \sim Uni(0,2)$



$|X - Y| < \frac{1}{2}$

$x - y < \frac{1}{2}$ $\quad$ $x - \frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$

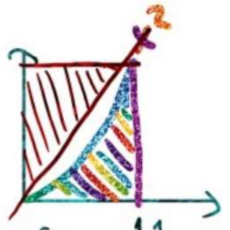
$y - x < \frac{1}{2}$

$2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1 = \boxed{\frac{1}{4}}$

$P = \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$

PZH 4

4) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye
2 $f(x, y) = c \cdot (x + y)$ a $0 < x < 1, 0 < y < x^2$ tartományon. Számold ki a c-t. Mennyi a valószínűsége, hogy Y nagyobb, mint X, illetve mennyi Y feltételes várható értéke, ha már tudjuk X értékét? ($P(X < Y)$, $\underbrace{E(Y|X)}_{2} = ?$) (5p)



$$1 = \int_0^1\int_0^{x^2} c(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[c\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^{x^2} = c\int_0^1 \left(x\cdot x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{7}{20}$$

$$\boxed{c=\frac{20}{7}}$$

$$P(X<Y)=0$$

PZH 4

$$E(Y|X) = \int_0^{x^2} y\cdot f_{2|1}(y|x)\,dy = \frac{1}{x^3+\frac{x^4}{2}}\int_0^{x^2} xy+y^2\,dy = \frac{1}{x^3+\frac{x^4}{2}}\left[\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2} = \frac{\frac{x^5}{2}+\frac{x^6}{3}}{x^3+\frac{x^4}{2}}$$

$$f_1(x) = \frac{20}{7}\int_0^{x^2} x+y\,dy = \frac{20}{7}\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\cancel{\frac{20}{7}}(x+y)}{\cancel{\frac{20}{7}}\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)}$$

PZH 5

$X_i \sim N(10, 1)$

5) Egy alkatrész súlya normális eloszlású 10 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Ha a gyártósorra több, mint 0,5 kilogrammnyi alkatrész kerül, akkor az leáll.

- a) Hány alkatrész kerülhet legfeljebb a gyártósorra, hogy 90%-os valószínűséggel menjen (azaz ne álljon le)? (3p)
- b) Ha kiválasztunk (visszatevéssel) 10 alkatrészt, mi a valószínűsége, hogy legalább 2 közülük nehezebb lesz, mint 11 dkg? (2p)
- c) (extra) Ha sorban húzunk (visszatevéssel) mi a valószínűsége, hogy 5.-re lesz a harmadik olyan, amelyik nehezebb, mint 11dkg? (+2p)

NEGATÍV BINOM

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n \cdot 10, \sqrt{n} \cdot 1)$

$P\left(\sum X_i < 50\right) =$

$P\left(\frac{\sum X_i - n \cdot 10}{\sqrt{n} \cdot 1} < \frac{50 - n \cdot 10}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}9 = \Phi(x)$

$x = 1{,}29$

$\frac{50 - n \cdot 10}{\sqrt{n}} = 1{,}29$

$50 - n \cdot 10 - 1{,}29\sqrt{n} = 0$

$\sqrt{n} \to 2{,}1$ $\quad n \approx 4, \ldots$

$\to \ominus \quad 4$

PZH 5

b) $X_i \sim N(10, 1)$

$p = P(X_i > 11) = P\left(\frac{X_i - 10}{1} > \frac{11-10}{1}\right) = 1 - \Phi(1) \approx 0{,}84$ $= 0{,}16$

BINOM(10, p)

$\binom{10}{1} \cdot 0{,}16^1 \cdot 0{,}84^9$ $\quad \binom{10}{0} 0{,}16^0 \cdot 0{,}84^{10}$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

c) $\binom{4}{2} 0{,}16^3 \cdot 0{,}84^2$